4 ЛАНЦЮГОВІ ДРОБИ

Раціональні числа можна зображувати у вигляді звичайних дробів $\frac{a}{b}$, де $a \in \mathbb{Z}$ і $b \in \mathbb{N}$, або у вигляді періодичних дробів. У різних способів зображення є свої переваги й недоліки. Так, наприклад, зображення раціонального числа у вигляді періодичного дробу залежить не тільки від самого числа, а ще й від основи системи числення, а зображення у вигляді звичайного дробу не є однозначним (дроби $\frac{6}{4}$ і $\frac{9}{6}$ зображують одне й те ж раціональне число).

Ми розглянемо ще один спосіб зображення раціональних чисел у вигляді так званих неперервних або ланцюгових дробів, причому звернемо увагу як на переваги, так і на недоліки цього способу.

Нагадаємо послідовність рівностей, які з'являються, коли за допомогою алгоритму Евкліда шукають найбільший спільний дільник чисел a і b:

$$\begin{aligned}
&a = bq_0 + r_0,\\
&b = r_0 q_1 + r_1,\\
&r_0 = r_1 q_2 + r_2,\\
&\dots\\
&r_{n-2} = r_{n-1} q_{n-1} + r_n,\\
&r_{n-1} = r_n q_n,
\end{aligned} \tag{1}$$

де $b > r_0 > r_1 > ... > r_n > 0$, $q_0 \geq 1$, ..., $q_{n-1} \geq 1$ і $q_n > 1$.

Перепишемо ці рівності в рівносильному вигляді:

$$\begin{aligned}
&\frac{a}{b} = q_0 + \frac{r_0}{b},\\
&\frac{b}{r_0} = q_1 + \frac{r_1}{r_0},\\
&\frac{r_0}{r_1} = q_2 + \frac{r_2}{r_1},\\
&\dots\\
&\frac{r_{n-2}}{r_{n-1}} = q_{n-1} + \frac{r_n}{r_{n-1}},\\
&\frac{r_{n-1}}{r_n} = q_n.
\end{aligned} \tag{2}$$

Кожна з рівностей (2) описує просту процедуру: виділення цілої частини з неправильного дробу, оскільки $b > r_0 > r_1 > ... > r_n > 0$. Використовуючи ці рівності, можна виразити число $\frac{a}{b}$ через числа q_0, ..., q_{n-1}, q_n:

$$\frac{a}{b}=q_0+\frac{r_0}{b}=q_0+\cfrac{1}{q_1+\cfrac{r_1}{r_0}}=q_0+\cfrac{1}{q_1+\cfrac{1}{q_2+\cfrac{r_2}{r_1}}}=\ldots=q_0+\cfrac{1}{q_1+\cfrac{1}{q_2+\ddots+\cfrac{1}{q_n}}}. \quad (3)$$

Останній із виразів у рівностях (3) називаються (*скінченним*) *ланцюговим дробом*. Ціле число q_0 і натуральні числа q_1, ..., q_n, $q_n \neq 1$, називають *елементами ланцюгового дробу* або його *неповними частками*. З метою скорочення запису ланцюговий дріб символічно записують у вигляді $[q_0; q_1, ..., q_n]$; крапка з комою після q_0 підкреслює значення q_0 як цілої частини дробу. Має місце наступна

Теорема 1 Кожне раціональне число можна зобразити у вигляді ланцюгового дробу $[q_0; q_1, ..., q_n]$, $q_n \neq 1$, причому таке зображення єдине.

Із кожним ланцюговим дробом $[q_0; q_1, ..., q_n]$ пов'язується набір чисел $[q_0]$, $[q_0; q_1]$, $[q_0; q_1, q_2]$, ..., $[q_0; q_1, ..., q_n]$. Запишемо останні у вигляді звичайних дробів:

$$[q_0]=\frac{q_0}{1}=\frac{P_o}{Q_0},$$

$$[q_0; q_1]=q_0+\frac{1}{q_1}=\frac{q_0q_1+1}{q_1}=\frac{P_1}{Q_1},$$

$$[q_0; q_1, q_2]=q_0+\cfrac{1}{q_1+\cfrac{1}{q_2}}=\frac{(q_0q_1+1)q_2+q_0}{q_1q_2+1}=\frac{P_2}{Q_2},$$

$$\ldots . \quad (4)$$

Дріб $\alpha_k=\dfrac{P_k}{Q_k}$, $k=\overline{0, n}$ називатимемо k-им *раціональним вкороченням* (або k-им *підхідним дробом*) ланцюгового дробу $[q_0; q_1, ..., q_n]$.

