

### 3 НАЙБІЛЬШИЙ СПІЛЬНИЙ ДІЛЬНИК, НАЙМЕНШЕ СПІЛЬНЕ КРАТНЕ І АЛГОРИТМ ЕВКЛІДА, ЇХ ВЛАСТИВОСТІ ТА ВЗАЄМНА ПРОСТОТА

3.1. Знайдіть НСД чисел:

- |                 |                           |
|-----------------|---------------------------|
| 1) 253 і 299;   | 5) 420, 630 і 1155;       |
| 2) 2491 і 2773; | 6) 498, 2324 і 42598;     |
| 3) 899 і 1073;  | 7) 1023, 1518 і 14883;    |
| 4) 4757 і 5561; | 8) 663, 731, 2516 і 3655. |

3.2. Знайдіть лінійне представлення НСД чисел:

- |                    |                       |
|--------------------|-----------------------|
| 1) 822 і 1734;     | 4) $-3791$ і $3281$ ; |
| 2) 4623 і 3743;    | 5) 1073 і 3683;       |
| 3) 4373 і $-826$ ; | 6) 2576 і 154.        |

3.3. Доведіть, що для будь-якого  $n \in \mathbb{N}$ :

- 1)  $\gcd(n; n+1) = 1$ ;
- 2)  $\gcd(2n; 2n+2) = 2$ ;
- 3)  $\gcd(n; 2n+1) = 1$ ;
- 4)  $\gcd(8n+4; 4n) = 4$ .

3.4. Чому може дорівнювати  $\gcd(a; b)$

- 1)  $a = n, b = n+2$ ;
- 2)  $a = n, b = 4n+3$ ;
- 3)  $a = 2n+1, b = 2n+3$ ;
- 4)  $a = 2n+1, b = 8n+7$ ?

3.5. Вкажіть всі натуральні числа, на які може скоротити дріб  $\frac{5n+6}{8n+7}$ .

3.6. Доведіть, що якщо  $a$  і  $b$  взаємно прості, то  $\gcd(11a+2b; 18a+5b)$  дорівнює або 1, або 19.

3.7. Доведіть взаємну простоту наступних пар чисел ( $n \in \mathbb{N}$ ):

- 1)  $n$  і  $n+1$ ;
- 2)  $n$  і  $2n-1$ ;
- 3)  $\frac{n(n+1)}{2}$  і  $2n+1$ .

3.8. Доведіть, що при будь-якому  $n \in \mathbb{N}$  є нескоротним дріб:

- |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|
| 1) $\frac{4n+3}{20n+23}$ ; | 4) $\frac{16n+1}{40n+2}$ ; |
| 2) $\frac{12n+1}{30n+2}$ ; | 5) $\frac{21n+4}{14n+3}$ ; |
| 3) $\frac{3n+1}{15n+14}$ ; | 6) $\frac{n+1}{2n+1}$ .    |

3.9. Ціле число  $n$  кратне 3 і кратне 4. Чи можна стверджувати, що  $n$  кратне 12?

**3.10.** Ціле число  $n$  кратне 6 і кратне 8. Чи можна стверджувати, що  $n$  кратне 48?

**3.11.** Доведіть, що при будь-якому  $n \in \mathbb{Z}$  значення виразу:

- |                                |                                     |
|--------------------------------|-------------------------------------|
| 1) $n^2 + n$ кратне 2;         | 4) $n^3 + 11n$ кратне 6;            |
| 2) $n^2 - n$ кратне 2;         | 5) $n^4 - n^2$ кратне 12;           |
| 3) $n^3 + 3n^2 + 2n$ кратне 6; | 6) $(n^2 - 1)(n^2 - 2n)$ кратне 24. |

**3.12.** Чи існують такі цілі числа  $a, b, c$ , що:

- 1)  $a + b + c + a^2 + b^2 + c^2 = 1001$ ;
- 2)  $a^3 + b^3 + c^3 - a - b - c = 1004$ ?

