8 СИСТЕМИ ЧИСЛЕННЯ

8.1 Поняття про системи числення та їх види

У процесі еволюції виникла потреба не тільки називати та записувати певні числа, але й виконувати дії над ними. Як результат практичної діяльності у різних народів були створені різні системи найменування і позначення чисел.

Системою числення називається сукупність знаків і правил, за допомогою яких можна записати і прочитати довільне ціле невід'ємне число. Для нас загально прийнятою є позиційна десяткова система числення. Умовними знаками для запису чисел вживаються цифри.

Перед кожною системою числення ставляться такі три вимоги:

1) будь-яке ціле невід'ємне число записується однозначно у даній системі числення;

2) числа легко порівнювати на основі їх запису;

3) алгоритми виконання арифметичних операцій над числами, записаними у даній системі числення, достатньо прості.

Для деяких цілих невід'ємних чисел є індивідуальні спеціальні знаки для їх позначення і запису. Ці знаки називаються *цифрами*, а самі числа, що позначаються цими знаками, називаються *вузловими*. Усі інші числа записуються за допомогою арифметичних операцій над вузловими числами і називаються *алгоритмічними*.

Системи числення поділяються на *позиційні* і *непозиційні*.

Система числення, в якій значення кожної цифри в довільному місці послідовності цифр, яка означає запис числа, не змінюється, називається *непозиційною*. У непозиційних системах числення значення цифри не залежить від того, яке місце (позицію) вона займає у записі числа.

З непозиційних систем числення на даний час найбільш відомою є римська система числення, якою у деяких випадках користуються і нині. У ній застосовується сім знаків: I –1, V – 5, X – 10, L – 50, C – 100, D – 500, M – 1000. Інші числа можна одержати у результаті додавання і віднімання вузлових чисел за певними правилами. Наприклад, у римській системі числення записом числа 1996 буде MCMXCVI (1000+1000 без 100+100 без 10+6), а 324 = CCCXXIV.

Недоліки непозиційної системи числення: відсутність нуля, складність виконання арифметичних операцій, необхідність введення нових цифр і вузлових чисел для запису великих чисел. Хоча римськими числами часто користуються при нумерації розділів у книгах, віків в історії та інше.

Щоб визначити число, недостатньо знати тип і алфавіт системи числення. Для цього необхідно ще додати правила, які дають змогу за значеннями цифр встановити значення числа.

Система числення, в якій значення кожної цифри залежить від місця в послідовності цифр у записі числа, називається *позиційною*. Це значно полегшує його запис, а також порівняння чисел і виконання арифметичних операцій над ними.

Щоб побудувати позиційну систему числення, зафіксуємо натуральне число $m>1$ (основу системи). Візьмемо довільне натуральне число n і почнемо ділити його на m з остачею, аж поки частка не стане рівною 0 (таке рано чи пізно трапиться, бо кожного разу частка зменшуватиметься):

$$n = q_1 m + r_0,\ 0 \le r_0 < m;$$
$$q_1 = q_2 m + r_1,\ 0 \le r_1 < m;$$
$$q_2 = q_3 m + r_2,\ 0 \le r_2 < m;$$
$$\dots$$
$$q_{k-1} = q_k m + r_{k-1},\ 0 \le r_{k-1} < m;$$
$$q_k = 0 \cdot m + r_k,\ 0 \le r_k < m.$$

Цей ланцюжок рівностей можна записати наступним чином:

$$n = q_1 m + r_0 = \left(q_2 m + r_1\right) m + r_0 = q_2 m^2 + r_1 m + r_0 = \left(q_3 m + r_2\right) m^2 + r_1 m + r_0 =$$
$$= q_3 m^3 + r_2 m^2 + r_1 m + r_0 = \ldots = q_k m^k + r_{k-1} m^{k-1} + \ldots + r_1 m + r_0 =$$
$$= r_k m^k + r_{k-1} m^{k-1} + \ldots + r_1 m + r_0.$$

Одержана рівність

$$n = r_k m^k + r_{k-1} m^{k-1} + \ldots + r_1 m + r_0, \tag{8.1}$$

де $r_k \ne 0$ і $0 \le r_j < m$ для всіх $j = \overline{0, k}$, називається зображенням числа n у позиційній системі числення з основою m (або в m-ковій позиційній системі числення чи просто в m-ковій системі).

