4 ОЗНАКИ ПОДІЛЬНОСТІ

Ознаками подільності називають правила, які дозволяють швидко визначити, чи є число кратним наперед заданому числу, без необхідності виконувати повне ділення.

Розглянемо основні ознаки подільності натуральних чисел.

Теорема 1 $\overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} ... a_1 a_0} \equiv a_0 \left[\begin{array}{l} (\bmod 2) \\ (\bmod 5) \end{array} \right.$.

Доведення.

Запишемо очевидні конгруенції:

$$1 \equiv 1 \left[\begin{array}{l} (\bmod 2) \\ (\bmod 5) \end{array} \right.,$$

$$10 \equiv 0 \left[\begin{array}{l} (\bmod 2) \\ (\bmod 5) \end{array} \right.,$$

$$\ldots,$$

$$10^n \equiv 0 \left[\begin{array}{l} (\bmod 2) \\ (\bmod 5) \end{array} \right..$$

Помножимо обидві частини першої конгруенції на a_0, другої – на a_1, третьої – на a_2 і т.д., $(n+1)$-ї – на a_n. Маємо:

$$a_0 \equiv a_0 \left[\begin{array}{l} (\bmod 2) \\ (\bmod 5) \end{array} \right.,$$

$$10 a_1 \equiv 0 \left[\begin{array}{l} (\bmod 2) \\ (\bmod 5) \end{array} \right.,$$

$$\ldots,$$

$$10^n a_n \equiv 0 \left[\begin{array}{l} (\bmod 2) \\ (\bmod 5) \end{array} \right..$$

Додавши ці рівності, отримаємо:

$$10^n a_n + 10^{n-1} a_{n-1} + ... + 10 a_1 + a_0 \equiv a_0 \left[\begin{array}{l} (\bmod 2) \\ (\bmod 5) \end{array} \right.,$$

$$\overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} ... a_1 a_0} \equiv a_0 \left[\begin{array}{l} (\bmod 2) \\ (\bmod 5) \end{array} \right..$$

Наслідок 1 (ознака подільності на 2) Натуральне число ділиться націло на 2 тоді й тільки тоді, коли його остання цифра ділиться на 2 або, інакше, остання цифра якого парна (0, 2, 4, 6, 8).

Наслідок 2 (ознака подільності на 5) Натуральне число ділиться націло на 5 тоді й тільки тоді, коли його остання цифра ділиться на 5 або, інакше, остання цифра якого 0 або 5.

Приклад 1

3336 (6 парна), 111112 (2 парна), 3335 (остання цифра 5).

Теорема 2 $\overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} ... a_1 a_0} \equiv \overline{a_1 a_0} \left[\begin{array}{l} (\mathrm{mod}\ 4) \\ (\mathrm{mod}\ 25) \end{array} \right.$.

Доведення.

Запишемо очевидні конгруенції:

$$1 \equiv 1 \left[\begin{array}{l} (\mathrm{mod}\ 4) \\ (\mathrm{mod}\ 25) \end{array} \right.,$$

$$10 \equiv 10 \left[\begin{array}{l} (\mathrm{mod}\ 4) \\ (\mathrm{mod}\ 25) \end{array} \right.,$$

$$\ldots,$$

$$10^n \equiv 0 \left[\begin{array}{l} (\mathrm{mod}\ 4) \\ (\mathrm{mod}\ 25) \end{array} \right..$$

Помножимо обидві частини першої конгруенції на a_0, другої – на a_1, третьої – на a_2 і т.д., $(n+1)$-ї – на a_n. Маємо:

$$a_0 \equiv a_0 \left[\begin{array}{l} (\mathrm{mod}\ 4) \\ (\mathrm{mod}\ 25) \end{array} \right.,$$

$$10a_1 \equiv 10a_1 \left[\begin{array}{l} (\mathrm{mod}\ 4) \\ (\mathrm{mod}\ 25) \end{array} \right.,$$

$$\ldots,$$

$$10^n a_n \equiv 0 \left[\begin{array}{l} (\mathrm{mod}\ 4) \\ (\mathrm{mod}\ 25) \end{array} \right..$$

