

12 КОРЕНІ МНОГОЧЛЕНІВ. ТЕОРЕМА ВІСТА

Завдання для самостійного розв'язування

12.1. Обчисліть $f(c)$, якщо:

1) $f(x) = x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 50x + 22$, $c = 2$;

2) $f(x) = x^5 - 4ix^4 + x^2 - 3$, $c = 2 - i$;

3) $f(x) = x^5 + (2i - 1)x^3 - 2ix - 5$, $c = 1 - i$.

12.2. При якому значенні параметра a

1) остача від ділення многочлена $x^4 + ax^3 - 2x^2 + x - 1$ на двочлен $x - 1$ дорівнює 5;

2) остача від ділення многочлена $2x^4 - 3x^3 - ax^2 - x - 2$ на двочлен $x + 1$ дорівнює 3;

3) многочлен $x^3 + 3x^2 - ax + 6$ ділиться націло на двочлен $x + 2$.

12.3. При яких значеннях параметрів a , b і c многочлен $x^3 + ax^2 + bx + c$ ділиться націло на двочлени $x - 1$ і $x + 2$, а при діленні на двочлен $x + 1$ дає в остачі 10?

12.4. При яких значеннях параметрів a і b многочлен $x^3 + ax^2 + bx + ab$ ділиться націло на двочлен $x + 1$, а при діленні на двочлен $x - 2$ дає в остачі 15?

12.5. При яких значеннях параметрів a і b многочлен $ax^3 + bx - 1$ ділиться на многочлен $x^2 - 3x + 2$ з остачею 7?

12.6. Остачі від ділення многочлена $f(x)$ на двочлени $x - 3$ і $x - 1$ відповідно дорівнюють 6 і 4. Знайдіть остачу від ділення многочлена $f(x)$ на многочлен $x^2 - 4x + 3$.

12.7. Доведіть, що

1) вираз $a^3(b - c) + b^3(c - a) + c^3(a - b)$ ділиться націло на вираз $(a - b)(b - c)(c - a)$;

2) вираз $(a + b + c)(ab + bc + ca) - abc$ ділиться націло на вираз $a + b$;

3) вираз $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ ділиться націло на вираз $x + y + z$.

12.8. Доведіть тотожність:

1)
$$a \frac{(x - b)(x - c)}{(a - b)(a - c)} + b \frac{(x - c)(x - a)}{(b - c)(b - a)} + c \frac{(x - a)(x - b)}{(c - a)(c - b)} = x;$$

2)
$$a^2 \frac{(x - b)(x - c)}{(a - b)(a - c)} + b^2 \frac{(x - c)(x - a)}{(b - c)(b - a)} + c^2 \frac{(x - a)(x - b)}{(c - a)(c - b)} = x^2.$$

12.9. Розкласти многочлен $f(x)$ за степенями $x - c$, якщо:

1) $f(x) = x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 50x + 22$, $c = 2$;

2) $f(x) = x^5 - 4ix^4 + x^2 - 3, c = 2 - i;$

3) $f(x) = x^5 + (2i - 1)x^3 - 2ix - 5, c = 1 - i.$

12.10. При діленні многочлена $f(x)$ на двочлени $x - 1$ і $x - 2$ остачі дорівнюють відповідно 1 і 2. Чому дорівнює остача при діленні $f(x)$ на $(x - 1)(x - 2)$?

12.11. При діленні многочлена $f(x)$ на двочлени $x + 1, x - 1$ і $x + 3$ остачі дорівнюють відповідно 5, -4 і 6. Чому дорівнює остача при діленні $f(x)$ на $(x^2 - 1)(x + 3)$?