Теорема 8.1 Запис натурального числа у позиційній системі числення з основою $m>1$ завжди існує і єдиний.

Сума $r_k m^k + r_{k-1} m^{k-1} + \ldots + r_1 m + r_0$ коротко записується $\overline{r_k\, r_{k-1} \ldots r_1 r_0}_{\,m}$. Числа $1 = m^0, m^1, m^2, \ldots, m^k$ називаються *розрядними одиницями*, а доданки $r_0 m^0, \ldots, r_{k-1} m^{k-1}, r_k m^k$ – *розрядними доданками*.

При читанні числа, записаного у позиційній системі числення з основою m, послідовно називають цифри числа, починаючи з найвищого розряду і основу системи числення. Наприклад, число 43065_8 читається: «чотири три нуль шість п’ять у системі числення з основою вісім».

Запис числа у позиційній системі числення з основою m показує, скільки одиниць найнижчого розряду містить дане число і як вони розподілені у числі як одиниці вищих розрядів.

Приклад 8.1 $A_{10} = 123 = 1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 = 1 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 3 \cdot 1 = 123_{10}$.

Приклад 8.2 $A_5 = 123_5 = 1 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5^1 + 3 \cdot 5^0 = 38_{10}$.

Як цифри в позиційних системах числення використовується звичайно арабська символіка 0, 1, ..., 9, до якої в разі необхідності додаються букви латинського алфавіту, наприклад, *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F* для шістнадцятирічної системи числення. Цифра *A* в цьому випадку відповідає десятковому числу 10, *B* – 11, *C* – 12, *D* – 13, *E* – 14, *F* – 15.

Позиційна система запису легко поширюється на від'ємні цілі числа: щоб записати число $n<0$ в m-ковій системі числення, ми просто ставимо знак «–» перед m-ковим записом числа $|n|$.

Приклад 8.3 Записати в 7-ковій системі число 25148.

Розв'язання.

Скористаємося алгоритмом, описаним вище:

$$25148 = 3592\cdot 7+4 = (513\cdot 7+1)\cdot 7+4 = 513\cdot 7^2+1\cdot 7+4 =$$

$$= (73\cdot 7+2)\cdot 7^2+1\cdot 7+4 = 73\cdot 7^3+2\cdot 7^2+1\cdot 7+4 =$$

$$= (10\cdot 7+3)\cdot 7^3+2\cdot 7^2+1\cdot 7+4 = 10\cdot 7^4+3\cdot 7^3+2\cdot 7^2+1\cdot 7+4 =$$

$$= (1\cdot 7+3)\cdot 7^4+3\cdot 7^3+2\cdot 7^2+1\cdot 7+4 = 1\cdot 7^5+3\cdot 7^4+3\cdot 7^3+2\cdot 7^2+1\cdot 7+4.$$

Отже, $25148 = 133214_7$.

Приклад 8.4 Знайти в 7-ковій системі всі 6-цифрові числа вигляду $abcabc_7$, які є точними квадратами.

Розв'язання.

$$abcabc_7 = a\cdot 7^5+b\cdot 7^4+c\cdot 7^3+a\cdot 7^2+b\cdot 7+c = a\cdot 7^2\left(7^3+1\right)+$$

$$+b\cdot 7\left(7^3+1\right)+c\left(7^3+1\right) = \left(a\cdot 7^2+b\cdot 7+c\right)\left(7^3+1\right) = \left(a\cdot 7^2+b\cdot 7+c\right)\cdot 43\cdot 2\cdot 2^2.$$

Тому $abcabc_7$ буде точним квадратом тоді й лише тоді, коли $a\cdot 7^2+b\cdot 7+c = 43\cdot 2\cdot k^2$ для деякого натурального k. Оскільки $abc_7<7^3$, тобто $a\cdot 7^2+b\cdot 7+c<7^3$, то з нерівності $43\cdot 2\cdot k^2<7^3$ маємо: $k^2<\dfrac{7^3}{43\cdot 2}<4$.

