7 ЧИСЛОВІ ФУНКЦІЇ

7.1 Ціла та дробова частини дійсного числа

Для кожного дійсного числа x через $[x]$ позначається найбільше ціле число, яке не перевищує x. $[x]$ називається *цілою частиною* числа x. Отже, $[x]$ – це єдине ціле число з проміжку $(x-1, x]$.

Наприклад, $[5]=5$, $[1{,}6]=1$, $[\pi]=3$, $[-2{,}75]=-3$.

Різниця $\{x\}=x-[x]$ називається дробовою частиною числа $[x]$ і задовольняє нерівності $0\le\{x\}<1$.

Наприклад, $\{-3\}=-3-[-3]=-3+3=0$, $\{-1{,}6\}=-1{,}6-[-1{,}6]=$ $=-1{,}6+2=0{,}4$, $\{7{,}26\}=7{,}26-[7{,}26]=7{,}26-7=0{,}26$,

Теорема 1 Степінь l, в якому просте число p входить до канонічного розкладу числа $n!$, дорівнює $\left[\dfrac{n}{p}\right]+\left[\dfrac{n}{p^2}\right]+\left[\dfrac{n}{p^3}\right]+\ldots$

Доведення.

Зауважимо, що $\left[\dfrac{n}{p}\right]$ дорівнює кількості тих чисел ряду 1, 2, ..., n, які діляться на p, $\left[\dfrac{n}{p^2}\right]$ – кількості тих чисел цього ряду, які діляться на p^2, і т.д. Тому, міняючи порядок сумування, одержуємо:

$$l=\sum_{\substack{m=1\\ p^j|m}}^{n}\ \sum_{j=1}^{\infty}1=\sum_{j=1}^{\infty}\ \sum_{\substack{m=1\\ p^j|m}}^{n}1=\sum_{j=1}^{\infty}\left[\frac{n}{p^j}\right],$$

що й вимагалось довести.

Приклад 1 Знайти канонічний розклад числа 20!.

Розв'язання.

З теореми 2.2 випливає, що показник двійки в канонічному розкладі числа 20! дорівнює $\left[\dfrac{20}{2}\right]+\left[\dfrac{20}{2^2}\right]+\left[\dfrac{20}{2^3}\right]+\left[\dfrac{20}{2^4}\right]=\left[\dfrac{20}{2}\right]+\left[\dfrac{20}{4}\right]+\left[\dfrac{20}{8}\right]+\left[\dfrac{20}{16}\right]=18$, показник числа 3 дорівнює $\left[\dfrac{20}{3}\right]+\left[\dfrac{20}{3^2}\right]=\left[\dfrac{20}{3}\right]+\left[\dfrac{20}{9}\right]=8$, показник числа 5 дорівнює $\left[\dfrac{20}{5}\right]=4$, показник числа 7 дорівнює $\left[\dfrac{20}{7}\right]=2$, а показники чисел 11, 13, 17 і 19 дорівнюють $\left[\frac{20}{11}\right]=\left[\frac{20}{13}\right]=\left[\frac{20}{17}\right]=\left[\frac{20}{19}\right]=1$. Отже, $20!=2^{18}\cdot 3^{8}\cdot 5^{4}\cdot 7^{2}\cdot 11\cdot 13\cdot 17\cdot 19$.

Приклад 2 Знайти кількість натуральних чисел, що не перевищують 180 і не діляться на жодне з простих чисел 5, 7 і 11.

Розв'язання.

Серед перших 180 натуральних чисел є $\left[\frac{180}{5}\right]=36$ чисел, що діляться на 5, $\left[\frac{180}{7}\right]=25$ чисел, що діляться на 7 і $\left[\frac{180}{11}\right]=16$ чисел, що діляться на 11. Усі ці числа треба викинути. Але 180−36−25−16 не буде правильною відповіддю, бо при такому способі підрахунку деякі числа викидаються кілька разів. Наприклад, число 35 викидається і як число, що ділиться на 5, і як число, що ділиться на 7. Щоб викинути подібні числа лише один раз, треба до суми 180−36−25−16 додати кількість чисел, що діляться на $5\cdot 7$ (таких чисел буде $\left[\frac{180}{35}\right]=5$), кількість чисел, що діляться на $5\cdot 11$ (таких чисел буде $\left[\frac{180}{55}\right]=3$), і кількість чисел, що діляться на $7\cdot 11$ (таких чисел буде $\left[\frac{180}{77}\right]=2$). Таким чином, буде викинуто рівно по одному разу як числа, що діляться тільки на одне з простих чисел 5, 7 і 11, так і числа, що діляться рівно на два з цих простих чисел. Оскільки $5\cdot 7\cdot 11=385>180$, то жодне з перших 180 натуральних чисел не ділиться на всі три дані прості числа. Отже, враховані всі можливості і кількість натуральних чисел, що не перевищують 180 і не діляться на жодне з простих чисел 5, 7 і 11, дорівнює 180−36−25−16+5+3+2=113.

