1 ПОДІЛЬНІСТЬ ЦІЛИХ ЧИСЕЛ НАЦІЛО

Нехай x, y – цілі числа. Кажуть, що x *ділить* y (або y *ділиться* на x) якщо існує таке ціле число k, що $y = xk$. Позначення: $x | y$ або $y \vdots x$.

Теорема 1 Для будь-яких цілих x, y, z виконано:

1) $x \vdots x$, $x \vdots 1$, $x \vdots (-x)$, $x \vdots (-1)$;
2) якщо $x \vdots y$ і $y \vdots z$, то $x \vdots z$ (*відношення подільності транзитивно*);
3) якщо $y \vdots x$ і $z \vdots x$, то $(y+z) \vdots x$;
4) якщо $y \vdots x$, то $yz \vdots x$;
5) якщо $z \neq 0$, то $yz \vdots xz$ рівносильне $y \vdots x$.

Доведення.

1) $x = x \cdot 1 = 1 \cdot x = (-x) \cdot (-1) = (-1) \cdot (-x)$;
2) якщо $y = xk$, $z = yl$, то $z = (xk)l = x(kl)$;
3) якщо $y = xk$, $z = xl$, то $y + z = xk + xl = x(k+l)$;
4) якщо $y = xk$, тому $yz = (xk)z = x(kz)$;
5) якщо $y = xk$, то $yz = xkz$; назад, якщо $yz = xkz$, то $(y - xk)z = 0$. З того, що $z \neq 0$, тепер випливає: $y - xk = 0$, тобто, $y = xk$.

Якщо $y \vdots x$ і $x \vdots y$, кажуть, що числа x і y *асоційовані*.

Зауважимо, що це означає, що $y = xk$ і $x = yl$, звідки $x = xkl$. Якщо $x = 0$, то і $y = 0$; інакше $1 = kl$, тому $|k| = |l| = 1$ і або $k = l = 1$, або $k = l = -1$. Отже, $y = x$ або $y = -x$.

Приклад 1 Цілі числа a, b і c такі, що $(a+b) \vdots c$, $ab \vdots c$. Доведіть, що $\left(a^3 - b^3\right) \vdots c$.

Розв’язання.

$$\left(a^3 - b^3\right) = (a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right) = (a-b)\left(\underbrace{(a+b)^2}_{\vdots c} - \underbrace{ab}_{\vdots c}\right) \vdots c.$$

Приклад 2 Розв’яжіть у цілих числах рівняння:

$$x^2 + xy - x - y = 5.$$

Розв’язання. Розкладемо ліву частину рівняння на множники:

$$x(x+y) - (x+y) = 5,$$

$$(x+y)(x-1) = 5.$$

Звідси отримуємо, що значення виразів $x + y$ і $x - 1$ є дільниками числа 5. Тоді можливі чотири випадки:

1) $\begin{cases} x + y = 5, \\ x - 1 = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2, \\ y = 3; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x+y=-5, \\ x-1=-1; \end{cases}$ $\begin{cases} x=0, \\ y=-5; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x+y=1, \\ x-1=5; \end{cases}$ $\begin{cases} x=6, \\ y=-5; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x+y=-1, \\ x-1=-5; \end{cases}$ $\begin{cases} x=-4, \\ y=3. \end{cases}$

Відповідь: $(2;3)$, $(0;-5)$, $(6;-5)$, $(-4;3)$.

Приклад 3 Розв'яжіть у цілих числах рівняння:

$$x^2-y^2=14.$$

Розв'язання. Розкладемо ліву частину рівняння на множники: $(x-y)(x+y)=14$. Ще можна помітити, що значення виразів $x+y$ і $x-y$ завжди мають однакову парність, отже їх добуток є або числом непарним, або кратним 4. Оскільки права частина дорівнює 14 і це число є парним і не кратним 4, то можна зробити висновок, що вихідне рівняння розв'язків у цілих числах немає.

Відповідь: немає розв'язків у цілих числах.

Приклад 4 Цілі числа x і y такі, що $(6x+11y)\vdots 31$. Доведіть, що $(x+7y)\vdots 31$.

Розв'язання. Представимо вираз $x+7y$ у вигляді різниці:

$$x+7y=\underbrace{\underbrace{31}_{\vdots 31}(x+2y)}_{\vdots 31}-\underbrace{5\underbrace{(6x+11y)}_{\vdots 31}}_{\vdots 31}\vdots 31.$$