Тому $k=1$, звідки $abc_7 = 86 = 12\cdot 7+2 = (1\cdot 7+5)\cdot 7+2 = 1\cdot 7^2+5\cdot 7+2 = 152_7$.

Отже, шуканим числом є лише 152152_7.

8.2 Арифметичні дії в позиційних системах

Алгоритми виконання арифметичних операцій над ними у різних позиційних системах числення здійснюються так само, як і у десятковій системі числення. При цьому потрібно враховувати основу системи числення і пам'ятати, що m одиниць нижчого розряду дорівнюють одній одиниці наступного вищого розряду, а одна одиниця вищого розряду дорівнює m одиницям сусіднього нижчого розряду.

Проілюструємо ці правила прикладами.

1) Додавання

Приклад 8.5 Додати два числа $A_2 = 1101$ і $B_2 = 1011$ у двійковій системі числення.

Розв'язання. *Перевірка.*

$+\ 1101_2$

$1101_2 = 1\cdot 2^3+1\cdot 2^2+0\cdot 2^1+1\cdot 2^0 = 13_{10}$,

$$\begin{array}{r} 1011_2 \\ \hline 11000_2 \end{array}$$

$1011_2 = 1\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0 = 11_{10}$,

$11000_2 = 1\cdot 2^4 + 1\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 0\cdot 2^0 = 24_{10}$,

$13_{10} + 11_{10} = 24_{10}$.

Приклад 8.6 Скласти два числа $A_8 = 517$ і $B_8 = 243$ у восьмирічній системі числення.

Розв'язання. *Перевірка.*

$$\begin{array}{r} 243_8 \\ +\ 517_8 \\ \hline 762_8 \end{array}$$

$243_8 = 2\cdot 8^2 + 4\cdot 8^1 + 3\cdot 8^0 = 163_{10}$,

$517_8 = 5\cdot 8^2 + 1\cdot 8^1 + 7\cdot 8^0 = 335_{10}$,

$762_8 = 7\cdot 8^2 + 6\cdot 8^1 + 2\cdot 8^0 = 498_{10}$,

$163_{10} + 335_{10} = 498_{10}$.

Приклад 8.7 Скласти два числа $A_{16} = A1B$ і $B_{16} = 11F$ у шістнадцятирічній системі числення.

Розв'язання. *Перевірка.*

$$\begin{array}{r} A1B_{16} \\ +\ 11F_{16} \\ \hline B3A_{16} \end{array}$$

$A1B_{16} = 10\cdot 16^2 + 1\cdot 16^1 + 11\cdot 16^0 = 2560 + 16 + 11 = 2587_{10}$,

$11F_{16} = 1\cdot 16^2 + 1\cdot 16^1 + 15\cdot 16^0 = 256 + 16 + 15 = 287_{10}$,

$B3A_{16} = 11\cdot 16^2 + 3\cdot 16^1 + 10\cdot 16^0 = 2816 + 48 + 10 = 2874_{10}$,

$2587_{10} + 287_{10} = 2874_{10}$.

2) *Віднімання* (не забуваємо враховувати 1 займу зі старшого розряду)

Приклад 8.8 Відняти від числа $A_2 = 1101$ число $B_2 = 1011$.

Розв'язання. *Перевірка.*

$$\begin{array}{r} 1101_2 \\ -\ 1011_2 \\ \hline 0010_2 \end{array}$$

$1101_2 = 1\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0 = 13_{10}$,

$1011_2 = 1\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0 = 11_{10}$,

$0010_2 = 0\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 0\cdot 2^0 = 2_{10}$,

$13_{10} - 11_{10} = 2_{10}$.

