ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
“ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ”
МІНІСТЕРСТВА ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

А.М. АНДРЄЄВ, О.Ю. ОСИПОВ

ФІЗИКА

ЛАБОРАТОРНІ РОБОТИ З ТВОРЧИМИ ЗАВДАННЯМИ

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України
як навчальний посібник для студентів
вищих навчальних закладів

ЗАПОРІЖЖЯ
2013

УДК 53 (076.5)
ББК В3 я 73
А 655

Рецензенти:
Академік НАН України, доктор технічних наук, професор,
завідувач кафедри фізики енергетичних систем ФТІ НТУУ “КПІ”
А.А. Халатов

Доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри фізики
Запорізького національного технічного університету
С.В. Лоскутов

Доктор педагогічних наук, професор, завідувач кафедри дидактики та методик
навчання природничо-математичних дисциплін Запорізького обласного
інституту післядипломної педагогічної освіти
А.І. Павленко

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів
Лист № 1/11-9544 від 05.06.2013.

Андрєєв А.М.
А 655 Фізика. Лабораторні роботи з творчими завданнями: навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів / А.М. Андрєєв, О.Ю. Осипов. – Запоріжжя: Запорізький національний університет, 2013. – 228 с.
ISBN

Навчальний посібник містить разом із теоретичними відомостями широке коло дослідів та експериментальних творчих завдань з фізики, що уможливлює реалізацію диференційованого підходу до студентів у процесі лабораторних занять, створює умови для розвитку у них творчих здібностей і навичок самостійного наукового пізнання.

Посібник призначений для студентів нефізичних напрямів підготовки класичних та педагогічних вищих навчальних закладів; може бути використаний студентами ВНЗ I-II рівнів акредитації при поглибленому вивченні фізики.

УДК 53 (076.5)
ББК В3 я 73

ISBN

ПЕРЕДМОВА

Навчальний посібник призначений для студентів нефізичних напрямів підготовки класичних та педагогічних університетів, його зміст відповідає основним темам курсу “Фізика” – важливої складової частини циклу природничо-наукової підготовки. Автори мали на меті реалізувати диференційований підхід до студентів у процесі навчання фізики (зокрема, при проведенні лабораторних занять), створити умови для розвитку у них творчих здібностей і навичок самостійного наукового пізнання, самоосвіти і самореалізації особистості.

Виконання експериментальних завдань вимагає від студента вивчити (або повторити) теорію розглядуваного питання, скласти експериментальну установку, безпосередньо провести дослід, зафіксувати експериментальні дані, провести їх обробку та оцінити достовірність отриманих результатів.

Наведені у посібнику навчальні блоки мають таку структуру:

1. *Теоретичні відомості.* У цій частині коротко пояснюються основні поняття теорії, пов’язані з темою даного навчального блоку. Особлива увага приділяється саме тим питанням, що потрібні для проведення експериментального дослідження (вимірювання) відповідних фізичних величин.

2. *Експериментальна частина*. Детально розглядається конкретна навчальна проблема (пов’язана, наприклад, з вимірюванням певної фізичної величини), яка має бути розв’язана шляхом проведення фізичного експерименту: формулюється завдання; наводиться перелік засобів для проведення експерименту (вимірювальні прилади, пристрої, досліджувані об’єкти, довідкова література); висвітлюється сутність методу вимірювання. Вказується також на значення та галузь застосування даного методу у фізиці і техніці.

Експериментальна частина також містить спеціальні підготовчі вправи. Вони розділені на два рівні. *Рівень А* складається з тестових завдань, які пов’язані з теоретичним матеріалом роботи (частина з них запозичена зі збірника різнорівневих завдань І.М Гельфгата). Завдання *рівня Б* спрямовані на засвоєння окремих елементів методики проведення конкретного експерименту. Розв’язуючи їх, студенти самі приходять до необхідності виконання певної дії у процесі виконання роботи, перевідкривають (для себе) окремі елементи методики вимірювання. Крім того, за допомогою підготовчих вправ викладач може здійснювати діагностику рівня підготовленості студентів та надавати допуск до безпосереднього виконання ними експерименту.

3. *Додаткові творчі завдання.* Для тих студентів, які виявляють особливий інтерес до фізики, передбачено додаткові цікаві досліди та творчі експериментальні завдання (більшість з яких є авторськими), що структуровані за такими блоками:

- *Завдання для формування банку ідей.* У них потрібно лише запропонувати (“винайти”) спосіб виконання певної дії (вимірювання, конструювання тощо). Умови таких задач формулюються у вигляді запитань: “Як знайти…?”, “Як зробити…?”, “Як виміряти…?” тощо. У посібнику розроблена система таких задач (деякі з них взяті з відомого збірника цікавих задач В.М. Ланге). Вони націлені передусім на формування у студентів системи можливих розв’язків подібних експериментальних задач.
- *Експериментальні та тренувальні винахідницькі задачі.* Ці задачі можна успішно використовувати як завдання для домашньої роботи, під час якої кожен студент зможе приділити задачі стільки часу, скільки він вважає за потрібне. Більшість з наведених експериментальних задач пропонувалися раніш на державних етапах Всеукраїнських та Всеросійських олімпіад з фізики. Використання винахідницьких задач (деякі з них взяті зі збірників В.Г. Разумовського та А.А. Давиденка) сприяє навчанню студентів застосовувати набуті знання безпосередньо на практиці для створення конкретних технічних рішень (нехай таких, що не виходять за рівень техніки, але для студента – нових!). Розв’язування цих задач може перетворитися у довгострокові науково-дослідницькі роботи, результатами яких можуть стати і справжні винаходи. Останнє є проявом найвищого рівня навчальних досягнень.
- *Зробіть своїми руками!* Завдання, які подані у цьому пункті, спрямовані, у першу чергу, на розвиток *моторних умінь і навичок*, адже від них залежить успішність виконання механічних дій при безпосередньому виконанні експерименту. Крім того у багатьох студентів викликає непідробний інтерес саме створення конкретних технічних пристроїв (вимірювальних приладів, діючих моделей та макетів пристроїв тощо).

Зазначимо, що методичні вдосконалення, наведені у даному посібнику, були предметом окремих наукових досліджень його авторів.

Окрім основного тексту, посібник містить додатковий (факультативний), в якому наведені більш докладні пояснення, інформаційні довідки, виведення деяких формул, додаткові вправи. Цей матеріал подано дрібнішим шрифтом. За бажанням його можна опустити (в основному тексті відсутні посилання на додатковий матеріал). Задачі підвищеної складності позначено зірочкою.

ВИМІРЮВАННЯ ФІЗИЧНИХ ВЕЛИЧИН

Теоретичні відомості.

Виміряти фізичну величину – означає знайти експериментальним шляхом значення фізичної величини за допомогою спеціальних технічних засобів (засобів вимірювань). При вимірюванні фізична величина порівнюється з однорідною величиною, яку прийнято за одиницю. Якщо, наприклад, зазначається, що маса тіла дорівнює 5 кг, то 5 кг – це значення маси тіла, яке дорівнює добутку числового значення фізичної величини (5) на одиницю маси (кг). Виміряти масу тіла – це і означає визначити, у скільки разів його маса відрізняється від маси еталона. Для забезпечення єдності фізичних вимірювань створені міжнародні еталони кожної з основних одиниць СІ.

Загальноприйнятою у наш час є Міжнародна система одиниць СІ (система інтернаціональна). Вона базується на *семи* основних одиницях: одиниця довжини – *метр* (м), маси – *кілограм* (кг), часу – *секунда* (с), кількості речовини – *моль* (моль), температури – *кельвін* (К), сили електричного струму – *ампер* (А), сили світла – *кандела* (кд).

Істинне значення вимірюваної фізичної величини визначити неможливо, оскільки не існує абсолютно точних приладів та інших засобів вимірювань (та й самі еталони одиниць фізичних величин відтворюються лише з кінцевою точністю). Навіть значення фундаментальних фізичних констант відомі з певними похибками. Так, стала Авогадро за останніми даними дорівнює $N_A = (6,022045 \pm 0,000031) \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$. Цей запис означає, що істинне значення є невідомим, але з імовірністю близькою до 1 можна стверджувати, що воно знаходиться в інтервалі значень

$$6,022014 \cdot 10^{23}\,\text{моль}^{-1} < N_A < 6,022076 \cdot 10^{23}\,\text{моль}^{-1}.$$

Як приклад *точних* значень фізичних величин, з якими доводиться зустрічатися в експерименті, наведемо результат лічби порівняно невеликої кількості предметів (число витків дротяного реостата; число крапель, які падають з бюретки; кількість акумуляторів у батареї тощо).

Процес вимірювання вважається завершеним лише тоді, коли вказано не тільки число $x_{вим}$, прийняте за результат вимірювання, але й число Δx, що дозволяє визначити інтервал

$$\left(x_{вим}-\Delta x;\, x_{вим}+\Delta x\right) \text{ або (інший запис) } x_{вим} \pm \Delta x,$$

який з досить великою імовірністю (близькою до 1) містить невідоме експериментатору істинне значення $x_{іст}$ вимірюваної величини x (рис. 0.1). Величина Δx називається *межею абсолютної похибки*. Вона є додатною величиною.

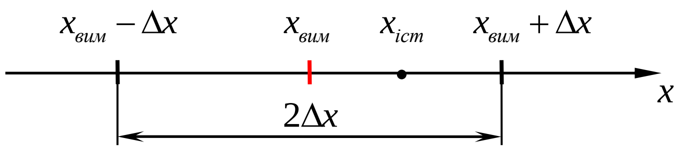


Рис. 0.1. Графічне зображення результату вимірювання величини x

Зазначимо, що під *абсолютною похибкою вимірювання* δx розуміють модуль різниці виміряного $x_{вим}$ та істинного $x_{іст}$ значень фізичної величини:

$$\delta x = \left|x_{вим} - x_{іст}\right|.$$

Проте, як уже зазначалося, точне значення є невідомим. Тому точність вимірювання оцінюють за допомогою *межі абсолютної похибки* Δx.

Межа абсолютної похибки не повністю характеризує вимірювання. Нехай, наприклад, в результаті вимірювань встановлено, що довжина стола дорівнює $l = (100 \pm 1)$ см, а товщина його кришки $d = (2 \pm 1)$ см. Межі абсолютної похибки вимірювань у цих двох випадках однакова. Проте, очевидно, що якість вимірювання у першому випадку вище.

Тому цілком логічно якість вимірювання характеризувати *межею відносної похибки* ε, яка дорівнює відношенню межі абсолютної похибки Δx до виміряного значення $x_{вим}$ (при цьому часто ε виражають у відсотках):

$$\varepsilon \equiv \frac{\Delta x}{x_{вим}}.$$

Поняття абсолютної похибки (та її межі) є зовсім непридатним для порівняння точності значень величин з різними розмірностями. Це пояснюється тим, що абсолютна похибка є іменованою величиною, її розмірність співпадає з розмірністю вимірюваної величини. Тому безглуздим, наприклад, є запитання: яке вимірювання є більш точним – вимірювання довжини з точністю до 1 мм або вимірювання маси з точністю до 1 г? Поняття відносної похибки $\delta x / x_{вим}$ (та її межі $\Delta x / x_{вим}$) дозволяє порівнювати точність вимірювань, у тому числі, і величин з різними розмірностями.

Отже, експериментатору потрібно не лише отримати у досліді наближене значення $x_{вим}$ вимірюваної величини, але й *оцінити точність* цього значення за допомогою меж абсолютної Δx або відносної ε похибок. Результат вимірювання подають у вигляді:

$$x = x_{вим} \pm \Delta x. \tag{0.1}$$

До запису результату за формою (0.1) висувають ряд вимог. Так, після того, як межу абсолютної похибки знайдено, її значення округляють *з надлишком*, як правило, до *однієї значущої цифри* (з більшою кількістю значущих цифр похибки записують лише при відповідальних вимірюваннях високої точності). Після цього у виміряному значенні $x_{вим}$ залишають стільки десяткових знаків, скільки їх має похибка Δx (при цьому користуються звичайним правилом округлення). Такий підхід пояснюється тим, що перша зліва ненульова цифра похибки визначає *сумнівну* цифру у виміряному значенні $x_{вим}$. Тому друга цифра похибки звичайно не вносить суттєвих змін у результат. Наприклад, запис $\mathrm{v} = (1,40352 \pm 0,023)$ м/с є не зовсім вдалим. Бажано записати $\Delta \mathrm{v} = 0,03$ м/с та $\mathrm{v} = (1,40 \pm 0,03)$ м/с.

Які цифри числа називають значущими? За В.М. Брадісом, *значущими цифрами* числа називають всі його цифри, окрім нулів, які стоять зліва від першої ненульової цифри, та нулів, які стоять у кінці числа, якщо вони заміняють невідомі або відкинуті цифри.

Приклад 1.

– Електрохімічний еквівалент алюмінію $k = 0,0936$ мг/Кл. В цьому числі три значущі цифри.

– Питомий опір цинку при деякій температурі $\rho = 0,060 \cdot 10^{-6}$ Ом·м. Це число задано з точністю до тисячних, тому останній нуль є значущим; число має дві значущі цифри.

– При вимірюванні тиску газу в посудині отримали $p = 2500$ Па. Якщо це число задане з точністю до сотень, то два нулі є незначущими (вони стоять замість невідомих цифр).

В останньому прикладі, щоб з'ясувати кількість значущих цифр, треба було додатково знати, з якою точністю задане число. В подібних випадках слід користуватися стандартною формою запису числа або ж слід перейти до кратних одиниць. Отже, в нашому прикладі виміряне значення тиску треба записати так: $p = 2,5 \cdot 10^3$ Па або $p = 2,5$ кПа. Якщо ж вимірювання було проведене з точністю до одиниць Па, то запис має бути таким: $p = 2,500 \cdot 10^3$ Па (два нулі в цьому випадку – значущі цифри).

Які цифри числа називають правильними? У фізиці користуються поняттям "правильна цифра" у вузькому значенні: цифра *n*-го розряду називається *правильною*, якщо абсолютна похибка не перевищує половини одиниці цього розряду. У таблицях фізичних величин, у математичних таблицях значення записані лише правильними цифрами. Наприклад, у знайденому з таблиці густин значенні густини міді $8,93 \cdot 10^3$ кг/м^3 цифра 3 в розряді сотих – правильна. Отже, межа абсолютної похибки числа $8,93 \cdot 10^3$ дорівнює $\Delta\rho = \frac{0,01}{2} \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3 = 0,005 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$. Тепер можна вказати інтервал значень, який містить істинне значення густини міді (при певних умовах): $\rho = (8,930 \pm 0,005) \cdot 10^3$ кг/м^3.

Якщо ж абсолютна похибка числа перевищує половину одиниці останнього розряду у наближеному числі, то цифру цього розряду називають *сумнівною*. Так, у виразі $\mathrm{v} = (0,56 \pm 0,02)$ м/с цифра 5 є правильною, а цифра 6 – сумнівна.

Як оцінити межі абсолютної Δ *та відносної* ε *похибок?* У першу чергу це залежить від *способу отримання числового результату*, за яким вимірювання поділяють на *прямі, непрямі (посередні) та сумісні* (рис. 0.2).

Прямими називають вимірювання, результат яких отримують безпосередньо за допомогою вимірювального приладу або міри.

Непрямими (посередніми) називають вимірювання, результат яких отримують на основі розрахунків.

Сумісними називають вимірювання двох або кількох неоднойменних величин, з метою знаходження функціональної залежності між ними.

ВИМІРЮВАННЯ

ПРЯМІ

Приклади

Вимірювання:
– лінійних розмірів тіл лінійкою;
– маси тіла на терезах;
– температури тіла термометром;
– об’єму тіла мензуркою;
– атмосферного тиску барометром.

НЕПРЯМІ

Приклади

Визначення:
- електричного опору за формулою $R = U/I$;
- густини однорідного тіла – $\rho = m/V$;
- потужності двигуна – $N = F\,\mathrm{v}$;
- модуля імпульсу тіла – $p = m\,\mathrm{v}$.

СУМІСНІ

Приклад

Вимірювання сили пружності $F_{пр}$ та видовження Δl пружини для побудови графіка залежності $F_{пр} = F_{пр}(\Delta l)$ (з метою визначення коефіцієнта жорсткості пружини)

Рис. 0.2. Класифікація вимірювань за способом отримання числового результату

Похибки прямих вимірювань.

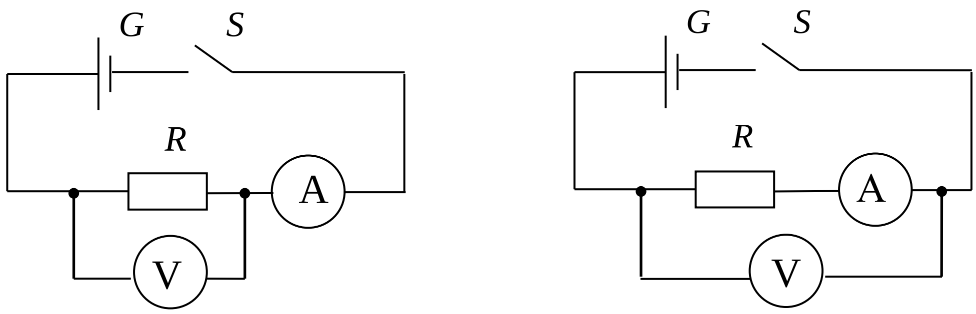
Відповідно до *причин виникнення* похибки вимірювань поділяють на *систематичні, випадкові та промахи.*

Систематичними називають похибки, які при повторних вимірюваннях залишаються постійними або змінюються за деяким законом. Наприклад, до ввімкнення амперметра сила струму в електричному колі була дещо більшою. Різниця між силою струму у колі до ввімкнення амперметра і його показами і є систематичною похибкою.

За походженням систематичні похибки поділяють на групи.

- *Похибки методу.* Вони виникають завдяки недосконалості вибраного методу вимірювань та наявності певних припущень та спрощень.

Як приклад, вкажемо на похибку методу вимірювання електричного опору резистора за допомогою амперметра і вольтметра (рис. 0.3). У цьому випадку опір визначають за формулою $R = U/I$, де U – спад напруги на резисторі R, I – сила струму в ньому. Однак, ввімкнутий за схемою *а)* амперметр вимірює силу струму не в резисторі, а сумарну силу струмів у резисторі і у вольтметрі. А вольтметр, ввімкнутий за схемою *б)*, вимірює напругу не на резисторі, а на ділянці, до якої входить резистор і амперметр. Похибку даного методу можна зменшити, якщо вибрати вольтметр із опором, значно більшим R, а амперметр з опором, значно меншим R.



а) *б)*

Рис. 0.3. Схеми вимірювання опору резистора методом амперметра і вольтметра

- *Інструментальні похибки.* Вони виникають через недосконалість конструкції засобів вимірювань та неточність їх виготовлення, через зношення (старіння) та несправність вимірювальних приладів.

- *Похибки, пов'язані з неправильним використанням приладів.* Так, деякі прилади потребують вертикального, інші – горизонтального встановлення; інколи прилад потрібно встановити під деяким кутом до горизонту. Зрозуміло, що за умови правильної експлуатації вимірювальних приладів розглядувані похибки не виникають.

- *Похибки, обумовлені зовнішнім несприятливим впливом* на засоби та об'єкти вимірювання (температура, атмосферний тиск, вологість повітря, сторонні електричні і магнітні поля тощо).

- *Похибки відліку.* Такі похибки виникають через недостатньо точне відлічування показів засобів вимірювань.

Випадковими називають похибки, які змінюються випадковим чином при повторних вимірах однієї і тієї ж величини. Їх виникнення пов'язане з дією випадкових факторів, які неможливо усунути у процесі експерименту. Наприклад, при зважуванні одного і того ж самого тіла на одних і тих самих терезах, як правило, отримують дещо різні значення маси. Це можна пояснити тим, що на встановлення рівноваги впливають тертя коромисла на осі та потоки повітря. При вимірюванні струмів і напруг у колі, що живиться від мережі, на результати впливає нестабільність її напруги. При вимірюванні діаметра циліндричного провідника мікрометром різні покази виникають за рахунок того, що при виготовленні провідника його діаметр у різних місцях виявився різним та й форма його не є строго циліндричною.

Промахи – похибки, які суттєво перевищують систематичні та випадкові похибки. Їх причинами, як зазвичай, є *помилки* спостерігача, несправність засобів вимірювань. Промахи виявляються при повторних вимірюваннях, відповідні результати відкидаються. Тому, якщо умови проведення дослідів дозволяють, ніколи не слід обмежуватися *одним* виміром.

Похибки при прямих однократних вимірюваннях. У лабораторних роботах найчастіше проводяться *однократні прямі* вимірювання. Похибка такого вимірювання складається з *похибки засобу вимірювання* (приладу, інструмента, міри) $\Delta_{пр}$ (її ще називають *інструментальною похибкою*) та *похибки відліку* $\Delta_{відл}$:

$$\Delta = \Delta_{пр} + \Delta_{відл}. \tag{0.2}$$

Інструментальні похибки поділяють на *основні* – допустимі похибки вимірювальних приладів та *додаткові*, які виникають через зношення, старіння та несправність засобів вимірювань. Основні інструментальні похибки не можна усунути (ввести поправки на них в умовах навчальної лабораторії теж, як правило, неможливо). Додаткові ж інструментальні похибки мають бути усунені (прилади можна вивіряти та полагодити) або на них слід ввести *поправки* (під *поправкою* розуміють значення величини, яке треба додати до отриманого при вимірюванні значення величини з метою виключення систематичної похибки).

Наприклад, стрілка амперметра при відсутності струму встановлюється не на нульовій позначці, а на позначці 0,1 А. В цьому випадку до виміряного таким приладом значення, скажімо 1,4 А, слід додати поправку – 0,1 А, при цьому результат виміру становитиме $I = 1,4\ \text{A} + \left(-0,1\ \text{A}\right) = 1,3\ \text{A}$.

Основні похибки засобів вимірювання визначаються при їх виготовленні на заводі. Ці похибки можна знайти за паспортними даними засобів вимірювання або з довідникової літератури.

Однак похибка прямого однократного вимірювання залежить не лише від точності конкретного приладу. Певна неточність виникає і при зчитуванні показів приладу (зокрема через округлення показів до заданої точності), адже точно визначити відстань від покажчика (стрілки) до штриха (риски) шкали неможливо. З цим і пов’язана *похибка відліку* $\Delta_{відл}$. *Як її врахувати?*

Як правило, за межу похибки відліку приймають найменше значення, яке можна визначити або зчитати на даній шкалі. Так, при ширині поділки 1 – 2 мм межу похибки відліку беруть рівною половині ціни поділки C:

$$\Delta_{відл} = C/2.$$

Якщо ж виявляється можливою окомірна оцінка часток поділки, то для надійності вважають $\Delta_{відл}$ рівною ціні частки (а не половині ціни частки).

Похибки при зважуванні. Дещо складніше оцінити похибку при використанні терезів. Потрібно, по-перше, врахувати основну похибку терезів $\Delta_{терезів}$, яка залежить від навантаження; по-друге, основну похибку гир $\Delta_{всіх\ гир}$ та, по-третє, похибку підбору гир $\Delta_{підбору\ гир}$. Отже, при прямому вимірюванні маси на терезах межа абсолютної похибки

$$\Delta = \Delta_{терезів} + \Delta_{всіх\ гир} + \Delta_{підбору\ гир}.$$

Залежність основної похибки терезів певної марки від навантаження та межі похибок гир подаються у паспортних (або довідникових) даних. Похибка підбору гир $\Delta_{підбору\ гир}$ є аналогічною похибці відліку і дорівнює половині маси найменшої гирі, що знаходиться на терезах (або яка виводить терези з рівноваги).

Похибки електровимірювальних приладів. Для електровимірювальних приладів інструментальна похибка задається за допомогою числа, яке називається *класом точності* γ. *Клас точності* (інша назва, зведена похибка вимірювального приладу) визначає межу абсолютної похибки даного приладу, виражену у відсотках від діапазону A шкали:

$$\gamma = \frac{\Delta_{пр}}{A} \cdot 100\% . \tag{0.3}$$

Наприклад, якщо клас точності міліамперметра $\gamma = 4$, а межа вимірювання цим приладом 250 мА, то межа абсолютної похибки даного приладу складе 4% від 250 мА, тобто $\Delta_{пр} = 10$ мА на всій шкалі.

Отже, якщо клас точності γ відомий, можна знайти межу абсолютної основної похибки приладу за формулою:

$$\Delta_{пр} = \frac{\gamma \cdot A}{100} .$$

Так, для вольтметра з межею вимірювання 2 В і класом точності $\gamma = 2,5$ отримаємо:

$$\Delta_{в} = \frac{2\ \text{В} \cdot 2,5}{100} = 0,05\ \text{В} .$$

Відносна ж похибка ε при вимірюванні фізичної величини даним приладом тим більша, чим меншим є значення вимірюваної величини порівняно з діапазоном всієї шкали. Дійсно, відносну похибку конкретного виміряного значення x $(x < A)$ оцінюють так:

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta_{пр}}{x} \cdot 100\% .$$

Помноживши і поділивши останній вираз на A, отримаємо з урахуванням (0.3):

$$\varepsilon = \frac{A}{x} \cdot \frac{\Delta_{пр}}{A} \cdot 100\% = \gamma \cdot \frac{A}{x} .$$

З останньої формули видно, що похибка вимірювання залежить не лише від класу точності приладу, але й від того, в якій частині його шкали знаходиться значення вимірюваної величини. Тому, бажано, *так* вибирати прилад, щоб значення вимірюваної величини відповідали другій половині шкали приладу.

Клас точності приладу звичайно вказують в його паспорті або безпосередньо на шкалі приладу. Для всіх держав діють єдині значення класів точності та їх позначення на шкалах приладів. Так, існують стрілочні прилади таких класів: 0,02; 0,05; 0,1; 0,2; 0,5; 1,0; 1,5; 2,5; 4,0. Зрозуміло, що чим менше клас, тим точніше прилад.

Похибки при вимірюванні часу секундоміром. Секундомір (механічний або електронний) – приклад приладу, для якого можлива похибка відліку дорівнює не півціни поділки, а всій ціні поділки (зокрема для секундоміра кишенькового типу $\Delta_{відл} = 0,2$ с). Пояснюється це тим, що відлік часу відбувається “стрибками”: секундна стрілка механічного секундоміра не зупиняється між штрихами, а покази електронного секундоміра складають дискретний спектр.

Зазначимо, що обидві складові $\Delta_{пр}$ та $\Delta_{відл}$ похибки прямого вимірювання (0.2) слід враховувати лише у випадку, коли їх значення є близькими одне до одного. Якщо ж $\Delta_{пр}$ та $\Delta_{відл}$ значно відрізняються, то меншою похибкою нехтують. При не дуже точних вимірюваннях так поступають, коли похибки відрізняються більш ніж у *чотири* рази.

