ЗАВДАННЯ НА ПРАКТИЧНІ ЗАНЯТТЯ

1. За заданим міжнародним символом (символом Германа-Могена) точкового виду симетрії за допомогою теорем додавання елементів симетрії і стандартних установок скласти повний перелік елементів симетрії, що входять до цього виду.
2. Побудувати стереографічну проекцію усіх елементів симетрії заданого точкового виду в стандартній установці, використовуючи сітку Вульфа.
3. На стереографічній проекції точкового виду за допомогою сітки Вульфа визначити кути між усіма осями симетрії і площинами дзеркального відбиття.
4. Побудувати гномостереографічні та стереографічні проекції загальної та однієї часткової (обрати самостійно) простої форми, визначити вид отриманих багатогранників.
5. За заданим інтернаціональним символом побудувати план просторового виду симетрії і, використовуючи теореми додавання елементів симетрії і трансляцій, провести його розвинення.
6. Нанести на план просторового виду всі правильні системи точок, які можливі в заданому виді симетрії, визначити кратність кожної системи, і скласти таблицю їх розташування та кратності.

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ДО ВИКОНАННЯ ПРАКТИЧНИХ ЗАВДАНЬ

ТОЧКОВИЙ ВИД СИМЕТРІЇ

В індивідуальному завданні до практичних занять вказуються два міжнародних символи: точкового і просторового виду симетрії. Наприклад, $\bar{4}3m$ і $P4mm$.

Виконання завдання п.1 слід розпочати з визначення категорії і сингонії, до якої належить заданий точковий вид. Це необхідно для вибору кристалографічної системи координат. Оскільки у формулі міститься більше однієї осі симетрії вище другого порядку, визначаємо, що заданий вид відноситься до вищої категорії, в якій є усього одна сингонія – кубічна.

Спочатку встановлюємо систему координат, властиву сингонії, до якої належить заданий точковий вид, і будуємо її проекцію на площину xOy. Потім, відповідно до правил запису міжнародного символу точкового виду, будуємо проекції елементів симетрії, що входять у символ.

На першому місці в цій сингонії знаходиться координатний елемент симетрії. Це інверсійна вісь симетрії четвертого порядку, яка співпадає з віссю координат Oz і зображується у вигляді одиночного незалитого квадрата в центрі координат. Усередині квадрата міститься залитий еліпс, це означає, що інверсійна вісь симетрії 4 порядку містить у собі звичайну вісь симетрії другого порядку (Додаток В).

На другому місці у формулі знаходиться вісь симетрії третього порядку, яка в кубічній сингонії завжди збігається з просторовою діагоналлю куба, тобто складає з усіма координатними осями однакові кути. На нашій схемі вона відобразиться у вигляді залитого трикутника, що лежить на бісектрисі кута між осями Ox та Oy, і на яку проектується просторова діагональ куба.

І, нарешті, останній елемент є діагональним. Якщо це вісь, то вона збігається з бісектрисою кута xOy а якщо площина, як у нашому випадку, то вона розташовується перпендикулярно до цієї діагоналі (див. рис. 15).

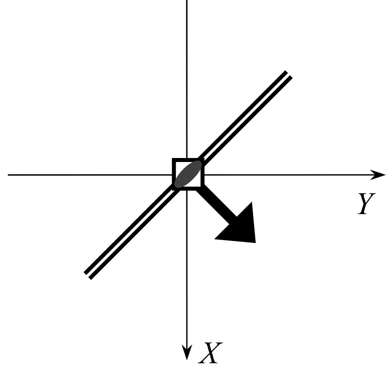


Рис. 15. Розташування формульних елементів симетрії точкового виду $\bar{4}3m$

Після того, як на рисунку наочно представлене взаємне розташування формульних елементів симетрії, можна застосовувати теореми про взаємодію елементів симетрії континуума (Додаток А).

Теорема 1 (про перетин двох площин дзеркального відбиття) поки не застосовується через відсутність пересічних площин. Обернені теореми бажано не розглядати до тих пір, поки не проаналізовано дію всіх прямих теорем.

Згідно з **теоремою 2** (про перетин двох осей симетрії), через точку перетину осей $\bar{4}$ і 3 повинна проходити ще, як мінімум, одна вісь симетрії. Навколо осі $\bar{4}$ має розташовуватися чотири похилих осі порядку 3, а через вісь 3, у свою чергу, має проходити три нахилених до неї осі $\bar{4}$ (див. рис. 16).

Умови **теорем 3** (про перетин парної осі симетрії і площини дзеркального відбиття) **та 4** (про осі симетрії другого порядку, перпендикулярні осі симетрії вищого порядку) теж поки що не виконані на нашій схемі.

За **теоремою 5**, якщо через вісь симетрії 2 (яка у нашому випадку міститься у інверсійній осі $\bar{4}$) проходить площина дзеркального відбиття, то їх має бути тільки дві, і вони повинні перетинатися під кутом $\alpha = 360^{\circ}/(2\times 2) = 90^{\circ}$. Зверніть увагу, що інверсійна вісь четвертого порядку включає в себе звичайну вісь симетрії другого порядку. Тому через неї проходить тільки дві площини симетрії, а не чотири, як через звичайну вісь симетрії.

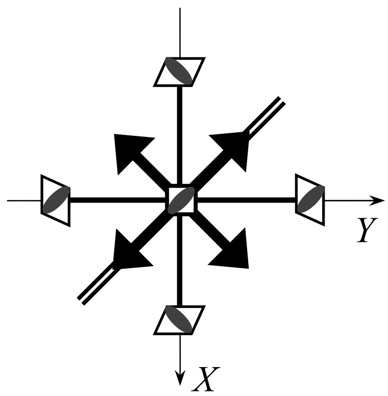


Рис. 16. Елементи симетрії точкового виду $\bar{4}3m$ після застосування теореми 2

Площина симетрії, яка проходить через похилу вісь симетрії 3, «дасть» дві додаткові площини, які проходять через цю ж вісь під кутом одна до одної. Ці площини перетинають бічні протилежні грані куба вздовж їхніх діагоналей, і вони нахилені до площини проекції.