Додавши ці рівності, отримаємо:

$$10^n a_n + 10^{n-1} a_{n-1} + ... + 10a_1 + a_0 \equiv 10a_1 + a_0 \left[\begin{array}{l} (\mathrm{mod}\ 4) \\ (\mathrm{mod}\ 25) \end{array} \right.,$$

$$\overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} ... a_1 a_0} \equiv \overline{a_1 a_0} \left[\begin{array}{l} (\mathrm{mod}\ 4) \\ (\mathrm{mod}\ 25) \end{array} \right..$$

Наслідок 1 (ознака подільності на 4) Натуральне число ділиться націло на 4 тоді й тільки тоді, коли його останні дві цифри як число діляться на 4.

Наслідок 2 (ознака подільності на 25) Натуральне число ділиться націло на 25 тоді й тільки тоді, коли його останні дві цифри як число діляться на 25.

Приклад 2

3336 (36 ділиться на 4), 111112 (12 ділиться на 4), 999922 (22 не ділиться на 4), 111110 (10 не ділиться на 25), 111375 (75 ділиться на 25).

Теорема 3 $\overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} ... a_1 a_0} \equiv \overline{a_2 a_1 a_0} \left[\begin{matrix} (\mathrm{mod}\, 8) \\ (\mathrm{mod}\, 125) \end{matrix} \right.$.

Доведення.

Запишемо очевидні конгруенції:

$$1 \equiv 1 \left[\begin{matrix} (\mathrm{mod}\, 8) \\ (\mathrm{mod}\, 125) \end{matrix} \right.,$$

$$10 \equiv 10 \left[\begin{matrix} (\mathrm{mod}\, 8) \\ (\mathrm{mod}\, 125) \end{matrix} \right.,$$

$$100 \equiv 100 \left[\begin{matrix} (\mathrm{mod}\, 8) \\ (\mathrm{mod}\, 125) \end{matrix} \right.,$$

$$10^3 \equiv 0 \left[\begin{matrix} (\mathrm{mod}\, 8) \\ (\mathrm{mod}\, 125) \end{matrix} \right.,$$

$$\ldots,$$

$$10^n \equiv 0 \left[\begin{matrix} (\mathrm{mod}\, 8) \\ (\mathrm{mod}\, 125) \end{matrix} \right..$$

Помножимо обидві частини першої конгруенції на a_0, другої – на a_1, третьої – на a_2 і т.д., $(n+1)$-ї – на a_n. Маємо:

$$a_0 \equiv a_0 \left[\begin{matrix} (\mathrm{mod}\, 8) \\ (\mathrm{mod}\, 125) \end{matrix} \right.,$$

$$10a_1 \equiv 10a_1 \left[\begin{matrix} (\mathrm{mod}\, 8) \\ (\mathrm{mod}\, 125) \end{matrix} \right.,$$

$$100a_2 \equiv 100a_2 \left[\begin{matrix} (\mathrm{mod}\, 8) \\ (\mathrm{mod}\, 125) \end{matrix} \right.,$$

$$10^3 a_3 \equiv 0 \left[\begin{matrix} (\mathrm{mod}\, 8) \\ (\mathrm{mod}\, 125) \end{matrix} \right.,$$

$$\ldots,$$

$$10^n a_n \equiv 0 \left[\begin{matrix} (\mathrm{mod}\, 8) \\ (\mathrm{mod}\, 125) \end{matrix} \right..$$

Додавши ці рівності, отримаємо:

$$10^n a_n + 10^{n-1} a_{n-1} + ... + 10a_1 + a_0 \equiv 100a_2 + 10a_1 + a_0 \left[\begin{matrix} (\mathrm{mod}\, 8) \\ (\mathrm{mod}\, 125) \end{matrix} \right.,$$

$$\overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} ... a_1 a_0} \equiv \overline{a_2 a_1 a_0} \left[\begin{matrix} (\mathrm{mod}\, 8) \\ (\mathrm{mod}\, 125) \end{matrix} \right..$$

Наслідок 1 (ознака подільності на 8) Натуральне число ділиться націло на 8 тоді й тільки тоді, коли його останні три цифри як число діляться на 8.