Приклад 8.9 Відняти від числа $A_8 = 517$ число $B_8 = 243$.

Розв'язання. *Перевірка.*

$$\begin{array}{r} 517_8 \\ -\ 243_8 \\ \hline 254_8 \end{array}$$

$517_8 = 5\cdot 8^2 + 1\cdot 8^1 + 7\cdot 8^0 = 335_{10}$,

$243_8 = 2\cdot 8^2 + 4\cdot 8^1 + 3\cdot 8^0 = 163_{10}$,

$254_8 = 2\cdot 8^2 + 5\cdot 8^1 + 4\cdot 8^0 = 172_{10}$,

$335_{10} - 163_{10} = 172_{10}$.

Приклад 8.10 Відняти від числа $A_{16} = A1B$ число $B_{16} = 11F$.

Розв'язання. *Перевірка.*

$$\begin{array}{r} A1B_{16} \\ -\ 11F_{16} \\ \hline 8FC_{16} \end{array}$$

$A1B_{16} = 10\cdot 16^2 + 1\cdot 16^1 + 11\cdot 16^0 = 2560 + 16 + 11 = 2587_{10}$,

$11F_{16} = 1\cdot 16^2 + 1\cdot 16^1 + 15\cdot 16^0 = 256 + 16 + 15 = 287_{10}$,

$8FC_{16} = 8\cdot 16^2 + 15\cdot 16^1 + 12\cdot 16^0 = 2048 + 240 + 12 = 2300_{10}$,

$$2587_{10} - 287_{10} = 2300_{10}.$$

Аналогічні результати можна отримати, якщо скористатися готовими (або скласти самим) таблицями додавання та віднімання чисел за основою m (у додатку наведені такі таблиці для чисел з основою 2, 8, 10, 16).

3) Множення

Операція множення виконується на базі таблиць множення й додавання за основою m. Ці таблиці будуються шляхом множення того, що множать (зліва) на множник (справа) у десятковій системі числення, і потім результат множення (добуток) подається в іншій системі числення шляхом розкладання за степенями відповідно до числової функції для даної системи числення.

Наприклад, для десяткової системи числення після множення 5 на 4 отримуємо результат 20. Якщо подати цей результат у восьмеричній системі числення, отримаємо $20_{10} = 2 \cdot 8^1 + 4 \cdot 8^0 = 24_8$.

Приклад 8.11 Перемножити числа $A_2 = 1101$ і $B_2 = 1011$.

Розв'язання.

$$\begin{array}{r} 1101_2 \\ \times \quad 1011_2 \\ \hline 1101 \\ 1101 \\ 0000 \\ 1101 \\ \hline 10001111_2 \end{array}$$

Перевірка.

$1101_2 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 13_{10}$,

$1011_2 = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 11_{10}$,

$10001111_2 = 1 \cdot 2^7 + 0 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + {}$
$+ 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 128 + 8 + 4 + 2 + 1 = 143_{10}$,

$13_{10} \times 11_{10} = 143_{10}$.

Приклад 8.12 Помножити число $A_8 = 517$ на число $B_8 = 243$ у восьмирічній системі числення.

Розв'язання.

$$\begin{array}{r} 243_8 \\ \times \quad 517_8 \\ \hline 1755 \\ 2474 \\ 1236 \\ \hline 152515_8 \end{array}$$

Перевірка.

$517_8 = 5 \cdot 8^2 + 1 \cdot 8^1 + 7 \cdot 8^0 = 335_{10}$,

$243_8 = 2 \cdot 8^2 + 4 \cdot 8^1 + 3 \cdot 8^0 = 163_{10}$,

$152515_8 = 1 \cdot 8^5 + 5 \cdot 8^4 + 2 \cdot 8^3 + 5 \cdot 8^2 + 1 \cdot 8^1 + 5 \cdot 8^0 =$
$= 32768 + 20480 + 1024 + 320 + 8 + 5 = 54605_{10}$,

$335_{10} \times 163_{10} = 54605_{10}$.