Тепер, у випадку похилих площин, інверсійна вісь четвертого порядку оточена вже не двома, а чотирма площинами, що відповідає порядку осі. Але ці площини попарно нахилені в різні боки, що обумовлено інверсійним характером осі. Це відображено на рис. 17 за допомогою знаків «+» і «–».

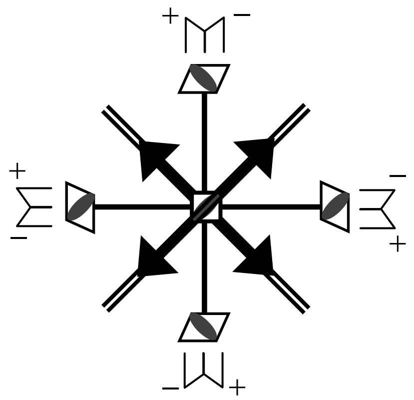


Рис. 17. Елементи симетрії точкового виду $\bar{4}3m$
після застосування теорем 2 та 5

Можливі випадки, коли немає умов для застосування жодної з теорем, тоді потрібно подіяти одним елементом симетрії, що входить в інтернаціональний символ, на інший. Це приведе до виникнення нового елемента симетрії, при цьому обов'язково повинні виникнути умови для застосування теорем. Найчастіше це трапляється в точкових видах нижчої та середньої категорій.

Після того, як застосовано усі теореми, необхідно переконатися, що нічого не втрачено. Для цього повторно перевіримо умови всіх теорем.

Умови **теореми 1** тепер зустрічаються, але нічого не додають, тому що на всіх лініях перетину площин вже лежать осі симетрії. **Теорема 2** також реалізована повністю, тому що немає точок перетину, через які проходить тільки дві осі симетрії.

Умови для дій **теорем 3 і 4**, як і раніше, не з'явилися. Оскільки через всі осі проходять площини симетрії в кількості, що дорівнює порядку осі, то і **теорема 5** нами повністю врахована. Перерахувавши всі елементи симетрії, запишемо формулу точкового виду у символах Браве: $3L_{i4}4L_3 6P$, що є результатом виконання завдання п.1 курсової роботи.

Завдання п.2 виконується на кальці за допомогою сітки Вульфа. Покладіть кальку на сітку Вульфа і зробіть позначки центру кола проекцій і азимуту $\varphi = 0$. Потім треба нанести стереографічну проекцію кристалографічної системи координат, дотримуючись наступних правил:

- проекція осі Z завжди збігається з центром кола проекцій;
- проекція осі Y завжди збігається з відміткою $\varphi = 0$, якщо тільки заданий точковий вид не належить до моноклінної сингонії.

Використовуючи стандартні установки і правила запису символу, спочатку нанесіть на кальку формульні елементи. Потім, обертаючи вісь третього порядку навколо вертикальної інверсійної осі за правилами повороту проекцій за допомогою сітки Вульфа, отримайте ще три похилих осі третього порядку. На наступних рисунках, щоб їх не захаращувати, опущені незадіяні елементи симетрії (див. рис. 18, 19, 20).

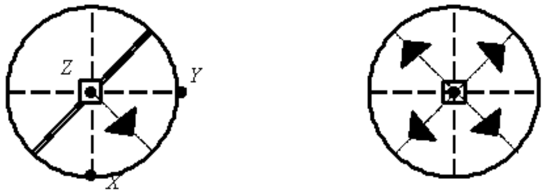


Рис. 18. Проміжний етап побудови елементів симетрії точкового виду $\bar{4}3m$.

Для повороту площини в загальному випадку потрібно перейти до її гномостереографічної проекції, потім повернути площину проекцій так, щоб вісь, навколо якої відбувається обертання, збіглася з центром кола проекцій. Виконавши обертання гномостереографічної проекції площини, повернутися до початкової орієнтації площини проекції, і за гномостереографічними проекціями площин побудувати їх стереографічні проекції [4].

Для площини, яка проходить через вісь та перпендикулярна колу проекцій, це завдання спрощується. Необхідно повернути кальку так, щоб стереографічна проекція площини лягла на горизонтальний діаметр кола проекцій, тоді в нашому випадку вздовж вертикального меридіана проходить друга вертикальна площина.

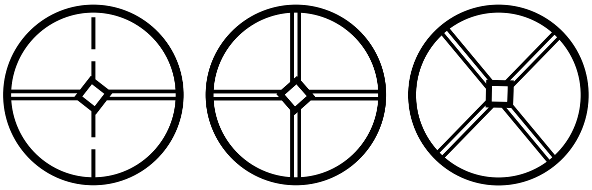


Рис. 19. Проміжний етап побудови елементів симетрії точкового виду $\bar{4}3m$.

Отримана площина тепер проходить через похилу вісь 3 і таких площин має бути три. Для знаходження їхніх проекцій потрібно виконати раніше викладені побудови, послідовність яких показана на наведених нижче малюнках.

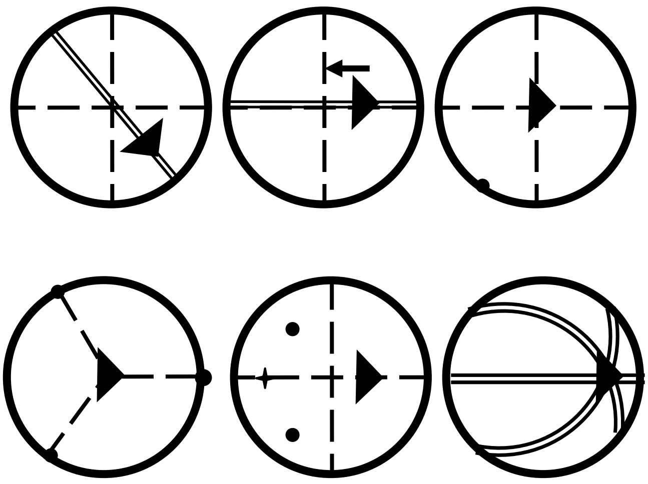


Рис. 20. Проміжний етап побудови елементів симетрії точкового виду $\bar{4}3m$.