Наслідок 2 (ознака подільності на 125) Натуральне число ділиться націло на 125 тоді й тільки тоді, коли його останні три цифри як число діляться на 125.

Приклад 3

3336 (336 ділиться на 8), 111112 (112 ділиться на 8), 999922 (922 не ділиться на 8), 111110 (110 не ділиться на 125), 111375 (375 ділиться на 125).

Аналогічно можна сформулювати ознаки подільності на числа виду 2^k або 5^k.

Теорема 4 $\overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} ... a_1 a_0} \equiv a_n + a_{n-1} + ... + a_1 + a_0 \left[\begin{matrix}(\mathrm{mod}\ 3)\\(\mathrm{mod}\ 9)\end{matrix}\right.$.

Доведення.

Запишемо очевидні конгруенції:

$$1 \equiv 1 \left[\begin{matrix}(\mathrm{mod}\ 3)\\(\mathrm{mod}\ 9)\end{matrix}\right.,$$

$$10 \equiv 1 \left[\begin{matrix}(\mathrm{mod}\ 3)\\(\mathrm{mod}\ 9)\end{matrix}\right.,$$

$$100 \equiv 1 \left[\begin{matrix}(\mathrm{mod}\ 3)\\(\mathrm{mod}\ 9)\end{matrix}\right.,$$

$$10^3 \equiv 1 \left[\begin{matrix}(\mathrm{mod}\ 3)\\(\mathrm{mod}\ 9)\end{matrix}\right.,$$

$$\ldots,$$

$$10^n \equiv 1 \left[\begin{matrix}(\mathrm{mod}\ 3)\\(\mathrm{mod}\ 9)\end{matrix}\right..$$

Помножимо обидві частини першої конгруенції на a_0, другої – на a_1, третьої – на a_2 і т.д., $(n+1)$-ї – на a_n. Маємо:

$$a_0 \equiv a_0 \left[\begin{matrix}(\mathrm{mod}\ 3)\\(\mathrm{mod}\ 9)\end{matrix}\right.,$$

$$10a_1 \equiv a_1 \left[\begin{matrix}(\mathrm{mod}\ 3)\\(\mathrm{mod}\ 9)\end{matrix}\right.,$$

$$100a_2 \equiv a_2 \left[\begin{matrix}(\mathrm{mod}\ 3)\\(\mathrm{mod}\ 9)\end{matrix}\right.,$$

$$\ldots,$$

$$10^n a_n \equiv a_n \left[\begin{matrix}(\mathrm{mod}\ 3)\\(\mathrm{mod}\ 9)\end{matrix}\right..$$

Додавши ці рівності, отримаємо:

$$10^n a_n + 10^{n-1} a_{n-1} + ... + 10a_1 + a_0 \equiv a_n + a_{n-1} + ... + a_1 + a_0 \left[\begin{array}{l} (\mathrm{mod}\ 3) \\ (\mathrm{mod}\ 9) \end{array} \right.,$$

$$\overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} ... a_1 a_0} \equiv a_n + a_{n-1} + ... + a_1 + a_0 \left[\begin{array}{l} (\mathrm{mod}\ 3) \\ (\mathrm{mod}\ 9) \end{array} \right..$$

Наслідок 1 (ознака подільності на 3) Натуральне число ділиться націло на 3 тоді й тільки тоді, коли сума його цифр ділиться на 3.

Наслідок 2 (ознака подільності на 9) Натуральне число ділиться націло на 9 тоді й тільки тоді, коли сума його цифр ділиться на 9.

Приклад 4

3336 (сума цифр 15, ділиться на 3, не ділиться на 9), 111112 (сума цифр 7, не ділиться ні на 3, ні на 9), 9999822 (сума цифр 48, ділиться і на 3, і на 9).