При плануванні прямих вимірювань дуже важливо правильно вибрати засоби вимірювання. Не завжди приладом з меншою інструментальною похибкою можна отримати більш точний результат. Так, уявимо собі, що у лабораторній роботі “Дослідження руху тіла, кинутого під кутом до горизонту” замість рулетки з основною похибкою $\Delta_р = 1,0$ см використовується лінійка з межею вимірювання 10 см і основною похибкою $\Delta_л = 1$мм. На перший погляд, логіка у такій заміні є – основна похибка лінійки у 10 разів менше похибки рулетки. Однак при вимірюванні дальності польоту за допомогою лінійки суттєву роль відіграє та обставина, що довжина лінійки є значно меншою за дальність польоту. Тому виникає необхідність виконати не одне, а кілька вимірів. Це призведе до збільшення похибки, і вона може виявитися більшою ніж сума $\Delta_л + C/2 = 1,5$ мм і, скоріш за все, буде більшою 10 см при досить великій дальності.

Похибки при прямих багатократних вимірюваннях. Часто результати прямих вимірів певної фізичної величини при повторенні досліду у незмінних умовах *змінюються випадковим чином*, і різниця між цими результатами перевищує суму похибок приладу $\Delta_{пр}$ та відліку $\Delta_{відл}$. Як вже зазначалося, це обумовлюється дією випадкових факторів, які неможливо усунути у процесі експерименту. Відповідні похибки називаються *випадковими*. Виникають запитання: якщо при кожному вимірі отримуємо новий результат, то *що* слід прийняти за наближене значення вимірюваної величини та *як* оцінити межу випадкової похибки вимірювання?

Якщо з'являються випадкові похибки, то для їх врахування виміри повторюють кілька разів і за наближене значення вимірюваної величини приймають *середнє арифметичне* результатів окремих вимірів. Адже можна показати, що середнє арифметичне дає більш надійний результат ніж окремі виміри. Це пов'язано з тим, що при обчисленні середнього арифметичного випадкові похибки у бік завищення та у бік заниження результату найкращим чином компенсують одна одну.

Нехай проведено n вимірів і отримано спектр значень вимірюваної величини:

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n ;$$

тоді за результат вимірювання приймається середнє арифметичне значення результатів окремих вимірів (позначається: $x_{сер}$, $\langle x \rangle$, $\bar{x}$):

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i . \tag{0.4}$$

Покажемо, що середнє арифметичне дає більш надійний результат ніж окремі виміри, вважаючи, що вимірювання відбуваються в однакових умовах.

Окремі виміри дають неоднакові значення вимірюваної величини. Результат кожного виміру залежить від багатьох випадкових причин. Тому ми можемо розглядати можливі результати n окремих вимірів як випадкові величини $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Ці величини мають однаковий *розподіл імовірностей* (виміри проводяться за однаковою методикою та одними й тими ж самими приладами), а, отже, і однакові числові характеристики. Крім того, вони є *взаємно незалежними* (результат кожного окремого виміру не залежить від решти вимірів).

Як відомо, мірами розсіяння випадкової величини X виступають *дисперсія* $D(X) \equiv \overline{\left(X - \bar{X}\right)^2}$ та *середнє квадратичне відхилення* $\sigma(X) \equiv \sqrt{D(X)}$. Дисперсія середнього арифметичного $D(\bar{X})$ n однаково розподілених взаємно незалежних випадкових величин в n разів менше дисперсії D кожної з величин:

$$D(\bar{X}) = D/n . \tag{0.5}$$

Дійсно, користуючись властивостями дисперсії (сталий множник можна винести за знак дисперсії, піднісши його в квадрат; дисперсія суми незалежних величин дорівнює сумі дисперсій доданків), маємо

$$D(\bar{X}) = D\left(\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}\right) = \frac{D(X_1) + D(X_2) + \ldots + D(X_n)}{n^2}.$$

Прийнявши до уваги, що дисперсія кожної з величин дорівнює D, отримуємо $D(\bar{X}) = D/n$.

За означенням середнього квадратичного відхилення отримуємо

$$\sigma(\bar{X}) = \sqrt{D(\bar{X})} = \sqrt{D/n} = \sigma/\sqrt{n}, \tag{0.6}$$

де σ – середнє квадратичне відхилення кожної величини.

Отже, розсіяння середнього арифметичного незалежних випадкових величин є меншим, ніж розсіяння кожної окремої величини. Цим пояснюється, що середнє арифметичне значень окремих вимірів виявляється більш близьким до істинного значення вимірюваної величини, ніж результат окремого виміру. Останнє і означає, що середнє арифметичне кількох вимірів дає більш надійний результат, ніж окремий вимір. При цьому, як видно з (0.5) або (0.6), зі збільшенням числа n вимірів розсіяння середнього арифметичного значень цих вимірів зменшується, тобто середнє арифметичне стає більш близьким до істинного значення вимірюваної величини. Таким чином, збільшуючи число вимірів, можна отримати більш надійний результат.

У теорії ймовірностей доводиться, що при нескінченному збільшенні числа n незалежних вимірів середнє арифметичне результатів цих вимірів прямує до істинного значення $x_{іст}$:

$$\bar{x} \to x_{іст} \text{ при } n \to \infty.$$

Іншими словами, при *досить великому* числі вимірів майже достовірно, що їх середнє арифметичне $\bar{x}$ як завгодно мало відрізняється від істинного значення $x_{іст}$ вимірюваної величини.

З'ясуємо умови, при яких дане твердження є справедливим. Воно є наслідком *теореми Чебишева*. Наведемо її без доведення.

Нехай маємо нескінченну послідовність $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ *незалежних* випадкових величин з *однаковими математичними сподіваннями* m і *обмеженими дисперсіями* $D(X_i) < c = const$. Тоді для будь-якого додатного α імовірність нерівності

$$\left| \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} - m \right| < \alpha$$

наближається до одиниці при $n \to \infty$.

Іншими словами, в умовах теореми є справедливою рівність

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}-m\right|<\alpha\right)=1.$$

Вже зазначалося, що звичайно для вимірювання певної фізичної величини проводять кілька вимірів і середнє арифметичне їх результатів приймають за наближене значення вимірюваної величини. Теорема Чебишева вказує на умови, при яких даний спосіб вимірювання є застосовним.

Так, нехай потрібно виміряти певну фізичну величину X . Розглядатимемо результати кожного виміру як випадкові величини $X_1, X_2, \ldots, X_n$. До цих величин можна застосовувати теорему Чебишева, якщо

– вони незалежні;
– мають однакові математичні сподівання $M\left(X_i\right)=m$;
– їх дисперсії $D\left(X_i\right)$ є обмеженими.

Перша умова виконується, якщо результат кожного виміру не залежить від результатів інших. Друга умова виконується, якщо виміри проведені без систематичних (одного знака) похибок. В цьому випадку математичні сподівання всіх випадкових величин однакові і дорівнюють істинному значенню. Третя вимога виконується, якщо прилад забезпечує певну точність вимірювання. При цьому дисперсії окремих вимірів визначатимуться точністю приладу. Хоча результати окремих вимірів різні, їх розсіяння обмежені.

Згідно з теоремою Чебишева, середнє арифметичне результатів вимірювань, яке теж є випадковою величиною, при збільшенні n майже перестає бути випадковою і все більше наближається до сталої m. Тим самим виправдовується рекомендований у практиці спосіб одержання більш точних результатів вимірювання – збільшення їх числа.

Для прикладу розглянемо результати серії дослідів з вимірювання дальності польоту кульки, кинутої горизонтально з певною початковою швидкістю v_0 з деякої висоти h над поверхнею стола (рис. 0.4).

Якщо скористатися графічним зображенням результатів вимірювання дальності польоту у досить великій серії дослідів (рис. 0.5, *а*), то одразу ж буде виявлено, що, не дивлячись на випадковий характер кожного результату, у всій серії дослідів проявляється певна закономірність. На осі ординат (рис. 0.5, *а*) відкладено відносне число (долю) дослідів (відношення певного числа дослідів до загальної їх кількості), виражене у відсотках. У розглядуваному випадку загальне число дослідів дорівнювало 100, тому відносне число певної кількості дослідів у відсотках буде дорівнювати їх абсолютній кількості. З рисунка видно, що в одному досліді зі 100 дальність польоту перевищувала 149 см, в одному – була більшою 148 см, але меншою 149 см, у шести – дальності польоту лежали у межах від 147 см до 148 см і т.д. Розглянутий рисунок називається *гістограмою*.

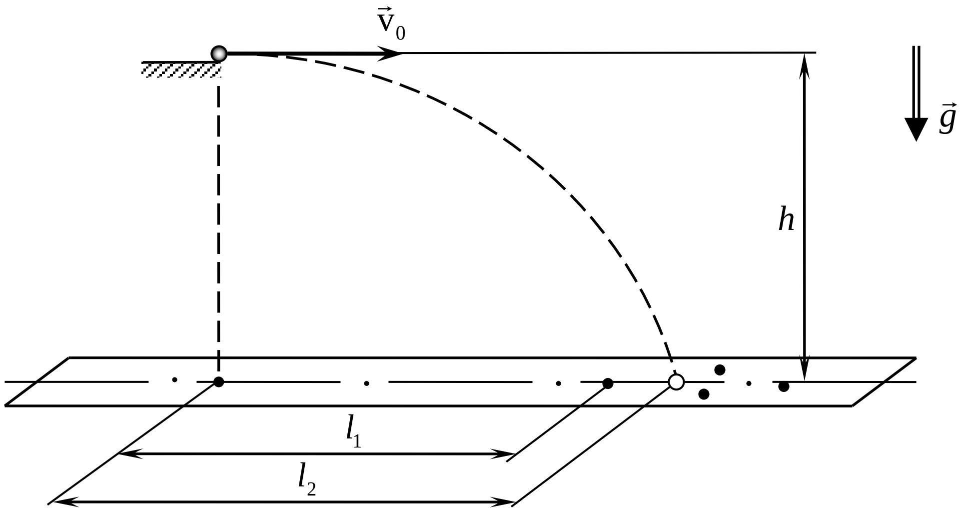


Рис. 0.4. Вимірювання дальності польоту кульки, кинутої горизонтально

Форму гістограми, яку отримують при невеликому числі вимірів, неможливо передбачити наперед. Але теорія ймовірностей дозволяє обчислити форму граничної гладкої кривої, до якої прямують гістограми при необмеженому збільшенні числа вимірів $(n \to \infty)$ і зменшенні ширини інтервалу $(\Delta l \to 0)$. Ця крива називається кривою Гаусса (рис. 0.5, *б*). Вона має дзвонувату форму з максимумом при $x = \bar{x}$. Доля (відносне число) вимірів, значення яких лежать у деякому інтервалі $(x_1 < x < x_2)$, визначається площею під відповідною ділянкою гауссової кривої. Аналітичний вираз цієї кривої:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}, \qquad (0.7)$$

де $\bar{x}$ – середнє значення величини x, $\bar{x} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$;

σ – середнє квадратичне відхилення, яке виступає мірою розсіяння значень випадкової величини відносно $\bar{x}$, $\sigma^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x-\bar{x})^2 f(x)dx$.

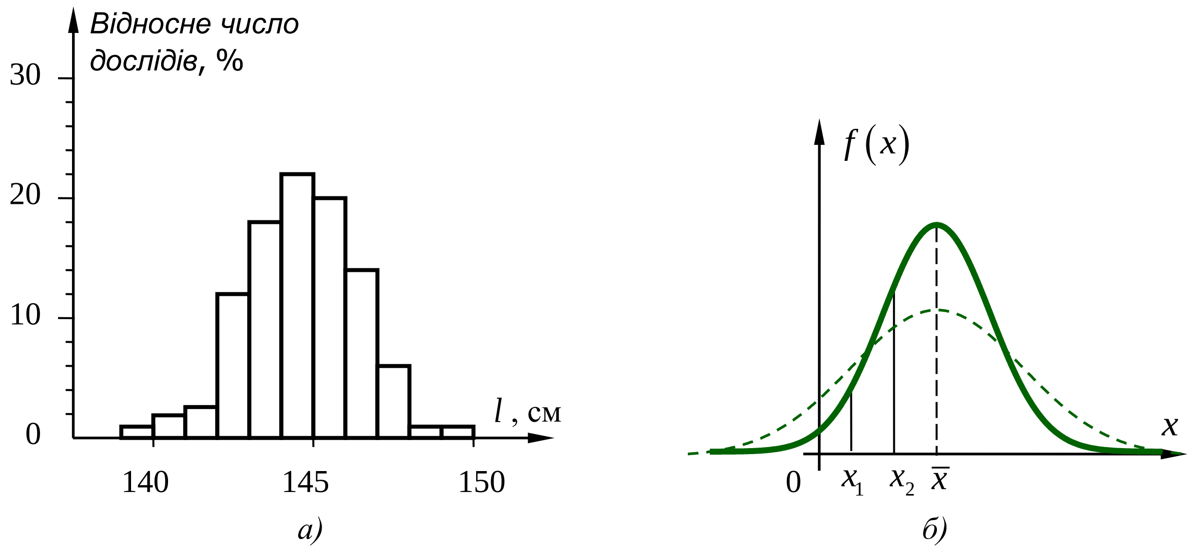


Рис. 0.5. Гістограма результатів вимірювання дальності польоту (*а*)
та гауссова крива (*б*)

Розподіл випадкової величини X, густина ймовірності якого описується формулою (0.7), називається *гауссівським* або *нормальним*. *Чому випадкова помилка має розподіл близький до нормального?* Відповідь на це запитання дає *центральна гранична теорема* теорії ймовірностей (теорема Ляпунова): якщо випадкова величина X являє собою суму дуже великого числа взаємно незалежних випадкових величин, при цьому вплив кожної з них на всю суму є досить малим, то X має розподіл, близький до нормального.

При вимірюванні певної фізичної величини ми отримуємо наближене її значення, оскільки на результат вимірювання впливають багато незалежних факторів. Кожен з них породжує незначну "частинну похибку". Однак, у зв'язку з тим, що число цих факторів дуже велике, їх сукупна дія обумовлює вже помітну "сумарну похибку". Розглядаючи сумарну похибку як суму дуже великого числа взаємно незалежних частинних похибок, згідно з теоремою Ляпунова можна дійти висновку, що сумарна випадкова похибка має розподіл, близький до нормального. Досвід підтверджує справедливість цього твердження.

При досить точних вимірюваннях крива Гаусса суттєво відрізняється від нуля лише в області малих відхилень від $\bar{x}$. При вимірюваннях з низькою точністю “ширина дзвона” збільшується (пунктирна лінія на рис. 0.5, *б*), а його максимум стає нижче. Площа ж під кривою не залежить від якості вимірювань. Проте, як при поганих, так і при добрих вимірюваннях можливо випадково отримати дуже добрі або далеко не досить добрі значення. Залежно від якості вимірювань такі значення будуть мати місце частіше або рідше.

Якщо провести на рис. 0.6 дві вертикальні прямі на однакових відстанях $\pm\sigma$ від $\bar{x}$, то можна показати, що площа утвореної криволінійної трапеції дорівнюватиме $\approx 0{,}68$. Це означає, що при досить великому числі вимірів приблизно 68% всіх результатів (виміряних значень) виявляться в інтервалі

$$\left(\bar{x} \pm \sigma\right). \tag{0.8}$$

Іншими словами, з імовірністю 0,68 можна сподіватися на те, що результат окремого виміру попаде в інтервал $\left(\bar{x} \pm \sigma\right)$.

Якщо ж провести вертикальні прямі на відстанях $\pm 3\sigma$, то вже $\approx 99{,}7\%$ всіх виміряних значень попадуть в інтервал

$$\left(\bar{x} \pm 3\sigma\right). \tag{0.9}$$

Тобто з імовірністю $\approx 99{,}7\%$ результат окремого виміру попадає в інтервал $\left(\bar{x} \pm 3\sigma\right)$. Як правило, саме останній інтервал використовують на практиці. Зазначимо також, що в інтервал $\left(\bar{x} \pm 2\sigma\right)$ попадають $\approx 95\%$ виміряних значень.

З розглянутого випливає, що ймовірність появи результату виміру *поза* інтервалом $\left(\bar{x} \pm 3\sigma\right)$ є дуже малою, а саме дорівнює $\approx 0{,}0027$. Це означає, що лише у $0{,}27\%$ випадків таке може відбутися. Такі події, виходячи з *принципу неможливості малоймовірних подій* можна вважати практично неможливими. У цьому полягає правило “трьох сигм”: *якщо виміряні значення розподілені за нормальним законом, то абсолютна величина відхилення значення від середнього значення не перевищує потроєного середньоквадратичного відхилення* 3σ.

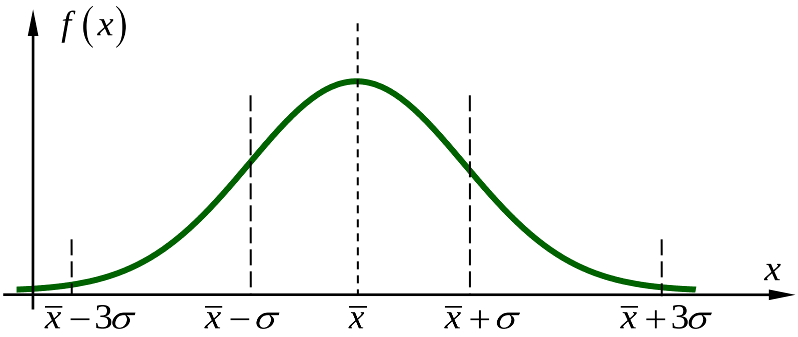


Рис. 0.6. Розподіл виміряних значень

Отже, за допомогою середньоквадратичного відхилення σ можна оцінити інтервал, в який із заданою *ймовірністю (надійністю)* попадають результати окремого виміру. *Як оцінити σ за даними n вимірів?*

У теорії ймовірностей показується, що оцінкою середньоквадратичного відхилення σ за експериментальними даними може виступати *вибіркове середньоквадратичне відхилення* (позначатимемо його далі також σ):

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\ldots+(x_n-\bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}\,. \qquad (0.10)$$

Більш точною оцінкою середньоквадратичного відхилення за даними n вимірів виступає “виправлене” середньоквадратичне відхилення s:

$$s = \sqrt{\frac{n}{n-1}}\cdot\sigma = \sqrt{\frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\ldots+(x_n-\bar{x})^2}{n-1}}\,. \qquad (0.11)$$

Порівнюючи формули (0.10) та (0.11), бачимо, що вони відрізняються лише знаменниками. При достатньо великій кількості n вимірів вибіркове і виправлене середньоквадратичні відхилення відрізняються мало.

Таким чином, обчисливши середнє арифметичне $\bar{x}$ та оцінивши середнє квадратичне відхилення за формулою (0.10) (або (0.11)), можна вказати інтервал

$$\bar{x}\pm 3\sigma,$$

в який з імовірністю $99,7\%$ попадають результати будь-якого окремого досліду. В цьому випадку межею випадкової похибки кожного окремого досліду є

$$\Delta x_{вип} = 3\sigma\,. \qquad (0.12)$$

Як уже зазначалося, середнє арифметичне значення величини, знайдене за результатами серії з n дослідів, взагалі-то кажучи, відрізняється від істинного значення вимірюваної величини. Так, якщо провести кілька таких серій вимірювань (кожна серія складається з n дослідів), то середнє арифметичне буде змінюватися від серії до серії, групуючись навколо істинного значення.

При цьому зрозуміло, що відхилення середнього арифметичного від істинного значення буде меншим, ніж відхилення кожного окремого досліду. Можна показати, що межа випадкової похибки середнього арифметичного $\Delta\bar{x}$, отриманого у серії з n дослідів, у $\sqrt{n}$ разів менше за межу випадкової похибки кожного окремого досліду $\Delta x_{вип}$ серії:

$$\Delta\bar{x} = \frac{\Delta x_{вип}}{\sqrt{n}} = \frac{3\sigma}{\sqrt{n}} . \tag{0.13}$$

Отже, результат прямих багатократних вимірювань можна записати у вигляді

$$x = \bar{x} \pm \Delta\bar{x} = \bar{x} \pm \frac{3\sigma}{\sqrt{n}} . \tag{0.14}$$

Запис (0.14) означає, що з імовірністю $\approx 0,997$ істинне значення вимірюваної величини виявиться покритим інтервалом

$$\left(\bar{x} - \frac{3\sigma}{\sqrt{n}};\ \bar{x} + \frac{3\sigma}{\sqrt{n}} \right).$$

Приклад. При вимірюванні гальмівного шляху l були отримані такі 10 результатів: 39,7 см; 37,5 см; 40,1 см; 43,2 см; 36,4 см; 38,1 см; 41,6 см; 39,2 см; 40,1 см; 39,5 см. Знайти межу випадкової похибки середнього арифметичного.

Розв'язання. Знаходимо середнє арифметичне значення гальмівного шляху:

$$\bar{l} = \frac{39,7 + 37,5 + 40,1 + \ldots + 39,5}{10}\ \text{см} = 39,5\,\text{см} .$$

Оцінимо середнє квадратичне відхилення за допомогою вибіркового середнього квадратичного відхилення (0.10):

$$\sigma = \sqrt{\frac{(39,7-39,5)^2 + (37,5-39,5)^2 + \ldots + (39,5-39,5)^2}{10}}\ \text{см} = 3,2\,\text{см} .$$

Межу випадкової похибки окремого досліду знайдемо за допомогою (0.12):

$$\Delta l_{вип} = 3\cdot 3,2\,\text{см} = 9,6\,\text{см},$$

а межу випадкової похибки середнього значення $\Delta\bar{l}$ гальмівного шляху за формулою (0.13):

$$\Delta\bar{l} = \frac{9,6\,\text{см}}{\sqrt{10}} \approx 3,0\,\text{см}.$$

Отже, з імовірністю $\approx 99,7\%$ можна стверджувати, що середнє значення $39,5\,\text{см}$ відрізняється від істинного не більше ніж на $3,0\,\text{см}$. Іншими словами, з імовірністю майже рівною одиниці істинне значення буде охоплене інтервалом: $(36,5\,\text{см}; 42,5\,\text{см})$. Результат вимірювання гальмівного шляху можна також подати у вигляді: $l = (39,5 \pm 3,0)\,\text{см}$.

З формули (0.13) випливає, що межа випадкової похибки середнього прямує до нуля при збільшенні числа n дослідів у серії. Проте це не означає, що необмежено збільшуючи число вимірів, можна проводити абсолютно точні вимірювання. Адже прилади, за допомогою яких ми отримуємо результати також мають похибки, які ми поки що не враховували. Тому похибка середнього арифметичного при необмеженому збільшенні числа дослідів прямує до похибки приладу.

Таким чином, необхідно ретельно продумати *скільки* дослідів (вимірів) треба провести при вимірюванні даної фізичної величини. Ніколи не слід обмежуватися однократним виміром. Завжди потрібно зробити повторний *контрольний* вимір. Якщо результати вимірів співпали, то на цьому можна зупинитися. Якщо ж між результатами виявилася різниця, то слід збагнути у чому справа: у тому, що один вимір було проведено неправильно, або у тому, що результати розбігаються через випадкові похибки. У першому випадку потрібно відкинути невірний результат, а у другому – слід розібратися з причиною розходження результатів. Якщо ця причина може бути усуненою шляхом регулювання приладу, це потрібно зробити.

У випадку, коли усунути причину розходження результатів не вдається, слід провести цілу серію повторних вимірів (дослідів). При цьому число дослідів у серії повинно бути таким, щоб випадкова похибка середнього арифметичного приблизно дорівнювала б похибці приладу або була б менше неї. Подальше збільшення числа дослідів є недоцільним.

Повна похибка вимірювання. Нехай за результатами вимірювань певної фізичної величини були оцінені випадкова $\Delta_{вип}$ та систематична $\Delta_{сист}$ похибки вимірювання (нагадаємо, що остання включає похибку приладу $\Delta_{пр}$ та похибку відліку $\Delta_{відл}$). Межу *повної (сумарної)* похибки Δ вимірювання в цьому випадку можна оцінити так:

$$\Delta = \Delta_{вип} + \Delta_{сист} = \Delta_{вип} + \Delta_{пр} + \Delta_{відл} . \tag{0.15}$$

Як уже зазначалося, якщо певний доданок у (0.15) менше інших приблизно у 4 та більше разів, то ним можна знехтувати.

У теорії ймовірностей показується, що більш точною формулою для оцінки сумарної похибки є:

$$\Delta = \sqrt{\Delta_{вип}^2 + \Delta_{сист}^2} = \sqrt{\Delta_{вип}^2 + \Delta_{пр}^2 + \Delta_{відл}^2} .$$

Ця формула є наслідком того, що середнє квадратичне відхилення суми взаємно незалежних випадкових величин дорівнює:

$$\sigma\left(X_1 + X_2 + \ldots + X_n\right) = \sqrt{\sigma^2\left(X_1\right) + \sigma^2\left(X_2\right) + \ldots + \sigma^2\left(X_n\right)} . \tag{0.16}$$

Остання формула випливає з очевидної властивості дисперсії: дисперсія суми кількох взаємно незалежних випадкових величин дорівнює сумі дисперсій цих величин

$$D\left(X\right) = D\left(X_1\right) + D\left(X_2\right) + \ldots + D\left(X_n\right).$$

Враховуючи, що $\sigma\left(X\right) \equiv \sqrt{D\left(X\right)}$, отримуємо (0.16).

Похибки непрямих вимірювань.

При непрямих вимірюваннях значення певної фізичної величини f обчислюють за відомою формулою

$$f = f\left(x, y, z, \ldots\right).$$

При цьому $x, y, z, \ldots$ – незалежні величини, значення яких визначають безпосередньо у досліді (або шляхом розрахунків) і подають у вигляді:

$$x = \bar{x} \pm \Delta x,\ \ y = \bar{y} \pm \Delta y\ ,\ \ z = \bar{z} \pm \Delta z\ ,\ \ldots,$$

де $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ – межі абсолютних похибок величин x, y, z відповідно.

Найкраще значення величини f при непрямому її вимірюванні визначається через середні значення величин $x, y, z, \ldots$:

$$f = f\left(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \ldots\right).$$

Загальні правила обчислення похибок при непрямих вимірюваннях отримують за допомогою диференціального числення. При цьому вважається, що межі абсолютних похибок $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \ldots$завжди *малі* порівняно із значеннями відповідних вимірюваних величин. Розглянемо спочатку найпростіші випадки.

- Якщо $f = x \pm y$, то $\Delta f = \Delta x + \Delta y$.

Дійсно, диференціал функції f запишеться у вигляді

$$df = dx \pm dy.$$

За умови, що межі абсолютних похибок величин x та y є досить малими порівняно із значеннями цих величин, можна наближено замінити диференціали в останній рівності на межі відповідних абсолютних похибок:

$$df \approx \Delta f\,,\ dx \approx \Delta x,\ dy \approx \Delta y.$$

При цьому для оцінки межі абсолютної похибки Δf знак “–” треба опустити. Отже, $\Delta f = \Delta x + \Delta y$. Межа відносної похибки $\varepsilon_f = \Delta f / f$.