Повернувши таким чином площини і осі симетрії, що залишилися, навколо всіх похилих осей, отримаємо остаточно стереографічну проекцію всіх елементів симетрії точкового виду $\bar{4}3m$ (див. рис. 21).

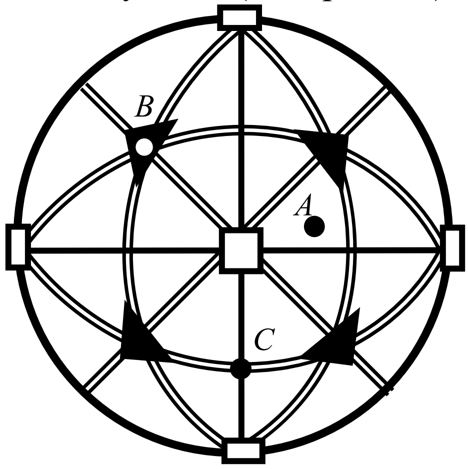


Рис. 21. Стереографічна проекція елементів симетрії точкового виду $\bar{4}3m$.

Як правило, виконувати обертання навколо усіх осей симетрії немає необхідності, тому що одна й та ж площина проходить через декілька осей, а одна й та сама вісь симетрії перетинає декілька інших.

Для виконання завдання п.3 необхідно стереографічні проекції площин перевести в гномостереографічні. Потім, виводячи попарно проекції елементів на один меридіан сітки Вульфа, визначити кути між ними звичайним способом. Результати вимірювання кутів вносяться в таблицю наступного виду.

Таблиця 8

Кути між елементами симетрії

Елементи симетрії		**Осі**			**Площини**		
Осі							
Площини							

Завдання п.4 виконується на кальці зі стереографічними проекціями елементів симетрії точкового виду симетрії. Для побудови загальної простої форми на кальку наноситься гномостереографічна проекція довільної грані, яка не лежить на проекції елемента симетрії і не складає з однаковими елементами симетрії рівних кутів (див., наприклад, точку A на рис. 21). Розмноживши цю грань за допомогою всіх елементів симетрії точкової виду, отримаємо гномостереографічну проекцію багатогранника, який є загальною простою формою цього виду.

Для побудови часткової простої форми необхідно взяти точку, розташовану на одному з елементів симетрії, як, наприклад, точки B та C (див. рис. 21). Перша точка є проекцією грані, яка перпендикулярна осі симетрії 3 і трьом площинам симетрії, а точка C є проекцією грані, перпендикулярної площині симетрії. Якщо гномостереографічна проекція грані відстоїть на 90° від стереографічної проекції площини або осі симетрії, то ця грань також знаходиться у частковому положенні.

Побудову стереографічних проекцій форм виконують на окремих аркушах кальки. Для цього переносять гномостереографічні проекції на нову кальку і за ними звичайним способом будують стереографічні проекції граней. На цьому завдання по роботі з точковим видом симетрії закінчені.

ПРОСТОРОВИЙ ВИД СИМЕТРІЇ

Перейдемо тепер до просторового виду симетрії. Побудову плану просторового виду розглянемо на прикладі виду $P4mm$. Спочатку будують проекцію системи трансляцій, яка задається символом комірки Браве, що стоїть на першому місці.

У нашому випадку символ ***P*** означає примітивну систему, що складається з трьох осьових трансляцій уздовж осей системи координат тетрагональної сингонії. Проекція цієї системи трансляцій на площину, перпендикулярну трансляції ***c***, показана на рис. 8. Потім на цю проекцію наносять формульні (генерувальні елементи симетрії) відповідно до правил запису. Вісь симетрії 4, що розташована на другому місці у формулі, збігається з трансляцією ***c.*** Дві площини дзеркального відбиття повинні розташовуватися в координатному і діагональному положеннях (див. рис. 22).

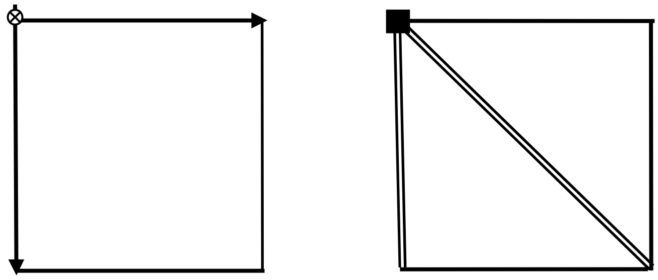


Рис. 22. Формульні елементи симетрії просторового виду $P4mm$.

Розвинення плану просторового виду проводять за допомогою послідовного застосування теорем про додавання елементів симетрії. Спочатку застосовують теореми взаємодії елементів симетрії континуума, а потім – дисконтинуума.

Умови для застосування **теореми 1** існують, але вони вже реалізовані: на лінії перетину двох площин, що входять у формулу, вже лежить вісь симетрії четвертого порядку. **Теореми 2, 3 і 5** не застосовуються, оскільки для цього немає умов. За **теоремою 4** через вісь симетрії четвертого порядку має проходити чотири площини дзеркального відбиття. Таким чином, з’являється ще дві площини дзеркального відбиття, одна з яких лежить поза планом просторового виду (див. рис. 23).