Теорема 5

$$\overline{a_n a_{n-1} ... a_1 a_0} \equiv (...a_8 a_7 a_6 + a_2 a_1 a_0) - (...a_{11} a_{10} a_9 + a_5 a_4 a_3) (\mathrm{mod}\ 7).$$

Доведення.

Дослідимо послідовність залишків від ділення степенів числа 10 на 7:

$10 = 7 \cdot 1 + 3,\ q_1 = 1,\ r_1 = 3;$

$10^2 = 100 = 7 \cdot 14 + 2,\ q_2 = 14,\ r_2 = 2;$

$10^3 = 1000 = 7 \cdot 142 + 6,\ \ q_3 = 142,\ \ r_3 = 6$ або $10^3 = 1000 = 7 \cdot 143 - 1,\ \ q_3 = 143,$ $r_3 = -1;$

$10^4 = 10000 = 7 \cdot 1428 + 4,\ q_4 = 1428,\ r_4 = 4;$

$10^5 = 100000 = 7 \cdot 14285 + 5,\ q_5 = 14285,\ r_5 = 5;$

$10^6 = 1000000 = 7 \cdot 142857 + 1,\ q_6 = 142857,\ r_6 = 1.$

Після r_6 значення залишків будуть повторюватися, починаючи з $r_1 = 3$. Тим самим отримана послідовність вміщує у собі усі можливі ненульові залишки від ділення довільного степеня числа 10 на 7.

На увагу заслуговують два залишки – залишок від ділення на 7 числа 10^3 $r_3 = -1$ і залишок від ділення на 7 числа 10^6 $r_6 = 1$.

Якщо цифрову послідовність довільного натурального числа $\overline{a_n a_{n-1} ... a_1 a_0}$ розбити на трійки, починаючи з наймолодших позицій, то число набере вигляду:

$$\overline{a_n a_{n-1} ... a_1 a_0} = ... + 10^6 a_8 a_7 a_6 + 10^3 a_5 a_4 a_3 + a_2 a_1 a_0 =$$
$$= ... + (7q_6 + 1) a_8 a_7 a_6 + (7q_3 - 1) a_5 a_4 a_3 + a_2 a_1 a_0 = 7N_1 + a_8 a_7 a_6 - a_5 a_4 a_3 + a_2 a_1 a_0,$$

де $7N_1$ – доданок усіх елементів розкладання числа, які мають у собі множник 7; $... + a_8 a_7 a_6 - a_5 a_4 a_3 + a_2 a_1 a_0$ – сума залишків від ділення числа 10^{3k}, $k \in N$ на 7.

Наслідок (ознака подільності на 7) Число 7 буде дільником заданого числа у випадку якщо виконується одне з правил:

а) якщо потроєна сума десятків разом з одиницями ділиться на 7;

б) якщо сума подвоєного числа без останніх двох цифр і останніх двох цифр ділиться на 7;

в) якщо сума числа без останньої цифри і останньої цифри, помноженої на 5, ділиться на 7;

г) для великих чисел: число розбивають уявно на блоки по три цифри, починаючи з останньої цифри. Згідно правила, якщо різниця суми блоків, що стоять на парних місцях, і суми блоків, що стоять на непарних місцях, ділиться на 7, то число ділиться на 7.

Приклад 5

а) 112 ділиться на 7, оскільки 3*11+2=35; 35/7=5;

б) 168 ділиться на 7, оскільки 2*1+68=70; 70 /7 = 10;

в) 161 ділиться на 7, оскільки 16+5*1=21; 21/7 =3;

г) 2002 ділиться на 7, оскільки 200+5*2=210; 210/7=30;

д) 41781196576 розіб'ємо на блоки 1) 576, 2) 196, 3) 781, 4) 041. Сума блоків 2) і 4) – 237, а сума блоків 1) і 3) – 1357, їх різниця 1357–237=1120, 1120/7=160. Отже число 41781196576 ділиться на 7.

Теорема 6 $\overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_1 a_0} \equiv a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots + (-1)^n a_n \pmod{11}$.