Зауважимо, що в загальному випадку кількість натуральних чисел, що не перевищують n і не діляться на жодне з простих чисел $p_1, \ldots, p_k$, дорівнює

$$[n]-\left[\frac{n}{p_1}\right]-\left[\frac{n}{p_2}\right]-\ldots-\left[\frac{n}{p_k}\right]+\left[\frac{n}{p_1 p_2}\right]+$$
$$+\left[\frac{n}{p_1 p_3}\right]+\ldots+\left[\frac{n}{p_{k-1} p_k}\right]-\ldots+(-1)^k\left[\frac{n}{p_1\cdots p_k}\right].$$

Приклад 3 Знайти кількість натуральних чисел $n\leq 500$, які взаємно прості з числом 960.

Розв'язання.

$960=2^6\cdot 3\cdot 5$. Тому задачу можна переформулювати таким чином: знайти кількість натуральних чисел, що не перевищують 500 і не діляться на жодне з простих чисел 2, 3 і 5. Міркуючи, як і в попередньому прикладі, знаходимо, що таких чисел буде

$$[500]-\left[\frac{500}{2}\right]-\left[\frac{500}{3}\right]-\left[\frac{500}{5}\right]+\left[\frac{500}{2\cdot 3}\right]+\left[\frac{500}{2\cdot 5}\right]+\left[\frac{500}{3\cdot 5}\right]-\left[\frac{500}{2\cdot 3\cdot 5}\right]=134.$$

7.2 Поняття та властивості мультиплікативної функції

Функція $f(n)$, що визначена на множині всіх натуральних чисел і набуває дійсних значень, називається *мультиплікативною*, якщо виконуються такі умови:

1) функція $f(n)$ не є тотожно рівною нулю;

2) для довільних взаємно простих натуральних чисел m і n виконується рівність $f(mn) = f(m)f(n)$.

Прикладом мультиплікативної функції є $f(n) = n^s$, де s – фіксоване дійсне число.

Відзначимо дві **властивості мультиплікативних функцій**:

1) $f(1) = 1$.

Справді, нехай число $a \in \mathbb{N}$ таке, що $f(a) \neq 0$. Тоді $f(a) = f(1 \cdot a) = f(1)f(a)$, отже, $f(1) = 1$.

2) Якщо f та g – мультиплікативні функції, то їх добуток fg також є мультиплікативною функцією.

Справді, $fg(1) = f(1)g(1) = 1 \cdot 1 = 1$, тому функція $f(n)$ не є тотожно рівною нулю. Крім цього, для взаємно простих чисел m і n отримуємо:

$$fg(mn) = f(mn)g(mn) = f(m)f(n)g(m)g(n) =$$
$$= f(m)g(m)f(n)g(n) = (fg)(m)(fg)(n).$$

Приклад 4 Задамо мультиплікативну функцію так: $f(1) = 1$, $f\left(p^k\right) = 2$, $\forall k > 0$. Тоді для довільного цілого числа $a = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_s^{k_s}$, $k_i > 0$, $i = \overline{1, s}$ будемо мати

$$f\left(p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_s^{k_s}\right) = f\left(p_1^{k_1}\right) \cdot f\left(p_2^{k_2}\right) \cdot \ldots \cdot f\left(p_s^{k_s}\right) = 2^s.$$

Звідси, наприклад, $f(1) = 1$, $f(2) = 2$, $f(7) = 2$, $f(9) = 2$, $f(14) = f(2 \cdot 7) = f(2) \cdot f(7) = 2 \cdot 2 = 4$.