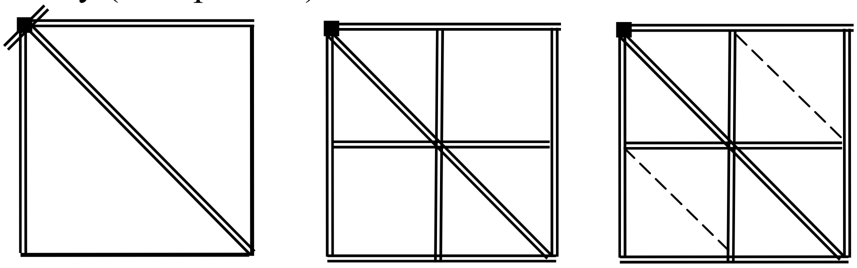


Рис. 23. Проміжний етап розвинення плану просторового виду $P4mm$.

Тепер перейдемо до теорем про взаємодію просторових елементів симетрії. Застосовуючи **теорему 2** про трансляцію, перпендикулярну площині симетрії, отримаємо ще дві площини, паралельні вихідним у координатному положенні, які лежать на половині трансляції. Площини, які віддалені від генерувальних на величину трансляції, з'явилися внаслідок трансляційного переносу.

Наявність діагональної площині симетрії забезпечує умови застосування **теореми 3**. Відповідно до цієї теореми повинна з'явитися площина ковзного відбиття на відстані $\frac{t}{2}\sin\alpha$ від вихідної, з величиною ковзання $t\cos\alpha$. У нашому випадку діагональна площина складає кут 45° з двома трансляціями t_a і t_b. Оскільки в тетрагональній сингонії $t_a = t_b = a$, величина переносу становить $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ або у векторній формі – $\frac{\vec{t}_a + \vec{t}_b}{2}$. Тому виникають площини типу *n*, які відстоять від початкової на відстані $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Наступна **теорема 4** вимагає розглянути пересічні площині і виявити можливі осі симетрії. Розглянемо поки перетин площин дзеркального відбиття. У нашому випадку є два види перетинів. Це перетини під 45° в центрі і по кутах плану, і перетини під 90° на серединах сторін плану. Згідно з **теоремою 1**, лінії перетину площин будуть осями симетрії відповідно четвертого і другого порядків (див. рис. 24).

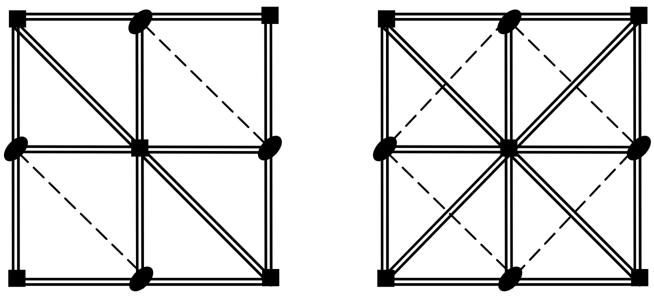


Рис. 24. Проміжний етап розвинення плану просторового виду $P4mm$.

Перетини наявних площин ковзного відбиття типу *n* в принципі не можуть давати осей симетрії тому, що пов'язане з ними ковзання відбувається під кутом до лінії перетину цих площин.

Теорема 5 вже реалізована іншим способом. Комбінація осі симетрії та перпендикулярної до неї трансляції приводить до появи осі симетрії четвертого порядку в центрі плану. Ця вісь лежить у напрямку, що становить кут $90^\circ - 90^\circ/2 = 45^\circ$ з трансляціями t_a і t_b, на відстані $\frac{t}{2\sin\frac{90^\circ}{2}} = \frac{t\sqrt{2}}{2}$. Цю ж вісь ми отримали за теоремою про пересічні площини. Комбінації з осями другого порядку приводять до осей того ж порядку, але вони лежать поза нашим планом.

Зверніть увагу, що нові елементи симетрії можна знаходити не лише за теоремою про їхню взаємодію, але і виходячи з властивостей елементів симетрії. Наприклад, присутні на передостанньому плані дві площини ковзного відбиття *n*, після поворотів навколо осі симетрії четвертого порядку дадуть додатково ще дві таких же площини, як показано на останньому плані.

Як і у випадку точкового виду симетрії, після застосування останньої теореми, потрібно ще раз перевірити умови застосування всіх десяти теорем. Можливо, що виникнуть умови для дії не застосованих раніше теорем і з'являться додаткові елементи симетрії. Виконання завдання п.5 закінчується побудовою плану заданого просторового виду симетрії.

Деякі зауваження до побудови планів просторових видів симетрії ромбічної сингонії: При побудові плану просторового виду симетрії ромбічної сингонії слід звернути увагу на такі особливості:

1. Вісь симетрії другого порядку не обов'язково лежить на перетині площин симетрії.
2. Початок кристалографічної системи координат не обов'язково лежить на лінії перетину цих площин.

Як приклад, розглянемо просторову групу *Pba*2, правильний план якої наведений на рис. 25.

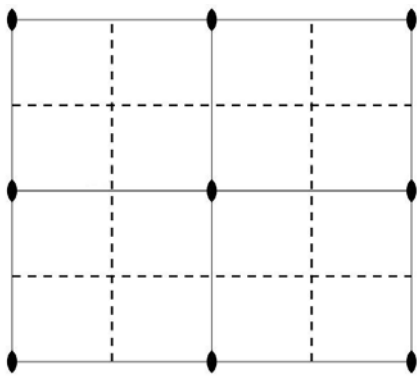


Рис. 25. План просторової групи *Pba*2.

Добре видно, що вісь симетрії не лежить на лінії перетину площин ковзного відбиття *a* і *b*. Положення осі симетрії 2 знаходять наступним чином:

$$a+b \to (m_y+\frac{\vec{a}}{2})+(m_x+\frac{\vec{b}}{2}) \to (m_y+\ m_x)+\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2} \to 2+\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2} \to 2_{\frac{\vec{a}+\vec{b}}{4}}$$

Дія двох перпендикулярних площин ковзного відбиття *a* і *b* тотожна дії осі симетрії 2, яка паралельна лінії перетину цих площин і зміщена на чверть діагональної трансляції $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$. Тут були використані теорема про перетин двох площин і теорема про вісь і перпендикулярну до неї трансляцію.