Доведення.

Запишемо очевидні конгруенції:

$$1 \equiv 1 \pmod{11},$$
$$10 \equiv -1 \pmod{11},$$
$$10^2 \equiv 1 \pmod{11},$$
$$10^3 \equiv -1 \pmod{11},$$
$$\ldots,$$
$$10^n \equiv (-1)^n \pmod{11}.$$

Помножимо обидві частини першої конгруенції на a_0, другої – на a_1, третьої – на a_2 і т.д., $(n+1)$-ї – на a_n. Маємо:

$$a_0 \equiv a_0 \pmod{11},$$
$$10a_1 \equiv -a_1 \pmod{11},$$
$$100a_2 \equiv a_2 \pmod{11},$$
$$\ldots,$$
$$10^n a_n \equiv (-1)^n a_n \pmod{11}.$$

Додавши ці рівності, отримаємо:

$$10^n a_n + 10^{n-1} a_{n-1} + \ldots + 10a_1 + a_0 \equiv a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots + (-1)^n a_n \pmod{11},$$
$$\overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_1 a_0} \equiv a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots + (-1)^n a_n \pmod{11}.$$

Наслідок (ознака подільності на 11) Натуральне число ділиться націло на 11 тоді й тільки тоді, коли різниця суми цифр на парних місцях і суми на непарних ділиться на 11, нумеруючи справа наліво числами 0, 1, 2, і т.д..

Приклад 6

2387605 (сума цифр на парних місцях 5+6+8+2=21, а на непарних 0+7+3=10, їх різниця дорівнює 11, отже число ділиться на 11).

Теорема 7 (ознака подільності на 13)

а) щоб перевірити, чи ділиться число на 13 потрібно виконати ряд обчислювальних операцій: до числа без останньої цифри додають останню цифру, помножену на 4. Знайдене число перевіряють діленням на 13. Для великих чисел правила подільності застосовують повторно. Іноді стільки разів, скільки потрібно для отримання простого дільника;

б) число розбивають уявно на блоки по три цифри, починаючи з останньої цифри. Якщо різниця суми блоків, що стоять на парних місцях, і суми блоків, що стоять на непарних місцях, ділиться на 13, то число ділиться на 13.

Приклад 7

325 ділиться на 13, оскільки: 32+4*5=32+20=52; 52/13=4;

2101 ділиться на 13, оскільки:210+4*1=214. До 214 застосуємо знову правило подільності на 13: 21+5*4=21+20=41; 41/13=3;

24135897162 розіб’ємо на блоки 0) 162, 1) 897, 2) 135, 3) 24. Сума блоків 0) і 2) – 297, а сума блоків 1) і 3) – 921, їх різниця 921–297=624, 624/13=48 (624=62+4*4=78). Отже, число 24135897162 ділиться на 13.

Приклад 8 Доведіть, що число 1000003000001 не є квадратом натурального числа.

Розв’язання.

Сума цифр даного числа дорівнює 5. Отже, це число при діленні на 3 дає в остачі 2. Проте квадрат натурального числа при діленні на 3 дає в остачі або 0, або 1 (див. зад. 2.21.).

Теорема 8 (ознака подільності на числа виду $10k \pm 1$)

1. Довільне число $N = 10A + a_0$, $A = \overline{a_n a_{n-1} ... a_1}$ ділиться на число $10k + 1$, якщо $A - ka_0$ ділиться на це число.

2. Довільне число $N = 10A + a_0$, $A = \overline{a_n a_{n-1} ... a_1}$ ділиться на число $10k - 1$, якщо $A + ka_0$ ділиться на це число.

Доведення.

Якщо число N ділиться на $10k \pm 1$, то можна записати: $N = 10A + a_0 = (10k \pm 1) \cdot q$, $q \in \mathbb{Z}$ – повна частка.