Для довільної визначеної на множині натуральних чисел функції $f(n)$ функція $F(n) = \sum\limits_{d|n} f(d)$ (тобто сума береться по всім натуральним дільникам d числа n) називається *суматорною функцією* для функції $f(n)$.

Теорема 2 Нехай $n = p_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot p_s^{k_s}$ – канонічний розклад числа n. Тоді для мультиплікативної функції $f(n)$ її суматорна функція $F(n)$ дорівнює

$$F(n) = \left(1 + f(p_1) + f\left(p_1^2\right) + \ldots + f\left(p_1^{k_1}\right)\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 + f(p_s) + f\left(p_s^2\right) + \ldots + f\left(p_s^{k_s}\right)\right). \quad (1)$$

Доведення.

Після розкриття дужок у правій частині рівності (2.1) отримаємо суму доданків вигляду $f\left(p_1^{\beta_1}\right)\cdot\ldots\cdot f\left(p_s^{\beta_s}\right)=f\left(p_1^{\beta_1}\cdot\ldots\cdot p_s^{\beta_s}\right)$, де $0\le\beta_1\le k_1$, …, $0\le\beta_s\le k_s$, причому для кожного можливого набору $\left(\beta_1,\ldots,\beta_s\right)$ буде зустрічатись рівно один доданок. Але коли набір $\left(\beta_1,\ldots,\beta_s\right)$ пробігає всі можливі значення, то добуток $p_1^{\beta_1}\cdot\ldots\cdot p_s^{\beta_s}$ пробігає всі можливі дільники числа n, тому права частина рівності (1) дорівнює $F(n)$.

Наслідок. Для функції $f(n)=n^s$ рівність (1.2) набуває вигляду

$$\sum_{d|n}d^s=\left(1+p_1^s+p_1^{2s}+\ldots+p_1^{\alpha_1 s}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+p_k^s+p_k^{2s}+\ldots+p_k^{\alpha_k s}\right).\qquad(2.2)$$

Зокрема, при $s=1$ ми одержуємо рівність для суматорної функції для функції $f(n)=n$, тобто для суми $\sigma(n)$ дільників числа n. Якщо тепер у кожній дужці рівності (2) замінити вираз за формулою для суми членів геометричної прогресії, то одержимо:

$$\sigma(n)=\frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1}\cdot\ldots\cdot\frac{p_k^{\alpha_k+1}-1}{p_k-1}.\qquad(3)$$

При $s=0$ суматорна функція для функції $f(n)=n^s$ – це кількість $\tau(n)$ дільників числа n, і ми отримуємо: $\tau(n)=\left(\alpha_1+1\right)\cdot\ldots\cdot\left(\alpha_k+1\right)$.

Наприклад, $\sigma(2016)=\sigma\left(2^5\cdot3^2\cdot7\right)=\dfrac{2^{5+1}-1}{2-1}\cdot\dfrac{3^{2+1}-1}{3-1}\cdot\dfrac{7^{1+1}-1}{7-1}=6552$, $\tau(2016)=(5+1)(2+1)(1+1)=36$.

Позначимо через $\sigma_m(n)$ суму m-их степенів усіх натуральних дільників числа n. Отримаємо явний вираз для $\sigma_m(n)$, якщо відомий канонічний розклад $n=p_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot p_k^{\alpha_k}$ числа n. Для цього розглянемо число $n^m=\left(p_1^{\alpha_1}\right)^m\cdot\ldots\cdot\left(p_k^{\alpha_k}\right)^m=\left(p_1^m\right)^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot\left(p_k^m\right)^{\alpha_k}$. Тоді, підставляючи в (3) замість $p_1,\ldots,p_k$ відповідно $p_1^m\cdot\ldots\cdot p_k^m$, отримуємо:

$$\sigma_m(n)=\frac{\left(p_1^m\right)^{\alpha_1+1}-1}{p_1^m-1}\cdot\ldots\cdot\frac{\left(p_k^m\right)^{\alpha_k+1}-1}{p_k^m-1}.\qquad(4)$$

Приклад 5 Знайти кількість та суму дільників чисел $27440\cdot19$ і 84.

Розв'язання.

