

11 ДІЇ НАД МНОГОЧЛЕНАМИ. НСД, НСК МНОГОЧЛЕНІВ

Завдання для самостійного розв'язування

11.1. Знайдіть многочлен $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$, якщо

- 1) $f(1) = 1, f(2) = 2, f(3) = 3$;
- 2) $f(2) = 1, f(3) = 0, f(4) = 2$;
- 3) $f(1) = f(2) = 2, f(3) = -2$.

11.2. Виділіть цілу частину з раціонального дробу:

- | | |
|---|--|
| 1) $\frac{x^3 - x + 2}{x^2 + 1}$; | 2) $\frac{2x^4 - 3x^3 + 4x^2 + 1}{x^2 - 1}$; |
| 3) $\frac{x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 4x + 1}{x^2 + x - 2}$; | 4) $\frac{2x^4 + x^3 - 5x^2 - x + 1}{x^2 - x}$; |
| 5) $\frac{x^5 - 3x^3 + x^2 + 2x - 1}{x^2 + x - 1}$; | 6) $\frac{5x^4 - 3x^5 + 3x - 1}{x + 1 - x^2}$. |

11.3. Доведіть, що многочлен $f(x)$ ділиться націло на многочлен $g(x)$:

- 1) $f(x) = x^2 - 7x + 6, g(x) = x - 6$;
- 2) $f(x) = x^3 - 1, g(x) = x^2 + x + 1$;
- 3) $f(x) = x^4 - 1, g(x) = x^3 + x^2 + x + 1$;
- 4) $f(x) = 4x^3 - 8x^2 + 5x - 1, g(x) = 2x^2 - 3x + 1$;
- 5) $f(x) = 3x^4 - 7x^3 + 2x^2 + 3x - 1, g(x) = x^3 - 2x^2 + 1$;
- 6) $f(x) = 2x^4 - x^3 + 2x^2 + 1, g(x) = x^2 - x + 1$;

11.4. Доведіть, що многочлен $f(x)$ не ділиться націло на многочлен $g(x)$:

- 1) $f(x) = x^2 + 1, g(x) = x - 1$;
- 2) $f(x) = x^3 + x - 1, g(x) = x + 1$;
- 3) $f(x) = 2x^4 - 3x^3 - x + 1, g(x) = x^2 - 3x + 2$.

11.5. При яких p і q многочлен $f(x)$ ділиться націло на многочлен $x^2 + x + 1$:

- 1) $f(x) = x^4 + px^2 + q$;
- 2) $f(x) = x^4 + px + q$;
- 3) $f(x) = x^5 + px^2 + q$;
- 4) $f(x) = x^5 + px + q$?

11.6. При яких a і b многочлен $f(x) = x^4 + a$ ділиться націло на многочлен $g(x) = x^2 + bx + 1$.

11.7. Знайдіть частку та остачу від ділення $f(x)$ на двочлен $g(x)$:

- 1) $f(x) = x^4 + 2x^2 + 20x + 7, g(x) = x + 3$;
- 2) $f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 1, g(x) = x - 1$;
- 3) $f(x) = 2x^4 - 4x^3 - x - 1, g(x) = x + 2$;
- 4) $f(x) = 2x^3 - 7x^2 + x + 3, g(x) = x - 4$;
- 5) $f(x) = 6x^4 - 5x^3 - 53x^2 + 45x - 9, g(x) = x + 1$;
- 6) $f(x) = 2x^3 + 7x^2 + 7x + 2, g(x) = x + 2$;
- 7) $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 2x^2 + 5x - 2, g(x) = x - 2$;
- 8) $f(x) = 5x^5 - 6x^4 - x^2 + x + 1, g(x) = x - 1$;
- 9) $f(x) = x^6 - 3x^5 - x^4 + 2x^3 + 3x^2 + x - 3, g(x) = x - 3$;
- 10) $f(x) = 2x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 8x - 3, g(x) = x - 4$;
- 11) $f(x) = x^3 + x^2 - 7, g(x) = x + 4 + 4i$;
- 12) $f(x) = 3x^5 - x^4 + 2x^3 - x - 1, g(x) = x + 1 - i$;
- 13) $f(x) = 2x^5 - 2x^3 + x, g(x) = x - 1 - 2i$.

11.8. Знайдіть частку та остачу від ділення $f(x)$ на многочлен $g(x)$:

- 1) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 5x^2 + x - 1, g(x) = x^2 - 2x - 3$;
- 2) $f(x) = 5x^4 - x^2 + 6, g(x) = x^2 + 3x + 2$;
- 3) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 4, g(x) = 3x^2 - 2x + 1$;
- 4) $f(x) = x^{62} - 4x^{31} + 5, g(x) = x^2 - 1$;
- 5) $f(x) = x^{17} - x^{10} + 2x^3 - 1, g(x) = x^2 + 1$;
- 6) $f(x) = x^{10} - 2x^9 + 3x^8 - x^2 + 2x - 1, g(x) = x^4 - 1$;
- 7) $f(x) = x^{16} + 2x^{15} - x^8 - 2x^7 + x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x + 1,$
 $g(x) = x^2 + x - 2$.

