Розв'язання типових прикладів

Приклад 1. Дано випадковий процес $X(t)=V\left(1-t^2\right)+3t$, де V - випадкова величина із законом розподілу

v_i	-1	1	2
p_i	0,2	0,3	0,5

Знайти сім'ю реалізацій $X_i(t)$ випадкового процесу $X(t)$, визначити $m_X(t),\ K_X(t_1,t_2),\ D_X(t)$.

Розв'язання. Якщо підставити задані можливі значення v_i випадкової величини у формулу для $X(t)$, знайдемо три можливі реалізації:

$$X_1(t)=-1\left(1-t^2\right)+3t=t^2+3t-1; \qquad X_2(t)=1\left(1-t^2\right)+3t=-t^2+3t+1;$$

$$X_3(t)=2\left(1-t^2\right)+3t=-2t^2+3t+2.$$

Визначимо математичне сподівання:

$$m_X(t)=M[X(t)]=\sum_{i=1}^{3}X_i p_i=\sum_{i=1}^{3}\left[v_i\left(1-t^2\right)+3t\right]p_i=-1{,}1t^2+3t+1{,}1$$

і центровану функцію: $\overset{\circ}{X}(t)=X(t)-M[X(t)]=(V-1{,}1)\left(1-t^2\right)$.

Знаходимо кореляційну функцію:

$$K_X(t_1,t_2)=\sum_{i=1}^{3}\left[(v_i-1{,}1)\left(1-t_1^2\right)(v_i-1{,}1)\left(1-t_2^2\right)\right]p_i=1{,}29\left(1-t_1^2\right)\left(1-t_2^2\right).$$

Дисперсія $D_X(t)=K_X(t,t)=1{,}29\left(1-t^2\right)^2$.

Приклад 2. Дано випадковий процес $X(t)=U\cos t+V\sin t$, де (U,V) - система двох неперервних випадкових величин, які мають рівномірний розподіл імовірностей у прямокутнику $-1\le U\le 1,\ 0\le U\le 1$.

Знайти $m_X(t),\ K_X(t_1,t_2),\ D_X(t)$.

Розв'язання. Заданий вигляд випадкового процесу $X(t)$ відповідає розкладанню за невипадковими функціями $\varphi_1(t)=\cos t$; $\varphi_2(t)=\sin t$. Знайдемо математичне сподівання:

$$m_X(t)=M[X(t)]=M[U]\cos t+M[V]\sin t.$$

Формулу для щільності ймовірності $f(u,v)$ визначимо виходячи із вимог рівномірності та умови нормування

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(u,v)dudv = \int_{-1}^{1}\int_{0}^{1} c\,dudv = 1.$$

Тоді $f(u,v) = \begin{cases} c = \dfrac{1}{2}, & -1 \le U \le 1;\ 0 \le V \le 1, \\ 0, & U > 1, U < -1; V > 1, V < 0. \end{cases}$

Звідки $M[U] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} uf(u,v)dudv = \int_{-1}^{1}\int_{0}^{1} \frac{1}{2} u\,dudv = 0,$

$$M[V] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} vf(u,v)dudv = \int_{-1}^{1}\int_{0}^{1} \frac{1}{2} v\,dudv = \frac{1}{2}.$$

Підставляючи це у співвідношення для $m_X(t)$, знаходять математичне сподівання випадкового процесу $X(t)$: $m_X(t) = \frac{1}{2}\sin t$.

Для визначення кореляційної функції $K_X(t_1,t_2)$ будемо мати:

$$K_X(t_1,t_2) = D[U]\cos t_1 \cos t_2 + D[V]\sin t_1 \sin t_2 - 2K_{uv}\cos t_1 \sin t_2,$$

де необхідні характеристики випадкових величин U і V знайдемо за загальними формулами:

$$D[U] = \int_{-1}^{1}\int_{0}^{1} \frac{1}{2} u^2 dudv = \frac{1}{3},\quad D[V] = \int_{-1}^{1}\int_{0}^{1} \frac{1}{2}\left(v - \frac{1}{2}\right)^2 dudv = \frac{1}{12},$$

$$K_{uv} = \int_{-1}^{1}\int_{0}^{1} \frac{1}{2} u\left(v - \frac{1}{2}\right)dudv = 0.$$