Приклад 8.13 Помножити число $A_{16} = A1B$ на число $B_{16} = 11F$ у шістнадцятирічній системі числення.

Розв'язання.

$$\begin{array}{r} A1B_{16} \\ \times \quad 11F_{16} \\ \hline 9795 \\ \mathrm{A1B} \\ \mathrm{A1B} \\ \hline B5445_{16} \end{array}$$

Перевірка.

$A1B_{16} = 10 \cdot 16^2 + 1 \cdot 16^1 + 11 \cdot 16^0 = 2560 + 16 + 11 = 2587_{10}$,

$11F_{16} = 1 \cdot 16^2 + 1 \cdot 16^1 + 15 \cdot 16^0 = 256 + 16 + 15 = 287_{10}$,

$B5445_{16} = 11 \cdot 16^4 + 5 \cdot 16^3 + 4 \cdot 16^2 + 4 \cdot 16^1 + 5 \cdot 16^0 =$
$= 720896 + 20480 + 1024 + 64 + 5 = 742469_{10}$,

$2587_{10} \times 287_{10} = 742469_{10}$.

4) Ділення

Операція ділення виконується на основі таблиць множення й віднімання за основою m за звичайними правилами до отримання залишку меншого дільника.

Приклад 8.14 Поділити число 1101_2 на число 1011_2 у двійковій системі числення.

Розв'язання.

$$\begin{array}{r|l} 1101 & 1011 \\ \cline{2-2} -\,1011 & 1 \\ \cline{1-1} 10 & \end{array}$$

Перевірка.

Частка від ділення, очевидно, дорівнює одиниці, а залишок $10_2 = 2_{10}$. Ділення числа $13_{10} = 1101_2$ на число $11_{10} = 1011_2$ у десятковій системі числення дасть той самий результат.

$$\begin{array}{r|l} 13 & 11 \\ \cline{2-2} -\,11 & 1 \\ \cline{1-1} 2 & \end{array}$$

Приклад 8.15 Поділити число 517_8 на число 243_8 у восьмеричній системі числення.

Розв'язання.

$$\begin{array}{r|l} 517 & 243 \\ \cline{2-2} -\,506 & 2 \\ \cline{1-1} 11 & \end{array}$$

Перевірка.

$517_8 = 5 \cdot 8^2 + 1 \cdot 8^1 + 7 \cdot 8^0 = 335_{10}$,

$243_8 = 2 \cdot 8^2 + 4 \cdot 8^1 + 3 \cdot 8^0 = 163_{10}$,

$11_8 = 9_{10}$,

$2_8 = 2_{10}$,

$$\begin{array}{r|l} 335_{10} & 163_{10} \\ \cline{2-2} -\,326 & 2 \\ \cline{1-1} 9 & \end{array}$$

Приклад 8.16 Поділити число $A1B_{16}$ на число $11F_{16}$ у шістнадцятирічній системі числення.

Розв'язання.

$$\begin{array}{r|l} A1B_{16} & 11F_{16} \\ \cline{2-2} -\,A17 & 9 \\ \cline{1-1} 4 & \end{array}$$

Перевірка.

$A1B_{16} = 10 \cdot 16^2 + 1 \cdot 16^1 + 11 \cdot 16^0 = 2560 + 16 + 11 = 2587_{10}$,

$11F_{16} = 1 \cdot 16^2 + 1 \cdot 16^1 + 15 \cdot 16^0 = 256 + 16 + 15 = 287_{10}$,

$$\begin{array}{r|l} 2587_{10} & 287_{10} \\ \cline{2-2} -\,2583 & 9 \\ \cline{1-1} 4 & \end{array}$$

5) *Порівняння*

Приклад 8.17 Число $32413_8 > 32235_8$, бо 3=3, 2=2, а 4>2.