- Якщо величина f визначається добутком двох інших величин x та y або їх відношенням:

$$f = xy \text{ або } f = \frac{x}{y},$$

то спочатку легше оцінити межу відносної похибки ε_f, яка в цих випадках визначатиметься за формулою:

$$\varepsilon_f = \varepsilon_x + \varepsilon_y. \tag{0.17}$$

Межу абсолютної похибки Δf у цьому разі можна оцінити так:

$$\Delta f = \varepsilon_f \cdot f.$$

Для обґрунтування формули (0.17) розглянемо, наприклад, випадок $f = x/y$. Прологарифмуємо обидві частини цієї рівності:

$$\ln f = \ln x - \ln y .$$

Знайдемо диференціали обох частин:

$$\frac{df}{f} = \frac{dx}{x} - \frac{dy}{y} .$$

Після наближеної заміни диференціалів в останньому рівнянні відповідними межами абсолютних похибок (за умови їх мализни), а також замінивши знак “мінус” на “плюс”, отримуємо

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y} ,$$

звідки

$$\varepsilon_f = \varepsilon_x + \varepsilon_y .$$

З формули (0.17) випливає, що якщо $f = x^2$, то $\varepsilon_f = \varepsilon_x + \varepsilon_x = 2\varepsilon_x$, а для більш загального вигляду степеневої функції $f = Ax^n$ (де A – сталий множник, $\varepsilon_A = 0$), $\varepsilon_f = \varepsilon_A + n\varepsilon_x = n\varepsilon_x$.

Розглянутий прийом можна легко узагальнити на досить поширену у навчальному фізичному практикумі функцію вигляду:

$$f = A\frac{x^l \cdot y^m}{z^n} .$$

Тоді

$$\varepsilon_f = l\varepsilon_x + m\varepsilon_y + n\varepsilon_z .$$

Приклад. Нехай вимірюється питомий опір матеріалу провідника. Тоді $R = \rho\frac{l}{S}$ та $R = U/I$. Якщо провідник має циліндричну форму, то

$$\rho = \frac{US}{Il} = \frac{\pi d^2 U}{4lI} .$$

Межа відносної похибки

$$\varepsilon_\rho = \varepsilon_U + \varepsilon_I + \varepsilon_\pi + 2\varepsilon_d + \varepsilon_l = \frac{\Delta U}{U} + \frac{\Delta I}{I} + \frac{\Delta \pi}{\pi} + 2\frac{\Delta d}{d} + \frac{\Delta l}{l} .$$

При цьому межу абсолютної похибки можна знайти за формулою $\Delta\rho = \varepsilon_\rho \cdot \rho$.

Загальний випадок. Нехай шукана величина f є функцією інших величин $x, y, \ldots$:

$$f = f\left(x, y, \ldots\right).$$

Повний диференціал функції багатьох змінних

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \ldots.$$

Після наближеної заміни диференціалів в останній формулі кінцевими приростами – межами абсолютних похибок відповідних величин, та заміни частинних похідних їх абсолютними значеннями, отримаємо формулу для оцінки межі абсолютної похибки величини f:

$$\Delta f = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \Delta x + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \Delta y + \ldots, \tag{0.18}$$

де $\Delta x, \Delta y, \ldots$ – межі абсолютних похибок величин $x, y, \ldots$ відповідно ($\Delta x, \Delta y, \ldots$ – додатні величини). У формулі (0.18) частинні похідні обчислюються при найкращих значеннях $\bar{x}, \bar{y}, \ldots$

Приклад. У досліді були виміряні відстань d від точкового об'єкта до збиральної лінзи $d = 0,20\,\text{м} \pm 0,01\,\text{м}$ та відстань f від зображення до лінзи $f = 0,40\,\text{м} \pm 0,01\,\text{м}$. За цими даними знайти оптичну силу лінзи.

Оптичну силу D лінзи знайдемо за формулою тонкої лінзи $D = \frac{1}{d} + \frac{1}{f}$,

$$D = \frac{1}{0,2\,\text{м}} + \frac{1}{0,4\,\text{м}} = 7,5\,\text{дптр}.$$

Межу абсолютної похибки ΔD знайдемо, скориставшись формулою (0.18):

$$\Delta D = \frac{\Delta d}{d^2} + \frac{\Delta f}{f^2},$$

$$\Delta D = \frac{0,01\,\text{м}}{\left(0,2\,\text{м}\right)^2} + \frac{0,01\,\text{м}}{\left(0,4\,\text{м}\right)^2} \approx 0,31\,\text{дптр}.$$

Отже, згідно з правилами запису результату

$$D = 8,0\,\text{дптр} \pm 0,3\,\text{дптр}, \quad \varepsilon_D = \frac{0,3\,\text{дптр}}{8\,\text{дптр}} \approx 4\%.$$

Як було показано на окремих прикладах, інколи легше спочатку оцінити межу відносної похибки ε_f. Для отримання загальної формули для ε_f прологарифмуємо функцію $f = f\left(x, y, \ldots\right)$ та знайдемо диференціали обох частин отриманого рівняння:

$$\frac{df}{f} = \frac{\partial \ln f}{\partial x} dx + \frac{\partial \ln f}{\partial y} dy + \ldots .$$

Після наближеної заміни диференціалів в останньому рівнянні межами абсолютних похибок відповідних величин та заміни частинних похідних їх абсолютними значеннями, отримаємо:

$$\frac{\Delta f}{f} \equiv \varepsilon_f = \left|\frac{\partial \ln f}{\partial x}\right| \Delta x + \left|\frac{\partial \ln f}{\partial y}\right| \Delta y + \ldots .$$

Вище нами було показано, що середнє квадратичне відхилення суми взаємно незалежних випадкових величин дорівнює не сумі середніх квадратичних відхилень цих величин, а кореню квадратному із суми квадратів цих відхилень:

$$\sigma\left(X_1 + X_2 + \ldots\right) = \sqrt{\sigma^2\left(X_1\right) + \sigma^2\left(X_2\right) + \ldots} .$$

Ця обставина дозволяє *уточнити* формули для оцінки похибок при непрямих вимірюваннях. Наведемо ці формули без доведення.

- Нехай значення шуканої величини f знаходиться шляхом додавання декількох інших величин:

$$f = x + y + z + \ldots \tag{0.19}$$

Найкраще значення величини f (найбільш близьке до істинного) знаходять при цьому шляхом додавання найкращих значень величин $x, y, z, \ldots$ за формулою (0.19).

Межа абсолютної похибки Δf величини f зв'язана з межами абсолютних похибок $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \ldots$ формулою

$$\Delta f = \sqrt{\left(\Delta x\right)^2 + \left(\Delta y\right)^2 + \left(\Delta z\right)^2 + \ldots} .$$

Межі абсолютних похибок $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \ldots$ при цьому можуть бути отримані з досліду (якщо величини $x, y, z, \ldots$ безпосередньо вимірюються) або знайдені шляхом обчислень (якщо $x, y, z, \ldots$ самі отримані в результаті розрахунків).

- Нехай шукана величина f зв'язана з іншими величинами $x, y, z, \ldots$ формулою:

$$f = x^{\alpha} \cdot y^{\beta} \cdot z^{\gamma} \cdot \ldots, \qquad (0.20)$$

де $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ – будь-які числа, цілі або дробові, додатні або від'ємні. Теорія ймовірності показує, що найкраще значення f обчислюється за допомогою (0.20) через найкращі значення $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \ldots$, тобто

$$\bar{f} = (\bar{x})^{\alpha} \cdot (\bar{y})^{\beta} \cdot (\bar{z})^{\gamma} \cdot \ldots.$$

При цьому межа відносної похибки ε_f знаходиться за формулою

$$\varepsilon_f = \frac{\Delta f}{f} = \sqrt{(\alpha\varepsilon_x)^2 + (\beta\varepsilon_y)^2 + (\gamma\varepsilon_z)^2 + \ldots} = \sqrt{\left(\alpha\frac{\Delta x}{\bar{x}}\right)^2 + \left(\beta\frac{\Delta y}{\bar{y}}\right)^2 + \left(\gamma\frac{\Delta z}{\bar{z}}\right)^2 + \ldots}. \qquad (0.21)$$

Як і у першому випадку, величини $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \ldots$ знаходяться безпосередньо з досліду або шляхом розрахунків за допомогою інших величин, які вимірюються вже безпосередньо.

- *Загальний випадок.* Нехай шукана величина f є певною функцією інших величин $x, y, z, \ldots$ так, що $f = f(x, y, z, \ldots)$.

В цьому випадку межа абсолютної похибки Δf дорівнюватиме

$$\Delta f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \Delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \cdot \Delta y\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z} \cdot \Delta z\right)^2 + \ldots}.$$

В останній формулі частинні похідні обчислюються при найкращих значеннях величин $x, y, z, \ldots$.

Зазначимо, що розрахункова формула для визначення величини f може містити, окрім величин $x, y, z, \ldots$, ще й сталі величини. Ними можуть бути математичні константи: $\pi, e, \ln 2$; фізичні константи: елементарний заряд, прискорення вільного падіння, табличні дані тощо. Бажано, щоб відносна похибка значень цих величин була меншою за відповідну похибку виміряних величин $x, y, z, \ldots$

Приклад. Нехай об'єм V циліндра визначається за результатами прямих вимірювань його діаметра $d = (3{,}46 \pm 0{,}04)$см та висоти $h = (4{,}87 \pm 0{,}05)$см за допомогою формули

$$V = \frac{1}{4}\pi d^2 h.$$

У вираз для V разом з вимірюваними величинами d і h входить число π, яке ми звичайно округляємо до $3{,}14$. Тому перед тим як проводити обчислення, необхідно з'ясувати, чи достатньо такої точності, щоб похибка цієї константи не впливала на точність визначення об'єму. Розглядаючи π як число, задане з похибкою $\Delta\pi$, для межі відносної похибки згідно з (0.21) отримуємо

$$\varepsilon_V = \sqrt{4\left(\frac{\Delta d}{\overline{d}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta h}{\overline{h}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta \pi}{\pi}\right)^2}\,.$$

Відносна похибка завдання π, тобто величина $\Delta\pi/\pi$, повинна бути меншою за $2\left(\Delta d/\overline{d}\right)$ і $\Delta h/\overline{h}$. При округленні π до 3,14 ми допускаємо абсолютну похибку $\Delta\pi = 0,002$ (більш точне значення $\pi = 3{,}141593$), тому $\Delta\pi/\pi \approx 0{,}0006$. Цією похибкою можна знехтувати порівняно із $2\left(\Delta d/\overline{d}\right) = 2\cdot 0,04/3,46 \approx 0,024$ і $\Delta h/\overline{h} = 0,05/4,87 \approx 0,011$.

Отже,

$$V = \frac{1}{4}\cdot 3{,}14\cdot\left(3,46\cdot 10^{-2}\ \text{м}\right)^2\cdot 4,87\cdot 10^{-2}\ \text{м} = 45,77\cdot 10^{-6}\ \text{м}^3.$$

Межа відносної похибки об'єму

$$\varepsilon_V \approx \sqrt{4\left(\frac{\Delta d}{\overline{d}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta h}{\overline{h}}\right)^2} = 2,53\cdot 10^{-2}.$$

Кінцевий результат: $V = \left(46 \pm 2\right)\cdot 10^{-6}\ \text{м}^3$, $\varepsilon_V \approx 3\%$.

Метод меж. Для обробки результатів при непрямих вимірюваннях можна також застосовувати *метод меж*. Згідно з цим методом наближене значення вимірюваної величини знаходять як півсуму нижньої $f_{\text{НМ}}$ і верхньої $f_{\text{ВМ}}$ її меж:

$$\overline{f} = \frac{f_{\text{ВМ}} + f_{\text{НМ}}}{2},$$

а абсолютну похибку оцінюють як піврізницю цих меж:

$$\Delta f = \frac{f_{\text{ВМ}} - f_{\text{НМ}}}{2}.$$

Самі ж межі $f_{\text{ВМ}}$ і $f_{\text{НМ}}$ визначають за допомогою розрахункової формули для величини f. При цьому значення $f_{\text{ВМ}}$ округляють з надлишком, а $f_{\text{НМ}}$ – з нестачею до однієї значущої цифри. Кінцевий результат записують у вигляді

$$f = \overline{f} \pm \Delta f\,.$$

Приклад. Для вимірювання фокусної відстані збиральної лінзи отримано такі результати: відстань від лінзи до точкового об'єкта $d = 10,0\,\text{см} \pm 0,5\,\text{см}$; відстань від лінзи до його зображення $f = 22,0\,\text{см} \pm 0,5\,\text{см}$. Знайдіть фокусну відстань F лінзи із застосуванням методу меж.

Фокусну відстань F лінзи знайдемо з формули тонкої лінзи $\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f}$, звідки

$$F = 1\Big/\left(\frac{1}{d} + \frac{1}{f}\right).$$

Знайдемо верхні та нижні межі для d та f:

$d_{ВМ} = 10,0\,см + 0,5\,см = 10,5\,см$; $d_{НМ} = 10,0\,см - 0,5\,см = 9,5\,см$;

$f_{ВМ} = 22,0\,см + 0,5\,см = 22,5\,см$; $f_{НМ} = 22,0\,см - 0,5\,см = 21,5\,см$.

Тепер знаходимо межі для фокусної відстані F:

$$F_{ВМ} = 1\Big/\left(\frac{1}{d_{ВМ}} + \frac{1}{f_{ВМ}}\right) = 1\Big/\left(\frac{1}{10,5\,см} + \frac{1}{22,5\,см}\right) \approx 7,16\,см,$$

$$F_{НМ} = 1\Big/\left(\frac{1}{d_{НМ}} + \frac{1}{f_{НМ}}\right) = 1\Big/\left(\frac{1}{9,5\,см} + \frac{1}{21,5\,см}\right) \approx 6,58\,см.$$

Оцінимо абсолютну похибку

$$\Delta F = \frac{F_{ВМ} - F_{НМ}}{2} = \frac{7,16\,см - 6,58\,см}{2} = 0,29\,см \approx 0,3\,см.$$

Наближене значення фокусної відстані

$$\bar{F} = \frac{F_{ВМ} + F_{НМ}}{2} = \frac{7,16\,см + 6,58\,см}{2} = 6,87\,см \approx 6,9\,см.$$

Отже, $F = 6,9\,см \pm 0,3\,см$.

? Підготовчі вправи.

1. Швидкість світла у вакуумі дорівнює (299 792,5 ± 0,4) км/с, а швидкість звуку у повітрі (при певній температурі) – (331,63 ± 0,04) м/с. Що виміряно з більшою точністю?

2. В таблиці наведені значення густини деяких речовин (г/см^3): води – 1,00; спирту – 0,80; молока – 1,03; ртуті – 13,60; гліцерину – 1,26. Скільки значущих цифр у кожному числі?

3. Округліть наступні числа:

а) до двох значущих цифр: 7,82; 1,96; 1,00; 0,0302; 0,999;

б) до трьох значущих цифр: 87 856; 19,995; 78,625; 0,006798; 0,1199;

в) до чотирьох значущих цифр: 60 002 480; 87,99567; 0,0006780456.

4. Наступні значення виразіть в одиницях СІ та запишіть їх у стандартній формі: 12 км; 0,050 км^2; 24 мм^3; 0,80 г/см^3; 22,4 л; 48 мс; 1,60 МН; 6,60 кВ; 101,3 кПа.

5. Результати двох лабораторних робіт були записані так: $\rho = 7{,}4867058 \pm 0{,}2$ г/см^3; $k = 0{,}322403 \pm 0{,}0156$ мг/Кл. Запишіть результати у більш коректній формі.

6. Визначте ціну поділки шкали та покази приладів, наведених на рис. 0.7.

7. На рис. 0.8 наведені шкали приладів з однією границею виміру. Запишіть результат вимірювання із зазначенням меж абсолютної та відносної похибок.

Примітка. Клас точності приладу на рис. 0.8, *а* дорівнює 4, клас точності приладу на рис. 0.8, *б* знайдіть самостійно.

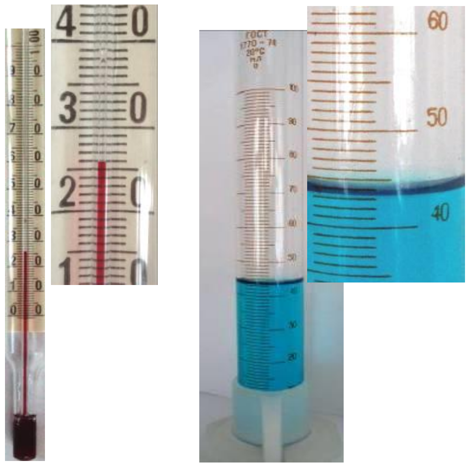
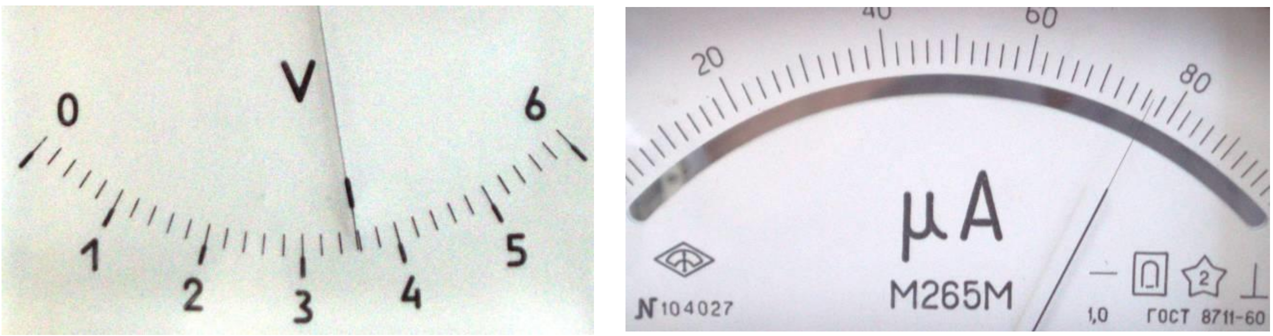


Рис. 0.7. До завдання 6



а) *б)*

Рис. 0.8. До завдання 7

8. У процесі вимірювання опору дроту були отримані такі значення (в омах): 5,615; 5,622; 5,624; 5,618; 5,620; 5,633; 5,628; 5,624; 5,613. Знайдіть середнє значення опору та оцініть його точність.

9. Вимірювання маси m та об'єму V бруска дали такі результати: m = 195,0 г ± 0,5 г; V = 25,0 см^3 ± 0,5 см^3. Визначте середню густину речовини бруска та оцініть похибку результату.

10. За допомогою лінійки виміряйте площі фігур *1 – 3* (рис. 0.9). Результат подайте із зазначенням меж абсолютної та відносної похибок.

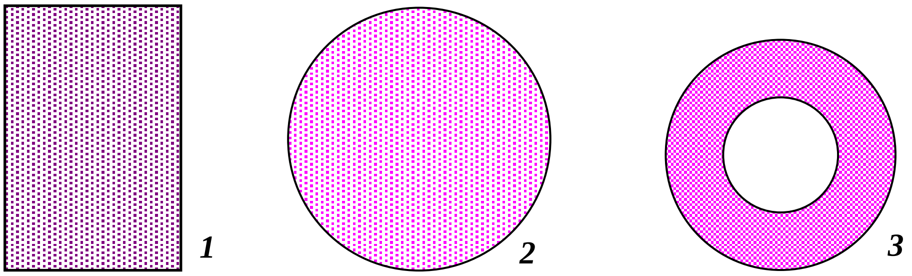


Рис. 0.9. До завдання 10

11*. Оцініть найбільшу відносну похибку при вимірюванні опору за допомогою амперметра та вольтметра з використанням схеми, зображеної на рис. 0.10, якщо прилади показують 25 В і 12,5 А (точно). Межа вимірювання вольтметра 30 В, його клас точності 2,5. Внутрішній опір вольтметра 5 кОм. Межа вимірювання амперметра 15 А, його клас точності 4, внутрішній опір 0,2 Ом.

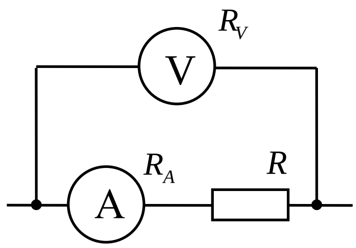


Рис. 0.10. До завдання 11

1. ДОСЛІДЖЕННЯ РУХУ ТІЛА, КИНУТОГО ПІД КУТОМ ДО ГОРИЗОНТУ

1.1. Теоретичні відомості.

Рух снаряда (кульки) балістичного пістолета можна вважати *рівноприскореним*, оскільки під час польоту на снаряд діє лише постійна сила – сила тяжіння $m\vec{g}$. *(Покажіть, що силою опору повітря можна знехтувати)*. Дійсно, з другого закону Ньютона, записаного для кульки, що рухається, $m\vec{a} = m\vec{g}$, маємо $\vec{a} = \vec{g}$. Тобто у будь-якій точці траєкторії польоту кулька має однакове прискорення – прискорення вільного падіння ($g \approx 9{,}8$ м/с^2).

Дослідимо рух снаряда спочатку теоретично. Нехай кульку кинуто під кутом α до горизонту. Для зручності виберемо осі координат так, як показано на рис. 1.1: вісь x спрямована горизонтально (вздовж поверхні столу), а вісь y – вертикально вгору. При цьому початкове положення кульки співпадає з початком координат.

Як відомо, *рівноприскорений* рух матеріальної точки можна описати за допомогою рівняння:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{\mathrm{v}}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2}, \tag{1.1}$$

де $\vec{r}_0$ – радіус-вектор точки у початковий момент часу ($t = 0$);

$\vec{\mathrm{v}}_0$ – початкова швидкість точки;

$\vec{a}$ – прискорення точки.

Рівняння руху (1.1) можна легко отримати, виходячи з визначень прискорення $\vec{a} \equiv d\vec{\mathrm{v}}/dt$ та швидкості $\vec{\mathrm{v}} \equiv d\vec{r}/dt$, та використавши початкові умови:

$$\vec{\mathrm{v}}(0) = \vec{\mathrm{v}}_0, \qquad \vec{r}(0) = \vec{r}_0.$$

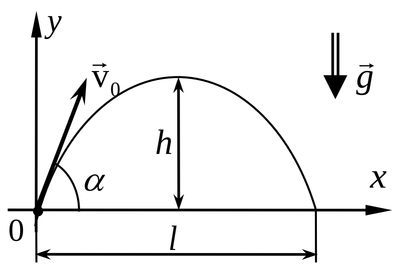


Рис. 1.1. Рух кульки, кинутої під кутом до горизонту

Перепишемо рівняння (1.1) у проекціях на осі координат x та y:

$$x = x_0 + \mathrm{v}_{0x}\, t + \frac{a_x t^2}{2}, \tag{1.2}$$

$$y = y_0 + \mathrm{v}_{0y}\, t + \frac{a_y t^2}{2}, \tag{1.3}$$

де x_0, y_0 – початкові координати матеріальної точки;

v_{0x}, v_{0y} – проекції початкової швидкості;

a_x, a_y – проекції прискорення.

Запишемо рівняння руху (1.2) та (1.3) для кульки, кинутої під кутом α до горизонту, у вибраній нами системі координат (рис. 1.2):

$$x = \mathrm{v}_0 \cos\alpha\, t, \tag{1.4}$$

$$y = \mathrm{v}_0 \sin\alpha\, t - \frac{gt^2}{2}. \tag{1.5}$$

Рівняння (1.4) та (1.5) дозволяють знайти *координати* x та y снаряда у будь-який момент часу при відомому модулі початкової швидкості v_0.

Узявши від виразів (1.4) та (1.5) похідну за часом, знайдемо *проекції швидкості* кульки як функції часу ($\mathrm{v}_x = dx/dt$, $\mathrm{v}_y = dy/dt$):

$$\mathrm{v}_x = \mathrm{v}_0 \cos\alpha, \tag{1.6}$$

$$\mathrm{v}_y = \mathrm{v}_0 \sin\alpha - gt. \tag{1.7}$$

Виключивши з виразів (1.4) та (1.5) час t, отримаємо залежність $y(x)$, тобто рівняння *траєкторії* тіла, кинутого під кутом до горизонту:

$$y(x) = x\,\mathrm{tg}\,\alpha - \frac{g}{2\mathrm{v}_0^2 \cos^2\alpha} x^2. \tag{1.8}$$

Отже, траєкторією руху снаряда є ділянка *параболи*.

Час підйому t_1 снаряда на максимальну висоту можна знайти з умови

$$\mathrm{v}_y(t_1) = 0,$$

яка виражає рівність нулю проекції вектора швидкості на вертикальну вісь (вісь y) у верхній точці підйому.

Маємо

$$\mathrm{v}_0 \sin\alpha - gt_1 = 0\,,$$

звідки

$$t_1 = \frac{\mathrm{v}_0 \sin\alpha}{g}\,. \tag{1.9}$$

Час польоту t_2 снаряда дорівнює сумі часу підйому на максимальну висоту та часу спуску. Оскільки час падіння дорівнює часу спуску, час всього польоту дорівнюватиме подвоєному часу підйому t_1 на максимальну висоту:

$$t_2 = 2t_1 = \frac{2\mathrm{v}_0 \sin\alpha}{g}\,. \tag{1.10}$$

Висоту підйому h знайдемо за допомогою рівняння (1.5) з урахуванням умови, що у момент часу $t = t_1$ координата y дорівнює h (у компактній формі ця умова запишеться так: $y(t_1) = h$).

Маємо

$$h = \mathrm{v}_0 \sin\alpha\, t_1 - \frac{gt_1^2}{2}\,.$$

Підставляючи вираз (1.9) для t_1 в останню формулу, отримаємо

$$h = \frac{\mathrm{v}_0^2 \sin^2\alpha}{2g}\,. \tag{1.11}$$

Висоту підйому не складно також знайти за допомогою рівняння траєкторії (1.8), адже нам відомо, що максимум цієї функції має дорівнювати h. Отже, беручи похідну від (1.8) за x і прирівнюючи її нулеві, отримаємо

$$\frac{dy}{dx} = \mathrm{tg}\,\alpha - \frac{g}{\mathrm{v}_0^2 \cos^2\alpha}\, x = 0\,,$$

звідки знаходимо координату x, яка відповідає екстремуму (максимуму) функції:

$$x = x_1 = \frac{\mathrm{v}_0^2 \cos\alpha \sin\alpha}{g} = \frac{\mathrm{v}_0^2 \sin 2\alpha}{2g}\,. \tag{1.12}$$

Підставляючи x_1 у вираз (1.8), знаходимо

$$y \equiv h = \frac{\mathrm{v}_0^2 \sin^2\alpha}{2g}\,.$$

Для знаходження *дальності польоту* l снаряда підставимо у рівняння (1.4) час польоту t_2 (формула (1.10)):

$$x(t_2) \equiv l = \mathrm{v}_0 \cos\alpha \, t_2 = \frac{2\,\mathrm{v}_0^2 \cos\alpha \sin\alpha}{g}$$

або

$$l = \frac{\mathrm{v}_0^2 \sin 2\alpha}{g}. \tag{1.13}$$

Дальність польоту можна також знайти, скориставшись симетрією траєкторії руху снаряда у розглядуваному нами випадку. За допомогою (1.12) одразу отримуємо

$$l = 2x_1 = \frac{\mathrm{v}_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

1.2. Експериментальна частина.