Спочатку запишемо числа в канонічному вигляді:

$$n_1=27440\cdot19=2^4\cdot5^1\cdot7^3\cdot19^1,\qquad n_2=84=2^2\cdot3^1\cdot7^1.$$

Тоді,

$$\tau(n_1)=(4+1)(1+1)(3+1)(1+1)=80,$$

$$\tau(n_2)=(2+1)(1+1)(1+1)=12;$$

$$\sigma(n_1)=\frac{2^{4+1}-1}{2-1}\cdot\frac{5^{1+1}-1}{5-1}\cdot\frac{7^{3+1}-1}{7-1}\cdot\frac{19^{1+1}-1}{19-1}=1488000,$$

$$\sigma(n_2)=\frac{2^{2+1}-1}{2-1}\cdot\frac{3^{1+1}-1}{3-1}\cdot\frac{7^{1+1}-1}{7-1}=160.$$

Приклад 6 Знайти натуральне число n, яке ділиться на 12 і має рівно 14 натуральних дільників.

Розв'язання.

Оскільки $12=2^2\cdot 3$, то n має вигляд $n=2^{\alpha_1}3^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot p_k^{\alpha_k}$, де $\alpha_1\geq 2$ і $\alpha_2\geq 1$. Із рівностей $\tau(n)=(\alpha_1+1)\cdot(\alpha_2+1)\cdot\ldots\cdot(\alpha_k+1)=14=7\cdot 2$ тепер випливає, що $\alpha_1+1=7$, $\alpha_2+1=2$ і $k=2$, тобто $n=2^6 3^1=192$.

З функцією суми дільників числа n – $\sigma(n)$ пов'язаний певний якісний аналіз числа n.

Сума власних додатних дільників числа n може бути:

1) менша, ніж саме число n, число n у цьому разі має назву «*недостатнє число*»;

2) більша, ніж саме число n, тоді n – «*надлишкове число*»;

3) в окремих випадках – дорівнює самому числу n. Із самим числом n повна сума додатних дільників числа n буде в цьому випадку дорівнювати $2n$. Числа, для яких $\sigma(n)=2n$, мають назву «*досконалі числа*».

Для досконалих чисел справедлива теорема.

Теорема 3 Число n буде досконалим тоді і тільки тоді, коли воно має вигляд

$$n=2^{k-1}\left(2^k-1\right),\ k\geq 2,\ 2^k-1 \text{ – просте число.}$$

У теорії чисел доведено, що число 2^k-1 буде простим тільки, коли k є простим числом. Числа 2^k-1 в теорії чисел мають назву *прості числа Мерсенна*. Кожне число Мерсенна відповідає новому досконалому парному числу.

Приклад 7 Визначити, чи є число $n=8128$ досконалим.

Розв'язання.

Візьмемо $k=7$ і $p_7=2^7-1=127$ – просте число Мерсенна. Тоді

$$2^{7-1}\left(2^7-1\right)=8128.$$

Обчислимо кількість додатних дільників числа n:

$$\sigma(n)=\frac{2^{7+1}-1}{2-1}\cdot\frac{127^{1+1}-1}{127-1}=\frac{127\cdot\left(127^2-1\right)}{126}=$$

$$=\frac{127\cdot(127-1)\cdot(127+1)}{126}=127\cdot 128=2\cdot 2^6\cdot 127.$$

Таким чином, число $n = 8128$ є досконалим числом, оскільки $\sigma(8128) = 2 \cdot 8128$.

Інколи розглядаються в теорії чисел і так звані «*дружні числа*».

Дружніми числами називається пара чисел n та m, якщо $\sigma(n) - n = m$ і $\sigma(m) - m = n$, тобто сума додатних власних дільників числа n дорівнює m, і сума додатних власних дільників числа m дорівнює n.

Приклад 8 Визначити, чи є дружніми числа 220 і 284.

Розв'язання.

$$220 = 2^2 \cdot 5^1 \cdot 11^1,\ \sigma(220) - 220 = \frac{2^{2+1} - 1}{2 - 1} \cdot \frac{5^{1+1} - 1}{5 - 1} \cdot \frac{11^{1+1} - 1}{11 - 1} = 504 - 220 = 284,$$

$$284 = 2^2 \cdot 71^1,\ \sigma(284) - 284 = \frac{2^{2+1} - 1}{2 - 1} \cdot \frac{71^{1+1} - 1}{71 - 1} = 504 - 284 = 220.$$

Означення виконується, тому числа 220 і 284 є дружніми.