Початок системи координат лежить не на перетині площин, а на осі симетрії, тому що за початок вибирають точку з найменшою кратністю. Кратність точок на осі симетрії дорівнює двом, а на лінії перетину площин – чотирьом.

Для завдання п.6 необхідно знову побудувати план просторового виду на окремому аркуші міліметрового паперу формату А4. При знаходженні правильних систем точок важливо пам'ятати, що два будь-яких об'єкта, пов'язані перетворенням трансляції є еквівалентними.

Виконання завдання краще починати з систем точок часткового положення. Для цього потрібно виділити нееквівалентні елементи симетрії. У нашому випадку з п’яти присутніх на плані осей симетрії четвертого порядку чотири осі в вершинах плану є еквівалентними, і тільки вісь в центрі плану є самостійною. Вона не може бути отримана з жодної з наявних осей за допомогою трансляційного переносу.

За початок системи координат обираємо центр плану просторового виду. Тоді на осі симетрії у вершині плану можна розташувати т.***a*** з координатами $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; z\right)$. Після впливу на неї всіх наявних елементів симетрії отримаємо ще три з координатами $\left(\frac{1}{2}; \frac{\overline{1}}{2}; z\right)$, $\left(\frac{\overline{1}}{2}; \frac{\overline{1}}{2}; z\right)$, і $\left(\frac{\overline{1}}{2}; \frac{1}{2}; z\right)$. Всі ці точки можна отримати з однієї шляхом трансляційного переносу. Тому т.***a*** утворює правильну систему точок часткового положення кратності 1.

На осі симетрії четвертого порядку в центрі плану можна розташувати т.***b*** з координатами $(0; 0; z)$. Усі наявні елементи симетрії або поєднують цю точку саму з собою, або виносять за межі плану. Таким чином, т.***b*** утворює другу правильну систему точок часткового положення кратності 1.

Перейдемо до осей симетрії другого порядку. Візьмемо т.***c*** з координатами $\left(0; \frac{1}{2}; z\right)$, яка після розмноження за допомогою елементів симетрії дасть ще три точки: $\left(\frac{1}{2}; 0; z\right)$, $\left(0; \frac{\overline{1}}{2}; z\right)$, і $\left(\frac{\overline{1}}{2}; 0; z\right)$. Отримані чотири точки утворюють дві пари, що складаються з еквівалентних точок $\left(0; \frac{1}{2}; z\right)$ і $\left(0; \frac{\overline{1}}{2}; z\right)$; $\left(\frac{1}{2}; 0; z\right)$ і $\left(\frac{\overline{1}}{2}; 0; z\right)$. У цьому випадку ми отримуємо правильну систему часткового положення з кратністю 2.

Розглянемо тепер точки розташовані на площинах дзеркального відбиття. Є три види таких площин: діагональні, координатні на сторонах плану і координатні, що проходять через центр плану.

На діагональних площинах розташовуються т.***d*** з координатами $(x; x; z)$, $(x; \overline{x}; z)$, $(\overline{x}; x; z)$, і $(\overline{x}; \overline{x}; z)$, які не є еквівалентними і утворюють систему кратності 4. На координатних площинах по сторонах плану розташовуються т.***e*** з координатами $\left(x; \frac{1}{2}; z\right)$ і $\left(x; \frac{\overline{1}}{2}; z\right)$; $\left(\frac{1}{2}; x; z\right)$ і $\left(\frac{\overline{1}}{2}; x; z\right)$; $\left(\frac{1}{2}; \overline{x}; z\right)$ і $\left(\frac{\overline{1}}{2}; \overline{x}; z\right)$; $\left(\overline{x}; \frac{1}{2}; z\right)$ і $\left(\overline{x}; \frac{\overline{1}}{2}; z\right)$. У межах плану вийшло всього вісім таких точок, але вони складаються з пар еквівалентних точок, які утворюють правильну систему із кратністю 4.

На координатних площинах що проходять через центр плану розташовуються т.***f*** з координатами $(x;0;z)$, $(\bar{x};0;z)$, $(0;x;z)$, і $(0;\bar{x};z)$, які не є еквівалентними і так само утворюють систему кратності 4.

Перейдемо до площин ковзного відбиття *n*. Будь-яка точка, що лежить на цій площині буде «виноситися» нею за межі плану внаслідок ковзання на величину $\frac{\vec{t}_a+\vec{t}_b}{2}$, а інші елементи симетрії будуть розмножувати її точно так само, як і точку загального положення. Тому точки, розташовані на площині ковзного відбиття, утворюють правильну систему точок загального положення, яка окремо не розглядається.

Дія наявних елементів симетрії на т.***g*** дає систему з восьми нееквівалентний точок, розташованих у межах плану. Ці точки мають координати $(x;y;z)$, $(y;x;z)$, $(y;\bar{x};z)$, $(x;\bar{y};z)$, $(\bar{x};\bar{y};z)$, $(\bar{y};\bar{x};z)$, $(\bar{y};x;z)$, і $(\bar{x};y;z)$. Таким чином, отримуємо правильну систему точок загального положення кратності 8.

На рис. 26 зображені усі правильні системи точок просторового виду $P4mm$.