З а в д а н н я 1. Виміряти початкову швидкість снаряда балістичного пістолета.

2. Дослідити залежність дальності польоту снаряда від кута пострілу.

Д о д а т к о в е з а в д а н н я . Виміряти дальність польоту та висоту підйому снаряда балістичного пістолета при пострілі під певним кутом до горизонту.

О б л а д н а н н я : балістичний пістолет (снаряд – сталева кулька), штатив для фронтальних робіт (з муфтою та кільцем), вимірювальна стрічка (або рулетка), 3 – 4 аркуші писального та 1 – 2 аркуші копіювального паперу, скотч, ножиці.

Рис. 1.2. Деякі пристрої, що використовуються при виконані досліду

Вимірювання початкової швидкості снаряда. Для визначення початкової швидкості v_0 снаряда можна провести постріл з пістолета, встановленого горизонтально на деякій висоті h (рис. 1.3).

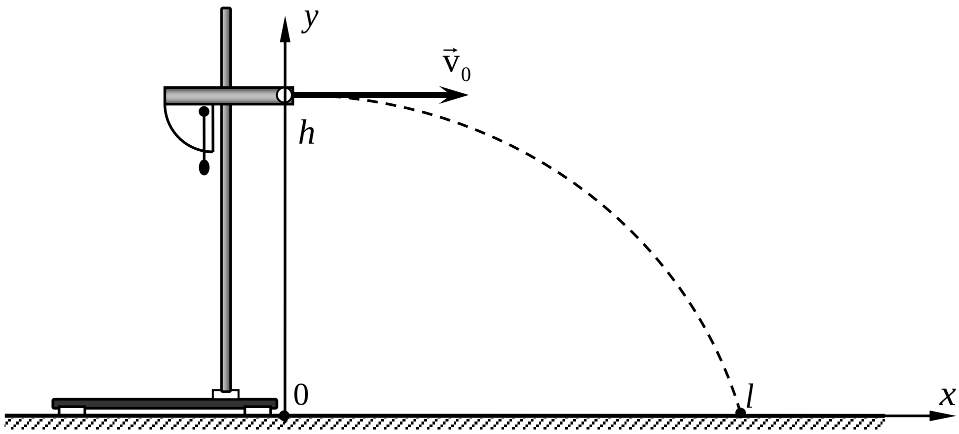


Рис. 1.3. Дослід з вимірювання початкової швидкості снаряда

У системі координат, наведеній на рис. 1.3, рівняння руху (1.2) та (1.3) для снаряда запишуться у вигляді:

$$x = v_0 t,$$

$$y = h - \frac{gt^2}{2}.$$

Координати кульки в момент падіння $t = \tau$ дорівнюватимуть:

$$x(\tau) = l, \qquad y(\tau) = 0,$$

тому

$$l = v_0 \tau,$$

$$h = \frac{g\tau^2}{2}.$$

З цих двох рівнянь дістанемо розрахункову формулу для v_0:

$$v_0 = l\sqrt{\frac{g}{2h}}. \tag{1.14}$$

Отже, для визначення початкової швидкості за формулою (1.14) необхідно виміряти дальність польоту l кульки та початкову висоту h її положення.

Зазначимо, що повторення описаного досліду виявляє *випадковий* розкид значень дальності польоту снаряда (і цей розкид значно перевищує межі похибок приладу та відліку). Тому при оцінці похибки отриманого значення v_0 слід врахувати випадкову похибку при вимірюванні l. Для цього дослід повторюють кілька разів. Отримавши спектр значень l_1, l_2, …, l_n, знаходять середнє значення

$$\overline{l} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} l_i$$

та відповідні межі абсолютної Δl та відносної ε_l похибок

$$\Delta l = \frac{3\sigma_l}{\sqrt{n}}, \qquad \varepsilon_l = \frac{\Delta l}{\overline{l}},$$

де σ_l – середнє квадратичне відхилення значення окремого вимірювання,

$$\sigma_l = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(\overline{l} - l_i\right)^2}\,.$$

Межу відносної $\varepsilon_{\mathrm{v}_0}$ похибки при визначенні початкової швидкості за формулою (1.14) можна оцінити так:

$$\varepsilon_{\mathrm{v}_0} \equiv \frac{\Delta \mathrm{v}_0}{\mathrm{v}_0} = \varepsilon_l + \frac{1}{2}\varepsilon_h\,. \tag{1.15}$$

Як правило $\varepsilon_l \gg \varepsilon_h$, тому для меж відносної та абсолютної похибок отримуємо вирази:

$$\varepsilon_{\mathrm{v}_0} \approx \varepsilon_l, \qquad \Delta \mathrm{v}_0 = \varepsilon_{\mathrm{v}_0} \cdot \mathrm{v}_0\,. \tag{1.16}$$

Початкову швидкість можна також знайти, виконавши серію вертикальних пострілів. У цьому методі v_0 визначатиметься лише висотою підйому h кульки над початковим рівнем. Дійсно, згідно із законом збереження механічної енергії можна записати

$$\frac{m\mathrm{v}_0^2}{2} = mgh,$$

звідки

$$\mathrm{v}_0 = \sqrt{2gh}\,.$$

Як ви вважаєте, у чому полягають головні недоліки і переваги даного методу?

Дослідження залежності дальності польоту снаряда від кута пострілу. Як було показано, при стрільбі з горизонтальної поверхні під різними кутами до горизонту дальність польоту l снаряда виражається формулою

$$l = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

З цієї формули видно, що при зміні кута α вильоту снаряда від $90°$ до $0°$ дальність його падіння спочатку збільшується від нуля до деякого максимального значення, а потім знов зменшується до нуля. Дальність польоту максимальна, коли $\sin 2\alpha$ найбільший. Очевидно, що це має місце при $\alpha = 45°$. Крім того, оскільки дальність польоту залежить від $\sin 2\alpha$, вона буде однаковою для кутів α та $90° - \alpha$. Наприклад, для $30°$ та $60°$ це легко зрозуміти, якщо уявити, де розміщуються точки на одиничному колі, що відповідають $60°$ та $120°$. Ці результати аналізу останньої формули слід перевірити експериментально.

Методичні поради.

1. Для запису результатів дослідів підготуйте таблицю, подібну до табл. 1.1

Таблиця 1.1

Залежність дальності польоту снаряда від кута пострілу

Кут вильоту кульки α,°	20°	30°	40°	45°	50°	60°	70°
Середня дальність польоту кульки $\overline{l}$, м							

2. Стрічку, зроблену з писального паперу, закріпіть на столі за допомогою скотча. У місці передбачуваного падіння снаряда можна покласти аркуші копіювального паперу. В цьому випадку при падінні металевої кульки на писальному папері залишається добре помітний слід.

3. Встановлюючи пістолет під кутами $20°$, $30°$, …, $70°$, зробіть кілька (3 – 4) пострілів для кожного кута. Сліди падіння кульки можна обвести олівцем та позначити кути вильоту.

4. Виміряйте середню дальність польоту снаряда для кожного кута.

5. За отриманими табличними даними побудуйте графік залежності дальності польоту l кульки від кута її вильоту $l = l(\alpha)$. Біля кожної експериментальної точки бажано позначити межі абсолютної похибки.

Як будувати графіки? При побудові графіків слід мати на увазі, що за результатами дослідів ми отримуємо не точку, а прямокутник зі сторонами $2\Delta x$ та $2\Delta y$ (рис. 1.4, *а*), де Δx, Δy – межі абсолютних похибок величин x та y відповідно. Тому при побудові графіків необхідно проводити плавну лінію так, щоб вона лежала якомога ближче до точок, та, щоб приблизно однакове число точок виявилося по різні боки від кривої.

Як приклад більш точного методу проведення кривих вкажемо на *метод найменших квадратів*. Суть цього методу полягає у наступному. Після того, як якісний характер кривої $y(x)$ (пряма, парабола, синусоїда, …) з тих чи інших міркувань (як правило теоретичних) встановлено, параметри цієї кривої a, b, c, … (для прямої $y(x) = ax + b$ таких параметрів два: a і b) мають бути підібрані такими, щоб сума S квадратів відхилень

$$S = \sum_i \left[y_i - y(x_i) \right]^2$$

від кривої за всіма експериментальними точками (x_i, y_i) була мінімальною. Отже, задача зводиться до дослідження функції $S(a, b, c, \ldots)$ на екстремум з розв'язанням системи рівнянь

$$\begin{cases} \partial S / \partial a = 0, \\ \partial S / \partial b = 0 \end{cases}$$

відносно шуканих значень параметрів a, b, c, … .

Як правило, обчислення параметрів a, b, c, … для даного класу функцій (пряма, парабола, синусоїда, …) проводять на комп'ютері за існуючими загальними формулами (див., наприклад, [3, с. 255]).

Спосіб зображення на графіку експериментальних результатів залежить від того, чи відома їх похибка. Якщо вона не відома, то результати зображаються *точками*, а якщо відома, то, як правило, їх зображають *хрестами* (рис. 1.4, *б*). При цьому розмір хреста по горизонталі дорівнює подвоєній межі абсолютної похибки величини, значення якої відкладаються по осі абсцис

($2\Delta x$), а його розмір по вертикалі – межі абсолютної похибки по осі ординат ($2\Delta y$). Якщо похибки однієї з величин не можна навести на графіку через їх мализну, то результати зображаються рисочками, що характеризують похибки значень іншої величини.

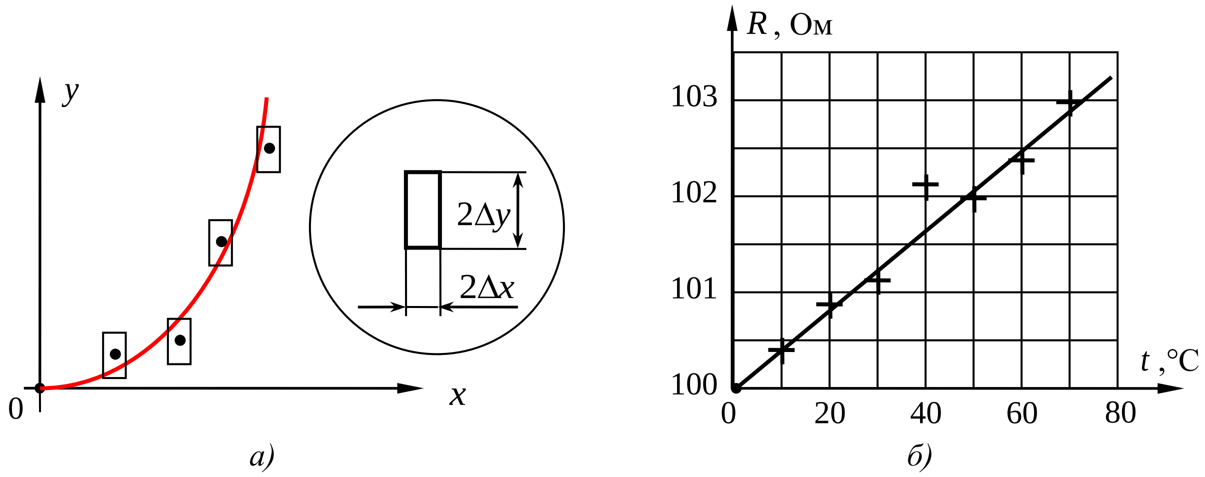


Рис. 1.4. Графічна форма представлення експериментальних результатів:
а) – проведення кривої через експериментальні точки;
б) – приклад графіку залежності (опору R металевого провідника від його температури t).

Графічне зображення результатів дозволяє швидко зрозуміти характерні особливості залежності, що досліджується, та виявити помилкові результати (промахи). Так, при розгляді графіка, наведеного на рис. 1.4, *б*, видно, що четверта зліва експериментальна точка випала. У випадку даної залежності, скоріш за все, це свідчить про допущену помилку. Проте подібні особливості викликають неабиякий інтерес при дослідженні нових (невідомих раніше) залежностей.

Зрозуміло також, що помилку можна знайти і без графіка (наприклад, при аналізі експериментальних даних, поданих у вигляді таблиці), однак на графіку її видно більш чітко. Якщо помилку виявлено занадто пізно, коли повторити вимірювання вже не можливо, точку потрібно нанести на графік, але її не слід брати до уваги при обробці. (Докладніше про графічні методи обробки результатів можна ознайомитися у [7].)

Вимірювання дальності польоту та висоти підйому снаряда при пострілі під певним кутом до горизонту. Для більш цікавого виконання цього завдання можна спочатку розрахувати, *де* необхідно встановити *мішень* та *кільце* (від штатива), щоб при пострілі з пістолета під певним кутом (наприклад, $45°$) до горизонту снаряд пролетів крізь кільце і влучив у мішень. Потім отримані дані необхідно перевірити у досліді.

Очевидно мішень (аркуш паперу) потрібно встановити на відстані l, яку можна обчислити за формулою дальності польоту при стрільбі з горизонтальної поверхні під кутом до горизонту:

$$l = \frac{\mathrm{v}_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

Кільце слід закріпити на штативі посередині між мішенню та пістолетом на висоті h, яка визначається за формулою висоти підняття снаряда при стрільбі під кутом до горизонту:

$$h = \frac{\mathrm{v}_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}.$$

Для обчислення числових значень цих величин необхідно спочатку виміряти модуль початкової швидкості снаряда (відповідна методика нами вже розглянута). При проведенні досліду слід прослідкувати за тим, щоб снаряд, центр кільця та середина мішені знаходилися в одній вертикальній площині.

? Підготовчі вправи.

Рівень А

1. Який із графіків (рис. 1.5) може описувати прямолінійний рівноприскорений рух тіла?

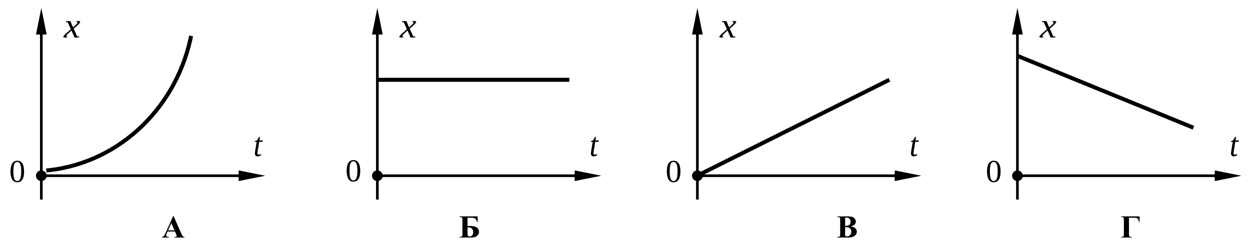


Рис. 1.5. До завдання 1

2. У якому з наведених прикладів рух тіла можна вважати як рух матеріальної точки?

А. Пілот виконує фігуру вищого пілотажу.

Б. Токар спостерігає обертання деталі, закріпленої у верстаті.

В. Диспетчер розраховує час польоту літака, що робить рейс Київ – Москва.

Г. Глядачі спостерігають рух фігуриста, який виконує довільну програму.

3. Тіло кинули під кутом до горизонту. Якщо опір повітря відсутній, то прискорення тіла …

А. … у верхній точці дорівнює нулю.

Б. … на протязі всього часу польоту однакове.

В. … у верхній точці змінює напрям.

Г. … найбільше перед падінням на землю.

4. Якщо тіло кинули під кутом до горизонту (опором повітря можна знехтувати), то траєкторією руху буде …

А. … спіраль. **Б.** … пряма лінія. **В.** … гіпербола. **Г.** … парабола.

5. Пружинний пістолет закріплено на високому штативі. При першому пострілі кулька вилітає горизонтально, при другому – під кутом до горизонту, при третьому – вертикально вниз. Початкова швидкість кульки в усіх випадках однакова, опором повітря можна знехтувати. Порівняйте швидкості кульки перед падінням на підлогу після пострілів.

А. У першому випадку швидкість більша, ніж у другому.

Б. У другому випадку швидкість більша, ніж у третьому.

В. У третьому випадку швидкість більша, ніж у другому.

Г. У всіх випадках швидкість однакова.

6. Як зміниться дальність польоту тіла, кинутого горизонтально, якщо перемістити точку кидання на висоту в 4 рази більшу, а швидкість кидання зменшити вдвічі?

А. Не зміниться. **Б.** Збільшиться в 4 рази.

В. Збільшиться в 2 рази. **Г.** Збільшиться в $\sqrt{2}$ рази.

7. Як зміниться дальність польоту снаряда балістичного пістолета, якщо кут його пострілу змінити з $30°$ до $60°$?

А. Не зміниться. **Б.** Збільшиться в 2 рази.

В. Зменшиться в 2 рази. **Г.** Збільшиться в $\sqrt{2}$ рази.

8. Тіло двічі кидають горизонтально з одного й того самого місця в одному напрямі, збільшивши початкову швидкість в момент другого кидання у два рази. Як при цьому змінилася тривалість польоту тіла?

А. Не змінилася. **Б.** Збільшилася в 2 рази.

В. Зменшилася в 2 рази. **Г.** Збільшиться в 4 рази.

Рівень Б

9. Отримайте формули для висоти підйому h і дальності польоту l снаряда балістичного пістолета при пострілі з горизонтальної поверхні під кутом α до горизонту.

10. Покажіть, що при пострілі з горизонтальної поверхні під кутом $45°$ дальність польоту снаряда є найбільшою.

11. Яка висота більше і у скільки разів: максимальна висота підняття снаряда при стрільбі під кутом $45°$ або при зенітній стрільбі?

12. Що слід зробити, щоб влучити у ціль, якщо дальність при стрільбі під кутом $35°$ відповідає знаходженню цілі, але висота пагорба на шляху трохи перевищує висоту підняття снаряда?

13. Отримайте розрахункову формулу (1.14) для визначення початкової швидкості снаряда балістичного пістолета.

14. Обґрунтуйте формули (1.15) та (1.16).

15. Дальність польоту снаряда, що виміряна у досліді, складає $l = 1{,}2$ м ± 0,1 м. Чи може при пострілі снаряд впасти за межами знайдених граничних значень 1,1 м та 1,3 м?

16. Навіщо у даній роботі передбачено аркуші писального та копіювального паперу?

17. Покажіть, що силою опору повітря при русі кульки балістичного пістолета можна знехтувати.

1.3. Додаткові творчі завдання.

Завдання для формування банку ідей.

1. Як визначити початкову швидкість снаряда іграшкового пістолета за допомогою секундоміра?

2. Для вимірювання швидкості гвинтівкової кулі експериментатор має лише електродвигун з відомою частотою обертання, два картонних диски, лінійку, клей та транспортир. Як можна виконати завдання?

3. Як за допомогою рулетки визначити, у скільки разів більшу швидкість надає м'ячику хлопчик у порівнянні з дівчинкою?

4. Як виміряти висоту дома, якщо у наявності є лише порожня консервна банка та секундомір?

5. Камінь було кинуто в озеро зі спокійною водою. Як оцінити дальність кидка за допомогою лінійки та секундоміра?

6. Як оцінити ширину річки у кроках за допомогою травинки?

7. Як за допомогою лінійки знайти у сонячний день висоту дерева?

8. Як визначити, в якому з двох сірникових коробків залишилося менше сірників (відкривати коробки не можна)?

Експериментальні та тренувальні винахідницькі задачі.

Експериментальні задачі.

1. Стріляючи з балістичного пістолета, встановленого на столі, попадіть, зробивши лише два постріли, у картонну коробку, яка стоїть на підлозі (на столі). *Обладнання:* балістичний пістолет, рулетка, коробка.

Примітка. Спочатку дозволено зробити будь-яке число пострілів. Потім установлюється коробка і дозволяється виконати лише два постріли.

2. Визначте максимальну швидкість руху пальця руки. *Обладнання:* камінець, лінійка.

3. Дослідіть залежність швидкості струменя, що витікає з посудини, від висоти рівня води у цій посудині. *Обладнання:* штатив з муфтою і лапкою, скляна бюретка зі шкалою та гумовою трубкою, пружинний затискач, гвинтовий затискач, секундомір, лійка, кювета, стакан з водою, аркуш міліметрового паперу.

Тренувальні винахідницькі задачі.

1. У даній лабораторній роботі описано метод визначення початкової швидкості снаряда, що базується на серії вертикальних пострілів балістичного пістолета. Неточність цього способу пов’язана, головним чином, з вимірюванням висоти підйому снаряда. Спробуйте удосконалити даний метод вимірювання.

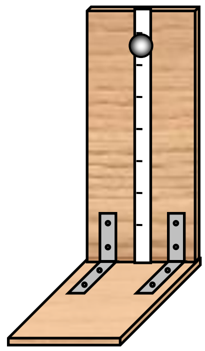


Рис. 1.6. Прилад для оцінки часу реакції людини

2. Запропонуйте інші (не описані у даній роботі) способи вимірювання початкової швидкості дробинки, яка вилітає з пружинного пістолета.

Зробіть своїми руками!

На рис. 1.6 наведено прилад, за допомогою якого можна оцінити *час реакції* для руки або ноги людини. Оцінка базується на визначені часу падіння кульки з такої висоти, при якій людина ще встигає відсмикнути з під кульки руку (ногу).

Завдання.

а) Поясніть принцип дії та виготовте даний прилад;

б) визначте час реакції для обох рук студентів вашої групи (результати зручно подати у вигляді гістограми);

в) виявіть основні недоліки описаного приладу та спробуйте їх усунути.

Примітка. Зручні габаритні розміри приладу: висота (довжина лінійки) 45 см, ширина 10 см, довжина нижньої частини (місця для руки) 15 см.

2. ВИМІРЮВАННЯ ПРИСКОРЕННЯ ВІЛЬНОГО ПАДІННЯ

2.1. Теоретичні відомості.

Падіння тіл на Землі – один з проявів *закону всесвітнього тяжіння*, відкритого І. Ньютоном. Згідно з цим законом сила, з якою дві матеріальні точки притягають одна одну, прямо пропорційна масам цих точок m_1 і m_2 та обернено пропорційна квадрату відстані r між ними:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}, \tag{2.1}$$

де G – гравітаційна стала, $G = 6{,}67\cdot 10^{-11}$ Н·м²/кг².

Сила F називається *гравітаційною* силою або силою *тяжіння*. Гравітаційна сила напрямлена вздовж прямої, яка проходить через матеріальні точки, що взаємодіють. Вводячи радіус-вектор $\vec{r}_{21}$ (рис. 2.1), який має напрямок від першої матеріальної точки $\vec{r}_1$, до другої $\vec{r}_2$, та модуль, який дорівнює відстані між цими точками, закон всесвітнього тяжіння можна записати у векторній формі:

$$\vec{F}_{21} = G\frac{m_1 m_2}{r_{21}^3}\vec{r}_{21}, \qquad \vec{r}_{21} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1, \tag{2.2}$$

де $\vec{F}_{21}$ – сила, з якою друга матеріальна точка діє на першу; за третім законом Ньютона перша точка діє на другу з силою $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$.

Закон всесвітнього тяжіння є універсальним: будь-які два тіла, які мають маси, притягаються одне до одного. Сили тяжіння можуть бути лише силами *притягання*.

Зазначимо, що формула (2.1) є справедливою не лише для випадку взаємодії двох матеріальних точок. Можна показати, що кулеподібні тіла зі сферично симетричним розподілом маси в їх об’ємі (наприклад, однорідні кулі і сфери) взаємодіють так само, ніби їхні маси зосереджені у центрах куль. У цьому випадку під r слід розуміти відстань між *центрами* куль (або сфер).

У загальному випадку для визначення гравітаційної сили взаємодії двох протяжних тіл, ці тіла подумки розбивають на малі частини, кожну з яких можна вважати матеріальною точкою. Потім обчислюють силу взаємодії кожної такої частини (елемента) одного тіла з кожною частиною іншого тіла. А результуючу силу взаємодії двох тіл знаходять як векторну суму елементарних взаємодій.

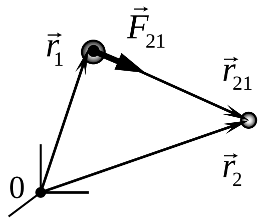


Рис. 2.1. До запису формули (2.2)

Формула (2.1) є справедливою і у випадку, коли, наприклад, тіло 1 – однорідна куля дуже великого радіуса (Земля), а тіло 2 можна вважати за матеріальну точку. В цьому випадку r – відстань від центра кулі до матеріальної точки. Так, якщо матеріальна точка знаходиться на висоті h над поверхнею Землі, то сила їхньої взаємодії

$$F = G\frac{Mm}{\left(R+h\right)^2}, \tag{2.3}$$

де M , m – маси Землі і матеріальної точки відповідно;
R – радіус Землі.

Скориставшись другим законом Ньютона та формулою (2.3), знайдемо прискорення матеріальної точки, яке викликане дією сили тяжіння:

$$g = \frac{F}{m} = G\frac{M}{\left(R+h\right)^2}. \tag{2.4}$$

Саме таке прискорення матиме матеріальна точка на висоті h, вільно падаючи (у пустоті) у полі тяжіння. Звідси і назва – *прискорення вільного падіння*.

З формули (2.4) випливає, що, якщо висота h набагато менше радіуса Землі R ($R \approx 6400$ км), то прискорення вільного падіння практично не залежить від h. Тому вільне падіння тіл поблизу поверхні Землі ($h \ll R$) можна вважати рівноприскореним рухом з прискоренням

$$g = G\frac{M}{R^2} = 9{,}8 \text{ м/с}^2,$$

а силу тяжіння – постійною силою

$$F = G\frac{Mm}{R^2} = gm.$$

Однак зі збільшенням висоти залежність g від h стає суттєвою. Так, зменшення g з висотою береться до уваги при обчисленні траєкторій штучних супутників Землі.

Покажемо, що поблизу поверхні Землі ($h \ll R$) прискорення вільного падіння можна вважати постійним.