**3.13.** Доведіть, що при будь-якому  $n \in \mathbb{Z}$  є цілим числом значення виразу:

- |                                    |                                       |
|------------------------------------|---------------------------------------|
| 1) $\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{24}$ ; | 4) $\frac{n^3 + 5n}{6}$ ;             |
| 2) $\frac{n^5 - n}{30}$ ;          | 5) $\frac{n(n+1)^2(n+2)}{12}$ ;       |
| 3) $\frac{n^5 - 5n^3 + 4n}{120}$ ; | 6) $\frac{(n^2 - 1)(n^2 + 2n)}{24}$ . |

**3.14.** Розв'яжіть в натуральних числах наступні системи рівнянь:

- |   |  |
|---|--|
| 1) $\begin{cases} x + y = 180, \\ \gcd(x, y) = 30; \end{cases}$ | 3) $\begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{11}{7}, \\ \gcd(x, y) = 45; \end{cases}$ |
| 2) $\begin{cases} x + y = 168, \\ \gcd(x, y) = 24; \end{cases}$ | 4) $\begin{cases} xy = 720, \\ \gcd(x, y) = 4. \end{cases}$                    |

**3.15.** Знайдіть НОК чисел:

- 1) 356, 1068 і 1424;
- 2) 6408, 9256 і 4272.

**3.16.** Знайдіть натуральні числа  $m$  і  $n$ , якщо:

- |  |  |
|--|--|
| 1) $\frac{m}{n} = \frac{7}{3}$ , НСД( $m; n$ ) = 5;      | 7) НСД( $m; n$ ) = 15,<br>НСК( $m; n$ ) = 420;                             |
| 2) $\frac{m}{n} = \frac{4}{11}$ ,<br>НСК( $m; n$ ) = 88; | 8) НСД( $m; n$ ) = 12,<br>НСК( $m; n$ ) = 840;                             |
| 3) НСД( $m; n$ ) = 3,<br>$mn = 117$ ;                    | 9) НСД( $m; n$ ) = 5,<br>НСК( $m; n$ ) = 260;                              |
| 4) НСД( $m; n$ ) = 7,<br>НСК( $m; n$ ) = 1001;           | 10) $m + n = 667$ ,<br>$\frac{\text{НСК}(m; n)}{\text{НСД}(m; n)} = 120$ ; |
| 5) $\frac{m}{n} = \frac{13}{5}$ , НСД( $m; n$ ) = 3;     | 11) НСК( $m; n$ )НСД( $m; n$ ) = 504;                                      |

$$6) \quad \frac{m}{n} = \frac{7}{8},$$

$$\text{НСК}(m; n) = 224;$$

$$12) \quad \frac{\text{НСК}(m; n)}{\text{НСД}(m; n)} = 14.$$

**3.17.** Два учні вийшли одночасно з пункту А; крок одного з них 60 см, другого – 69 см. В перший раз кроки їх співпали через 17 с після початку руху, а послі 5 хв руху їх кроки співпали перший раз в пункті В. Визначте відстань від А до В.

**3.18.** Знайдіть всі взаємно прості  $m$  і  $n$ , для яких  $\frac{m+n}{m^2+mn+n^2} = \frac{3}{13}$ .

**3.19.** Нехай  $A$  – множина, яка складається більше ніж з семи різних натуральних чисел, жодні два з яких не взаємно прості. Знайдіть числа, з яких складається  $A$ , якщо:

- 1) НСК всіх чисел з  $A$  дорівнює 210, добуток всіх чисел з  $A$  ділиться на 1920 і не є квадратом жодного цілого числа;
- 2) НСК всіх чисел з  $A$  дорівнює 390, добуток всіх чисел з  $A$  не ділиться на 160 і не є 4 степенем жодного цілого числа;
- 3) НСК всіх чисел з  $A$  дорівнює 330, сума всіх чисел з  $A$  дорівнює 755 і добуток всіх чисел з  $A$  не є 4 степенем жодного цілого числа.

**3.20.** Підставте в наступних рівностях замість кожної букви визначену цифру так, щоб отримати тотожність (різним буквам відповідають різні цифри):

- 1) ЛИК · ЛИК = БУБЛИК ;
- 2) СУК · СУК = БАРСУК .