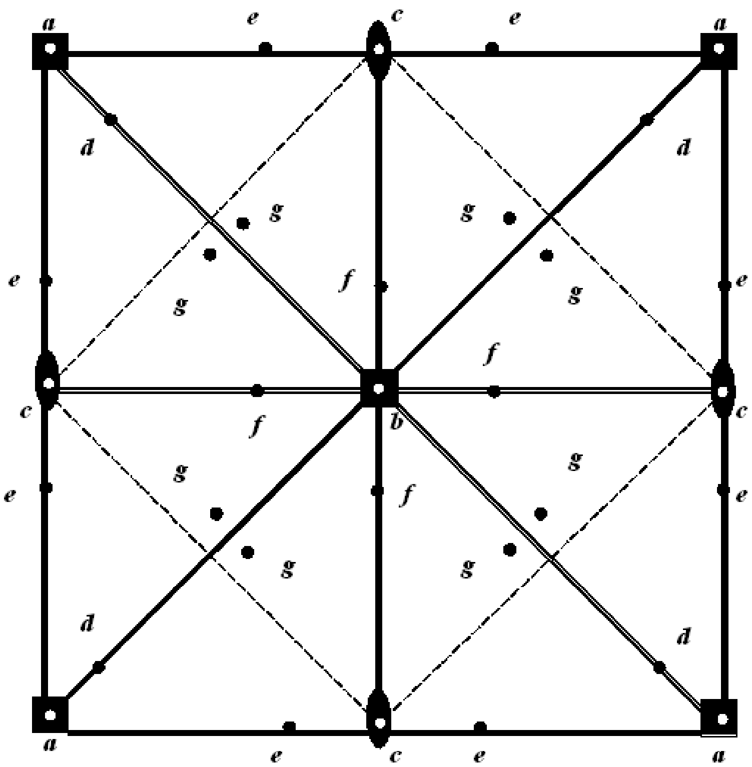


Рис. 26. Правильні системи точок просторового виду $P4mm$.

Після того, як визначені усі правильні системи точок загального й часткового положень, їх потрібно звести до таблиці, яка подана нижче.

Таблиця 9

Правильні системи точок

Вид	Кратність	Координати	Розташування
Часткового т. ***a***	1	$\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; z\right)$	На осі ***4***
Часткового т. ***b***	1	$(0; 0; z)$	На осі ***4***
Часткового т. ***c***	2	$\left(0; \frac{1}{2}; z\right)$, $\left(\frac{1}{2}; 0; z\right)$	На осі ***2***
Часткового т. ***d***	4	$(x; x; z)$, $(x; \overline{x}; z)$, $(\overline{x}; x; z)$, $(\overline{x}; \overline{x}; z)$	На площині ***m***
Часткового т. ***e***	4	$\left(x; \frac{1}{2}; z\right)$, $\left(\frac{1}{2}; x; z\right)$, $\left(\frac{1}{2}; \overline{x}; z\right)$, $\left(\overline{x}; \frac{1}{2}; z\right)$.	На площині ***m***
Часткового т. ***f***	4	$(x; 0; z)$, $(\overline{x}; 0; z)$, $(0; x; z)$, $(0; \overline{x}; z)$	На площині ***m***
Загального т. ***g***	8	$(x; y; z)$, $(y; x; z)$, $(y; \overline{x}; z)$, $(x; \overline{y}; z)$, $(\overline{x}; \overline{y}; z)$, $(\overline{y}; \overline{x}; z)$, $(\overline{y}; x; z)$, $(\overline{x}; y; z)$	Поза елементами симетрії

ПЕРЕЛІК ВАРІАНТІВ ІНДИВІДУАЛЬНИХ ПРАКТИЧНИХ ЗАВДАНЬ

Варі-ант	**Точковий вид**	**Просторовий вид**	**Варі-ант**	**Точковий вид**	**Просторовий вид**
1	$m3m$	$Pmm2$	**19**	$m3$	$P4_2cm$
2	$\bar{3}m$	$Pcc2$	**20**	23	$P4_2nm$
3	432	$Pma2$	**21**	$6/mmm$	$I4mm$
4	$m3$	$Pnc2$	**22**	$4/mmm$	$I4cm$
5	23	$Pnn2$	**23**	$4mm$	$Pmmm$
6	$6/mmm$	$Pba2$	**24**	$6mm$	$P222$
7	$4/mmm$	$Pmc2_1$	**25**	$\bar{6}m2$	$Imm2$
8	$4mm$	$Pmn2_1$	**26**	$\bar{3}m$	$Pam2$
9	$6mm$	$Pca2_1$	**27**	$4mm$	$Pcn2$
10	$\bar{6}m2$	$Pna2_1$	**28**	$4/mmm$	$Pac2_1$
11	$\bar{4}m2$	$Cmm2$	**29**	$6mm$	$Pan2_1$
12	622	$Ccc2$	**30**	23	$Ccm2_1$
13	422	$Cmc2_1$	**31**	$m3$	$P4cn$
14	$\bar{3}m$	$P4_2mn$	**32**	$\bar{6}m2$	$I4mc$
15	mmm	$P4cc$			
16	$m3m$	$P4_2cm$			
17	$\bar{3}m$	$P4nc$			
18	432	$P4_2mc$			

ТЕРМІНОЛОГІЧНИЙ СЛОВНИК

ВИД СИМЕТРІЇ – сукупність *елементів симетрії*, що відповідають *точковій або просторовій групі симетрії*.

ВІСЬ СИМЕТРІЇ – *елемент симетрії*, геометричним образом якого є пряма, навколо якої відбувається обертання на кут $360^{\circ}/n$ (n – порядок осі).

ГВИНТОВА ВІСЬ – *відкритий елемент симетрії*, що являє собою пряму, навколо якої здійснюється обертання на кут $360^{\circ}/n$ (n – порядок гвинтової осі), та подальший зсув вздовж паралельної до неї трансляції $\boldsymbol{t}$ на величину $\boldsymbol{t}/p$ ($1 \leq p \leq n$-1).

ГРУПА СИМЕТРІЇ – повна сукупність *операцій симетрії*, що суміщають задану симетричну фігуру з нею самою.

ЕЛЕМЕНТ СИМЕТРІЇ – геометричний образ *операції симетрії*, який самосуміщується при її виконанні.