Дуже простий рекурентний метод обчислення раціональних вкорочень ланцюгового дробу $[q_0; q_1, ..., q_n]$ дає наступна

Теорема 2 Чисельники і знаменники раціональних вкорочень $\alpha_k=\dfrac{P_k}{Q_k}$, $k=\overline{0, n}$ ланцюгового дробу $[q_0; q_1, ..., q_n]$ задовольняють такі рекурентні співвідношення:

$$P_o=q_0,\quad P_1=q_1P_0+1,\quad P_k=q_kP_{k-1}+P_{k-2}\quad \text{для } 1<k\le n;$$
$$Q_o=1,\quad Q_1=q_1,\quad Q_k=q_kQ_{k-1}+Q_{k-2}\quad \text{для } 1<k\le n. \quad (5)$$

Доведення (індукцією по k).

Результати обчислень чисельників і знаменників раціональних вкорочень ланцюгового дробу за формулами (5) зручно записувати в таблицю

Таблиця 1 – Обчислення чисельників і знаменників раціональних вкорочень ланцюгового дробу

k	–	–	0	1	…	n
q_k	–	–	q_0	q_1	…	q_n
P_k	0	1	q_0	$q_1 P_0 + 1$	…	$q_n P_{n-1} + P_{n-2}$
Q_k	1	0	1	q_1	…	$q_n Q_{n-1} + Q_{n-2}$

Результати обчислень займають два нижніх рядки цієї таблиці, причому два перших стовпчики відіграють допоміжну роль і заповнюються завжди однаково. Решта клітинок заповнюється зліва направо з використанням рівностей (5) (кожного разу використовується вміст двох клітинок зліва від даної і значення неповної частки, що стоїть над даною клітинкою).

Приклад 1 Записати число $\frac{677}{263}$ у вигляді ланцюгового дробу і знайти всі раціональні вкорочення цього дробу.

Розв'язання.

Застосовуючи алгоритм Евкліда, одержуємо:

$$677 = 2 \cdot 263 + 151,$$
$$262 = 1 \cdot 151 + 112,$$
$$151 = 1 \cdot 112 + 39,$$
$$112 = 2 \cdot 39 + 34,$$
$$39 = 1 \cdot 34 + 5,$$
$$34 = 6 \cdot 5 + 4,$$
$$5 = 1 \cdot 4 + 1,$$
$$4 = 4 \cdot 1.$$

Тому маємо такі неповні частки: $q_0 = 2$, $q_1 = 1$, $q_2 = 1$, $q_3 = 2$, $q_4 = 1$, $q_5 = 6$, $q_6 = 1$, $q_7 = 4$, тобто $\frac{677}{263} = [2; 1, 1, 2, 1, 6, 1, 4]$. Для знаходження раціональних вкорочень заповнимо таблицю:

k	–	–	0	1	2	3	4	5	6	7
q_k	–	–	2	1	1	2	1	6	1	4
P_k	0	1	2	3	5	13	18	121	139	677
Q_k	1	0	1	1	2	5	7	47	54	263

Отже, $\frac{P_0}{Q_0} = 2$, $\frac{P_1}{Q_1} = 3$, $\frac{P_2}{Q_2} = \frac{5}{2}$, $\frac{P_3}{Q_3} = \frac{13}{5}$, $\frac{P_4}{Q_4} = \frac{18}{7}$, $\frac{P_5}{Q_5} = \frac{121}{47}$, $\frac{P_6}{Q_6} = \frac{139}{54}$, $\frac{P_7}{Q_7} = \frac{677}{263}$.