12.12. Знайдіть кратність кореня c многочлена $f(x)$, якщо

1) $f(x) = 2x^4 - 7x^3 + 9x^2 - 5x + 1, c = 1;$

2) $f(x) = 5x^4 + 14x^3 + 12x^2 + 2x - 1, c = -1;$

3) $f(x) = x^5 - 5x^4 + 40x^2 - 80x + 48, c = 2;$

4) $f(x) = x^5 + 6x^4 + 11x^3 + 2x^2 - 12x - 8, c = -2.$

12.13. При яких значеннях a многочлен $f(x)$ має кратний корінь; яка кратність цього кореня:

1) $f(x) = x^3 + ax^2 + 3x - 1;$

2) $f(x) = 2x^3 - x^2 + ax + 3;$

3) $f(x) = 3x^4 - 6x^3 + ax^2 - 2x + 1?$

12.14. Виділіть кратні множники наступних многочленів:

1) $f(x) = x^6 - 2x^5 - 9x^4 + 4x^3 + 31x^2 + 30x + 9;$

2) $f(x) = x^6 - 2x^5 - x^4 + 4x^3 - x^2 - 2x + 1;$

3) $f(x) = x^6 - 4x^5 + 7x^4 - 8x^3 + 7x^2 - 4x + 1;$

4) $f(x) = x^6 + 2x^5 - x^4 + 4x^3 + 7x^2 - 6x + 9.$

12.15. Наступні многочлени розкладіть на незвідні множники над \mathbb{C} і \mathbb{R} :

1) $x^3 - 8;$

2) $x^3 + 8;$

3) $x^4 - 16;$

4) $x^4 + 16;$

5) $x^6 - 27;$

6) $x^6 + 27;$

7) $x^8 - 6x^4 + 9;$

8) $x^4 + 6x^3 + 9x^2 - 9;$

9) $x^4 - 10x^3 + 25x^2 - 6.$

12.16. По даних коренях побудуйте многочлен найменшого степеня над \mathbb{C} і \mathbb{R} :

1) подвійний корінь 1, прості корені -1 та i ;

2) потрійний корінь $1 - 2i$;

3) подвійний корінь $-1 - i$ та подвійний корінь $-2 + i$.

12.17. Знайдіть всі корені кожного з наступних рівнянь, якщо відомий один з них (c):

- 1) $x^3 - 4x^2 + 3x + 30 = 0, c = 3 + i\sqrt{6};$
- 2) $4x^4 - 24x^3 + 53x^2 + 18x - 42 = 0, c = 3 - i\sqrt{5};$
- 3) $x^4 + 5x^3 + 31x^2 + 60x + 150 = 0, c = -2 - i\sqrt{6};$
- 4) $x^6 - 2x^5 + 2x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x + 3 = 0, c = 1 + i\sqrt{2}.$

12.18. Розв'яжіть рівняння над \mathbb{R} :

- 1) $x^3 + 9x^2 + 23x + 15 = 0;$
- 2) $2x^3 - x^2 - 5x - 2 = 0;$
- 3) $3x^4 + 5x^3 - x^2 - 5x - 2 = 0;$
- 4) $5x^4 + 9x^3 - 2x^2 - 4x - 8 = 0;$
- 5) $2x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 6x + 8 = 0;$
- 6) $x^5 + 8x^4 + 24x^3 + 35x^2 + 28x + 12 = 0;$
- 7) $x^3 + x^2 - 4x + 2 = 0;$
- 8) $x^3 - x^2 - 8x + 12 = 0;$
- 9) $x^3 + 4x^2 + 5x + 2 = 0;$
- 10) $x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 4x + 1 = 0;$
- 11) $x^4 + 2x^3 - 11x^2 + 4x + 4 = 0;$
- 12) $3x^4 + 5x^3 - 9x^2 - 9x + 10 = 0.$

12.19. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $x^3 + 3x^2 - 3x + 4 = 0;$
- 2) $2x^3 + 3x^2 - 3x - 9 = 0;$
- 3) $3x^3 - 10x^2 + 13x + 14 = 0;$
- 4) $3x^3 - 11x^2 + 28x - 30 = 0;$
- 5) $x^3 - 9x + 12 = 0;$
- 6) $x^3 + 3x + 2i = 0;$
- 7) $x^3 - 3x^2 + 3(1 - 2i)x + 3 + 2i = 0;$
- 8) $x^3 + (1 - i)x^2 + (1 - i)x - i = 0;$
- 9) $4x^3 - 2(10 - i)x^2 + 10(3 - i)x + 15i = 0.$

12.20. Визначить c так, щоб:

- 1) один з коренів рівняння $x^3 - 21x + c = 0$ дорівнював подвоєному другому;
- 2) сума двох коренів рівняння $x^3 + 12x^2 + c = 0$ дорівнювала б третьому кореню;
- 3) добуток двох коренів рівняння $x^3 - 20x + c = 0$ дорівнював б третьому кореню.