Приклад 8.18 Обчислити значення виразу, який складений з чисел, що записані у системі числення з основою 5:

$$\left(2342_5 + 342_5 - 442_5\right) \cdot 32_5.$$

Розв'язання.

1) $$\begin{array}{r} 2342_5 \\ +\;\;342_5 \\ \hline 3234_5 \end{array}$$

При додаванні користуємося таким алгоритмом:

– 2+2=4, 4 у п'ятірковій системі числення буде 4;

– 4+4=8, в числі 8 міститься одна «п'ятірка» і 3 одиниці $8 = 1 \cdot 5 + 3$;

– 3+3=6 і ще одна «п’ятірка», 6+1=7, $7=1\cdot 5+2$;
– тому до 2 додаємо ще 1: 2+1=3.

2)
$$\begin{array}{r} 3234_5 \\ -\quad 442_5 \\ \hline 2242_5 \end{array}$$

Будемо міркувати так:
– у п’ятірковій системі числення 4–2=2;
– у п’ятірковій системі числення від 3 відняти 4 неможна, тому з вищого розряду позичаємо одну «п’ятірку» і отримуємо: 3+5=8, а 8–4=4;
– від залишеної одиниці не можемо відняти 4, тому знову з вищого розряду позичаємо «п’ятірку» і отримуємо: 1+5=6, а 6–4=2;
– у цьому розряді після позичання залишається 2.

3)
$$\begin{array}{r} 2242_5 \\ \times\quad 32_5 \\ \hline 10034_5 \\ +\ 12331_5 \\ \hline 133344_5 \end{array}$$

Продовжимо міркування:
– $2\cdot 2=4$;
– $4\cdot 2=8$, $8=1\cdot 5+3$;
– $2\cdot 2=4$, 4+1=5, $5=1\cdot 5+0$;
– $2\cdot 2=4$, 4+1=5, $5=1\cdot 5+0$;
– $2\cdot 3=6$, $6=1\cdot 5+1$;
– $4\cdot 3=12$, 12+1=13, $13=2\cdot 5+3$;
– $2\cdot 3=6$, 6+2=8, $8=1\cdot 5+3$;
– $2\cdot 3=6$, 6+1=7, $7=1\cdot 5+2$.

Виконавши додавання в п’ятірковій системі числення, одержимо: 133344_5.

Відповідь. 133344_5.

8.3 Перехід до іншої позиційної системи

Одне й те ж число може бути записане у різних позиційних системах числення. Часто потрібно, знаючи запис числа у системі числення з основою m, записати його у системі числення з основою p. Способи переходу від однієї системи числення до іншої ґрунтуються на тому, що у кожному числі всіх одиниць найнижчого розряду у будь-якій системі числення – однакова кількість, тільки як одиниці вищих розрядів у них вони розподілені по-різному.

Є два основні способи здійснення такого переходу.

1 спосіб. *Переведення чисел у систему числення шляхом ділення на її основу*

Алгоритм переведення чисел із системи числення з основою m у систему числення з основою p є універсальним і найбільш широко використовується на практиці.

Він містить такі кроки:

1. Розділити число, яке переводять, у системі числення з основою m на основу p за правилом системи числення з основою m.

2. Перевірити, чи не дорівнює частка нулю. Якщо не дорівнює, то прийняти її за нове число й повернутися до пункту 1.

3. Якщо частка дорівнює нулю, то виписати всі отримані залишки від ділення в порядку, зворотному їх отриманню.

4. Отриманий запис є записом числа в системі числення з основою p.

Приклад 8.19 Перевести число 38_{10} у п’ятирічну систему числення.

Розв’язання.

```
_ 38 | 5
  35 |-----
 ----  _ 7 | 5
   3     5 |-----
        ---  _ 1 | 5
         2     0 |-----
             ----  0
               1
```

Відповідь. $38_{10} = 123_5$.

Приклад 8.20 Перевести число 11 у двійкову систему числення.