Скориставшись біноміальним рядом

$$\left(1+x\right)^n = 1 + nx + n\left(n-1\right)\frac{x^2}{2!} + \cdots,$$

розвинемо вираз $1\big/\left(R+h\right)^2$ у ряд за степенями h/R:

$$\frac{1}{\left(R+h\right)^2} = \frac{1}{R^2}\frac{1}{\left(1+h/R\right)^2} = \frac{1}{R^2}\left(1-2\frac{h}{R}+3\left(\frac{h}{R}\right)^2-\cdots\right).$$

Залишимо в останньому виразі лише перші два доданки, оскільки при $h \ll R$ вже другий доданок $2h/R$ досить малий. Наприклад, для висоти 20 км (висоти польотів літаків) $h/R \approx 3\cdot10^{-3}$. Квадрат цієї величини відрізняється від одиниці вже у мільйонних долях. Отже,

$$\frac{1}{\left(R+h\right)^2} \approx \frac{1}{R^2}\left(1-2\frac{h}{R}\right),$$

тому формулу (2.4) можна записати у вигляді:

$$g \approx G\frac{M}{R^2}\left(1-2\frac{h}{R}\right).$$

З останньої формули отримуємо, що при вільному падінні тіл з висоти до 1 км зміна прискорення вільного падіння складе менше

$$2h/R \approx 3\cdot10^{-4}.$$

З цією точністю можна вважати прискорення вільного падіння таким, що не залежить від висоти і дорівнює

$$g = G\frac{M}{R^2} = 9{,}8 \text{ м/с}^2.$$

З такою самою точністю і силу тяжіння $F = mg$ (де $g = 9{,}8$ м/с^2) можна вважати постійною поблизу поверхні Землі.

Слід зазначити, що прискорення вільного падіння g залежить не лише від висоти над поверхнею Землі, але й від географічної широти місця положення матеріальної точки. При цьому при переході від полюсів до екватора g зменшується. Це пояснюється двома причинами.

- Земля не є точною кулею: точки земної поверхні поблизу екватора знаходяться на більшій відстані від центра Землі, ніж точки, які розташовані біля полюсів (полярний та екваторіальний радіуси Землі дорівнюють відповідно $R_{пол} = 6357$ км та $R_{екв} = 6378$ км).

- Завдяки обертанню Землі навколо своєї осі точки земної поверхні рухаються з доцентровим прискоренням $a_{доц}$ (поблизу екватора $a_{доц} = 0{,}034$ м/с^2). Тому у системі відліку, зв'язаною з поверхнею Землі (ця система відліку є *неінерціальною*), при просуванні до екватора сила тяжіння буде все більше послаблюватися *відцентровою силою інерції*.

Сумарна дія обох факторів обумовлює зменшення g приблизно на 0,5%. На полюсі $g = 9{,}832$ м/с^2, на екваторі $g = 9{,}780$ м/с^2. *Стандартне* значення g, прийняте при побудові систем одиниць та при барометричних розрахунках дорівнює 9,80665 м/с^2 (це значення близьке до прискорення сили тяжіння на широті 45°).

Точні вимірювання показують, що і на одній і тій самій широті, на однаковій висоті над рівнем моря прискорення вільного падіння може відхилятися від норми. Причина таких аномалій полягає у неоднаковому складі земної кори. Там, де кора має більшу густину, g більше (і навпаки). Це пояснюється тим, що хоча притягання тіла Землею є результатом дії на нього всіх частинок Землі, але, зрозуміло, що більш близькі частинки роблять більший внесок у сумарну силу, оскільки гравітаційна взаємодія обернено пропорційна до квадрату відстані.

Отже, точні вимірювання прискорення вільного падіння можуть дати цінну інформацію для розвідників земних надр про поклади корисних копалин. Наприклад, руду слід шукати у місцях, де g має підвищене значення, а кам'яну сіль можна виявити за місцевим зниженням значення g (досить часто поблизу покладів солі знаходиться і нафта). Розглянемо далі один з методів вимірювання прискорення вільного падіння.

2.2. Експериментальна частина.

З а в д а н н я . Виміряти прискорення вільного падіння за допомогою математичного маятника.

О б л а д н а н н я : тягарець (масивна кулька) на нитці, лінійка вимірювальна (або рулетка), секундомір, штатив для фронтальних робіт (з муфтою і лапкою).

Рис. 2.2. Деякі пристрої, що використовуються при виконані досліду

Метод вимірювання прискорення вільного падіння за допомогою математичного маятника. *Математичним маятником* називається ідеалізована система, що складається з нерозтяжної та невагомої нитки і тіла, яке розглядається як матеріальна точка. Відхилення маятника від положення рівноваги характеризується кутом φ. При виведенні маятника з положення рівноваги виникає обертальний момент, який намагається повернути його у положення рівноваги. Можна показати, що при *малих* коливаннях ($|\varphi| \ll 1$) кутове відхилення φ маятника змінюватиметься за законом

$$\varphi = \varphi_m \cos\left(\omega t + \varphi_0\right),$$

де φ_m – амплітуда коливань (максимальне відхилення від положення рівноваги);

ω – кутова частота коливань (нагадаємо $\omega = 2\pi/T$, де T – період коливань);

φ_0 – початкова фаза.

Період *малих* коливань математичного маятника визначається формулою:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}, \tag{2.5}$$

де l – довжина маятника.

Як видно з формули (2.5) період коливань математичного маятника не залежить від *маси* тягарця. Крім того, для малих коливань період не залежить від *амплітуди*. Останню властивість називають *ізохронністю* коливань. Вона є спільною для *гармонічних* коливань різних систем, наприклад, для пружинного, математичного та фізичного маятників. Ізохронність коливань використовується, зокрема, у механічних годинниках.

Розглянемо коливання математичного маятника докладніше. Отримаємо спочатку для нього диференціальне рівняння руху. Для цього запишемо другий закон Ньютона в проекції на дотичну до траєкторії вісь τ (див. рис. 2.3)

$$ma_\tau = F_\tau,$$

де a_τ – проекція прискорення на вісь τ (тангенціальна проекція прискорення);

F_τ – проекція результуючої сили на вісь τ.

З рис. 2.3 знаходимо:

$$a_\tau = -l\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -l\ddot{\varphi},$$

$$F_\tau = mg\sin\varphi.$$

Маємо

$$-ml\ddot{\varphi} = mg\sin\varphi.$$

При малих коливаннях ($|\varphi| \ll 1$) можна скористатися наближенням $\sin\varphi \approx \varphi$, тому отримуємо *диференціальне рівняння руху* математичного маятника у такому вигляді:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi = 0\,. \qquad (2.6)$$

Як відомо, диференціальне рівняння

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \qquad (2.7)$$

описує гармонічні коливання (ω – кутова частота коливань). Загальний розв'язок цього рівняння має вигляд:

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \varphi_0)\,, \qquad (2.8)$$

де x_m – амплітуда коливань; $(\omega t + \varphi_0)$ – фаза коливань; φ_0 – початкова фаза, $\varphi \in (-\pi; \pi]$.

Порівняння рівнянь (2.6) та (2.7) дозволяє записати на основі (2.8) *рівняння коливань математичного маятника*:

$$\varphi(t) = \varphi_m \cos(\omega t + \varphi_0)\,,$$

де $\omega = \sqrt{g/l}$.

Отже, період малих коливань математичного маятника

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\,.$$

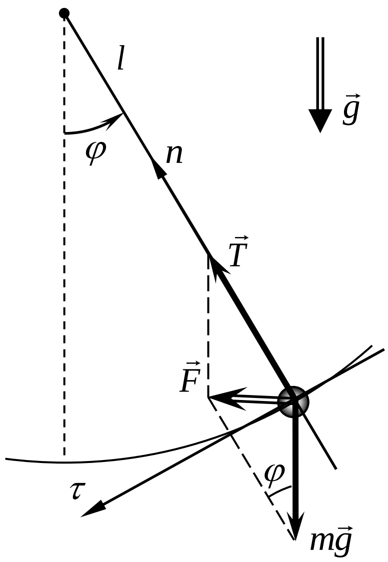


Рис. 2.3. Рух математичного маятника

Отже, розглядуваний метод вимірювання g базується на використанні формули для періоду математичного маятника (2.5). Певним наближенням математичного маятника може виступати тягарець (масивна кулька), закріплений на нитці, довжина якої має бути набагато більшою, ніж розміри тягарця *(Чому?)*.

Для визначення g слід виміряти період T коливань такого маятника та його довжину l (відстань від точки підвісу до центра мас тягарця – центра кульки). При цьому для підвищення точності вимірювання періоду T, спочатку доцільно знайти час t певного числа N коливань (наприклад, $N = 10$), а потім визначити період за очевидною формулою

$$T = t/N\,. \qquad (2.9)$$

Після того, як період T та довжину l маятника знайдено, можна обчислити g за формулою

$$g = 4\pi^2 \frac{l}{T^2}. \tag{2.10}$$

Зазначимо, що етап обчислення періоду за формулою (2.9) можна опустити як необов'язковий. Дійсно, підставивши (2.9) у (2.10), отримуємо розрахункову формулу у вигляді:

$$g = 4\pi^2 N^2 \frac{l}{t^2}.$$

Точність вимірювання g суттєво залежить від точності вимірювання періоду T коливань маятника. Так, відносну похибку виміряного значення g, виходячи з (2.10), можна оцінити за формулою:

$$\varepsilon_g = 2\varepsilon_T + \varepsilon_l.$$

При цьому $\varepsilon_T \gg \varepsilon_l$, оскільки виміряти довжину маятника можна з досить малою похибкою (до 1%), а період – із значно більшою. *(Покажіть це самостійно).* Отже, підвищення точності вимірювання періоду коливань є досить важливою задачею у розглядуваному методі.

Як підвищити точність експерименту? Для цього слід зменшити випадкову похибку при вимірюванні T. Можна, наприклад, провести серію дослідів з вимірювання періоду для маятника з фіксованою довжиною l і за отриманим спектром значень T_1, T_2, …, T_n знайти більш точне значення T (відповідна методика обробки результатів *прямих багатократних* вимірювань розглянута у розділі "Вимірювання фізичних величин").

Проте краще провести вимірювання періоду T при *різних* довжинах l маятника. При цьому для кожного значення l бажано виміряти принаймні два значення часу певного числа N повних коливань і, усереднивши їх, знайти період T за формулою (2.9). Число N коливань може бути 10, 20 або 50 залежно від *(поясніть це самостійно)*:

а) довжини маятника;

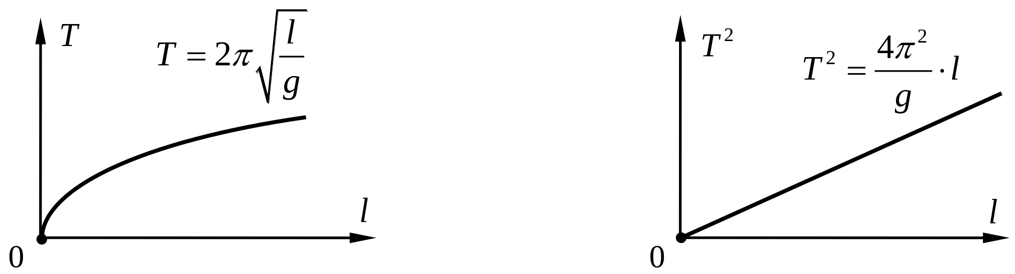
б) приладу, яким вимірюється час (секундомір, звичайний годинник тощо).

Отже, отримуємо спектр експериментальних значень:

$$(l_1;T_1),\ (l_2;T_2),\ \ldots,\ (l_n;T_n).$$

Як знайти g, врахувавши одночасно всю сукупність таких даних? Розглянемо графічний спосіб розв'язання цієї задачі. Отриманий спектр значень дозволяє побудувати графік залежності *квадрату періоду* T^2 від довжини l маятника $T^2 = T^2(l)$. *Чому нам потрібна саме залежність T^2, а не T від l?* Справа у тому, що графік $T = T(l)$ – крива (рис. 2.4, *а*), а графік $T^2 = T^2(l)$ – пряма лінія (рис. 2.4, *б*). Це легко зрозуміти з аналітичних виразів цих залежностей:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}};\quad T^2 = \frac{4\pi^2}{g}\cdot l. \tag{2.11}$$



а) *б)*

Рис. 2.4. Графіки теоретичних залежностей: *а)* $T = T(l)$, *б)* $T^2 = T^2(l)$

З формули (2.11) випливає, що для прямої $T^2 = T^2(l)$ коефіцієнт $4\pi^2/g$ є *кутовим коефіцієнтом*. А він, як відомо, дорівнює тангенсу кута, який утворює пряма з додатним напрямом осі абсцис. Це дозволяє знайти значення коефіцієнта $4\pi^2/g$ за координатами $(l_0;T_0^2)$ будь-якої точки графіка $T^2 = T^2(l)$ (див. рис. 2.5):

$$\frac{4\pi^2}{g} = \frac{T_0^2}{l_0}.$$

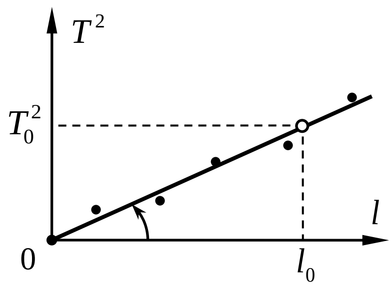


Рис. 2.5. Визначення коефіцієнта $4\pi^2/g$ за графіком $T^2 = T^2(l)$

З останнього виразу знаходимо формулу для g:

$$g = 4\pi^2 \frac{l_0}{T_0^2}. \tag{2.12}$$

Для оцінки похибки отриманого значення прискорення вільного падіння g можна порівняти його з відомим більш точним значенням g', яке відповідає даній місцевості. З точністю до двох значущих цифр можна взяти $g' = 9{,}8$ м/с^2. Отже, межі абсолютної Δg та відносної ε_g похибок можна оцінити за формулами:

$$\Delta g = |g - g'|; \qquad \varepsilon_g = \frac{\Delta g}{g'}. \tag{2.13}$$

Методичні поради.

1. Перед безпосереднім початком дослідів виміряйте максимальну довжину маятника (відстань від точки підвісу до центра кульки).

2. Виберіть набір зручних значень l, при яких буде вимірюватися період T. Наприклад, 0,4 м; 0,6 м; 0,8 м; …; 1,4 м.

3. Для зручної зміни довжини маятника можна використати, наприклад, корок з прорізом, через який пропускається нитка. Корок закріплюється на штативі за допомогою лапки.

4. При вимірюванні періоду T важливо, щоб коливання маятника були малими, оскільки формула $T = 2\pi\sqrt{l/g}$ справедлива саме для малих коливань. Можна показати, що прийнятне наближення таких коливань досягається, якщо максимальний кут відхилення маятника не перевищує ≈ 10°.

5. Для запису експериментальних значень та для побудови графіка $T^2 = T^2(l)$ слід підготувати таблицю результатів, подібну до табл. 2.1.

Таблиця 2.1

Результати експерименту з визначення прискорення вільного падіння

Довжина маятника l, **м**	**Час 10 коливань, с**		**Середній час** t, **с**	**Період коливань** T, **с**	T^2, **с²**	**Прискорення вільного падіння** $g \pm \Delta g$, **м/с²**	**Межа відносної похибки** ε_g
	1	2					

? Підготовчі вправи.

Рівень А

1. Установіть відповідність:

1	T	**А**	Н·м^2·кг^2
2	ν	**Б**	с
3	g	**В**	Гц
4	G	**Г**	м·с$^{-2}$
		Д	Н·м^2·кг$^{-2}$

2. Які величини можна визначити за наведеними виразами? Встановіть відповідність:

1	$2\pi\sqrt{l/g}$	**А**	Амплітуда коливань математичного маятника
2	$G\dfrac{m_1 m_2}{r^2}$	**Б**	Кутова частота коливань
3	$2\pi/T$	**В**	Період малих коливань математичного маятника
4	$G\dfrac{M}{R^2}$	**Г**	Модуль сили взаємодії двох матеріальних точок
		Д	Модуль прискорення вільного падіння поблизу поверхні Землі

3. Математичний маятник здійснює коливання за законом (усі величини вимірюються в СІ)

$$\varphi = 0{,}1\cos \pi t\,.$$

Установіть відповідність між величиною та її значенням:

1	Амплітуда	**А**	1 с
2	Кутова частота	**Б**	0 рад
3	Початкова фаза	**В**	0,1 рад
4	Період	**Г**	2 с
		Д	π рад/с

4. Знайдіть період малих коливань математичного маятника довжиною 2,5 м.

А. Приблизно 0,67 с. **Б.** Приблизно 1,6 с.

В. Приблизно 3,2 с. **Г.** Приблизно 6,3 с.

5. Визначте циклічну частоту малих коливань математичного маятника довжиною 0,4 м.

А. Приблизно 0,02 рад/с. **Б.** Приблизно 0,1 рад/с.

В. Приблизно 0,2 рад/с. **Г.** Приблизно 5 рад/с.

6. Знайдіть період коливань, якщо тіло за 8 с зробило 12 повних коливань.

А. $\frac{2}{3}$ с. **Б.** $\frac{3}{2}$ с.

В. $1\frac{1}{3}$ с. **Г.** $1\frac{2}{3}$ с.

7. Як змінюється прискорення вільного падіння поблизу поверхні Землі при переході з екватора на полюс?

А. Не змінюється. **Б.** Спочатку збільшується, а потім зменшується.

В. Зменшується. **Г.** Збільшується.

Рівень Б

8. Як зміниться сила гравітаційної взаємодії між двома матеріальними точками, якщо:

– Відстань між ними збільшиться втричі?

– Маса кожної точки зросте у два рази?

– Відстань між точками зменшиться у $\sqrt{2}$, а їх маси – у 2 рази?

9. Між якими з трьох куль (рис. 2.6) сила тяжіння найбільша? Найменша? Кулі виготовлені з однакового матеріалу, відстані між ними однакові.

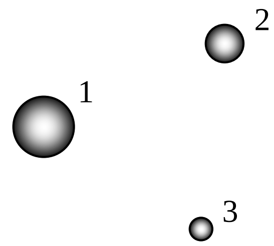


Рис. 2.6. До завдання 9

10. Тіло кинули вертикально вгору. З якого моменту почнеться вільне падіння цього тіла, якщо знехтувати силою опору повітря?

11. Знайдіть значення g на висоті, рівній радіуса Землі.

12. Чому дорівнює g у центрі Землі?

13. Який маятник називається математичним?

14. Що таке амплітуда? Період? Частота? Фаза? Початкова фаза?

15. Одиницю g, крім м/с^2, інколи записують як Н/кг. Дайте фізичне пояснення обом одиницям. Покажіть, що 1 Н/кг = 1 м/с^2.

16. Визначте ціну поділки на циферблатах секундної та хвилинної стрілок секундоміра (рис. 2.7). Прочитайте покази приладу. Навіщо кінці стрілок секундоміра підігнуті до циферблата?

17. Визначте g за графіком експериментальної залежності квадрату періоду T^2 від довжини l маятника (рис. 2.8).

18. Як оцінити межі абсолютної та відносної похибок виміряного значення g?

Рис. 2.7. Секундомір

19. Чому у досліді з вимірювання g амплітуда коливань маятника має бути малою?

20. Зобразіть графік залежності прискорення вільного падіння від відстані до центра Землі $g = g(r)$. Вважайте Землю однорідною кулею маси M, радіуса R.

21. Ізохронізм (незалежність періоду від амплітуди коливань) порушується при значній амплітуді. Як змінюється період коливань математичного маятника зі збільшенням амплітуди?

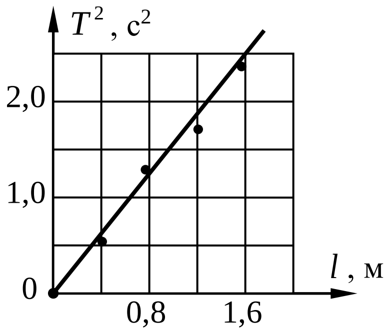


Рис. 2.8. До завдання 17

2.3. Додаткові творчі завдання.

Завдання для формування банку ідей.

1. Є два математичних маятники. Період коливань одного з них відомий. Як знайти період іншого?

2. Як на підставі результатів даної лабораторної роботи визначити масу та густину Землі, вважаючи її однорідною кулею відомого радіуса R? Проведіть обчислення, взявши $R = 6400$ км.

3. Як виміряти прискорення вільного падіння за допомогою сталевої кульки; потужної лампи; електродвигуна з відомою частотою обертання, на осі якого закріплено картонний диск з вузьким радіальним прорізом; шматка чорного полотна; вимірювальної лінійки; фотоапарата?

4. Як виміряти прискорення вільного падіння, якщо у наявності є лише гиря відомої маси та точний динамометр?

5. Космічний корабель, підлетівши до незнайомої планети, вимкнув двигуни і вийшов на колову орбіту. Як за допомогою лише годинника космонавти можуть визначити середню густину цієї планети?

6. Спостерігаючи у себе вдома по телевізору висадку космонавтів на Місяць, викладач одного з американських коледжів помітив, що біля одного з відсіків місячного модуля звисав поряд з фігурою космонавта, коливаючись на якомусь підвісі, ніби на канаті, важкий предмет. Подивившись на свій годинник, викладач зумів досить точно оцінити прискорення вільного падіння на Місяці. Як він це зробив?

Експериментальні та тренувальні винахідницькі задачі.

Експериментальні задачі.

1. Виміряйте прискорення вільного падіння. *Обладнання:* нерухомий блок, два тягаря, терези, набір гир, секундомір, нитка.

2. Оцініть прискорення вільного падіння за допомогою струмінця води, що витікає з водопровідного крана. *Обладнання:* вимірювальна лінійка, посудина відомого об’єму, годинник.

Тренувальні винахідницькі задачі.

1. Один з поширених методів визначення прискорення вільного падіння базується на вимірюванні часу падіння тіла з відомої висоти (рис. 2.9). Суть метода полягає у наступному. На початку досліду сталева кулька *1* утримується за допомогою електромагніта *2*. При натисненні кнопки SB вмикається реле K. При цьому одночасно розмикається контакт реле K.1 – кулька починає падати, та замикається контакт К.2 – вмикається електричний секундомір *3*. Падаючи на шарнірно закріплену пластинку *4*, кулька розриває електричне коло секундоміра, зупиняючи його.

Дана схема дозволяє вимірювати досить малі проміжки часу (без суб’єктивних помилок з боку експериментатора). До недоліків даної схеми слід віднести неодночасність моментів вмикання секундоміра *3* і вимикання електромагніта *2*, а також затримку між моментом падіння кульки на пластинку *4* і розривом кола секундоміра *3*.

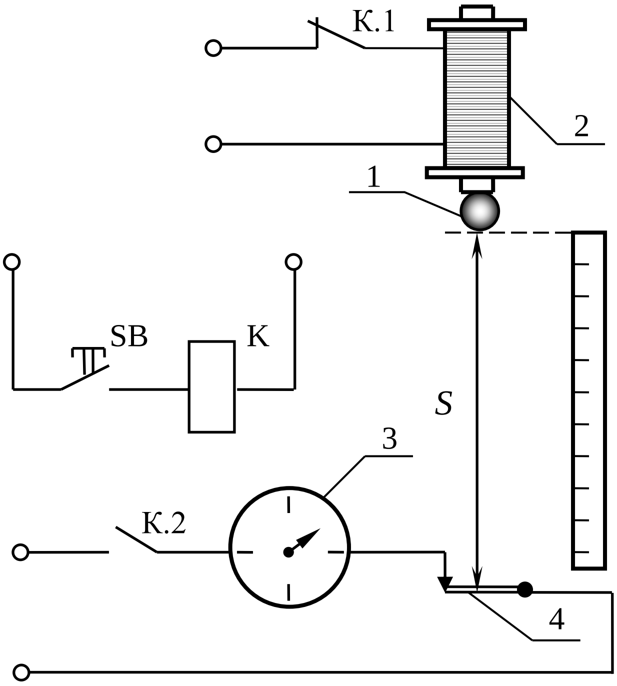


Рис. 2.9. Схема електричних з’єднань установки для вимірювання g за часом падіння кульки

Спробуйте усунути наведені недоліки даної схеми або запропонуйте свою експериментальну установку для вимірювання g за часом падіння тіла.

2. Запропонуйте інші (не описані у даній лабораторній роботі) способи вимірювання прискорення вільного падіння.

3. ВИВЧЕННЯ КОЛИВАНЬ ПРУЖИННОГО МАЯТНИКА

3.1. Теоретичні відомості.

Пружинним маятником називають матеріальну точку маси m, яка закріплена на кінці абсолютно пружної невагомої пружини (інший кінець пружини жорстко закріплено), і яка має змогу здійснювати прямолінійні гармонічні коливання.

Матеріальною точкою можна замінити і тіло кінцевих розмірів, якщо накласти вимогу *одного ступеня вільності* (для характеристики положення тіла достатньо однієї координати) і знехтувати *деформацією* тіла. Така ідеалізація виправдовується, якщо довжина пружини є достатньо малою, так що можна вважати, що вся вона деформується одночасно (час поширення деформації має бути набагато менше періоду коливань). Енергія пружної деформації тіла має бути набагато менше його кінетичної енергії. Для пружини, навпаки, енергія деформації має бути набагато більше її кінетичної енергії. Саме тому говорять про *невагому* пружину і про *абсолютно тверде, недеформівне* тіло.

Видовження пружини маятника має підкорятися закону Гука, тому амплітуда коливань повинна бути досить малою. Згідно із *законом Гука* сила пружності за модулем ($F_{пр}$) пропорційна видовженню $|\Delta l|$ тіла (пружини), тобто

$$F_{пр} = k|\Delta l|, \tag{3.1}$$

і направлена так, що намагається зменшити величину деформації тіла. Коефіцієнт пропорційності k називається *жорсткістю* пружини.

Закон Гука справедливий лише для *пружної* деформації, тобто такої, яка повністю зникає після припинення дії зовнішньої сили, що викликала цю деформацію. Якщо розтягнути пружину надто сильно, то вона не повернеться у своє початкове положення. Така деформація не є пружною (її називають *пластичною*), для неї закон Гука не виконується.

Якщо закріплений на пружині тягар відтягнути від положення рівноваги на деяку відстань, яка характеризується координатою x (рис. 3.1), а потім відпустити, то під дією пружини тягар буде здійснювати горизонтальні коливання, які підкоряються диференціальному рівнянню:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \qquad \text{або} \qquad \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0. \tag{3.2}$$

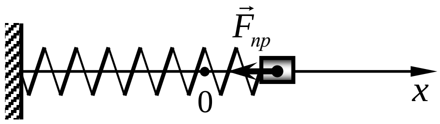


Рис. 3.1. Горизонтальний пружинний маятник (тертя відсутнє)

Дійсно, згідно із другим законом Ньютона в проекції на вісь x: $ma_x = F_x$, де m – маса тягаря. У розглядуваному випадку повертаючою силою є сила пружності (тертя відсутнє), проекція якої на вісь x відповідно до закону Гука

$$F_x = -kx.$$

Отже, отримуємо

$$ma_x = -kx \qquad \text{або} \qquad m\ddot{x} = -kx.$$

У випадку горизонтального розташування пружини (горизонтальний пружинний маятник) сила тяжіння та сила реакції опори у коливальному русі не відіграють ніякої ролі. *Чому?*

У випадку вертикального пружинного маятника вплив сили тяжіння проявляється лише в тому, що положення рівноваги, відносно якого відбуваються коливання, дещо зміститься. Тому характер коливань (зокрема їх *період*) від розташування пружини не залежить.