Не порушуючи співвідношення і з метою виділення у лівій частині отриманої рівності частини, що ділиться на $10k \pm 1$, множимо її на k з урахуванням, що $(10k \pm 1, k) = 1$:

$$k \cdot (10A + a_0) = (10k \pm 1) \cdot q \cdot k,\ q \cdot k = q_1 \in \mathbb{Z},$$

$$10kA + ka_0 = (10k \pm 1) \cdot q_1,$$

$$10kA \pm A \mp A + ka_0 = (10k \pm 1) \cdot q_1,$$

$$A(10k \pm 1) \mp A + ka_0 = (10k \pm 1) \cdot q_1.$$

В останній рівності права частина ділиться на $10k \pm 1$, перший доданок у лівій частині – $A(10k \pm 1)$ – також ділиться на $10k \pm 1$. Отже, з урахуванням властивостей подільності цілих чисел число лівої частини буде ділитися на $10k \pm 1$ тільки в тому разі, коли $\mp A + ka_0$ ділиться на це число.

Приклад 9 Запишіть умову подільності довільного числа на число 19.

Розв'язання.

Число $19 = 10 \cdot 2 - 1$. Число 19 відповідає умові 2 теореми, тобто довільне число $N = 10A + a_0$, $A = \overline{a_n a_{n-1} ... a_1}$ ділиться на число 19, якщо число $A + 2a_0$ ділиться на 19.

Приклад 10 Перевірити, чи ділиться число 12345687 на 19.

Розв'язання.

Число $N = 12345687$, $A = 1234568$, $a_0 = 7$, $A + 2a_0 = 1234568 + 14 = 1234582$.

Отримали велике число $N_1 = 1234582$, яке теж необхідно дослідити на подільність на 19, а саме:

$N_1 = 1234582$, $A = 123458$, $a_0 = 2$, $A + 2a_0 = 123458 + 4 = 123462$.

Отримане число завелике, його подільність на 19 не очевидна. Робимо ще один крок:

$N_2 = 123462$, $A = 12346$, $a_0 = 2$, $A + 2a_0 = 12346 + 4 = 12350$.

Процес виконується до того моменту, поки не стане очевидно, що отримане число або ділиться на 19, або не ділиться на нього:

$N_3 = 12350$, $A = 1235$, $a_0 = 0$, $A + 2a_0 = 1235 + 0 = 1235$;

$N_4 = 1235$, $A = 123$, $a_0 = 5$, $A + 2a_0 = 123 + 10 = 133$;

$N_5 = 133$, $A = 13$, $a_0 = 3$, $A + 2a_0 = 13 + 6 = 19$.

Остання сума ділиться на 19, отже, вихідне число ділиться на 19.

Приклад 11 Доведіть, що різниця числа, яке має непарну кількість цифр, і числа, записаного тими самими цифрами, але у зворотному порядку, ділиться націло на 99.

Розв'язання.

Нехай одне число дорівнює a, а друге, отримане перестановкою цифр числа a, дорівнює b.

Позначимо через $S(n)$ суму цифр натурального числа n. Очевидно, що $S(a) = S(b)$. Тоді, будемо мати:

$$a \equiv S(a) (\text{mod } 9),$$
$$b \equiv S(b) (\text{mod } 9),$$
$$a - b \equiv 0 (\text{mod } 9).$$

Пронумеруємо цифри числа a справа наліво як 0, 1, 2, …, $2n$. Позначимо через $P(n)$ різницю між сумою цифр з парними номерами й сумою цифр з непарними номерами числа n. Тоді:

$$P(a) = (a_0 + a_2 + ... + a_{2n}) - (a_1 + a_3 + ... + a_{2n-1}),$$
$$P(a) = (a_{2n} + a_{2n-2} + ... + a_0) - (a_{2n-1} + a_{2n-3} + ... + a_1).$$

Очевидно, $P(a) = P(b)$. Тоді, будемо мати:

$$a \equiv P(a) \pmod{11},$$
$$b \equiv P(b) \pmod{11},$$
$$a - b \equiv 0 \pmod{11}.$$

Оскільки НСД(9; 11)=1, то $(a-b)\vdots 99$.