11.9. Доведіть, що многочлен $f(x)$ ділиться націло на многочлен $g(x)$:

- 1) $f(x) = x^4 - 8x^3 + 15x^2 + 4x - 20, g(x) = x^2 - x - 2$;
- 2) $f(x) = x^4 - 9x^3 + 9x^2 + 41x - 42, g(x) = x^2 + x - 2$;
- 3) $f(x) = x^5 - 9x^4 + 26x^3 - 18x^2 - 27x + 27, g(x) = x^2 - 4x + 3$;
- 4) $f(x) = 100x^{100} - 50x^{50} + 10x^{10} - 5x^5 + x - 56, g(x) = x - 1$;
- 5) $f(x) = (x + 3)^{25} - (x + 1)^5 + x, g(x) = x + 2$;
- 6) $f(x) = (x - 2)^{63} - (x - 1)^{36} + 1, g(x) = x^2 - 3x + 2$;
- 7) $f(x) = (x + 1)^{2n} - x^{2n} - 2x - 1, g(x) = x(x + 1)(2x + 1), n \in \mathbb{N}$;

$$8) \quad f(x) = (x^2 + x - 1)^{2n} + (x^2 - x + 1)^{2n} - 2, \quad g(x) = x^2 - x, \quad n \in \mathbb{N}.$$

11.10. При яких значеннях параметрів a і b многочлен $f(x)$ ділиться націло на многочлен $g(x)$

- 1) $f(x) = 2x^3 - x^2 + ax + b, \quad g(x) = x^2 - 1;$
- 2) $f(x) = 6x^4 - x^3 + ax^2 + bx + 4, \quad g(x) = x^2 - 4;$
- 3) $f(x) = 3x^4 + 5x^3 + ax^2 + bx + 10, \quad g(x) = x^2 + x - 2;$
- 4) $f(x) = x^{16} - 3x^9 + 4x^4 + ax^2 + bx, \quad g(x) = x^2 - 1;$
- 5) $f(x) = x^3 + ax^2 + bx - 1, \quad g(x) = (x - 1)^2;$
- 6) $f(x) = ax^4 - bx^3 + 1, \quad g(x) = (x + 1)^2?$

11.11. Знайдіть всі дійсні значення a і b , при яких многочлени $x^3 + ax^2 + 18$ і $x^3 + bx + 12$ мають два спільних корені. Знайдіть ці корені.

Вказівка. Спільні корені даних многочленів – це корені їх різниці $ax^2 - bx + 6$. Отже, кожен з даних многочленів повинен ділитися на $ax^2 - bx + 6$.

11.12. Знайдіть НСД многочленів $f(x)$ і $g(x)$ та його лінійне представлення:

- 1) $f(x) = x^4 + 4x^3 - 7x + 2, \quad g(x) = x^3 + 3x^2 - 4;$
- 2) $f(x) = x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + 2x - 2, \quad g(x) = x^5 - 1;$
- 3) $f(x) = 3x^5 + 6x^4 + 3x^3 - x^2 - 2x - 1, \quad g(x) = x^4 - 2x^2 + 1;$
- 4) $f(x) = x^6 - x^4 + 3x^3 - 2x + 2, \quad g(x) = x^3 + 2;$
- 5) $f(x) = 3x^6 - 4x^4 + 2x^2 - 1, \quad g(x) = 3x^5 + 5x^3 - 4x - 4;$
- 6) $f(x) = 2x^6 - 3x^4 - x^2 - 4x - 2,$
 $g(x) = -2x^6 + 3x^4 - 2x^3 - 3x^2 - 4x - 4.$

11.13. Знайдіть НСД і НСК многочленів $f(x)$ і $g(x)$:

- 1) $f(x) = x^3(x+1)^2(x-2)(x-1), \quad g(x) = x^3(x+1)(x+3);$
- 2) $f(x) = (x-2)(x^2-4)(x^3-8)(x^4-16),$
 $g(x) = (x+2)(x^2+4)(x^3+8)(x^4+16);$
- 3) $f(x) = (x^3-8)(x^2-4x+4), \quad g(x) = (x^2-4)^3;$
- 4) $f(x) = (x-1)(x+2)^2(x-3), \quad g(x) = x^2+x-6.$

11.14. Знайдіть НСД $f(x)$ і $f'(x)$, якщо:

- 1) $f(x) = (x-1)(x^2-1)(x^3-1)(x^4-1);$
- 2) $f(x) = (x^2-4)^3(x^2+4)^2(x^4-16);$

3) $f(x) = (x^2 + 1)^2 (x^4 + 1)^4 (x^6 + 1)^6 (x^8 + 1)^8$;

4) $f(x) = x^{k+l} - x^k - x^l + 1$.