Підставляючи це у співвідношення для $K_X(t_1,t_2)$, знайдемо кореляційну функцію випадкового процесу $X(t)$:

$$K_X(t_1,t_2) = \frac{1}{3}\cos t_1 \cos t_2 + \frac{1}{12}\sin t_1 \sin t_2.$$

Якщо покласти $t_2 = t_1 = t$, обчислимо дисперсію випадкового процесу $X(t)$:

$$D_X(t) = D[X(t)] = \frac{1}{12}\left(1 + 3\cos^2 t\right).$$

Приклад 3. Випадковий процес $X(t)$ має характеристики $m_X(t) = t^2 + 1$; $K_X(t_1,t_2) = t_1 t_2$. Знайти $m_Y(t)$, $K_Y(t_1,t_2)$, $D_Y(t)$, $K_{XY}(t_1,t_2)$,

$K_{YX}(t_1,t_2)$ випадкового процесу $Y(t)=\int\limits_0^t sX(s)ds+t$.

Розв'язання. Знайдемо математичне сподівання, використовуючи його властивості:

$$M[Y(t)]=M\left[\int\limits_0^t sX(s)ds+t\right]=\int\limits_0^t sm_X(s)ds+t=\int\limits_0^t s(s^2+1)ds+t=\frac{t}{4}(t^3+2t+4).$$

Для визначення кореляційної функції випадкового процесу $Y(t)$ знайдемо

кореляційну функцію процесу $Y_1(t)=\int\limits_0^t sX(s)ds$. Враховуючи, що

$\overset{\circ}{Y}_1(t)=Y_1(t)-m_{Y_1}(t)=\int\limits_0^t sX(s)ds-\int\limits_0^t sm_X(s)ds=\int\limits_0^t s\overset{\circ}{X}(s)ds$, будемо

мати:

$$K_{Y_1}(t_1,t_2)=M\left[\overset{\circ}{Y}_1(t_1)\overset{\circ}{Y}_1(t_2)\right]=M\left[\int\limits_0^{t_1}s_1\overset{\circ}{X}(s_1)ds_1\int\limits_0^{t_2}s_2\overset{\circ}{X}(s_2)ds_2\right]=$$

$$=\int\limits_0^{t_1}\int\limits_0^{t_2}s_1s_2K_X(s_1,s_2)ds_1ds_2=\int\limits_0^{t_1}\int\limits_0^{t_2}s_1^2s_2^2ds_1ds_2=\frac{1}{9}t_1^3t_2^3.$$

Використовуючи властивість 2 кореляційної функції для кореляційної функції випадкового процесу $Y(t)$ отримаємо:

$$K_Y(t_1,t_2)=\frac{1}{9}t_1^3t_2^3.$$

Дисперсія $D_Y(t)=K_Y(t,t)=\frac{1}{9}t^6$.

За визначенням взаємної кореляційної функції $K_{XY}(t_1,t_2)=$ $=M\left[\overset{\circ}{X}(t_1)\overset{\circ}{Y}(t_2)\right]$. Знайдемо центровану функцію $\overset{\circ}{Y}(t)$:

$$\overset{\circ}{Y}(t)=Y(t)-m_Y(t)=\int\limits_0^t sX(s)ds+t-\int\limits_0^t sm_X(s)ds-t=\int\limits_0^t s\overset{\circ}{X}(s)ds.$$

Отже

$$K_{XY}(t_1,t_2)=M\left[\overset{\circ}{X}(t_1)\int_0^{t_2} s\,\overset{\circ}{X}(s)ds\right]=M\left[\int_0^{t_2} s\,\overset{\circ}{X}(t_1)\,\overset{\circ}{X}(s)ds\right]=\int_0^{t_2} sM\left[\overset{\circ}{X}(t_1)\,\overset{\circ}{X}(s)\right]ds=$$

$$=\int_0^{t_2} sK_X(t_1,s)ds=\int_0^{t_2} t_1 s^2 ds=\frac{1}{3}t_1 t_2^3.$$

Аналогічним чином знаходять, що $K_{YX}(t_1,t_2)=\frac{1}{3}t_1^3 t_2$.