12.21. Яким умовам повинні задовольняти коефіцієнти рівняння $x^3 + px + q = 0$, щоб один корінь дорівнював:

- 1) сумі двох інших;
- 2) різниці двох інших;
- 3) потроєному другому;
- 4) сумі обернених величин всіх коренів?

12.22. Яким умовам повинні задовольняти коефіцієнти p, q, i, r , щоб вони були коренями рівняння:

1) $x^3 - px^2 + qx + r = 0$;

2) $x^3 - px^2 + qx - r = 0$.

12.23. Сума квадратів коренів рівняння $x^2 - 3ax + a^2 = 0$ дорівнює 1,75. Знайдіть a .

12.24. Яка залежність між коефіцієнтами рівняння $x^2 + px + q = 0$, якщо $\frac{1}{x_1 + x_2} + \frac{1}{x_1^2 + x_2^2} = \frac{1}{x_1 x_2}$?

12.25. Знайдіть многочлен $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ та його корені, якщо відомо, що вони утворюють арифметичну прогресію:

1) $f(x) = x^3 + 6x^2 + 5x + r$;

2) $f(x) = x^3 - 18x^2 + qx + 24$.

12.26. Знайдіть многочлен $f(x) = x^3 + px^2 - 6x + 8 \in \mathbb{R}[x]$ та його корені, якщо відомо, що вони утворюють геометричну прогресію.

12.27. Нехай x_1, x_2, x_3 – корені рівняння $5x^3 - 4x^2 + 3x - 2 = 0$. Обчисліть:

1) $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_1}{x_3} + \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_2}{x_3} + \frac{x_3}{x_1} + \frac{x_3}{x_2}$;

2) $\left(\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_1}{x_3} + \frac{x_3}{x_1} \right) \left(\frac{x_2}{x_1} + \frac{x_3}{x_2} + \frac{x_1}{x_3} \right)$;

3) $\frac{(x_1 - x_2)^2}{x_3} + \frac{(x_2 - x_3)^2}{x_1} + \frac{(x_3 - x_1)^2}{x_2}$.

12.28. Нехай x_1, x_2, x_3 – корені рівняння $x^3 + px + q = 0$. Обчисліть:

1) $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3x_1 x_2 x_3$;

2) $(x_1^2 + x_2^2)(x_2^2 + x_3^2)(x_3^2 + x_1^2)$;

3) $\frac{x_1}{x_1 + 1} + \frac{x_2}{x_2 + 1} + \frac{x_3}{x_3 + 1}$.

12.29. Нехай x_1, x_2, x_3 – корені рівняння $x^3 - 3x^2 + 5 = 0$. Складіть рівняння з наступними коренями:

1) $y_1 = x_2 x_3, y_2 = x_1 x_3, y_3 = x_1 x_2$;

2) $y_1 = \frac{x_1}{x_2 x_3}, y_2 = \frac{x_2}{x_1 x_3}, y_3 = \frac{x_3}{x_1 x_2}$;

3) $y_1 = \frac{x_1 + x_2}{x_3}, y_2 = \frac{x_2 + x_3}{x_1}, y_3 = \frac{x_3 + x_1}{x_2}$.

12.30. Знайдіть раціональні корені многочленів:

1) $2x^3 + x^2 + 47x - 24$;

2) $5x^4 - 6x^3 - 15x^2 + 43x - 30$;

- 3) $12x^4 + 32x^3 + 23x^2 + 15x + 18;$
- 4) $36x^4 - 60x^3 - 47x^2 + 60x + 36;$
- 5) $6x^5 + 6x^4 + 29x^3 + 3x^2 - x + 20;$
- 6) $6x^5 - 6x^4 + 89x^3 + 5x^2 - 19x + 60;$
- 7) $225x^5 - 165x^4 - 401x^3 + 145x^2 + 192x + 36;$
- 8) $54x^5 - 135x^4 + 261x^3 - 322x^2 - 188x - 40.$