2 ДІЛЕННЯ ЦІЛИХ ЧИСЕЛ З ОСТАЧЕЮ

2.1. Поділіть з остачею:

1) 134 на 26;
2) 134 на –26;
3) –134 на 26;
4) –134 на –26;
5) 168 на 35;
6) 168 на –35;
7) –168 на 35;
8) –168 на –35.

2.2. При діленні a на b остача дорівнює r. Визначте:

1) остачу при діленні $-a$ на b;
2) чи буде mr остачею при діленні ma на mb?

2.3. Знайдіть дільники та відповідні їм остачі, якщо:

1) ділене 534, частка 26;
2) ділене 741, частка –14;
3) ділене –945, частка –16;
4) ділене –234, частка 7.

2.4. Знайдіть всі числа:

1) більші за 25000, але менші за 30000, у яких як при діленні на 131, так і при діленні на 1965 остача дорівнює 125;
2) більші за 10000, але менші за 15000, у яких як при діленні на 393, так і при діленні на 655 остача дорівнює 210.

2.5. Ділене 100, остача 6. Знайдіть дільник і частку.

2.6. Знайдіть неповну частку та остачу при діленні числа a на число b, якщо:

1) $a = 253,\ b = 19$;
2) $a = 8,\ b = 13$;
3) $a = -26,\ b = 3$;
4) $a = -1,\ b = 7$;
5) $a = 9,\ b = 15$;
6) $a = -31,\ b = 10$;
7) $a = -6,\ b = 11$.

2.7. Які остачі можна отримати при діленні цілого числа на 7?

2.8. Яку остачу при діленні на 3 дає число виду $3k - 2,\ k \in \mathbb{Z}$?

2.9. Яку остачу при діленні на 6 дає число виду $6n - 1,\ n \in \mathbb{Z}$?

2.10. Відомо, що при діленні числа m на 18 остача дорівнює 11. Знайдіть остачу при діленні числа m:

1) на 2;
2) на 3;
3) на 6;
4) на 9.

2.11. Відомо, що при діленні числа n на 16 остача дорівнює 9. Знайдіть остачу при діленні числа n:

1) на 2;
2) на 4;
3) на 8.

2.12. Число m кратне 6. Чому може дорівнювати остача при діленні числа m на 18?

2.13. Число n кратне 4. Чому може дорівнювати остача при діленні числа n на 16?

2.14. Число a при діленні на 6 дає в остачі 3, а при діленні на 4 дає в остачі 1. Знайдіть остачу при діленні числа a на 12.

2.15. Число b при діленні на 5 дає в остачі 2, а при діленні на 3 дає в остачі 1. Знайдіть остачу при діленні числа b на 15.

2.16. Число m дає рівні остачі при діленні на 3 і на 4. Чому може дорівнювати остача при діленні числа m на 12?

2.17. Замість зірочки запишіть таке найменше невід'ємне число, щоб отримана конгруенція була правильною:

1) $56 \equiv *\pmod 8$;
2) $23 \equiv *\pmod 7$;
3) $-43 \equiv *\pmod 5$;
4) $84 \equiv *\pmod 9$;
5) $-26 \equiv *\pmod 6$;
6) $* \equiv 3\pmod{15}$;
7) $* \equiv -2\pmod{18}$;
8) $* \equiv 6\pmod 2$;
9) $* \equiv -3\pmod{11}$;
10) $* \equiv 4\pmod 9$;
11) $34 \equiv *\pmod 6$;
12) $45 \equiv *\pmod 9$;
13) $-1 \equiv *\pmod 4$;
14) $12 \equiv *\pmod 5$;
15) $-25 \equiv *\pmod 7$;
16) $* \equiv -2\pmod 3$.

2.18. Відомо, що $a \equiv -11\pmod 8$, $b \equiv -2\pmod 8$. Знайдіть остачу при діленні на 8 числа:

1) $a+b$;
2) $a-b$;
3) $2a-3b$;
4) ab;
5) a^2;
6) b^2.

2.19. Відомо, що $a \equiv -4\pmod 6$, $b \equiv -9\pmod 6$. Знайдіть остачу при діленні на 6 числа:

1) $3a+4b$;
2) a^2-b;
3) b^2+ba.

2.20. Чи існує ціле число, яке при діленні на 6 дає остачу 4, а при діленні на 9 – остачу 5?

2.21. Доведіть, що остача при діленні на 3 квадрата цілого числа може дорівнювати тільки 0 або 1.

2.22. Доведіть, що остача при діленні на 4 квадрата цілого числа може дорівнювати тільки 0 або 1.

2.23. Доведіть, що квадрат непарного числа при діленні на 8 дає в остачі 1.

2.24. Чому може дорівнювати остача при діленні числа m^3 на 7?

2.25. Чому може дорівнювати остача при діленні числа k^3 на 9?

2.26. Знайдіть остачі при діленні на 9 чисел 65^{6k}, 65^{6k+1}, 65^{6k+2}, 65^{6k+3}, 65^{6k+4}, 65^{6k+5}, де $k \in \mathbb{N}$.

2.27. Остача від ділення трицифрового числа $n = \overline{aa5}$ на деяке одноцифрове число дорівнює 8, знайдіть число n.

2.28. Доведіть, що ні при якому натуральному n числа $3n-1$, $7n-1$, $7n-2$, $7n+3$ не є точними квадратами.

