**Інтервальні оцінки параметрів розподілу**.

Точкові оцінки параметрів розподілу можна вважати первинними результатами обробки вибірки, оскільки невідомо з якою точністю кожна з них оцінює відповідну числову характеристику генеральної сукупності. Якщо обсяг вибірки великий, то точкові оцінки є задовільними з практичної точки зору. Якщо обсяг вибірки малий, то точкові оцінки можуть давати значні помилки і тому використовують інтервальні оцінки.

**Інтервальною** називається оцінка, параметр розподілу якої визначається двома числами - кінцями інтервалу. Інтервальні оцінки дозволяють встановити точність і надійність оцінок.

Нехай за даними вибірки отримана статистична оцінка $\theta^*$ невідомого параметра $\theta$. $\theta^*$ тим точніше визначає $\theta$, чим менше абсолютна величина $\left|\theta-\theta^*\right|$ і якщо ця різниця $\left|\theta-\theta^*\right|<\delta$ при $\delta>0$, то малому $\delta$ відповідає більш точна оцінка. Тому позитивне число $\delta$ характеризує **точність оцінки**.

Проте статистичні методи не дозволяють категорично стверджувати, що оцінка $\theta^*$ задовольняє нерівності $\left|\theta-\theta^*\right|<\delta$. Таке твердження можна сказати тільки з імовірністю $\gamma$.

**Надійністю (довірчою ймовірністю) оцінки параметра** $\theta$ називається ймовірність $\gamma$, з якою здійснюється нерівність $\left|\theta-\theta^*\right|<\delta$:

$$\gamma=P\left(\left|\theta-\theta^*\right|<\delta\right) \qquad (1).$$

Найбільш часто число $\gamma$ задається наперед, і в залежності від обставин приймає значення близькі до одиниці 0,95; 0,99; 0,999.

Формулу (1) можна переписати у вигляді:

$$P\left(\theta^*-\delta<\theta<\theta^*+\delta\right)=\gamma \qquad (2).$$

Інтервал $\left(\theta^*-\delta,\theta^*+\delta\right)$ называється **довірчим.**

Загальний спосіб знаходження довірчого інтервалу полягає у вирішенні рівняння (2) і визначаємо з нього числа $\delta$. Обчислення ймовірності в (2) можливо, якщо відомий закон розподілу точкової оцінки $\theta^*(x_1, x_2, ..., x_n)$ або пов'язаної з нею іншої випадкової величиною, використовуючи при цьому формули:

$$P(\alpha \le \theta^* < \beta) = F(\beta) - F(\alpha); \qquad P(\alpha \le \theta^* < \beta) = \int_\alpha^\beta f(x)dx.$$

На ряду з відомими розподілами (Пуассона, нормальне, показовий) в статистиці використовують розподіл Стьюдента, Фішера - Снедекора та інші.

## Довірчі інтервали для оцінки математичного сподівання нормального розподілу при відомому $\sigma$.

Нехай маємо вибірку $x_1, x_2, ..., x_n$ нормально розподіленої випадкової величини з відомим $\sigma$. Потрібно оцінити невідоме математичне очікування $a$, по вибірковому середньому $\overline{X_B}$. Параметри розподілу $\overline{X_B}$ такі:

Математичне очікування $M(\overline{X_B}) = a$

$$D = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \overline{X_B})^2 n_i}{n},$$

$$D(\overline{X_B}) = D\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{n_i x_i}{n}\right) = \frac{\sum_{i=1}^{n} D(x_i) n_i}{n^2} = \frac{D}{n},$$

$$\sigma(\overline{X_B}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

$$P(|x - a| < \delta) = P(a - \delta < x < a + \delta) =$$

$$= \Phi\left(\frac{a + \delta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - \delta - a}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{-\delta}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

$$P(|\overline{X_B} - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = 2\Phi\left(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 2\Phi(t),$$

$$t = \frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma} \Rightarrow \delta = \frac{t\delta}{\sqrt{n}}.$$

$$|\overline{X_B} - a| < \delta,$$

$$-\delta < \overline{X_B} - a < \delta \Rightarrow -\overline{X_B} - \delta < -a < \delta - \overline{X_B},$$

$$\overline{X_B} - \delta < a < \overline{X_B} + \delta,$$

$$P\left(\overline{X_B} - \frac{t\sigma}{\sqrt{n}} < a < \overline{X_B} + \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 2\Phi(t) = \gamma,$$