ЗАКРИТИЙ ЕЛЕМЕНТ СИМЕТРІЇ – елемент симетрії, який залишає нерухомою хоча б одну точку симетричної фігури. У протилежному випадку це – *відкритий елемент симетрії*.

ІЗОМЕТРИЧНЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ – геометричне перетворення простору, що зберігає незмінними відстані між його точками.

ІНВЕРСІЙНА ВІСЬ СИМЕТРІЇ (*інверсійно-поворотна вісь*) – *елемент симетрії*, геометричним образом якого є пряма, навколо якої відбувається обертання на кут $360^{\circ}/n$ (n – порядок осі), доповнене *інверсією* в одній з точок прямої.

ІНВЕРСІЯ – закрита *операція симетрії*, яка перетворює точку простору з координатами $(x;\, y;\, z)$ у точку з координатами $(-x;\, -y;\, -z)$.

КАТЕГОРІЯ – найбільш велике об’єднання *точкових груп* за старшими елементами симетрії, які мають порядок три та більше.

КЛАС СИМЕТРІЇ – об’єднання *точкових груп* за видом елементів симетрії, які додаються до породжувальних.

КОМІРКА БРАВЕ – комірка ґратки (паралелепіпед повторюваності), обрана згідно з принципом, запропонованим французьким математиком О. Браве (A. Bravais) у 1848 р.: комірка повинна відповідати симетрії ґратки, мати максимальну кількість прямих кутів та мінімальний об’єм.

ОПЕРАЦІЯ СИМЕТРІЇ – відображення геометричної фігури самої в себе при деякому *ізометричному перетворенні* простору.

ПЛОЩИНА КОВЗНОГО ВІДБИТТЯ – *елемент симетрії*, для якого *операцією симетрії* є дзеркальне відбиття точки відносно певної площини, доповнене переносом відображеної точки на величину половини однієї з трансляцій, паралельних відбивальній площині.

ПЛОЩИНА СИМЕТРІЇ (площина дзеркального відбиття) – *елемент симетрії*, для якого *операцією симетрії* є дзеркальне відбиття точки відносно певної площини.

ПРАВИЛЬНА СИСТЕМА ТОЧОК – сукупність точок, які перетворюються одна в одну усіма *операціями симетрії* заданої *групи симетрії*.

ПРОСТА ФОРМА – сукупність симетрично еквівалентних граней кристала.

ПРОСТОРОВА ГРУПА СИМЕТРІЇ (федорівська група) – повний набір *операцій симетрії* нескінченної тривимірно-періодичної фігури, наприклад, кристалічної структури.

СИМЕТРІЯ (геометрична) – властивість геометричної фігури при деякому *ізометричному перетворенні* простору набувати нового стану, який неможливо відрізнити від вихідного (самосуміщуватися).

СИНГОНІЯ (кристалографічна система) – кристалографічний тип кристала (структури), що характеризується певним набором *старших елементів симетрії* його *точкової групи симетрії* (поворотних або інверсійних осей) та формою *комірки Браве*.

ТОЧКОВА ГРУПА СИМЕТРІЇ – *група симетрії*, що складається лише з *закритих операцій симетрії*.

ТРАНСЛЯЦІЯ (паралельний перенос) – 1) *операція симетрії*, що полягає у зсуві точки на вектор певної довжини; 2) вектор, що з'єднує будь-які два вузли *кристалічної ґратки* (трансляція ґратки); 3) частина *відкритої операції симетрії*, яка полягає у переносі точки паралельно *відкритому елементу симетрії* (гвинтовій осі чи площині ковзного відбиття) на величину дробової долі трансляції ґратки.

ЦЕНТР ІНВЕРСІЇ або ЦЕНТР СИМЕТРІЇ – особлива точка *інверсії* перетворення (початок координат).

Додаток А

ТЕОРЕМИ ПРО ВЗАЄМОДІЮ АБО ДОДАВАННЯ ЕЛЕМЕНТІВ СИМЕТРІЇ КОНТИНУУМА

Теорема 1 про перетин двох площин симетрії. Лінія перетину двох площин симетрії завжди є віссю симетрії, дія якої еквівалентна дії цих площин. Елементарний кут повороту осі дорівнює подвоєному куту між площинами.

Теорема 2 про перетин двох осей (теорема Ейлера). Через точку перетину двох осей симетрії завжди проходить третя вісь симетрії.

Теорема 3 про перетин осі симетрії і площини дзеркального відбиття. Точка перетину площини дзеркального відбиття з перпендикулярною до неї віссю симетрії парного порядку є центром інверсії.
Обернена теорема 1. Через центр інверсії, що лежить на осі симетрії парного порядку, перпендикулярно цій осі проходить площина дзеркального відбиття.
Обернена теорема 2. Через центр інверсії, що лежить на площині дзеркального відбиття, перпендикулярно цій площині проходить вісь симетрії парного порядку.

Теорема 4 (наслідок з теореми про перетин двох осей). Число осей симетрії другого порядку, перпендикулярних осі симетрії вищого порядку, дорівнює порядку цієї осі.

Теорема 5 (наслідок з теореми про перетин двох площин). Число площин симетрії, що перетинаються по осі симетрії, дорівнює порядку цієї осі.

Додаток Б

ТЕОРЕМИ ПРО ВЗАЄМОДІЮ АБО ДОДАВАННЯ ЕЛЕМЕНТІВ СИМЕТРІЇ ДИСКОНТИНУУМА

Теорема 1 про послідовне відбиття в двох паралельних площинах. Послідовне відбиття у двох паралельних площинах симетрії рівносильно трансляції з параметром, що дорівнює подвоєній відстані між площинами.

Теорема 2 про площину симетрії і перпендикулярну до неї трансляцію. Сума площини симетрії і перпендикулярної до неї трансляції є така ж площина симетрії, паралельна вихідній і віддалена від неї на половину трансляції.