Приклад 2 Записати ланцюговий дріб [0; 4, 2, 4, 1, 1, 6] у вигляді звичайного дробу.

Розв'язання.

Заповнимо таблицю 1:

k	–	–	0	1	2	3	4	5	6
q_k	–	–	0	4	2	4	1	1	6
P_k	0	1	0	1	2	9	11	20	131
Q_k	1	0	1	4	9	40	49	89	583

Отже, даний ланцюговий дріб дорівнює $\dfrac{131}{583}$.

Тепер встановимо ряд важливих *властивостей раціональних вкорочень* ланцюгових дробів:

1) Для довільного номера $k \ge 0$ знаменники Q_k і Q_{k+1} двох послідовних раціональних вкорочень ланцюгового дробу є взаємно простими.

2) Для $k = \overline{1, n}$ виконується рівність

$$P_k Q_{k-1} - P_{k-1} Q_k = (-1)^{k-1}. \tag{6}$$

Наслідок 1 Усі раціональні вкорочення ланцюгового дробу є нескоротними дробами, тобто $\text{НСД}(P_k, Q_k) = 1$ для всіх k, $0 \le k \le n$.

Наслідок 2 а) Для всіх k, $1 \le k \le n$, виконується рівність

$$\frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}} - \frac{P_k}{Q_k} = \frac{(-1)^k}{Q_k Q_{k-1}}.$$

б) Для всіх k, $2 \le k \le n$, виконується рівність

$$\frac{P_{k-2}}{Q_{k-2}} - \frac{P_k}{Q_k} = \frac{(-1)^k q_k}{Q_k Q_{k-2}}.$$

Наслідок 3 Нехай $ax + by = c$ – лінійне діофантове рівняння із взаємно простими коефіцієнтами a і b, а $\dfrac{a}{b} = [q_0; q_1, ..., q_n]$ – зображення числа $\dfrac{a}{b}$ у вигляді ланцюгового дробу. Тоді всі цілі розв'язки рівняння $ax + by = c$ описуються рівностями

$$x = (-1)^{n-1} Q_{n-1} c - bt, \qquad y = (-1)^{n-1} P_{n-1} c + at,\ t \in \mathbb{Z}. \tag{7}$$

Зауваження. Якщо a і b не взаємно прості, то рівняння $ax + by = c$ має цілі розв'язки тоді й лише тоді, коли c ділиться на $\text{НСД}(a, b)$. Якщо ця умова виконується, то після ділення на $\text{НСД}(a, b)$ переходимо до рівняння, що задовольняє умову наслідку 3. Отже, в цьому випадку цілі розв'язки рівняння $ax + by = c$ описуються рівностями

$$x = (-1)^{n-1} Q_{n-1} c_0 - b_0 t, \qquad y = (-1)^{n-1} P_{n-1} c_0 + a_0 t,\ t \in \mathbb{Z}, \tag{8}$$

де $a_0 = \dfrac{a}{\text{НСД}(a, b)}$, $b_0 = \dfrac{b}{\text{НСД}(a, b)}$, $c_0 = \dfrac{c}{\text{НСД}(a, b)}$.

Приклад 3 Знайти всі цілі розв'язки рівняння $119x - 68y = 34$.

Розв'язання.

За алгоритмом Евкліда знаходимо:

$$119 = 1 \cdot 68 + 51,$$
$$68 = 1 \cdot 51 + 17,$$
$$51 = 3 \cdot 17.$$

Отже, $\frac{119}{68} = [1; 1, 3]$ і $\text{НСД}(119, 68) = 17$. Оскільки $34 \vdots 17$, то дане рівняння має цілі розв'язки. Щоб скористатись рівностями (8), заповнимо таблицю 1:

k	–	–	0	1	2
q_k	–	–	1	1	3
P_k	0	1	1	2	7
Q_k	1	0	1	1	4

Таким чином, цілі розв'язки рівняння $119x - 68y = 34$ мають вигляд

$$x = (-1)^1 \cdot 1 \cdot 2 + 4t = -2 + 4t, \quad y = (-1)^1 \cdot 2 \cdot 2 + 7t = -4 + 7t, \; t \in \mathbb{Z}.$$