$\left(\overline{X_B} - \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}; \overline{X_B} + \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ - довірчий інтервал невідомого параметра $a$. Точність оцінки дорівнює $\delta = \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}$, число $t$ знаходять із рівності:

$2\Phi(t) = \gamma \Rightarrow \Phi(t) = \frac{\gamma}{2}$, використовуючи таблицю функціїЛапласа.

Нехай ознака $X$ генеральної сукупності розподіляється по нормальному закону з параметром $a$ і необхідно знайти об'єм вибірки $n$, який із заданою точністю $\delta$ і надійністю $\gamma$ дозволяє знайти оцінку параметра $a$. З формули для точності $\gamma$ одержимо: $n = \frac{t^2\sigma^2}{\delta^2}$.

## Довірчі інтервали для оцінки математичного сподівання нормального розподілу при невідомому $\sigma$.

Нехай кількісний ознака $X$ генеральної сукупності розподілений нормально, причому $\sigma$ - невідомо. За даними вибірки можна побудувати випадкову величину:

$$T = \frac{\overline{X_B} - a}{S/\sqrt{n}},$$

що має розподіл Стьюдента із $k = n - 1$ ступенями свободи. Щільність розподілу Стьюдента має вигляд:

$$S(t,n) = B_n\left[1 + \frac{t^2}{n}\right]^{-\frac{n+1}{2}} = B_n\left[1 + \frac{t^2}{n-1}\right]^{-\frac{n}{2}}.$$

Оскільки $S(t,n)$ - парна функція від $t$, то ймовірність виконування нерівності дорівнює:

$$P\left(\left|\frac{\overline{X_B} - a}{S/\sqrt{n}}\right| < t_\gamma\right) = 2\int_0^\gamma S(t,n)dt = \gamma,$$

$$\left|\overline{X_B} - a\right| < \frac{t_\gamma S}{\sqrt{n}},$$

$$P\left(\overline{X_B} - \frac{t_\gamma S}{\sqrt{n}} < a < \overline{X_B} + \frac{t_\gamma S}{\sqrt{n}}\right) = \gamma.$$

Використовуючи відомі $n, \gamma$ знаходять $t_{\gamma,n}$ з таблиці розподілу Стьюдента.

## Довірчі інтервал для оцінки середнього квадратичного відхилення нормального розподілу.

Нехай кількісний ознака $X$ генеральної сукупності розподілений нормально. Потрібно оцінити невідоме середньоквадратичне $\sigma$ по відхиленню $S$.

Нехай виконується співвідношення:

$P(|\sigma - S| < \delta) = \gamma$ або $P(S - \delta < \sigma < S + \delta) = \gamma$

$$S\left(1 - \frac{\delta}{S}\right) < \sigma < S\left(1 + \frac{\delta}{S}\right); q = \frac{\delta}{S},$$

$S(1-q) < \sigma < S(1+q)$ при $q < 1$ (1).

$0 < \sigma < S(1+q)$ при $q > 1$

Для знаходженняч $q$ розглянемо випадкову величину $\chi$:

$\chi = \dfrac{S}{\sigma}\sqrt{n-1}$, де $n$ - об’ем вибірки.

Випадкова величина $\dfrac{S^2}{\sigma^2}(n-1)$ розподілена за законом $\chi^2$ з $(n-1)$ - ступенями свободи. Щільність розподілу має вигляд:

$$R(X, n) = \frac{\chi^{n-2} e^{-\chi^2/2}}{2^{(n-3)/2}\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}.$$

Для знаходження $q$ використовують таблицю.