Приклад 4. Випадковий процес задано канонічним розкладанням $X(t)=t+V_1\cos 2t+V_2\cos 2t$, причому $D[V_1]=D[V_2]=2$. Знайти каноничне розкладання та характеристики випадкового процесу $Y(t)=3tX(t)+2t^2$.

Розв'язання. Канонічне розкладання випадкового процесу *Y(t)* дається виразом $Y(t)=5t^2+3V_1 t\cos 2t+3V_2 t\sin 2t$. Шукані характеристики мають вигляд: $m_Y(t)=5t^2$; $K_Y(t_1,t_2)=18t_1t_2\cos 2(t_2-t_1)$; $D_Y(t)=18t^2$.

Приклад 5. Випадковий процес має вигляд $Y(t)=\int_{t_0}^{t} X(s)ds$, де $X(t)$ – стаціонарний випадковий процес з кореляційною функцією $K_X(\tau)$. Показати, що дисперсія випадкового процесу може бути обчислена за формулою: $D_Y(t)=2\int_0^{t-t_0}(t-t_0-\tau)K_X(\tau)d\tau$.

Розв'язання. Виходячи із загальної формули для дисперсії

$$D_Y=\int_{t_0}^{t} ds_1\int_{t_0}^{t} K_X(s_2-s_1)ds_2,$$

введемо нові змінні ξ_1,ξ_2, які визначаються рівностями

$s_1=\frac{\sqrt{2}}{2}\xi_1-\frac{\sqrt{2}}{2}\xi_2,\ s_2=\frac{\sqrt{2}}{2}\xi_1+\frac{\sqrt{2}}{2}\xi_2$ і відповідають повороту вихідних осей координат s_1,s_2 на кут $\pi/4$ (рис.1).

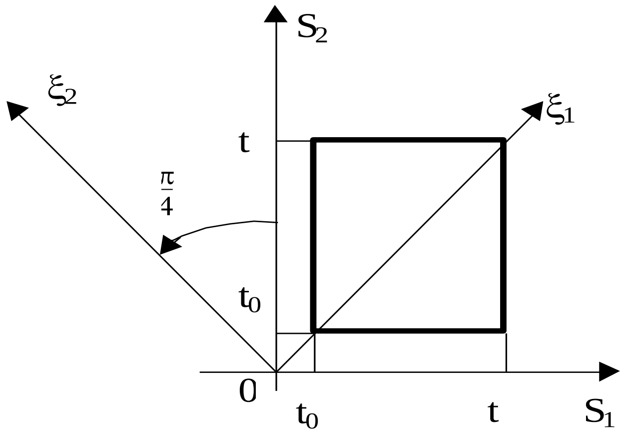

Рис.1

Якщо перейти при обчисленні інтегралу до цих змінних, то, беручи до уваги область інтегрування (квадрат на рис. 3.1), будемо мати:

$$D_Y = \int\limits_{-(t-t_0)\frac{\sqrt{2}}{2}}^{0} d\xi_2 \int\limits_{t_0\sqrt{2}-\xi_2}^{t\sqrt{2}+\xi_2} K_X(\xi_2\sqrt{2})d\xi_1 + \int\limits_{0}^{(t-t_0)\frac{\sqrt{2}}{2}} d\xi_2 \int\limits_{t_0\sqrt{2}+\xi_2}^{t\sqrt{2}-\xi_2} K_X(\xi_2\sqrt{2})d\xi_1 .$$

Тепер проінтегруємо по змінній ξ_1, зробимо у першому інтегралі заміну $\xi_2 = -\xi_2'$ і переставимо в ньому границі інтегрування. Потім знову позначимо змінну інтегрування через ξ_2, враховуючи, що $K_X(\xi_2) = K_X(-\xi_2)$, введемо змінну $\tau = \sqrt{2}\xi_2$ і остаточно отримаємо:

$$D_Y(t) = 2\int\limits_{0}^{t-t_0}(t - t_0 - \tau)K_X(\tau)d\tau .$$