Щоб довести останнє твердження, розглянемо вертикальний пружинний маятник: тягар масою m, підвішений на вертикально розташованій невагомій пружині жорсткістю k (рис. 3.2). Нехай початкове положення рівноваги ($x = 0$) відповідає ненавантаженій пружині (під тягар поставлено опору). Якщо прибрати опору (без поштовху), то під дією сили тяжіння тягаря пружина почне розтягуватися. Рівняння другого закону Ньютона в проекції на вісь x матиме вигляд:

$$m\ddot{x} = -kx + mg.$$

Отже, диференціальне рівняння руху тягаря вздовж вісі x:

$$\ddot{x}+\frac{k}{m}x-g=0\,. \qquad (3.3)$$

Вводячи у рівняння (3.3) нову змінну z (див. рис. 3.3):

$$z=x-\frac{mg}{k}\,,$$

дістаємо диференціальне рівняння руху тягаря у вигляді

$$\ddot{z}+\frac{k}{m}z=0\,, \qquad (3.4)$$

що співпадає з рівнянням (3.2).

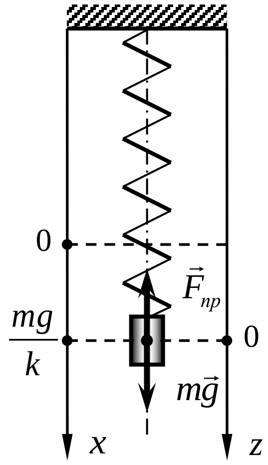


Рис. 3.2. Вертикальний пружинний маятник (опір руху відсутній)

Таким чином, у випадку вертикального розташування пружини коливання відбуваються не поблизу початкового положення рівноваги ($x=0$), а навколо зміщеного положення (на рис. 3.2 йому відповідає $x=mg/k$ або $z=0$), яке визначається статичним проявом сили тяжіння. При цьому період коливань не змінився порівняно із випадком горизонтального розташування пружини.

Розглянемо диференціальне рівняння (3.2) коливань тягаря, закріпленого на пружині. Порівняння (3.2) з диференціальним рівнянням гармонічних коливань (де ω – кутова частота коливань)

$$\ddot{x}+\omega^2 x=0$$

дозволяє отримати вираз для *кутової частоти коливань пружинного маятника*:

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}\,. \qquad (3.5)$$

Враховуючи, що $T=2\pi/\omega$, отримуємо формулу для *періоду коливань пружинного маятника*:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\,. \qquad (3.6)$$

3.2. Експериментальна частина.

З а в д а н н я 1. Виміряти жорсткість пружини маятника.

2. Виміряти період коливань тягаря відомої маси на пружині прямим та непрямим методами.

О б л а д н а н н я: пружина з тримачем, набір тягарців відомої маси, лінійка вимірювальна, секундомір, штатив для фронтальних робіт (з муфтою і лапкою).

Рис. 3.3. Деякі пристрої, що використовуються при виконані досліду

Вимірювання жорсткості пружини. Відповідно до закону Гука, модуль сили пружності F і модуль видовження пружини, який далі позначатимемо через x ($x \equiv |\Delta l|$), пов'язані співвідношенням $F = kx$. Отже, вимірявши F та x, можна знайти жорсткість k за формулою

$$k = F/x. \tag{3.7}$$

Силу пружності F можна виміряти, врахувавши, що вона дорівнює за модулем силі тяжіння mg, яка діє на підвішений до пружини тягар масою m (у випадку, якщо тягар перебуває у зрівноваженому стані).

Зазначимо, що визначенню жорсткості пружини за формулою (3.7) повинна передувати оцінка (принаймні якісна) справедливості закону Гука для даної пружини (при навантаженнях, які мають місце у роботі). Для цього, підвішуючи до пружини різне число тягарців (наприклад, від 1-го до 4-х) відомої маси, вимірюють відповідне видовження x пружини та визначають кожного разу силу пружності за формулою $F = mg$ (табл. 3.1).

Для унаочнення отриманих експериментальних результатів за даними табл. 3.1 слід побудувати графік залежності $F = F(x)$. За цим графіком можна якісно оцінити виконання закону Гука для пружини, перевіривши чи знаходяться експериментальні точки *поблизу однієї прямої, що проходить через початок координат*.

Таблиця 3.1

Експериментальна залежність видовження пружини від навантаження

№ досліду	Маса тягаря m, кг	Сила пружності $F = mg$, Н	Видовження пружини x, м

У випадку, якщо закон Гука виконується, за тим самим графіком залежності $F = F(x)$ можна знайти жорсткість k пружини. Для цього, вибравши "зручну" точку на графіку і визначивши її координати, знаходять жорсткість k за формулою $k = F/x$.

Межі відносної ε_k та абсолютної Δk похибок можна оцінити так:

$$\varepsilon_k = \varepsilon_F + \varepsilon_x = \frac{\Delta F}{F} + \frac{\Delta x}{x}, \quad \Delta k = \varepsilon_k \cdot k, \tag{3.8}$$

де ΔF, Δx – межі абсолютних похибок вимірювання відповідно сили пружності та видовження. Для оцінки ΔF у випадку, якщо максимальне число підвішених тягарців дорівнює, наприклад, *чотирьом*, можна прийняти $\Delta F = 4\Delta m \cdot g$, де Δm – похибка при виготовленні тягаря (для оцінки можна вважати $\Delta m \approx 0{,}005$ кг).

Вимірювання періоду коливань тягаря на пружині.

- *Непрямий метод.* Оскільки жорсткість k пружини відома, період коливань T тягаря масою m можна обчислити за формулою (3.6). При цьому межі відносної ε_T та абсолютної ΔT похибок оцінимо у такий спосіб:

$$\varepsilon_T = \frac{1}{2}\varepsilon_k + \frac{1}{2}\varepsilon_m, \qquad \Delta T = \varepsilon_T \cdot T, \tag{3.9}$$

де ε_m – межа відносної похибки у значенні маси тягаря, $\varepsilon_m = \Delta m/m$.

- *Прямий метод.* Виміряти період коливань тягаря на пружині можна безпосередньо за допомогою секундоміра. Для цього слід вивести пружинний маятник з положення рівноваги (змістивши тягар дещо нижче рівноважного положення), і після того як коливання встановляться, виміряти інтервал часу t, впродовж якого маятник здійснює N (наприклад, $N = 10$) повних коливань. Тоді період коливань дорівнюватиме

$$T = t/N. \tag{3.10}$$

Для підвищення точності експерименту потрібно зменшити випадкову похибку при вимірюванні T. Так, можна провести серію дослідів з вимірювання періоду коливань даного тягаря і за отриманим спектром значень T_1, T_2, …, T_n знайти більш точний результат:

$$\bar{T} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T_i.$$

В цьому випадку межі абсолютної ΔT і відносної ε_T похибок можна оцінити за формулами (докладніше методика обробки результатів прямих багатократних вимірювань була розглянута у розділі “Вимірювання фізичних величин”):

$$\Delta T = \frac{3\sigma_T}{\sqrt{n}}, \quad \varepsilon_T = \frac{\Delta T}{\bar{T}}, \tag{3.11}$$

де σ_T – середнє квадратичне відхилення окремого вимірювання,

$$\sigma_T = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(T_i - \bar{T}\right)^2}.$$

Зазначимо, що результати вимірювання періоду коливань прямим $T_{пр}$ та непрямим $T_н$ методами можна вважати задовільними, якщо інтервали $T_{пр} \pm \Delta T_{пр}$ та $T_н \pm \Delta T_н$ мають загальні точки, тобто частково або повністю перекриваються (рис. 3.4).

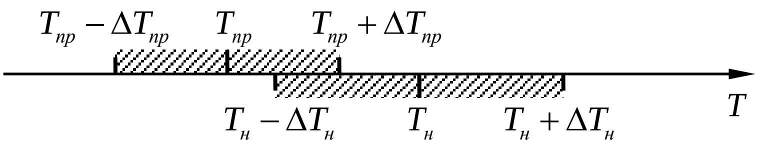


Рис. 3.4. Зіставлення результатів вимірювання періоду T прямим ($T_{пр}$) і непрямим ($T_н$) методами

Підготовчі вправи.

Рівень А

1. Установіть відповідність:

1	T	**А**	Н·м
2	ω	**Б**	с
3	k	**В**	рад·с$^{-1}$
4	ν	**Г**	Н·м$^{-1}$
		Д	Гц

2. Які величини можна визначити за наведеними виразами? Встановіть відповідність:

1	$\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$	**А**	Модуль сили тяжіння
2	mg	**Б**	Кутова частота коливань пружинного маятника
3	$\sqrt{k/m}$	**В**	Період коливань пружинного маятника
4	$2\pi\sqrt{m/k}$	**Г**	Амплітуда коливань пружинного маятника
		Д	Частота коливань пружинного маятника

3. На рис. 3.5 наведено шість положень пружинного маятника. До кожного з поданих *положень* тягаря виберіть відповідне *зображення векторів:* результуючої сили $\vec{F}$, яка діє на тягар, його прискорення $\vec{a}$ та швидкості $\vec{v}$.

1 Тягар рухається вгору до положення рівноваги

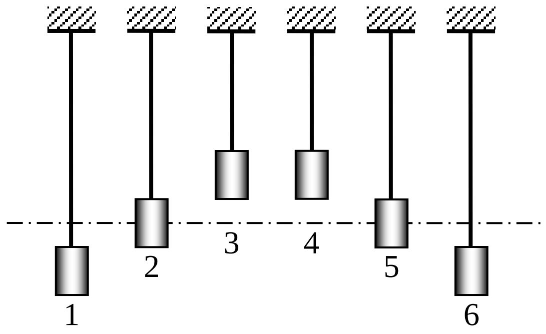
2 Тягар рухається вгору і проходить положення рівноваги

3 Тягар рухається вгору від положення рівноваги

4 Тягар рухається вниз до положення рівноваги

5 Тягар рухається вниз і проходить положення рівноваги

6 Тягар рухається вниз від положення рівноваги



А $\uparrow\vec{F}$ $\Uparrow\vec{a}$ $\uparrow\vec{v}$

Б $\downarrow\vec{F}$ $\Downarrow\vec{a}$ $\uparrow\vec{v}$

В $\vec{F}=0$ $\vec{a}=0$ $\downarrow\vec{v}$

Г $\downarrow\vec{F}$ $\Downarrow\vec{a}$ $\downarrow\vec{v}$

Д $\vec{F}=0$ $\vec{a}=0$ $\uparrow\vec{v}$

Е $\uparrow\vec{F}$ $\Uparrow\vec{a}$ $\downarrow\vec{v}$

Рис. 3.5. Різні положення пружинного маятника

4. Яка жорсткість пружини, якщо вантаж масою 1 кг коливається на цій пружині з циклічною частотою 4 рад/с?

А. 4 Н/м. **Б.** 8 Н/м. **В.** 16 Н/м. **Г.** 32 Н/м.

5. Як зміниться період коливань пружинного маятника, якщо жорсткість пружини збільшити в 16 разів?

А. Збільшиться в 16 разів. **Б.** Збільшиться в 4 рази.

В. Зменшиться в 16 разів. **Г.** Зменшиться в 4 рази.

6. Тіло здійснює коливання за законом $x = 0,2\cos t$. Знайдіть амплітуду та циклічну частоту коливань (усі величини вимірюються в СІ).

А. 0,1 м; 3,14 рад/с. **Б.** 0,2 м; 1 рад/с.

В. 0,2 м; 0 рад/с. **Г.** 5 м; 3,14 рад/с.

7. За графіком залежності проекції сили пружності від видовження (рис. 3.6) знайдіть жорсткість гумового шнура.

А. Від 0,3 Н/м до 0,4 Н/м.

Б. Від 2,5 Н/м до 3,5 Н/м.

В. Від 30 Н/м до 40 Н/м.

Г. Від 250 Н/м до 350 Н/м.

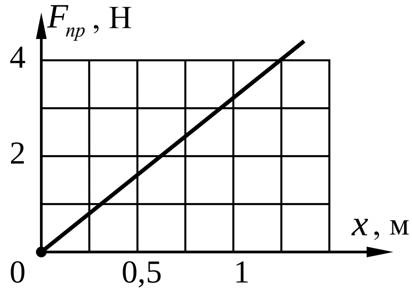


Рис. 3.6. До завдання 7

Рівень Б

8. Чи залежить частота коливань пружинного маятника від амплітуди коливань? Як зміниться частота коливань, якщо маятник перенести на Місяць?

9. Який фізичний зміст має жорсткість пружини?

10. Сформулюйте закон Гука.

11. Чи можна користуватись механічним годинником у кабіні космічного корабля, що рухається навколо Землі по коловій орбіті (розгляньте випадки: наручний годинник, старовинний годинник із гирею і “зозулею”)?

12. Обґрунтуйте формули (3.8), (3.9), (3.11).

13. Тонка пружина висить вертикально. Верхній її кінець жорстко закріплено. До нижнього прикріплено легкий покажчик для зняття показів з вертикально розташованої лінійки. До нижнього кінця пружини послідовно підвішують тягарці відомої маси і за допомогою покажчика визначають відповідні покази на лінійці. Результати подані у табл. 3.2. За цими даними:

а) складіть таблицю, в якій наведіть значення сили пружності F (у ньютонах) та відповідне видовження x пружини (у метрах);

б) побудуйте графік залежності сили пружності F (вісь y) від видовження x (вісь x);

в) встановіть діапазон значень сили, в межах якого виконується закон Гука;

г) знайдіть коефіцієнт жорсткості пружини для випадку пружної її деформації;

д) визначте силу, при якій видовження пружини складає 14 мм.

Таблиця 3.2

Експериментальні дані до задачі 13

Маса підвішеного вантажу m, кг	**Покази на лінійці, мм**
0	120
0,1	126
0,2	132
0,3	138
0,4	144
0,5	152
0,6	166
0,7	182

3.3. Додаткові творчі завдання.

Завдання для формування банку ідей.

1. Як визначити жорсткість пружини за допомогою тягарців відомої маси і секундоміра?

2. Як визначити жорсткість пружини за допомогою тіла неправильної форми, циліндричної склянки з водою, лінійки (міліметрового паперу)?

3. Як знайти жорсткість пружини балістичного пістолета, який стріляє дробинками відомої маси, використовуючи для цього лише лінійку?

4. Як з'ясувати, яке навантаження витримує капронова ліска, якщо у наявності є гиря масою 1 кг і транспортир?

Експериментальні та тренувальні винахідницькі задачі.

Експериментальні задачі.

1. Побудуйте графік залежності сили пружності гумового джгута від його видовження. *Обладнання:* гумовий джгут, тягарець невідомої маси, лінійка.

2. Визначте жорсткість гумового шнура. *Обладнання:* гумовий шнур, два штатива з лапками, тягарці відомої маси, лінійка.

3. Визначте жорсткість пружини. *Обладнання:* пружина, лінійка, аркуш міліметрового паперу, брусок, тягар масою 100 г.

4. Визначте жорсткість резинки, закріпленої на планці. Від'єднувати кінці резинки від кріплень не можна. *Обладнання:* Дерев'яна планка довжиною 50 см із закріпленою на ній резинкою, три тягаря масою 100 г з дротяною петлею для їх кріплення до резинки, лінійка, міліметровий папір, штатив з лапкою.

5. Експериментально дослідіть залежність видовження "м'якої" пружини під дією її власної ваги від числа витків пружини. Дайте теоретичне пояснення одержаній залежності. Визначте також жорсткість і масу пружини. Дослідіть залежність періоду коливань пружини від її числа витків. *Обладнання:* "м'яка" пружина, штатив з лапкою, рулетка, годинник із секундною стрілкою, пластилінова кулька масою 10 г, міліметровий папір.

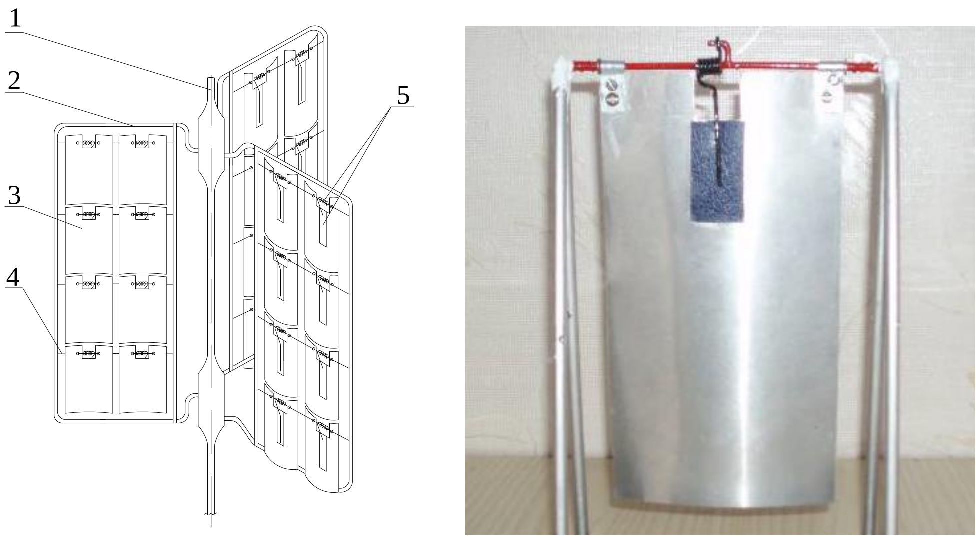
6. Кінці трьох гумових ниток однакової довжини з'єднані. Не розв'язуючи їх, визначте жорсткість кожної гумової нитки, маючи в розпорядженні тягарець відомої маси, лінійку і скріпку.

Тренувальні винахідницькі задачі.

1. Запропонуйте способи визначення максимальної сили натягу, яку може витримувати ліска.

2. У патенті України №12522U описано вітровий двигун з вертикальною віссю обертання, кожна з лопатей якого складається з системи секцій-пластин (рис. 3.7), які закріплені однією стороною на осях (спицях) і мають можливість незалежно одна від одної під дією повітряного потоку відхилятися на кут до 180°. Стабілізація частоти обертання вітродвигуна здійснюється за допомогою пружних елементів, наприклад, пружин, кожна з яких закріплена на осі (спиці) і має змогу підпружинювати секцію-пластину.

Поясніть, *як* працює даний вітродвигун та *як* здійснюється стабілізація його частоти обертання.



а) *б)*

Рис. 3.7. Схема вітродвигуна із пружними елементами (*а*)
та діюча модель його однієї секції-пластини (*б*):
1 – вал; 2 – лопать; 3 – секція-пластина; 4 – вісь (спиця); 5 – пружний елемент.

Зробіть своїми руками!

Виготовте динамометр, використавши пружину або джгут. Проведіть градуювання шкали приладу (наприклад, у ньютонах та у грамах) за допомогою іншого динамометра або гирі відомої маси. Визначте жорсткість пружини.

Примітка. Впевніться, чи виконується закон Гука в межах робочих значень видовження пружини (джгута).

4. ВИМІРЮВАННЯ МАСИ ТІЛА

4.1. Теоретичні відомості.

Окрім безпосереднього вимірювання маси за допомогою вагів (важільних, пружинних та ін.) існує кілька непрямих методів її вимірювання. Серед них: метод гідростатичного зважування, визначення маси за допомогою пружинного маятника тощо.

Метод гідростатичного зважування. Оскільки шкала динамометра закрита, для вимірювання маси різних тіл потрібно визначити жорсткість пружини (проградуювати динамометр). Спосіб вимірювання жорсткості пружини за допомогою важків *відомої маси* було розглянуто у попередній роботі. У розглядуваному ж методі визначення жорсткості k базується на попередньому вимірюванні видовження x_1 пружини при підвішуванні до неї тягаря невідомої маси m *у повітрі* та вимірюванні видовження x_2 при зануренні цього ж тягаря *у воду*.

Запишемо умови рівноваги тягаря на пружині у повітрі (рис. 4.1, *а*) та у воді (рис. 4.1, *б*) відповідно:

$$mg = F_{пр1}, \tag{4.1}$$

$$mg = F_{пр2} + F_A, \tag{4.2}$$

де $F_{пр1}$, $F_{пр2}$ – сили пружності, які відповідно до закону Гука дорівнюють

$$F_{пр1} = kx_1, \qquad F_{пр2} = kx_2; \tag{4.3}$$

F_A – сила Архімеда, яка діє на занурений у воду тягар. Вона дорівнює

$$F_A = \rho_0 gV, \tag{4.4}$$

де ρ_0 – густина води, $\rho_0 = 1000$ кг/м^3; V – об'єм тіла.

Слід пам'ятати, що закон Гука $F_{пр} = kx$ справедливий лише у випадку *пружних* деформацій. Тому слід експериментально перевірити чи є *лінійною* залежність між видовженням пружини x та силою пружності $F_{пр}$ (у розглядуваному діапазоні видовжень). Детальніше про це йшлося у попередній роботі.

а) *б)*

Рис. 4.1. Рівновага тягаря у повітрі (*а*) та у воді (*б*)

З урахуванням формул (4.3) та (4.4) рівняння рівноваги (4.1) та (4.2) набирають вигляду:

$$mg = kx_1, \tag{4.5}$$

$$mg = kx_2 + \rho_0 gV. \tag{4.6}$$

З рівнянь (4.5) та (4.6) отримуємо формули для визначення жорсткості пружини

$$k = \rho_0 g \frac{V}{x_1 - x_2} \tag{4.7}$$

та маси тіла

$$m = \frac{kx_1}{g} = \rho_0 V \frac{x_1}{x_1 - x_2}. \tag{4.8}$$

4.2. Експериментальна частина.

З а в д а н н я . Виміряти масу тіла методом гідростатичного зважування та визначити густину цього тіла.

О б л а д н а н н я : тіло довільної форми, посудина з водою, пружинний динамометр із закритою шкалою (або гумовий шнур перетином приблизно 1 мм×1 мм), мензурка, лінійка вимірювальна (або міліметровий папір).

Рис. 4.2. Деякі пристрої, що використовуються при виконані досліду

Згідно з формулою (4.7) для вимірювання жорсткості k пружини достатньо виміряти об'єм V тягаря, видовження x_1 пружини при підвішуванні тягаря у повітрі та видовження x_2 після його занурення у воду. Ті ж самі величини (V, x_1, x_2) потрібно виміряти для визначення маси тіла за формулою (4.8).

У випадку, коли потрібно виміряти масу кількох тіл, динамометр доцільно попередньо проградуювати або в одиницях *сили* (для цього слід скористатися законом Гука $F_{пр} = kx$), або безпосередньо в одиницях *маси* (використавши умову рівноваги тіла на пружині $mg = kx$).

Формулу для визначення *густини* тіла дістаємо з виразу (4.8):

$$\rho = \frac{m}{V} = \rho_0 \frac{x_1}{x_1 - x_2}. \tag{4.9}$$

Зазначимо, що у випадку, коли тіло *неоднорідне* (наприклад, має порожнини), формула (4.9) дає його *середню* густину.

З урахуванням формули (4.8) межу відносної похибки ε_m вимірювання маси можна оцінити так:

$$\varepsilon_m = \varepsilon_V + \varepsilon_{x_1} + \varepsilon_{x_1 - x_2} = \frac{\Delta V}{V} + \frac{\Delta x_1}{x_1} + \frac{\Delta x_1 + \Delta x_2}{x_1 - x_2}.$$

Оскільки $\Delta x_1 = \Delta x_2 \equiv \Delta x$, то

$$\varepsilon_m = \frac{\Delta V}{V} + \frac{\Delta x}{x_1} + 2\frac{\Delta x}{x_1 - x_2}. \qquad (4.10)$$

Як правило третій доданок у формулі (4.10) у кілька (більш ніж у чотири) разів перевищує суму перших двох *(Чому?)*. Тому у цьому випадку

$$\varepsilon_m \approx 2\frac{\Delta x}{x_1 - x_2}. \qquad (4.11)$$

При цьому межа абсолютної похибки

$$\Delta m = \varepsilon_m \cdot m. \qquad (4.12)$$

Аналогічно, користуючись формулою (4.9), отримуємо вирази для оцінки меж відносної та абсолютної похибок вимірювання густини тіла:

$$\varepsilon_\rho = \frac{\Delta x}{x_1} + 2\frac{\Delta x}{x_1 - x_2}; \qquad \Delta\rho = \varepsilon_\rho \cdot \rho. \qquad (4.13)$$

? Підготовчі вправи.

Рівень А

1. Установіть відповідність:

1	ρ	**А**	Н
2	k	**Б**	Н·м$^{-1}$
3	V	**В**	м·с$^{-2}$
4	F_A	**Г**	кг·м$^{-3}$
		Д	м^3

2. Які величини можна визначити за наведеними виразами? Встановіть відповідність:

1	$k\Delta l$	**А**	Модуль сили Архімеда
2	m/V	**Б**	Модуль сили пружності
3	$\rho_0 gV$	**В**	Період коливань пружинного маятника
4	mg	**Г**	Густина тіла

Д Модуль сили тяжіння

3. За рис. 4.3 визначте об’єм тіла, зануреного у рідину.

А. Від 6 мл до 14 мл. **Б.** Від 14 мл до 22 мл.

В. Від 22 мл до 30 мл. **Г.** Від 30 мл до 38 мл.

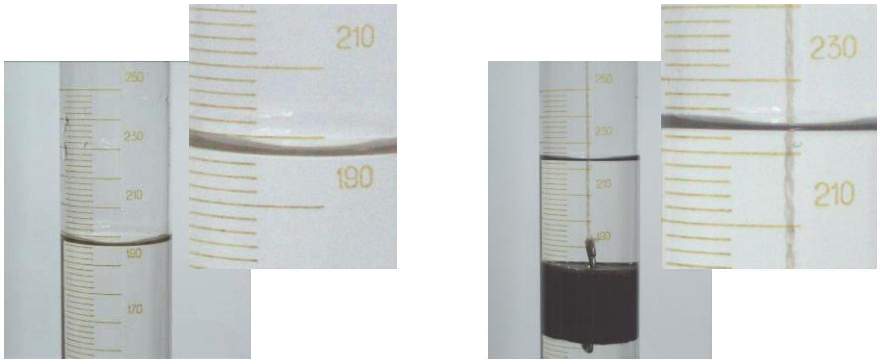


Рис. 4.3. Вимірювання об’єму тіла

4. Будь-яке тіло при взаємодії не може змінити свою швидкість миттєво, для цього потрібен певний час. Яка фізична величина є мірою цієї властивості тіла?

А. Сила. **Б.** Тиск. **В.** Маса. **Г.** Робота.

5. Вага – це …

А. … міра інертності тіла.

Б. … міра гравітаційної взаємодії тіла із Землею.

В. … сила, з якою Земля діє на тіло біля її поверхні.

Г. … сила, з якою тіло діє на опору або підвіс внаслідок притягання до Землі.

6. Як змінюються маса та вага тіла, яке переміщують з екватора на полюс Землі?

А. Маса залишається незмінною, а вага збільшується.

Б. Маса залишається незмінною, а вага зменшується.

В. Маса збільшується, а вага залишається незмінною.

Г. Маса і вага залишаються незмінними.