Розв’язання.

```
_ 11 | 2
  10 |-----
 ----  _ 5 | 2
   1     4 |-----
        ---  _ 2 | 2
         1     2 |-----
             ----  _ 1 | 2
               0     0 |-----
                   ----  0
                     1
```

Відповідь. $11_{10} = 1011_2$.

Приклад 8.21 Перевести шістнадцятирічне число $9BE5_{16}$ у десяткову систему числення й виконати перевірку розв’язку.

Розв’язання.

Якщо врахувати, що в шістнадцятирічній системі числення $10_{10} = A$, то ділимо число $9BE5_{16}$ на A за правилами шістнадцятирічної системи числення, користуючись відповідними таблицями множення й віднімання.

```
_ 9BE5 | A
  96   |------
 -----  _ F96 | A
 _ 5E     A   |------
   5A    ----  _ 18F | A
  ----     59    14  |------
  _ 45   _ 50   ----  _ 27 | A
    3C   ----  _ 4F     1E |------
   ----  _ 96    46    ----  _ 3 | A
     9     96   ----     9     0 |----
          ----     9         ----  0
             0                 3
```

Перевірка.

```
_ 39909 | 16
  32    |-------
 -----   _ 2494 | 16
  _ 79     16   |-------
    64    -----  _ 155 | 16
   ----   _ 89     144 |-------
  _ 150     80    -----  _ 9 | 16
    144    ----     11     0 |-----
   -----  _ 94           ----  0
    _ 99    80             9
      64   ----
     ----     4
```

```
  5
```

Відповідь. $9BE5_{16} = 39909_{10}$.

Необхідність введення додаткових символів у шістнадцятирічній системі числення може спричинити при переведенні деякі труднощі, оскільки необхідно весь час звертатись до таблиць віднімання й множення в цій системі.

Ці труднощі можна зменшити, якщо замість символів *A, B, C, D, E, F* у шістнадцятирічній системі числення скористатися десятковими цифрами 10, 11, 12, 13, 14, 15 відповідно. При цьому треба виокремити їх з обох боків у числах дужками. Тоді шістнадцятирічне число $99BE5_{16} = 9(11)(14)5_{16}$, а переведення його до десяткової системи числення буде маги такий вигляд:

```
_ 9(11)(14)5 | 10
  96          -----------
  ---------  _ (15)96 | 10
 _ 5(14)       (10)     ---------
   5(10)       ----   _ 18(15) | 10
   -----      _ 59      14       ---------
  _  45         50      -----  _ 27   | 10
     3(12)      --     _ 4(15)   1(14) ----------
     -----     _ 96      46      ---- _ 3 | 10
       9         96      ----      9    0   0
                 --        9            -
                  0                     3
```

При знаходженні частки від ділення 9(11) на 10 можна перевести 9(11) із шістнадцятирічної системи числення в десяткову $9 \cdot 16^1 + 11 \cdot 16^0 = 155_{10}$.

Тоді ділення 155 на 10 дасть ціле значення 15, яке й ставимо як першу цифру частки. Потім після множення 15 на 10 відбувається переведення числа 150_{10} у шістнадцятирічну систему числення ($150_{10} = 96_{16}$), і тепер уже це число 96_{16} віднімається від того, що ділили. Аналогічно можна отримати й цифри інших часток.

Приклад 8.22 Перевести шістнадцятирічне число $7B4_{16}$ у десяткову систему числення.

Розв'язання.

Подамо число $7B4_{16}$ у вигляді числа 7(11)4 і розділимо його на $A = 10$:

```
_ 7(11)4 | 10
  78       ----------
  ----   _ (12)5 | 10
 _ 34      10      ---------
   32      ----  _ 13 | 10
   --    _ 25      10   --------
    2      1(14)   --  _ 1 | 10
           -----    9    0   0
             7           -
                         1
```

Перевірка.

```
_ 1972 | 16
  16     ----------
  ----  _ 123 | 16
 _ 37     112   ------
   32     ---     7
   --      11
 _ 52
   48
   --
    4
```

Відповідь. $7B4_{16} = 1972_{10}$.

