10 ОСНОВНІ АЛГЕБРАЇЧНІ СТРУКТУРИ

Бінарною (*алгебраїчною*) операцією визначеною на множині D називається довільна функція $f(x, y)$ від двох змінних, яка визначена на D і приймає значення в D, тобто $f: D \times D$.

Прикладами бінарних операцій є операції додавання або множення на множинах натуральних, цілих, раціональних, дійсних чисел відповідно, при цьому

$$f(x, y) = x + y, \quad f(x, y) = x \cdot y.$$

Маючи на увазі ці приклади, надалі, замість запису $f(x, y)$ будемо вживати запис $x \circ y = f(x, y)$.

Множина з заданою бінарною операцією буде зображуватися як пара $(D, \circ)$.

Множина з бінарною операцією $(D, \circ)$ називається *напівгрупою*, якщо ця операція є асоціативною, тобто

$$\forall x, y, z \qquad (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z).$$

Напівгрупа $(D, \circ)$ називається *моноідом*, якщо існує нейтральний елемент відносно заданої операції, тобто

$$\forall x \, \exists e \qquad e \circ x = x \circ e = x.$$

Напівгрупа $(D, \circ)$ називається *комутативною*, якщо

$$\forall x, y \qquad x \circ y = y \circ x.$$

Моноід $(D, \circ)$ називається *групою*, якщо будь-який її елемент має обернений, тобто

$$\forall x \, \exists x^* \qquad x^* \circ x = x \circ x^* = e.$$

Комутативна група називається *абелевою*.

Приклад 1 Множина натуральних чисел з операцією додавання $(\mathbb{N}, +)$ є комутативною напівгрупою, але не є моноідом, бо нейтральний елемент 0 не належить цій множині.

Приклад 2 Множини натуральних чисел з операцією множення $(\mathbb{N}, \cdot)$ та раціональних чисел з операцією множення $(\mathbb{Q}, \cdot)$ є приклади комутативних моноідів, нейтральним елементом для множення є $1 \in \mathbb{N}(\mathbb{Q})$.

Приклад 3 Множина натуральних чисел з нулем $\tilde{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{0\}$ і операцією додавання $(\tilde{\mathbb{N}}, +)$ є комутативним моноідом, нейтральний елементом є 0.

Всі вищенаведені приклади напівгруп та моноідів не є групами.

Приклад 4 Множина цілих чисел з операцією додавання $(\mathbb{Z}, +)$ є абелевою групою. Множина раціональних чисел з операцією додавання $(\mathbb{Q}, +)$ є абелевою групою.

Якщо замінити операцію додавання на операцію множення, то ці напівгрупи не будуть групами. Для $(\mathbb{Z},\cdot)$ це очевидно, а для $(\mathbb{Q},\cdot)$ зауважимо, що 0 не має оберненого елемента відносно множення, причому це не виконується тільки для $x=0$.

Приклад 5 Якщо видалити 0 і розглянути множину $\mathbb{Q}^*=\mathbb{Q}\setminus\{0\}$, маємо абелеву групу $\left(\mathbb{Q}^*,\cdot\right)$.

Множина D з двома бінарними операціями $(D,+,\circ)$ називається *кільцем* якщо

1) $(D,+)$ – адитивна абелева група;
2) $(D,\circ)$ – мультиплікативна напівгрупа;
3) мають місце закони дистрибутивності:

$$\forall x,y,z \qquad x\circ(y+z)=x\circ y+x\circ z,$$

$$\forall x,y,z \qquad (x+y)\circ z=x\circ z+y\circ z.$$

Якщо $(D,\circ)$ – мультиплікативна комутативна напівгрупа, то кільце називається *комутативним*, а якщо $(D,\circ)$ – моноід, то говорять, що $(D,+,\circ)$ є *кільцем з одиницею*.

Кільце $(D,+,\circ)$ називається *полем*, якщо $\left(D\setminus\{0\},\circ\right)$ є мультиплікативною абелевою групою (тут 0 – нейтральний елемент відносно +).

Приклад 6 Кільце цілих чисел із звичайними операціями додавання та множення є прикладом комутативного кільця з одиницею – $(\mathbb{Z},+,\circ)$.

Приклад 7 Прикладами полів є $(\mathbb{Q},+,\circ)$, $(\mathbb{R},+,\circ)$ – множини раціональних та дійсних чисел відносно звичайних операцій додавання та множення.