2.29. Доведіть, що якщо натуральні числа a, b, c задовольняють співвідношенню $a^2+b^2=c^2$, то:

1) хоча б одне з чисел a і b ділиться на 2;

2) хоча б одне з чисел a і b ділиться на 3;

3) хоча б одне з чисел a, b, c ділиться на 5.

2.30. Вкажіть, які з наступних тверджень вірні:

1) з 8 цілих чисел завжди можна обрати два таких, різниця яких ділиться на 7;

2) зі 100 цілих чисел завжди можна обрати 15 таких, у яких різниця будь-яких двох ділиться на 7;

3) зі 100 цілих чисел завжди можна обрати два таких, у яких сума ділиться на 7;

4) з 5 цілих чисел завжди можна обрати два таких, у яких різниця квадратів ділиться на 7.

2.31. Доведіть, що:

1) $ab-1$ ділиться на 3 тоді і тільки тоді, коли a і b не діляться на 3 і остачі при діленні a і b на 3 рівні;

2) $ab+1$ ділиться на 3 тоді і тільки тоді, коли a і b не діляться на 3 і остачі при діленні a і b на 3 не рівні;

3) $ab\left(a^2-b^2\right)$ завжди ділиться на 3.

2.32. Числа a і b такі, що $a^2+b^2 \equiv 0 \pmod 3$. Доведіть, що $a \equiv 0 \pmod 3$ і $b \equiv 0 \pmod 3$.

2.33. Числа m і n такі, що $m^2+n^2 \equiv 0 \pmod 7$. Доведіть, що $m \equiv 0 \pmod 7$ і $n \equiv 0 \pmod 7$.

2.34. Відомо, що $\left(a^2+b^2\right) \vdots 3$. Доведіть, що $\left(a^2+b^2\right) \vdots 9$.

2.35. Відомо, що $\left(m^2+n^2\right) \vdots 7$. Доведіть, що $\left(m^2+n^2\right) \vdots 49$.

2.36. Розв'яжіть у цілих числах рівняння:

1) $x^2-3y=8$;

2) $x^2-4y^3=11$;

3) $m^3-7n^2=19$;

4) $z^3-9t=16$;

5) $x^2-3y^2=7$;

6) $9x^2-28y=15$;

7) $8x^3+7y^3=38$;

8) $16x^4-5y^3=18$.

2.37. Доведіть, що при будь-якому натуральному n значення виразу:

1) $11^n + 14\cdot 6^n$ кратне 5;
2) $3^{2n} + 11\cdot 5^n$ кратне 4;
3) $21^n + 2^{2n+4}$ кратне 17;
4) $4\cdot 13^n + 37^n + 1$ кратне 6;
5) $5^{2n+1} + 2^{n+4} + 2^{n+1}$ кратне 23;
6) $3^{3n+2} + 5\cdot 2^{3n+1}$ кратне 19;
7) $5^n + 8^n - 2^{n+1}$ кратне 3;
8) $2^{n+5}\cdot 3^{4n} + 5^{3n+1}$ кратне 37;
9) $17^n + 25\cdot 4^n$ кратне 13;
10) $16^n + 4^{2n+1}$ кратне 5;
11) $15^n + 2^{3n} - 30$ кратне 7;
12) $6^{2n} + 3^{n+2} + 3^n$ кратне 11;
13) $17\cdot 21^{2n+1} + 9\cdot 43^{2n+1}$ кратне 8;
14) $2^{5n+3} + 5^n\cdot 3^{n+2}$ кратне 17.

2.38. Знайдіть остачу при діленні числа a на число b, якщо:
1) $a = 5^{99}$, $b = 3$;
2) $a = 7^{36}$, $b = 4$;
3) $a = 3^{101}$, $b = 7$;
4) $a = 3^{70} + 2^{52}$, $b = 5$;
5) $a = 11^{43}$, $b = 7$;
6) $a = 13^{52}$, $b = 17$;
7) $a = 3^{80}$, $b = 31$;
8) $a = 29^{2013}$, $b = 4$.

2.39. Сума остач при діленні натурального числа n на числа 3, 6 і 9 дорівнює 15. Знайдіть ці остачі.

2.40. Доведіть, що серед чисел $4^n + 4^m$ (m і n – натуральні числа) немає жодного квадрата натурального числа.

2.41. Доведіть, що серед чисел $5^n + 5^m$ (m і n – натуральні числа) немає жодного квадрата натурального числа.

2.42. Про числа m, n, p, q, r, s відомо, що $m^2 + n^2 + p^2 + q^2 + r^2 = s^2$. Доведіть, що хоча б одне із цих чисел парне.

2.43. Відомо, що p і q – непарні числа. Доведіть, що рівняння $x^2 + px + q = 0$ не має раціональних коренів.

2.44. Остача при діленні трицифрового числа $n = \overline{aa5}$ на деяке одноцифрове число дорівнює 8. Знайдіть число n.

2.45. Остача при діленні трицифрового числа $n = \overline{2bb}$ на деяке одноцифрове число дорівнює 8. Знайдіть число n.

2.46. При діленні натурального числа n на 9 остача дорівнює неповній частці, і при діленні числа n на 14 остача теж дорівнює неповній частці. Знайдіть усі можливі значення n.

2.47. При діленні натурального числа n на 26 остача дорівнює неповній частці, і при діленні числа n на 29 остача теж дорівнює неповній частці. Знайдіть усі можливі значення n.