7. Тіло перебуває у стані невагомості, якщо …

А. … рівнодійна всіх сил, що діють на тіло, дорівнює нулю.

Б. … сила тяжіння зрівноважена іншою силою.

В. … на тіло діє тільки сила тяжіння.

Г. … його прискорення дорівнює нулю.

8. При зважуванні тіла пружина динамометра видовжилась на 4 см (рис. 4.4). Коефіцієнт жорсткості пружини приблизно складає:

А. Приблизно 0,4 Н/м. **Б.** Приблизно 40 Н/м.

В. Приблизно 0,025 Н/м. **Г.** Приблизно 2,5 Н/м.

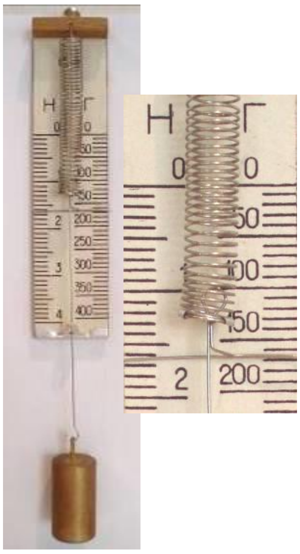


Рис. 4.4. До завдання 8

Рівень Б

9. У чому полягає "гідростатичний парадокс"?

10. Сформулюйте закон Архімеда. Запишіть формулу сили Архімеда.

11. Виразіть в одиницях СІ: 6 хв 23 с; 2,5 см^3; 4,2 мг; 4 Н/см; 3,5 мл; 0,9 г/см^3.

12. На рис. 4.5 наведено фотографії двох мензурок.

а) Визначте ціну поділки шкали на мензурках;

б) який об'єм води в кожній з мензурок?

в) чи може вода з мензурки *1* поміститися в мензурці *2*?

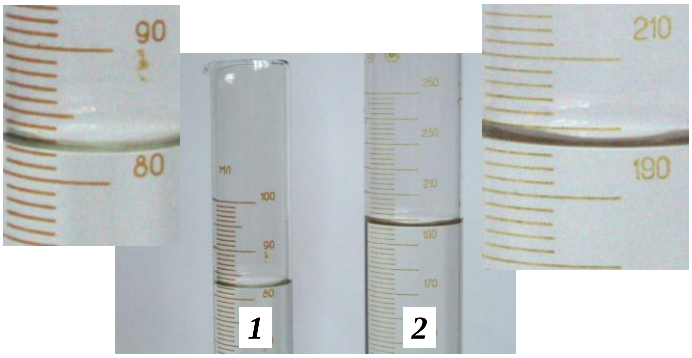


Рис. 4.5. Фотографії мензурок

13. Отримайте робочі формули для визначення жорсткості пружини (4.7), маси тіла (4.8) та його густини (4.9).

14. Обґрунтуйте формули (4.10) та (4.11).

15. У човні, який плаває у невеликому басейні, лежить камінь. Як зміниться рівень води у басейні, якщо камінь скинути з човна у воду?

16. У посудині плаває шматок льоду. Як зміниться рівень води, колі лід розтане? Чи зміниться відповідь, якщо у льоді знаходиться корок? Сталева гайка?

4.3. Додаткові творчі завдання.

Завдання для формування банку ідей.

1. Як виміряти масу тіла за допомогою секундоміра та пружини, жорсткість якої відома?

2. Як виміряти масу тіла за допомогою аркуша “у клітинку” та пружини відомої жорсткості?

3. Як визначити об’єм тіла неправильної форми, маючи аркуш міліметрового паперу і циліндричну склянку з водою.

4. Як визначити густину курячого яйця, не зважуючи його на терезах? У наявності є циліндрична склянка з водою, сіль, чайна ложка, аркуш паперу “у клітинку”, ареометр.

5. Як визначити жорсткість гумового шнура, обертаючи на ньому вантажі відомої маси в горизонтальній площині, маючи при цьому лінійку.

6. Як визначити масу лінійки, використавши для цього лише один тягарець відомої маси і олівець?

7. Як визначити масу деякого тіла за допомогою штатива, пружини, лінійки та гирі відомої маси?

Експериментальні та тренувальні винахідницькі задачі.

Експериментальні задачі.

1. Визначте масу тягаря. *Обладнання:* динамометр, досліджуваний тягар, нитка, масштабна лінійка.

2. Визначте масу m_2 невідомого тягаря. *Обладнання:* два тягаря (маса m_1 одного з них відома), нитка, міліметровий папір, кнопки.

3. Визначте масу гумової кульки. *Обладнання:* гумова кулька, дві булавки та дві силові кнопки, нитка, міліметровий папір формату А5, тягар відомої маси.

4. Визначте маси m_1 і m_2 двох металевих тягарців та масу m_0 дерев’яного стрижня. *Обладнання:* дерев’яний стрижень, металеві тягарі, опора, призма, вимірювальна лінійка, мензурка, стакан з водою, нитки.

5. Визначте масу кульки. *Обладнання:* дві сталеві кульки (одна з них відомої маси), пластилін, штатив, транспортир, дві нитки однакової довжини.

6. У півлітровій банці, яка частково заповнена водою, у повністю зануреному стані знаходиться медична баночка. Медична баночка перевернута і утримує бульбашку повітря. Не замочивши рук і не виймаючи з води медичну баночку, визначити її масу. *Обладнання:* півлітрова банка з водою, медична баночка, алюмінієвий дріт в поліхлорвініловій трубці, вимірювальна лінійка, дерев'яний брусок.

Тренувальні винахідницькі задачі.

1. Запропонуйте конструкцію пружинних вагів зі змінним робочим діапазоном вимірювання (наприклад, 0 – 100 г, 0 – 1 кг, 0 – 10 кг).

2. Запропонуйте зручну й просту конструкцію штанги, масу якої можна було б легко змінювати в досить широких межах. Наприклад, від 1 кг до 100 кг.

3. Запропонуйте спосіб зважування важкої кам'яної глиби. У наявності є човен на воді, відро і пружинні ваги (межа вимірювання яких набагато менша, ніж маса глиби).

Зробіть своїми руками!

У навчальній літературі описано прилад для зважування тіл, який має форму коробочки (рис. 4.6), що плаває на поверхні води. На бічній поверхні приладу нанесено шкалу. Усередині коробочки розміщується вантаж.

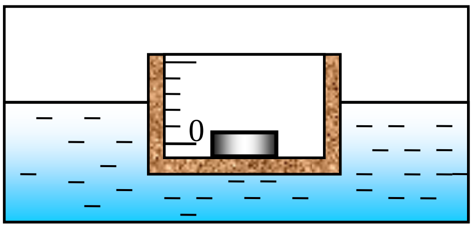


Рис. 4.6. Прилад для зважування тіл

Завдання. Виготовте даний прилад. Визначте, який максимальний вантаж можна зважувати за допомогою такого приладу. Які недоліки він має? Спробуйте їх усунути. Як збільшити чутливість приладу?

5. ВИМІРЮВАННЯ АТМОСФЕРНОГО ТИСКУ

5.1. Теоретичні відомості.

Ми живимо на дні повітряного “океану”. Атмосферний тиск впливає на самопочуття людей, на деякі фізичні процеси. При зміні погоди змінюється і тиск повітря (тому про атмосферний тиск часто згадують у прогнозах погоди). Чим обумовлюється атмосферний тиск?

Розглянемо газ (повітря), який знаходиться у полі тяжіння. Якщо б *тепловий рух* молекул газу був відсутнім, то всі молекули під дією сили тяжіння “впали” б на Землю, і все повітря зібралося б тонким шаром на її поверхні. Якщо б не було *тяжіння*, але існував би тепловий рух молекул, всі частинки розлетілися б по світовому простору. Повітряна оболонка Землі (атмосфера) існує завдяки наявності одночасно і теплового руху молекул і сили тяжіння. При цьому в атмосфері встановлюється певний закон зміни тиску повітря з висотою.

Цей закон нескладно знайти. Як відомо, тиск повітря на деякій висоті дорівнює вазі вертикального стовпа повітря з площею перерізу 1 м^2, який знаходиться над даним рівнем. При зміні висоти на dx тиск повітря змінюється на dp. При цьому dp дорівнює різниці ваги стовпів повітря на висотах x та $x+dx$ (рис. 5.1), тобто дорівнює вазі стовпа повітря висотою dx з площею перерізу 1 м^2:

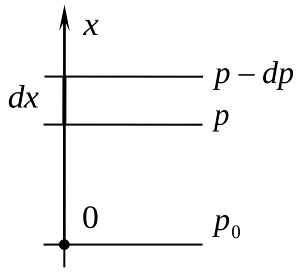


Рис. 5.1. Зміна тиску газу з висотою

$$dp = -\rho g dx, \qquad (5.1)$$

де ρ – густина повітря на висоті x;

g – прискорення вільного падіння.

Знак “–” вказує на те, що при збільшенні висоти ($dx > 0$) тиск зменшується ($dp < 0$). Густина ρ газу, очевидно, дорівнює добутку маси m молекули на їх концентрацію n: $\rho = mn$. З молекулярно-кінетичної теорії відомо, що $n = p/kT$ (де k – стала Больцмана, T – температура газу). Тому $\rho = mp/kT$, і формула (5.1) набирає вигляду:

$$dp = -\frac{mg}{kT} pdx .$$

Останнє рівняння можна переписати у вигляді:

$$\frac{dp}{p} = -\frac{mg}{kT} dx .$$

Якщо вважати, що температура на всіх висотах однакова (що, взагалі-то кажучи, невірно), то після інтегрування цього рівняння отримуємо:

$$p = Ce^{-\frac{mg}{kT}x} ,$$

де С – постійна інтегрування.

Постійну С можна знайти з умови, що біля поверхні ($x = 0$) тиск дорівнює p_0. Отримуємо $C = p_0$. Отже,

$$p = p_0 e^{-\frac{mg}{kT}x} . \qquad (5.2)$$

Рівняння (5.2), яке встановлює закон зміни тиску з висотою, називається *барометричною формулою*. Згідно з цією формулою, атмосферний тиск зменшується з висотою за експоненціальним законом. Формулою (5.2) користуються також для визначення висоти над Землею. Для цього вимірюють тиск на даній висоті та на рівні моря. При цьому в рівнянні потрібно зробити поправку на температуру, яка, як правило, знижується з висотою, тоді як барометрична формула (5.2) нами була отримана у припущенні, що температура на будь-якій висоті однакова.

При отриманні (5.2) ми також вважали, що прискорення вільного падіння g є постійним, тобто не залежить від висоти x. Зрозуміло, що це має місце для порівняно невеликих значень x (порядку десятків кілометрів). Насправді ж

$$g = G\frac{M}{(R + x)^2} , \qquad (5.3)$$

де G – гравітаційна стала;

M , R – відповідно маса та радіус Землі.

Нескладно показати, що з врахуванням (5.3) залежність тиску повітря від висоти має вигляд (тут g_0 – прискорення вільного падіння біля поверхні Землі):

$$p = p_0 e^{-\frac{mg_0 R}{kT}(1-\frac{R}{R+x})}.$$

З цієї формули випливає, на перший погляд, парадоксальний результат: навіть при нескінченному віддаленні від Землі ($x \to \infty$), атмосферний тиск не дорівнює нулю:

$$p_\infty = p_0 \exp(-\frac{mg_0 R}{kT}).$$

Зрозуміло, що це неможливо, бо число молекул є кінцевим, а об’єм Всесвіту нескінченний. Тому маємо припустити, що атмосфера Землі не перебуває в рівновазі. Так, атмосферний газ постійно розсіюється у світовий простір, проте доля таких частинок мізерна (при існуючому полі тяжіння Землі). Однак такий процес міг привести до втрати атмосфери, наприклад, Місяцем, якщо припустити, що він її колись мав.

5.2. Експериментальна частина.

Завдання. Виміряти атмосферний тиск у приміщенні шляхом прямих та непрямих вимірювань.

Обладнання: барометр-анероїд; скляна трубка довжиною приблизно 30 см з пробкою; гумовий шланг довжиною приблизно 1,5 м; лійка скляна; лінійка вимірювальна 30 см; метр демонстраційний (або вимірювальна стрічка); штатив.

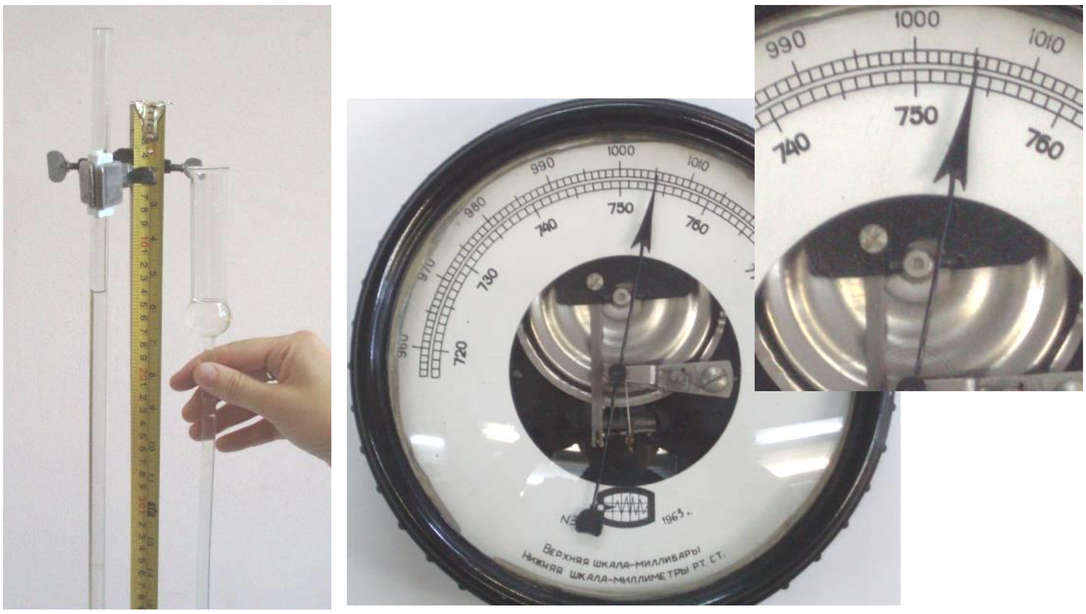


Рис. 5.2. Деякі пристрої, що використовуються при виконані досліду

Вимірювання атмосферного тиску. Прилади для безпосереднього вимірювання тиску називаються *манометрами*. Прилади, які спеціально призначені для вимірювання атмосферного тиску називаються *барометрами*. Барометром може бути рідинний манометр, який являє собою U – подібну трубку, яка частково заповнена ртуттю (або іншою рідиною). В одному з колін трубки створюють вакуум (це коліно закрите), інше – залишають відкритим (рис. 5.3). Різниця рівнів h в обох колінах безпосередньо дає тиск у міліметрах ртутного стовпчика.

Рис. 5.3. Модель рідинного манометра

Широке використання отримали (особливо у побуті) *барометри-анероїди* (“анероїд” – означає безрідинний). Чутливим елементом такого приладу є герметична камера (рис. 5.4), тиск повітря в якій дещо менший за атмосферний. Одна стінка камери кріпиться до корпусу приладу, а до іншої – через систему важелів прикріплено стрілку. Камера має змогу змінювати свій об’єм при зміні атмосферного тиску, що спричиняє поворот стрілки приладу.

а) *б)*

Рис. 5.4. Барометр-анероїд: (*а*) – схема приладу; (*б*) – герметична камера барометра

Виміряти атмосферний тиск можна і непрямим методом. Відомо, що термодинамічні параметри ідеального газу (тиск p, об’єм V та температура T)

можна знайти з рівняння стану ідеального газу (рівняння Клапейрона-Менделєєва)

$$pV = \nu RT \,, \tag{5.4}$$

де ν – число молей газу;

R – універсальна газова стала.

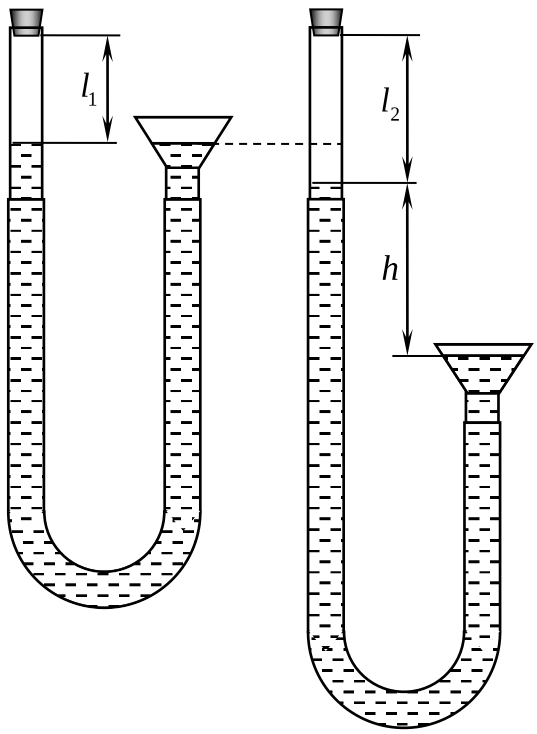


Рис. 5.5. Схема досліду з вимірювання атмосферного тиску

Рівняння Клапейрона – Менделєєва виявляється справедливим і для досить розріджених реальних газів і виконується тим точніше, чим менший тиск газу. Так, згідно з експериментальними даними об'єм одного моля азоту при тиску 1 атм та температурі 0 °С дорівнює $2{,}24\cdot10^{-2}$ м^3, а при тиску в 100 атм та при тій же температурі – $2{,}4\cdot10^{-4}$ м^3 (що відрізняється від значення, отриманого з рівняння Клапейрона – Менделєєва, більш ніж на 7%).

Отже, для знаходження атмосферного тиску можна скористатися рівнянням стану ідеального газу. Для цього можна, наприклад, здійснити деякий процес над певною кількістю повітря та застосувати для початкового та кінцевого станів газу рівняння (5.4). З огляду на надане обладнання доцільно провести саме процес розширення (або стиснення) певної кількості повітря у скляній трубці при постійній температурі (адже температуру повітря виміряти нічим). При ізотермічному ($T = \text{const}$) процесі з ідеальним газом: $pV = \text{const}$ (закон Бойля – Маріотта). Звідки для двох різних станів газу з об'ємами V_1, V_2 та тисками p_1, p_2:

$$p_1V_1 = p_2V_2 \,. \tag{5.5}$$

Рис. 5.5 пояснює суть розглядуваного способу. Спочатку повітря у трубці знаходиться під атмосферним тиском p та займає об'єм V_1. Вкінці розширення тиск зменшується на величину

$$\Delta p = \rho g h,$$

де h – різниця рівнів води у колінах трубки;

ρ – густина води,

при цьому новий об'єм повітря під пробкою V_2. Рівняння (5.5), записане для початкового та кінцевого станів повітря у трубці, набуває вигляду:

$$pV_1 = (p - \rho g h)V_2.$$

Звідки:

$$p = \rho g h \frac{V_2}{V_2 - V_1}.$$

Оскільки $V_1 = Sl_1$ і $V_2 = Sl_2$, де S – площа внутрішнього отвору трубки, то

$$p = \rho g h \frac{l_2}{l_2 - l_1}. \qquad (5.6)$$

Отже, для визначення атмосферного тиску необхідно виміряти початкову довжину l_1 стовпчика повітря у скляній трубці при однакових рівнях води у трубці і лійці, довжину l_2 стовпчика повітря у трубці після розширення (опускання лійки) та різницю рівнів h води у трубці та лійці.

Зазначимо, що для того, щоб розширення повітря у трубці було ізотермічним, процес повинен відбуватися досить повільно (в цьому випадку завдяки теплообміну з навколишнім середовищем температура повітря буде майже постійною).

Межу відносної похибки ε_p при визначенні тиску за формулою (5.6) можна оцінити так:

$$\varepsilon_p \equiv \frac{\Delta p}{p} = \frac{\Delta h}{h} + \frac{\Delta l_2}{l_2} + \frac{\Delta(l_2 - l_1)}{l_2 - l_1} = \frac{\Delta h}{h} + \frac{\Delta l_2}{l_2} + \frac{\Delta l_2}{l_2 - l_1} + \frac{\Delta l_1}{l_2 - l_1}.$$

Оскільки $\Delta l_1 = \Delta l_2 \equiv \Delta l$, то

$$\varepsilon_p = \frac{\Delta h}{h} + \frac{\Delta l}{l_2} + 2\frac{\Delta l}{l_2 - l_1}.$$

Звичайно різниця $l_2 - l_1$ суттєво менша від l_2 і, тим більше, від h, тому третій доданок в останній формулі набагато перевищує суму перших двох. Тому для оцінки меж відносної ε_p та абсолютної Δp похибок отримуємо:

$$\varepsilon_p \approx 2\frac{\Delta l}{l_2 - l_1};\ \Delta p = \varepsilon_p p. \tag{5.7}$$

У даній роботі оцінити точність отриманого (непрямим методом) значення атмосферного тиску p можна і шляхом безпосереднього його порівняння з показами барометра $p_б$. В цьому випадку

$$\Delta p = \left| p_б - p \right|;\ \varepsilon_p = \frac{\Delta p}{p_б}. \tag{5.8}$$

? Підготовчі вправи.

Рівень А

1. Установіть відповідність між одиницями тиску.

1	1 атм (атмосфера фізична)	**А**	133,322 Па
2	1 мм рт. ст. (1 Торр)	**Б**	101,325 кПа
3	1 бар	**В**	100 Па
4	1 ат = 1кгс/см^2 (атмосфера технічна)	**Г**	98,0665 кПа
		Д	10^5 Па

2. Який тиск і температура називаються нормальними?

А. 20 °С; 760 мм рт. ст. **Б.** 20 °С; 100 мм рт. ст.

В. 0 °С; 100 мм рт. ст. **Г.** 0 °С; 760 мм рт. ст.

3. Який вигляд має рівняння стану ідеального газу?

А. $p = nkT$. **Б.** $p = \frac{1}{3} n \cdot m_0 \cdot \overline{\mathrm{v}^2}$. **В.** $\frac{m_0 \cdot \overline{\mathrm{v}^2}}{2} = \frac{3}{2} kT$. **Г.** $pV = \frac{m}{M} RT$.

4. Яке рівняння виконується при ізотермічному процесі з ідеальним газом?

А. $\frac{p}{T} = \mathrm{const}$. **Б.** $\frac{V}{T} = \mathrm{const}$. **В.** $p \cdot V = \mathrm{const}$. **Г.** $\frac{p}{V} = \mathrm{const}$.

5. При ізотермічному стисненні газу його об’єм зменшився з 6 л до 2 л, а тиск підвищився на 40 кПа. Знайдіть початковий тиск.

А. 20 кПа. **Б.** 40 кПа. **В.** 60 кПа. **Г.** 80 кПа.

6. Оцініть тиск на дні найглибшої на Землі океанської впадини глибиною приблизно 11 км. Відповідь виразіть у атм.

А. Приблизно 10 атм. **Б.** Приблизно 100 атм.

В. Приблизно 1 000 атм. **Г.** Приблизно 10 000 атм.

Рівень Б

7. Виведіть співвідношення між 1 мм рт. ст. та 1 Па.

8. Який тиск показує барометр на рис. 5.1? Відповідь дайте у мм рт. ст. та Па.

9. На рис. 5.6 наведено водяний манометр (одна його поділка відповідає 10 мм). Визначте:

– ціну поділки манометра;

– тиск повітря у лівому коліні манометра, якщо атмосферний тиск під час досліду становив 748 мм рт. ст.

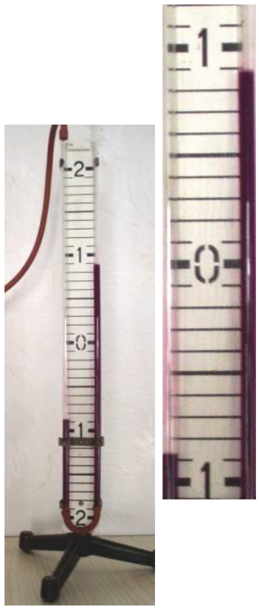


Рис. 5.6. До завдання 9

10. Як ви вважаєте, чому у розглянутому методі вимірювання атмосферного тиску було використано саме розширення (а не стиснення) повітря?

11. Отримайте самостійно формулу (5.6).

12. Обґрунтуйте формули (5.7) та (5.8).

13. Отримайте формули для оцінки похибок ε_p та Δp методом границь.

14. Запропонуйте способи підвищення точності вимірювання тиску повітря p у розглянутому методі.

5.3. Додаткові творчі завдання.

Завдання для формування банку ідей.

1. Як за допомогою гумової трубки перелити воду з бочки у відра?

2. Як виміряти атмосферний тиск за допомогою довгої скляної трубки, лінійки та води?

3. Аквалангісту потрібно визначити глибину річки у певному її місці. Як йому це зробити, якщо у наявності є лише циліндрична мензурка? Чи зміг би він виконати завдання, якщо б мензурка була конічною?

4. Як за допомогою циліндричної посудини з водою та лінійки визначити тиск всередині перегорілої лампи розжарювання?

5. Як визначити тиск всередині тієї ж лампи за допомогою посудини з водою та важків?

6. Як визначити тиск у футбольному м'ячі за допомогою терезів, важків та лінійки?

Експериментальні та тренувальні винахідницькі задачі.

Експериментальні задачі.

1. Визначте густину повітря у приміщенні. *Обладнання:* куля для зважування повітря, терези, різноважки, насос Комовського, посудина місткістю 1,5÷2 л з водою, мірний циліндр місткістю 1000 мл.

2. Виміряйте двома способами атмосферний тиск. *Обладнання:* скляна трубка із внутрішнім діаметром 1,2 мм, пробірка, лінійка, пластилін, склянка з водою.

3. Визначте молярну масу повітря. *Обладнання:* куля для зважування повітря, терези, різноважки, насос Комовського, гумова трубка, затискачі, термометр, манометр.

4. Визначте тиск, який можна створити, стискаючи руками пластикову пляшку з водою. *Обладнання:* пластикова пляшка з водою, пробірка, міліметровий папір, скотч, ножиці, барометр.

5. Визначте тиск повітря у повітряній кулі. *Обладнання:* повітряна куля, шматок органічного скла, набір тягарів відомої маси, аркуш міліметрового паперу, фломастер.

Тренувальні винахідницькі задачі.

1. Інколи трапляється, що вимірюване значення тиску виходить за межі чутливості манометра. На рис. 5.7 наведено схему вдосконаленого приладу: звичайний манометр замінено на систему двох скляних трубок, які з'єднані між собою гумовим перехідником; при цьому одне з колін такої U-подібної трубки розташовується під деяким кутом α до горизонталі.