2 спосіб. *Переведення чисел у систему числення шляхом множення*

Теоретичною основою способу множення є таке представлення числа n, записаного у позиційній системі числення з основою m

$$n = r_k m^k + r_{k-1} m^{k-1} + r_{k-2} m^{k-2} + ... + r_2 m^2 + r_1 m^1 + r_0 =$$
$$= \left(\left(\left(...\left(r_k m^k + r_{k-1}\right) m + r_{k-2}\right) m + ... + r_2\right) m + r_1\right) m + r_0 .$$

Якщо виконати усі зазначені тут операції у системі числення з основою p, то одержане число буде також записане у системі числення з основою p.

Суть методу множення:

1. Якщо дане число менше p, то воно запишеться у системі числення з цією основою як одноцифрове.

2. Якщо дане число у системі числення з основою m має вищі розрядні одиниці, то множимо його кількість одиниць найвищого розряду на m і до одержаного добутку додаємо кількість одиниць наступного нижчого розряду. Одержану суму множимо на m і до добутку додаємо кількість одиниць наступного нижчого розряду. Ці операції проводимо доти, поки не додамо кількість одиниць найнижчого розряду даного числа. На цьому процес закінчено.

Для зручності самі обчислення зручно записувати в таблицю (так звану схему Горнера), всі елементи якої обчислюються за одним і тим же правилом:

	r_k	r_{k-1}	r_{k-2}	...	r_1	r_0
m	$c_k = r_k$	$c_{k-1} =$ $= c_k \cdot m + r_{k-1}$	$c_{k-2} =$ $= c_{k-1} \cdot m + r_{k-2}$	...	$c_1 = c_2 \cdot m + r_1$	$c_0 = c_1 \cdot m + r_0$

3. Обчислення проводяться у новій системі числення. А тому методом множення користуються тоді, коли $m < p$, бо тоді всі цифри і основа старої системи числення є цифрами нової системи числення, або ж коли переходять від будь-якої системи числення до десяткової.

Приклад 8.23 Число 3566_7 записати у десятковій системі числення.

Розв'язання.

Перейдемо до десяткової системи числення і скористаємося методом множення. Обчислення проводяться у десятковій системі числення:

	3	5	6	6
7	3	$3 \cdot 7 + 5 = 26$	$26 \cdot 7 + 6 = 188$	$188 \cdot 7 + 6 = 1322$

Відповідь. $3566_7 = 1322_{10}$.

Приклад 8.24 Число 2011_3 записати за основою 7.

Розв'язання.

Заміняємо число 3 і цифри числа 2011_3 їх записами в 7-ковій системі й далі всі обчислення проводимо в цій системі (нижній індекс 7, який вказує на основу системи, знову для зручності опускаємо):

	2	0	1	1

3	2	$2\cdot3+0=6$	$6\cdot3+1=25$	$25\cdot3+1=112$

Відповідь. $2011_3=112_7$.

Приклад 8.25 Перевести число 1101110_2 у десяткову систему числення.

Розв'язання.

Заміняємо число 2 і цифри числа 1101110_2 їх записами в 10-ковій системі й далі всі обчислення проводимо в цій системі (нижній індекс 10, який вказує на основу системи, знову для зручності опускаємо):

	1	1	0	1	1	1	0
2	1	$1\cdot2+1=3$	$3\cdot2+0=6$	$6\cdot2+1=13$	$13\cdot2+1=27$	$27\cdot2+1=55$	$55\cdot2+0=110$

Відповідь. $1101110_2=110_{10}$.

Приклад 8.26 Перевести число 521_8 у десяткову систему числення.

Розв'язання.

Заміняємо число 8 і цифри числа 521_8 їх записами в 10-ковій системі й далі всі обчислення проводимо в цій системі (нижній індекс 10, який вказує на основу системи, знову для зручності опускаємо):

	5	2	1
8	5	$5\cdot8+2=42$	$42\cdot8+1=337$

Відповідь. $521_8=337_{10}$.