

## 10 ОСНОВНІ АЛГЕБРАЇЧНІ СТРУКТУРИ

**10.1.** Визначте, які з операцій – додавання, віднімання, множення, ділення – є бінарними на наступних підмножинах з  $\mathbb{R}$ ; які з них комутативні, асоціативні?

- |                   |   |  |
|-------------------|---|--|
| 1) $\mathbb{N}$ ; | 2) $2\mathbb{N} = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ; | 3) $\{2n+1 \mid n \in \mathbb{N}\}$ ;  |
| 4) $\mathbb{Z}$ ; | 5) $2\mathbb{Z} = \{2n \mid n \in \mathbb{Z}\}$   | 6) $\mathbb{Q}$ ;                      |
| 7) $\mathbb{R}$ ; | 8) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ;                 | 9) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ; |
| 10) $\{0\}$ ;     | 11) $\{1\}$ ;                                     | 12) $\{0; 1\}$ .                       |

**10.2.** Визначте, які з операцій є бінарними на підмножині  $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$  множини  $\mathbb{R}$ ; які з них комутативні, асоціативні?

- |                                  |                              |
|----------------------------------|------------------------------|
| 1) $x \circ y = \frac{x+y}{2}$ ; | 2) $x \circ y = x + y - 1$ ; |
| 3) $x \circ y = xy^2$ ;          | 4) $x \circ y = x^y$         |
| 5) $x \circ y = \sqrt{xy}$ ;     | 6) $x \circ y = \log_y x$ ;  |
| 7) $x \circ y = \max\{x; y\}$ ;  | 8) $x \circ y =  x - y $ .   |

**10.3.** Визначте, які з підмножин множини  $\mathbb{C}$  є напівгрупами відносно операції множення? Мультиплікативними групами?

- |   |   |
|---|---|
| 1) $\{2^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ ;                                | 2) $\{2^n \mid n = -2, -1, 0, 1, 2\}$ ;                             |
| 3) $\{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Z}, a^2 + b^2 \neq 0\}$ ; | 4) $\{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Q}, a^2 + b^2 \neq 0\}$ ; |
| 5) $\{z \mid  z  = 1\}$ ;   | 6) $\{z \mid  z  \leq 1\}$ ;  |
| 7) $\{z \mid  z  < 1\}$ ;   | 8) $\{z \mid  z  \geq 1\}$ ;  |
| 9) $\{z \mid  z  > 1\}$ ;   | 10) $\{z \mid  z  = 2\}$ ;  |
| 11) $\{z \mid  z  \leq 2\}$ ;                                       | 12) $\{z \mid  z  \geq 2\}$ ;                                       |
| 13) $\{z \mid  z  > 2\}$ ;  | 14) $\{z \mid  z  = \frac{1}{2}\}$ ;                                |
| 15) $\{z \mid  z  \leq \frac{1}{2}\}$ ;                             | 16) $\{z \mid  z  < \frac{1}{2}\}$ ;                                |
| 17) $\{-1; 1\}$ ;   | 18) $\{-1; 0; 1\}$ .  |

**10.4.** Доведіть, що наступні підмножини множини  $\mathbb{C}$  є мультиплікативними групами?

- |  |  |
|--|--|
| 1) $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ ; | 2) $\{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0\}$ ;   |
| 3) $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ; | 4) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ ;   |
| 5) $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ; | 6) $\{z \in \mathbb{C} \mid  z  = 1\}$ ; |

$$7) \left\{ a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Q}, a^2 + b^2 > 0 \right\}; \quad 8) \left\{ a + bi\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Q}, a^2 + b^2 > 0 \right\}.$$

**10.5.** Доведіть, що наступні множини є адитивними групами?

1)  $\mathbb{Z}$ ;

2)  $2\mathbb{Z}$ ;

3)  $\mathbb{Q}$ ;

4)  $\mathbb{R}$ ;

5)  $\mathbb{C}$ ;

6)  $\left\{ \frac{a}{7^k} \mid a \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N} \right\}$ ;

7)  $\{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ ;

8)  $\{a + bi\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ .

**10.6.** Доведіть, що наступні підмножини множини квадратних матриць 2-го порядку є мультиплікативними групами?

1)  $\left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 > 0 \right\}$ ;

2)  $\left\{ \begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Q}, a^2 + b^2 > 0 \right\}$ ;

3)  $\left\{ \begin{pmatrix} a & -3b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Q}, a^2 + b^2 > 0 \right\}$ ;

4)  $\left\{ \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \mid \varphi \in \mathbb{R} \right\}$ .

**10.7.** Доведіть, що наступні числові множини зі звичайними операціями додавання та множення є кільцем? Які з кілець містять одиницю, вкажіть зворотні елементи? Чи є вказана множина полем?

1)  $\mathbb{Z}$ ;

2)  $2\mathbb{Z}$ ;

3)  $\mathbb{Q}$ ;

4)  $\{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ ;

5)  $\{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in 2\mathbb{Z}\}$ ;

6)  $\{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ ;

7)  $\{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ ;

8)  $\{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ ;

9)  $\{a + bi\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ ;

10)  $\{a + bi\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ .

**10.8.** Доведіть, що наступні підмножини множини квадратних матриць 2-го порядку зі звичайними операціями додавання та множення є кільцем? Які з кілець містять одиницю, вкажіть зворотні елементи? Чи є вказана множина полем?

1)  $\left\{ \begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\}$ ;

2)  $\left\{ \begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in 2\mathbb{Z} \right\}$ ;

3)  $\left\{ \begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Q} \right\}$ ;

4)  $\left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\}$ ;

5)  $\left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Q} \right\}$ ;

6)  $\left\{ \begin{pmatrix} a & -3b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\}$ .

**10.9.** Доведіть, що множина  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  з вказаними операціями є комутативним кільцем з одиницею? Чи є вказана множина полем?

1)  $(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2),$

$(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 a_2, b_1 b_2);$

- 2)  $(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2),$   
 $(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1a_2 + b_1b_2, a_1b_2 + a_2b_1);$
- 3)  $(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2),$   
 $(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1a_2 + 3b_1b_2, a_1b_2 + a_2b_1);$
- 4)  $(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2),$   
 $(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1a_2 - 3b_1b_2, a_1b_2 + a_2b_1).$