Теорема 3 про площину симетрії і похилу до неї трансляцію. Сума площини дзеркального відбиття і похилої до неї трансляції є площина ковзного відбиття, паралельна вихідній і віддалена від неї на половину перпендикулярної складової трансляції, з величиною ковзання, що дорівнює вертикальній складовій трансляції.

Теорема 4 про відображення в двох перетинних площинах симетрії. Відбиття у двох перетинних площинах симетрії можна замінити обертанням навколо осі, що збігається з лінією їх перетину, і елементарним кутом повороту, який дорівнює подвоєному куту між площинами. Причому, якщо серед породжувальних є площини ковзного відбиття, то породжена вісь може бути гвинтовою.

Теорема 5 про вісь симетрії і перпендикулярну до неї трансляцію. Сума осі симетрії і перпендикулярної до неї трансляції є така ж вісь симетрії, паралельна вихідній і віддалена від неї на відстань, що дорівнює $t/2\sin(\alpha_N/2)$ в напрямку, що становить з трансляцією кут $90° - \alpha_N/2$, де α_N – елементарний кут повороту осі симетрії.

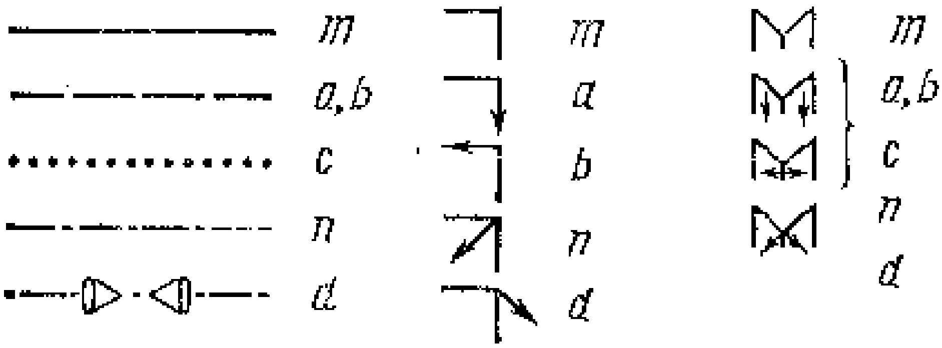
Взаємодія трансляції з осями, порядок яких є добуток відмінних від одиниці чисел. Якщо порядок осі можна представити у вигляді $n = m \cdot p$, то дія на неї перпендикулярної трансляції приводить до утворення, крім осей порядку *n* ще *m* осей порядку *p* і *p* осей порядку *m*. Цій умові відповідають дві осі: порядку $4 = 2 \cdot 2$ і порядку $6 = 3 \cdot 2$.

Додаток В

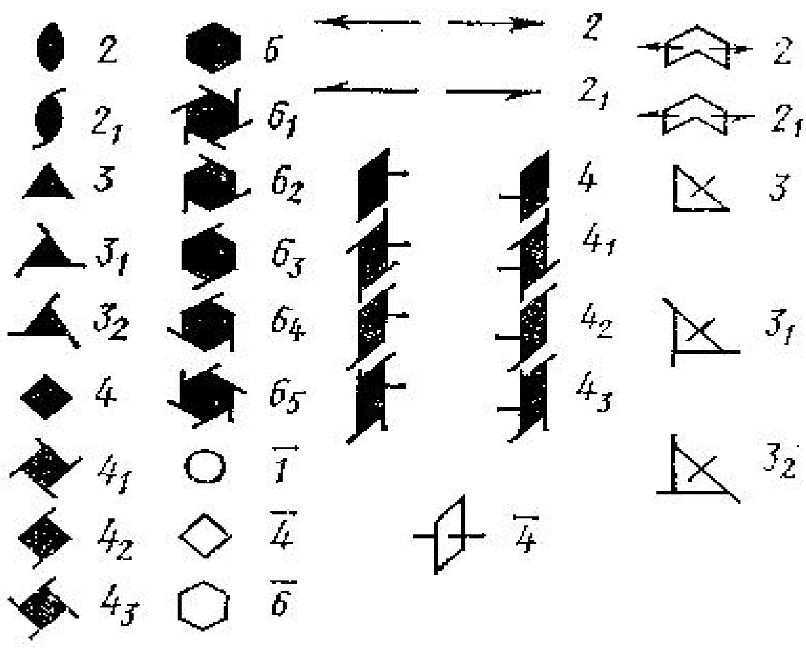
ПОЗНАЧЕННЯ ЕЛЕМЕНТІВ СИМЕТРІЇ
НА ПЛАНАХ ТОЧКОВИХ І ПРОСТОРОВИХ ВИДІВ СИМЕТРІЇ

Позначення площин симетрії

вертик. **горизонт.** **похил.**



Позначення осей симетрії



СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Попов Г.М. Кристаллография: учебн. (для студ. высш. учебн. зав.) / Г.М.Попов, И.И.Шафрановский. – Москва : Высшая школа, 1972. – 352 с.
2. Шаскольская М.П. Кристаллография: учебн.(для студ. высш. учебн. зав.) / М.П. Шаскольская. – Москва : Высшая школа, 1976. -639 с.
3. Кристаллография, рентгенография и электронная микроскопия / Я.С.Уманский, Ю.А.Скаков, А.Н.Иванов, Л.Н.Расторгуев. – Москва : Металлургия, 1982. – 632с.
4. Основи геометричної кристалографії : сітка Вульфа / Методичні вказівки до практичних занять / Укладач : О.В. Приходько – Запоріжжя : ЗНУ, 2008. – 37 с.
5. Методичні вказівки до оформлення курсових і дипломних робіт / Укладачі: А.Г.Кулинич, О.В.Приходько, І.В.Танцюра. – Запоріжжя : ЗНУ, 2010. – 49