7.3 Функція Ейлера

Для натурального числа n *функція Ейлера* $\varphi(n)$ визначається як кількість чисел ряду 1, 2, ... , n, які взаємно прості з числом n. Так, $\varphi(1) = 1$, $\varphi(2) = 1$, $\varphi(3) = \varphi(4) = 2$, $\varphi(5) = 4$, $\varphi(6) = 2$.

Теорема 4 Функція Ейлера $\varphi(n)$ є мультиплікативною.

Теорема 5 Нехай $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$ – канонічний розклад числа n. Тоді

$$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{p_k}\right) = (p_1 - 1)\ldots(p_2 - 1)\, p_1^{\alpha_1 - 1} \ldots p_k^{\alpha_k - 1}. \quad (5)$$

Зокрема, для простого числа p $\varphi(p) = p - 1$ і $\varphi\left(p^\alpha\right) = p^\alpha - p^{\alpha - 1}$.

Доведення.

Розглянемо спочатку випадок $n = p^\alpha$, де p – просте число. Зрозуміло, що число m буде взаємно простим із числом $n = p^\alpha$ тоді й лише тоді, коли m не ділиться на p. Серед чисел 1, ..., p, $p + 1$, …, $2p$, $2p + 1$, ..., p^2, $p^2 + 1$, ..., $p^2 + p$, $p^2 + p + 1$, ..., $2p^2$, $2p^2 + 1$, ..., p^α на p будуть ділитися числа p, $2p$, ..., p^2, $p^2 + p$, ..., p^α, тобто кожне p-те число. Тому таких чисел буде $\frac{p^\alpha}{p} = p^{\alpha - 1}$. Решта $p^\alpha - p^{\alpha - 1}$ чисел взаємно прості з p, а отже, і з p^α. Тому $\varphi\left(p^\alpha\right) = p^\alpha - p^{\alpha - 1}$. Зокрема, $\varphi(p) = p^1 - p^{1-1} = p - 1$.

Використовуючи мультиплікативність функції $\varphi(n)$, у загальному випадку маємо:

$$\varphi\left(p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot p_k^{\alpha_k}\right)=\varphi\left(p_1^{\alpha_1}\right)\cdot\ldots\cdot\varphi\left(p_k^{\alpha_k}\right)=\left(p_1^{\alpha_1}-p_1^{\alpha_1-1}\right)\cdot\ldots\cdot\left(p_k^{\alpha_k}-p_k^{\alpha_k-1}\right)=$$
$$=p_1^{\alpha_1}\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\cdot\ldots\cdot p_k^{\alpha_k}\left(1-\frac{1}{p_k}\right)=n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{p_k}\right),$$
що й треба було довести.

Приклад 9

$\varphi(17)=17-1=16$,

$\varphi(128)=\varphi\left(2^7\right)=2^7-2^6=64$,

$\varphi(5040)=\varphi\left(2^4\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7\right)=(2-1)(3-1)(5-1)(7-1)\cdot 2^{4-1}\cdot 3^{2-1}\cdot 5^{1-}\cdot 7^{1-1}=1152$.

Наступне співвідношення, яке інколи називають формулою Гауса, є наслідком теорем 4 та 5.

Твердження 1 Для кожного натурального числа n
$$\sum_{d|n}\varphi(d)=n.$$

Доведення. Функція $F(n)=\sum_{d|n}\varphi(d)$ є суматорною для функції $\varphi(n)$. Нехай $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot p_k^{\alpha_k}$ – канонічний розклад числа n. Оскільки $\varphi(n)$ мультиплікативна, то за теоремою 2.1 маємо:
$$F(n)=\left(1+\varphi(p_1)+\varphi\left(p_1^2\right)+\ldots+\varphi\left(p_1^{\alpha_1}\right)\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\varphi(p_k)+\varphi\left(p_k^2\right)+\ldots+\varphi\left(p_k^{\alpha_k}\right)\right).$$
Але за теоремою 5 $\varphi\left(p^{\alpha}\right)=p^{\alpha}-p^{\alpha-1}$. Тому
$$F(n)=\left(1+(p_1-1)+\left(p_1^2-p_1\right)+\ldots+\left(p_1^{\alpha_1}-p_1^{\alpha_1-1}\right)\right)\times\ldots\times$$
$$\times\left(1+(p_k-1)+\left(p_k^2-p_k\right)+\ldots+\left(p_k^{\alpha_k}-p_k^{\alpha_k-1}\right)\right)=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot p_k^{\alpha_k}=n,$$
що й вимагалось.