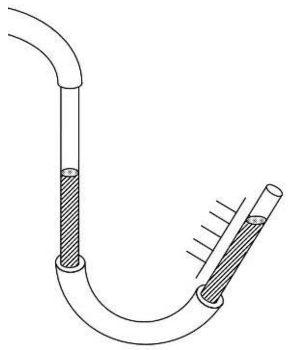


Рис. 5.7. Схема удосконаленого рідинного манометра

Поясніть, за рахунок *чого* досягається збільшення чутливості у такому приладі. У скільки разів збільшується чутливість, якщо $\alpha = 30°$? Запропонуйте інші способи підвищення чутливості манометрів.

2. У даній роботі висвітлено непрямий спосіб вимірювання атмосферного тиску. Запропонуйте пристрій для безпосереднього визначення тиску повітря, принцип дії якого базувався б на розглянутому способі.

3. Запропонуйте спосіб встановлення двох предметів в різних кімнатах на одному і тому самому горизонтальному рівні. З подібною задачею стикаються, наприклад, при встановленні радіаторів системи водяного опалення у будівлі.

Рис. 5.8. Посудина Маріотта (діюча модель)

Зробіть своїми руками!

Як відомо, швидкість витікання рідини з отвору біля дна відкритої посудини непостійна: із опусканням рівня рідини у посудині – швидкість зменшується. Маріотт запропонував, *як* досягти рівномірного витікання рідини. "Посудина Маріотта" (рис. 5.8) складається з ємності, яка закрита пробкою; через пробку пропущено вузьку відкриту з обох боків трубку; в ємності біля дна зроблено отвір.

Виготовте “посудину Маріотта” (для цього можна використати, наприклад, пластикову пляшку та трубку для напоїв) та дослідіть його роботу.

Дайте відповіді на запитання:

– У чому полягає принцип дії пристрою?

– Як можна змінювати швидкість витікання рідини у “посудині Маріотта”?

– Як припинити витікання рідини?

– Де можна застосувати такий пристрій?

6. ВИМІРЮВАННЯ ВОЛОГОСТІ ПОВІТРЯ

6.1. Теоретичні відомості.

В атмосферному повітрі завжди присутня певна кількість водяної пари. Її головними джерелами є випаровування з поверхонь океанів, морів, водоймищ, вологого ґрунту та рослин. Водяна пара, яка утворюється, переноситься завдяки конвекції, турбулентності та вітру. В атмосфері у середньому міститься $1{,}24 \cdot 10^{16}$ кг водяної пари. Сконденсувавшись, вона утворила б шар води завтовшки 2,4 см.

Для виходу з рідини молекули мають подолати сили притягання з боку молекул, які знаходяться у рідині, тобто виконати роботу проти цих сил. Крім того, потрібно виконати роботу проти зовнішнього тиску p пари, яка вже утворилась. Остання робота дорівнює $p\Delta V$, де ΔV – зміна об’єму, який займає дана кількість молекул при їх переході з рідини у пару (зрозуміло, що при переході молекул у пароподібний стан вони займатимуть більший об’єм, $\Delta V > 0$).

Оскільки вийти з рідини можуть лише ті молекули, які володіють достатньою кінетичною енергією (для виконання зазначеної роботи), перехід молекул у пароподібний стан призводить до збідніння рідини швидкими молекулами, тобто супроводжується *охолодженням* рідини.

Якщо ж зовнішнім джерелом тепла підтримувати температуру рідини постійною, то число молекул, які покинули цю рідину, буде постійно з часом неперервно зростати. Проте одночасно з переходом молекул у газову фазу (випаровування) відбувається і зворотній процес: завдяки хаотичному руху частина молекул пари знову повертається у рідину (конденсація).

Очевидно, що число молекул, які конденсуються, пропорційне густині молекул у парі. Тому, якщо посудину з рідиною закрити, то обов’язково настане момент, коли число молекул, які залишають в одиницю часу рідину, стане дорівнювати числу частинок, які повертаються у рідину за той же самий час. Отже, настане *динамічна рівновага* між рідиною та її парою, при цьому кількості рідини і пари не змінюватимуться. Пара, яка знаходиться у динамічній рівновазі з власною рідиною називається *насиченою парою*. Густина пари, яка встановлюється при рівновазі, відповідає деякому тиску. Цей тиск називається тиском насиченої пари.

Із зростанням температури тиск насиченої пари *збільшується*. Дійсно, з підвищенням температури збільшується число молекул рідини, які володіють енергією, достатньою для випаровування, а тому збільшується густина пари (а отже, і її тиск), при якій конденсація може зрівнятися з випаровуванням (тобто при якій настає рівновага).

Для кількісної оцінки *вологості повітря* (вмісту водяної пари у повітрі) користуються поняттями: абсолютна вологість, відносна вологість, точка роси, дефіцит вологості тощо.

Абсолютна вологість a повітря кількісно дорівнює масі водяної пари у грамах, що міститься в 1 м^3 повітря при даній температурі. Тобто a – густина водяної пари, яка виражена у г/м^3.

З рівняння Клапейрона – Менделєєва отримуємо, що густина ρ і тиск p пари пропорційні між собою:

$$p = \frac{\rho}{M} RT, \tag{6.1}$$

де M – молярна маса пари;

T – температура пари;

R – універсальна газова стала.

За допомогою формули (6.1) можна показати, що у певному інтервалі температур (наприклад, від 0°С до 100°С) числове значення парціального тиску водяної пари у мм рт. ст. приблизно дорівнює числовому значенню густини водяної пари у г/м^3. Тому часто абсолютну вологість a оцінюють за *парціальним тиском* водяної пари, який виражений у міліметрах ртутного стовпчика. Зазначимо, що певну помилку вносить застосування самої формули (6.1), адже вона справедлива для ідеальних газів. Проте легко показати, що при тисках водяної пари $p \sim 1$ атм ця похибка досить незначна і її можна не враховувати.

Відносна вологість φ повітря кількісно дорівнює відношенню парціального тиску p до тиску $p_н$ насиченої пари при даній температурі (звичайно φ виражають у відсотках):

$$\varphi \equiv \frac{p}{p_н} 100\% . \tag{6.2}$$

З урахуванням формули (6.1) та зроблених вище міркувань у формулі (6.2) замість відношення тисків можна підставити відношення відповідних густин пари:

$$\varphi \approx \frac{\rho}{\rho_н} 100\% .$$

Відносна вологість 100% означає установлення динамічної рівноваги між процесами випаровування та конденсації води. Саме з відносною (а не з абсолютною) вологістю пов’язане відчуття людиною сирості (вологості) повітря.

З формули (6.1) видно, що тиск насиченої пари тим менший, чим нижче її температура. Тому при охолодженні (більш точно – при ізобарному охолодженні) повітря водяна пара, яка у ньому знаходиться, при деякій температурі стає насиченою. Температура, при якій водяна пара, що знаходиться у повітрі, стає насиченою, називається *точкою роси*.

Дефіцитом вологості Δp – називають різницю між тиском $p_н$ насиченої водяної пари при даній температурі та фактичним тиском водяної пари при цій самій температурі:

$$\Delta p = p_н - p .$$

Для вимірювання вологості повітря використовують спеціальні прилади – *гігрометри* та *психрометри*. Визначити вологість повітря можна також за дефіцитом вологості. Розглянемо деякі методи вимірювання абсолютної та відносної вологостей повітря.

6.2. Експериментальна частина.

З а в д а н н я . Виміряти абсолютну і відносну вологості повітря у кімнаті за допомогою гігрометра та психрометра.

О б л а д н а н н я : гігрометр конденсаційний; психрометр; термометр лабораторний; довідник з фізики.

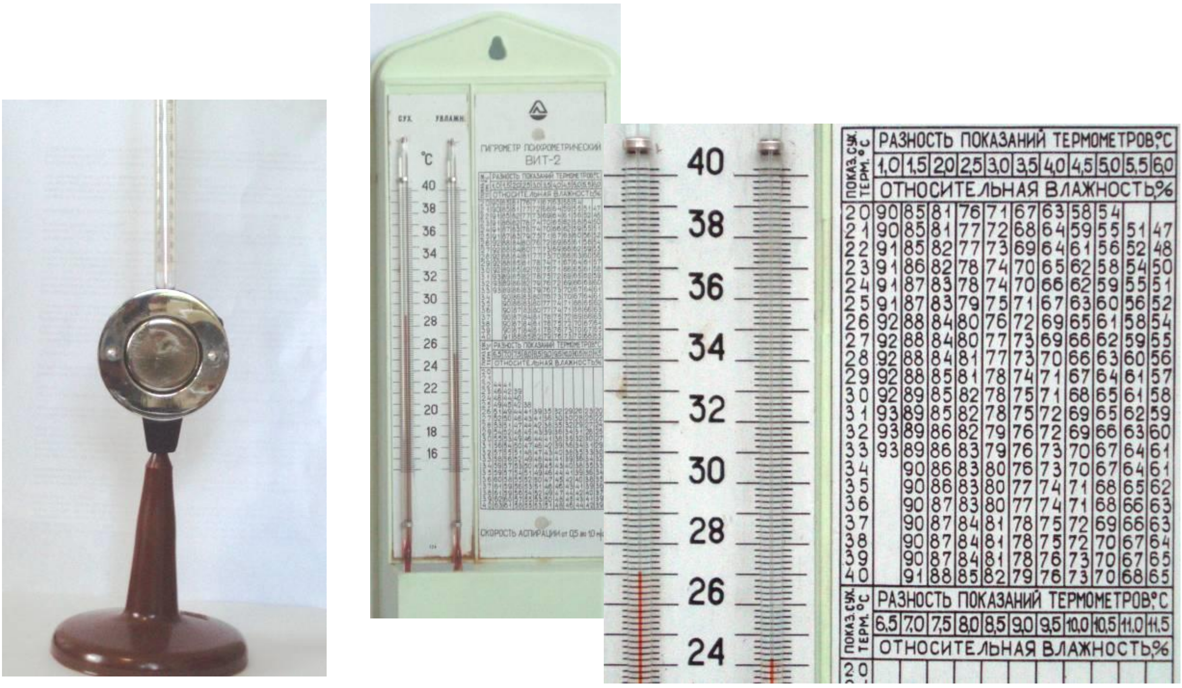


Рис. 6.1. Деякі пристрої, що використовуються при виконані досліду

Метод точки роси. За точкою роси можна знайти тиск p водяної пари у повітрі при даній температурі. Цей тиск дорівнюватиме тиску насиченої пари при температурі, яка відповідає точці роси. Значення тиску визначається за таблицею залежності тиску насиченої водяної пари від температури.

Якщо виразити знайдене за точкою роси значення тиску p водяної пари у мм рт. ст., то отримаємо наближене значення абсолютної вологості a (у г/м^3).

Відшукавши у вказаній таблиці значення тиску $p_н$ насиченої пари при температурі повітря, можна обчислити відносну вологість φ за формулою (6.2).

Саму ж точку роси визначають за допомогою конденсаційного гігрометра (знайдіть його на рис. 6.1). Він складається з тонкого металевого полірованого диска, на зворотному боці якого є резервуар, в який наливають рідину, що швидко випаровується (наприклад, ефір або спирт). Через отвір у резервуар вставляють термометр, яким вимірюють температуру рідини. Через інший отвір за допомогою гумової трубки з грушею продувають повітря.

Внаслідок випаровування рідини стінки резервуара охолоджуються. Це призводить до охолодження повітря, яке знаходиться біля металевого диска гігрометра. І при досягненні точки роси на полірованій поверхні диска з'являються крапельки роси. Відповідне значення точки роси t_p визначають за допомогою термометра.

Для більш точного визначення точки роси t_p вимірюють температуру t_{p1}, при якій з'являється роса, а також (припинивши прокачувати повітря) температуру t_{p2}, при якій вона зникає. За значення точки роси беруть середнє арифметичне:

$$t_p = \frac{t_{p1} + t_{p2}}{2}.$$

Метод психрометра. Психрометр (від грецького – холодний) складається з двох однакових термометрів, які закріплені на панелі. Один з термометрів вимірює температуру повітря. Кулька з термометричною рідиною іншого термометра щільно обтягнута тканиною (як правило, батистом), кінець якої опущено у ємність з водою. Завдяки капілярності вода піднімається по тканині і зволожує кульку термометра. Внаслідок випаровування води з тканини, зволожений термометр показує нижчу температуру, ніж сухий. Чим менша вологість повітря, тим інтенсивніше проходить випаровування і тим більшою буде різниця між показами сухого та зволоженого термометрів (і навпаки). Якщо ж повітря насичене водяною парою (відносна вологість 100%), то термометри показують однакову температуру.

Для визначення відносної вологості за допомогою психрометра, потрібно зняти покази сухого t_1 та зволоженого t_2 термометрів та знайти різницю $t_1 - t_2$.

За значеннями t_1 та $t_1 - t_2$ за допомогою спеціальної таблиці (яка називається *психрометричною*) визначають відносну вологість φ повітря.

Часто психрометрична таблиця розміщується на самому психрометрі (див. рис. 6.1). За температурою t_1 сухого термометра можна знайти тиск $p_н$ насиченої пари при цій температурі і визначити парціальний тиск водяної пари при даній температурі за формулою

$$p = \varphi \cdot p_н .$$

Виразивши парціальний тиск p у мм рт. ст. отримаємо наближене значення абсолютної вологості a.

Метод визначення вологості повітря за дефіцитом вологості. Для визначення відносної вологості φ за формулою (6.2) потрібно знати парціальний тиск p водяної пари у повітрі та тиск $p_н$ насиченої пари при даній температурі повітря. Тиск $p_н$ можна знайти за довідником. Парціальний же тиск p водяної пари безпосередньо визначити досить складно. Проте замість нього можна виміряти приріст тиску Δp при доведенні ненасичених парів води у повітрі до насичення завдяки випаровуванню води у закритій посудині (за своїм змістом Δp співпадає з дефіцитом вологості):

$$\Delta p = p_н - p .$$

З останнього виразу можна виразити p та підставити його значення у формулу (6.2):

$$\varphi = \frac{p}{p_н} = 1 - \frac{\Delta p}{p_н} .$$

Отже, вимірювання відносної вологості φ зводиться до вимірювання приросту тиску Δp у закритій посудині з атмосферним повітрям при випаровуванні в ній води до утворення насиченої пари.

Експериментальна установка для вимірювання Δp (рис. 6.2) складається із з'єднаних гумовим шлангом герметичної посудини та водяного манометра. Для зручності можна застосувати ще й трійник з пробкою: при цьому два його кінці з'єднують шлангами з посудиною та манометром, а через третій можна вводити (наприклад, за допомогою піпетки) у посудину воду та швидко герметизувати систему, затикаючи трійник пробкою.

При введенні води (достатньо ввести кілька крапель) шланг (а також трійник, якщо він застосовується) потрібно розташувати так, щоб вода не потрапила у посудину до герметизації системи. При складанні установки та проведенні досліду посудину не слід брати до рук, бо температура повітря у ній має залишатись постійною (рівною температурі оточуючого повітря).

Після герметизації системи, воду переливають зі шланга у посудину, де вона випаровується. Через деякий час водяна пара у посудині стає насиченою, при цьому покази манометра припиняють змінюватися.

За різницею висот h стовпчиків води у колінах манометра можна виміряти різницю тисків:

$$\Delta p = \rho g h,$$

де ρ – густина води;

g – прискорення вільного падіння.

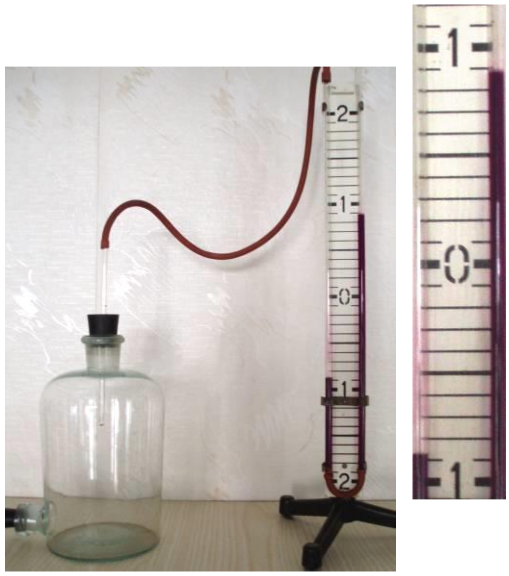


Рис. 6.2. Експериментальна установка для вимірювання дефіциту вологості Δp

Отже, формула для визначення відносної вологості повітря набирає вигляду:

$$\varphi = 1 - \frac{\rho g h}{p_н}. \qquad (6.3)$$

Для підвищення точності вимірювань потрібно врахувати зміну об’єму повітря в системі під час досліду. Більш точний результат можна отримати, якщо при вимірюванні приросту тиску Δp об’єм повітря у системі залишатиметься сталим. Для цього можна, наприклад, добавляти воду у відкрите коліно манометра, підтримуючи рівень води у закритому коліні на однаковій позначці.

Похибка отриманого за формулою (6.3) значення φ головним чином пов'язана з неточністю вимірювання різниці висот h стовпчиків води у колінах манометра (неточність при визначенні $p_н$ порівняно мала). Тому нескладно показати, що межі абсолютної $\Delta\varphi$ та відносної ε_φ похибок при визначенні φ за формулою (6.3) можна оцінити так:

$$\Delta\varphi = \frac{\rho g \Delta h}{p_н}; \; \varepsilon_\varphi = \frac{\Delta h}{\frac{p_н}{\rho g} - h}. \quad (6.4)$$

де Δh – межа абсолютної похибки при вимірюванні різниці висот h.

Підготовчі вправи.

Рівень А

1. Якщо кількість молекул, які щосекунди вилітають із рідини та повертаються до неї, однакова, то пара над рідиною є …

А. … перегрітою. **Б.** … переохолодженою.

В. … насиченою. **Г.** … ненасиченою.

2. Точкою роси називають температуру, при якій …

А. … ненасичена пара стає насиченою.

Б. … припиняється перехід молекул із рідини в пару.

В. … рідина закипає.

Г. … припиняється перехід молекул із пари в рідину.

3. Як змінюється концентрація молекул насиченої пари зі збільшенням об'єму при постійній температурі?

А. Не змінюється. **Б.** Зменшується.

В. Збільшується. **Г.** Спочатку не змінюється, а потім зростає.

4. Відносна вологість повітря в кімнаті дорівнює 80%. Температура повітря 288 К. Визначте парціальний тиск водяної пари при даній температурі.

А. Від 0,6 кПа до 0,8 кПа. **Б.** Від 0,8 кПа до 1,2 кПа.

В. Від 1,2 кПа до 1,4 кПа. **Г.** Від 1,4 кПа до 1,8 кПа.

5. Температура повітря у приміщенні 20°С, точка роси 8°С. Знайдіть відносну вологість повітря.

А. Від 40% до 45%. **Б.** Від 45% до 50%.

В. Від 50% до 55%. **Г.** Від 55% до 60%.

6. Визначте різницю тисків повітря усередині та зовні посудини, наведеної на рис. 6.3, якщо одна поділка водяного манометра відповідає 10 мм.

А. Від $5\cdot10^2$Па до $1\cdot10^3$Па. **Б.** Від $1\cdot10^3$Па до $1{,}5\cdot10^3$Па.

В. Від $1{,}5\cdot10^3$Па до $2\cdot10^3$Па. **Г.** Від $2\cdot10^3$Па до $2{,}5\cdot10^3$Па.

Рівень Б

7. Як знайти тиск водяної пари, якщо відомі її густина та температура?

8. Покажіть, що в інтервалі температур від 0°C до 100°C числове значення парціального тиску водяної пари у мм рт. ст. приблизно дорівнює числовому значенню густини пари у г/м^3.

9. При якій температурі значення парціального тиску водяної пари у мм рт. ст. найбільш точно співпадає зі значенням її густини у г/м^3?

10. Користуючись довідником з фізики, визначте тиск насиченої водяної пари при 20°C, 60°C та 100°C.

11. Знайдіть абсолютну вологість повітря у кімнаті, якщо відомо, що водяна пара є насиченою, а температура повітря 15°C.

12. Тиск водяної пари в повітрі при температурі 20°C дорівнює 1,23 кПа. Визначте точку роси та відносну вологість повітря.

13. Поясніть причину появи роси та інею.

14. За наведеними фотографіями шкал термометрів (°C) (рис. 6.3) визначити: ціну поділки шкали, покази приладу з урахуванням похибки вимірювання.

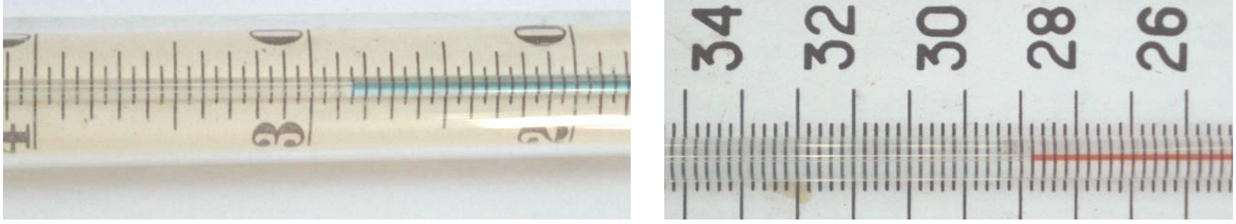


Рис. 6.3. Шкали рідинних термометрів

15. Поясніть принцип дії конденсаційного гігрометра:

– З яких основних вузлів складається прилад?

– Що можна безпосередньо виміряти за допомогою такого гігрометра?

– Навіщо в гігрометрі застосовують спирт (або ефір)?

– З якою метою через прилад продувають повітря?

16. Поясніть конструкцію та правила користування психрометром.

17. Коли різниця показів сухого та зволоженого термометрів психрометра буде більшою: при більш сухому або при більш вологому повітрі? Чи можуть ці термометри мати однакові покази?

18. Як змінюватиметься різниця показів термометрів психрометра у разі зниження температури повітря, за умови, що абсолютна вологість залишатиметься майже незмінною?

19. Чому лід на вікнах взимку з’являється з боку кімнати (де тепло), а не знадвору (де холодно)?

20. У досліді з визначення вологості повітря за дефіцитом вологості необхідно виміряти приріст тиску Δp при доведенні ненасиченої водяної пари у повітрі до насичення завдяки випаровуванню води у закритій посудині. Поясніть:

– Що таке дефіцит вологості?

– Чому для введення води у посудину застосовують трійник (а не наливають воду безпосередньо у посудину)?

– Чому не можна тримати посудину у руках під час досліду?

– Як можна забезпечити постійність об’єму повітря у системі при вимірюванні різниці тисків Δp?

– Як отримати робочу формулу (6.3)?

– Як обґрунтувати формули (6.4)?

? 6.3. Додаткові творчі завдання.

Завдання для формування банку ідей.

1. Як знайти температуру сталевої ручки на дверях кімнати за допомогою звичайного рідинного термометра?

2. Як зберегти влітку молоко у пляшці свіжим якомога довше за допомогою лише тканини та посудини з водою?

3. Як за допомогою посудини з теплою водою та шприца продемонструвати кипіння води?

4. Як можна підвищити вологість повітря у кімнаті (необхідне для цього обладнання виберіть самі)?

5. Як, не використовуючи ніяких додаткових пристроїв, зменшити вологість повітря у кімнаті взимку?

6. Як знайти абсолютну та відносну вологості повітря за допомогою полірованої металевої посудини з водою, термометра, льоду (або снігу) та довідника з фізики? Як можна підвищити точність вимірювань, якщо у наявності є ще й тепла вода?

7. Як за допомогою електричного насоса Комовського, скляного колокола, склянки з водою, манометра та термометра дослідити залежність тиску насиченої водяної пари від температури $p_н = p_н(T)$?

Експериментальні та тренувальні винахідницькі задачі.

Експериментальні задачі.

1. Визначте густину повітря і водяної пари у приміщенні. *Обладнання:* Психрометр Августа, барометр, довідник з фізики.

2. Визначте тиск насиченої водяної пари, що знаходиться при температурі 60°C, якщо відомі атмосферний тиск і тиск насиченої пари при кімнатній температурі. *Обладнання:* посудина з гарячою водою, посудина з водою при кімнатній температурі, пробірка, пробка з отвором, термометр, лінійка.

Тренувальні винахідницькі задачі.

1. З метою створення сприятливих умов для росту рослин у кімнаті часто виникає необхідність підвищувати вологість повітря. Найчастіше для цього у кімнаті розпилюють воду за допомогою ручного пульверизатора. Цей спосіб має такі недоліки: краплі води, які утворюються при розпиленні, є досить великими, тому підлога та інші речі швидко вкриваються тонким шаром води; використання ручного пульверизатора потребує значних витрат часу, особливо у разі великих розмірів кімнати. Запропонуйте спосіб або пристрій для підвищення вологості повітря у кімнаті, які б були позбавлені цих недоліків.

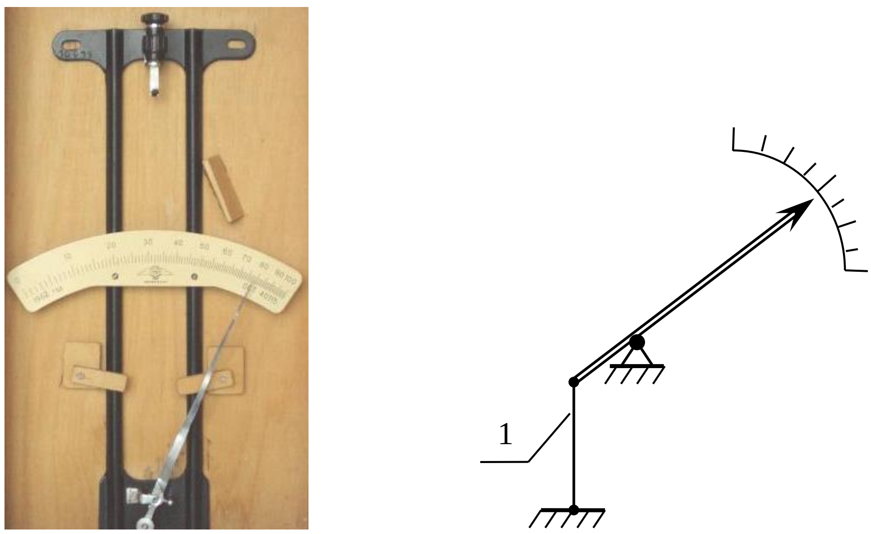
2. Запропонуйте спосіб або пристрій, які б дозволяли отримувати (конденсувати) воду з повітря, наприклад, під час подорожі, якщо поблизу немає водоймищ.

Зробіть своїми руками!

Відомо, що чисте волосся (людське, кінське тощо) реагує на зміну вологості повітря: при її підвищенні довжина знежиреної волосини збільшується. На цій властивості базується дія *волосного гігрометра* – приладу для безпосереднього вимірювання відносної вологості повітря (рис. 6.4, *а*).

Поясніть принцип дії волосного гігрометра за наведеною схемою (рис. 6.4, *б*). Розробіть конструкцію та виготовте діючу модель приладу (з наступним градуюванням).

Примітка. Замість природної волосини можна використати капронову рибальську ліску.



а) *б)*

Рис. 6.4. Модель (*а*) та схема (*б*) волосного гігрометра: *1* – волосина