Приклад 10 Скільки є чисел на проміжку від 1 до 180, які не взаємно прості з числом 30?

Розв'язання.

Канонічні розклади чисел 180 і 30 такі: $180=2^2\cdot 3^2\cdot 5$, $30=2\cdot 3\cdot 5$. Отже, прості дільники чисел 180 і 30 однакові, а тому взаємно простими з 30 будуть ті і тільки ті числа, які взаємно прості з числом 180. На проміжку від 1 до 180 є $\varphi(180)=(2-1)(3-1)(5-1)\cdot 2\cdot 3=48$ чисел, взаємно простих з числом 180. А тому на цьому проміжку буде рівно 180−48=132 чисел, не взаємно простих з числом 30.

Приклад 11 Скільки є натуральних чисел, які менші за 120 і взаємно прості з числом 160?

Розв'язання.

$160 = 2^5 \cdot 5$, тому існує $\varphi(160) = (2-1)(5-1) \cdot 2^4 = 64$ чисел, які менші за 160 і взаємно прості з числом 160. А на проміжку від 120 до 160 взаємно простими з числом 160 будуть, очевидно, ті числа, які не діляться ні на 2 , ні на 5, тобто 121, 123, 127, 129, 131, 133, 137, 139, 141, 143, 147, 149, 151, 153, 157, 159 (всього 16 чисел). Отже, буде 64−16=48 чисел, які менші за 120 і взаємно прості з числом 160.

Приклад 12 Знайти кількість тих натуральних чисел n, які задовольняють умови $n < a$ і $\text{НСД}(a, n) = b$, якщо $a = 480$, $b = 20$.

Розв'язання.

За умовою $\text{НСД}(480, n) = 20$, тобто $n = 20m$, де m менше за 24 і взаємно просте з числом $\frac{480}{20} = 24$. Очевидно, що таких m буде $\varphi(24) = 8$, а тому натуральних чисел n, які задовольняють умову задачі, також буде 8.

Приклад 13 Знайти натуральне число n, якщо воно є добутком двох різних простих чисел, а $\varphi(n)$ дорівнює 24.

Розв'язання.

Якщо $n = pq$, де p і q – різні прості числа, то за теоремою 4 $\varphi(n) = (p-1)(q-1)$. Будемо вважати, що $p < q$. Розглянемо всі можливі розклади числа 24 у добуток двох множників: $24 = 1 \cdot 24 = 2 \cdot 12 = 3 \cdot 8 = 4 \cdot 6$. Отримаємо випадки

1) $\begin{cases} p-1=1, \\ q-1=24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p=2, \\ q=25 \end{cases}$ – не задовольняє умові (число 25 не є простим);

2) $\begin{cases} p-1=2, \\ q-1=12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p=3, \\ q=13; \end{cases}$

3) $\begin{cases} p-1=3, \\ q-1=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p=4, \\ q=9 \end{cases}$ – не задовольняє умові (числа не є простими);

4) $\begin{cases} p-1=4, \\ q-1=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p=5, \\ q=7. \end{cases}$

Тому для числа n лишаються лише дві можливості: $n = 3 \cdot 13 = 39$ і $n = 5 \cdot 7 = 35$.

Відповідь: 35 і 39.

7.4 Функція Мебіуса

Функція Мебіуса $\mu(n)$ визначається на множині натуральних чисел такими умовами: $\mu(1) = 1$; $\mu(n) = (-1)^s$, якщо канонічний розклад числа n має вигляд $n = p_1 p_2 \cdot \ldots \cdot p_s$, і $\mu(n) = 0$, якщо в канонічному розкладі

$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$ числа n хоча б один із показників $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ більший за 1 (тобто якщо n ділиться на квадрат хоча б одного простого числа).

Наприклад, $\mu(2) = 1$, $\mu(4) = 0$, $\mu(6) = \mu(2 \cdot 3) = 1$, $\mu(40) = \mu\left(2^3 \cdot 5\right) = 0$, $\mu(165) = \mu(3 \cdot 5 \cdot 11) = -1$.