

**Міністерство освіти і науки України  
Запорізька державна інженерна академія**

---



**Д.О. Кругляк**

## **МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ОМТ**

**Навчально-методичний посібник**

для студентів ЗДІА спеціальності «Обробка металів тиском»  
денної та заочної форм навчання

**Запоріжжя  
2016**

**Міністерство освіти і науки України  
Запорізька державна інженерна академія**

## **МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ОМТ**

**Навчально-методичний посібник**

для студентів ЗДІА спеціальності «Обробка металів тиском»  
денної та заочної форм навчання

Моделювання процесів обробки металів тиском. *Навчально-методичний посібник для студентів ЗДІА спеціальності ОМТ денної та заочної форм навчання / Укладач – Кругляк Д.О. – Запоріжжя, 2016. – 124 с.*

Укладач: **Д.О. Кругляк, к.т.н., доцент**

Відповідальний за випуск: **зав. кафедрою ОМТ  
д.т.н., проф. В.О. Ніколаєв**

## ЗМІСТ

ВСТУП.....	5
РОЗДІЛ 1. ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ.....	6
1.1 Основні положення обробки металів тиском.....	6
1.2 Короткі відомості з теорії пластичної деформації металів .....	13
РОЗДІЛ 2. ОСНОВНІ ПОЛОЖЕННЯ МЕХАНІКИ СУЦІЛЬНИХ СЕРЕДОВИЩ .....	18
2.1 Вектори і тензори другого рангу .....	18
2.2 Деформований стан.....	21
2.3 Напружений стан.....	24
РОЗДІЛ 3. ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ОБРОБКИ МЕТАЛІВ ТИСКОМ .....	28
3.1 Умови взаємодії заготовки і інструменту. Постановка краєвих задач .....	28
3.2 Варіаційні формулювання краєвих задач обробки металів тиском .....	35
РОЗДІЛ 4. МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ КОВКИ .....	61
4.1 Процес протяжки .....	61
4.2 Експериментальна перевірка розрахунку напруг .....	65
4.3 Моделювання процесу закову горловини .....	66
РОЗДІЛ 5. КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ПРЕСУВАННЯ ПРОФІЛІВ .....	70
5.1 Основні рівняння, які описують деформацію металу при пресуванні .....	70
5.2 Основні рівняння моделі теплових процесів при пресуванні.....	74
5.3 Приклади рішення тестових задач пресування профілів.....	76
РОЗДІЛ 6. КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ПРОКАТКИ ПРОФІЛІВ .....	86
6.1 Аналіз існуючих підходів до моделювання тривимірного формозміни металу при прокатуванні.....	87
6.2 Комбінований підхід до моделювання процесів прокатки методом кінцевих елементів.....	91
6.3 Моделювання процесів прокатування в гладких валках .....	94
РОЗДІЛ 7. ПРИКЛАДИ РОЗРАХУНКУ .....	97
ЛІТЕРАТУРА .....	118

## ВСТУП

Обробка металів тиском (ОМТ) в металургійній промисловості є заключним етапом, що дозволяє отримати металовироби, які використовуються в народному господарстві або як готову продукцію, або як заготовку для подальшої переробки в машинобудуванні. Обробка металів тиском є основним способом отримання металовиробів та напівфабрикатів. Більш ніж 90% металу, що виплавляється, перероблюється різними видами ОМТ.

При обробці металів тиском використовуються пластичні властивості металів - здатність без руйнування змінювати форму та розміри в гарячому та холодному стані під дією обробляючого інструменту. Знання закономірностей обробки металів тиском дозволяє проводити обробку при оптимальних режимах деформації, використовувати відповідне основне та допоміжне обладнання. Різноманітність видів та способів обробки металів тиском дозволяє отримувати металовироби широкого асортименту з високою продуктивністю, точними розмірами, необхідними механічними властивостями.

Розвиток металургійної промисловості привів до появи нових видів обробки металів тиском, при яких поєднуються процеси лиття та обтиску затверділого металу. Нові технологічні процеси обробки металів тиском дозволяють надати виробу необхідну форму при високій інтенсивності деформації, отримати продукцію з особливо високими механічними властивостями, знизити кількість обмежень та використувати менше обладнання.

В час інформаційних технологій змінилися вимоги до якості теоретичних рішень і технологічних розробок.

Застосування чисельних методів при розв'язанні крайових задач формозміни металу розширює потенціал аналізу процесів та здійснення керування ними. В навчальному посібнику використані праці вчених кафедри ОМТ Дніпропетровської національної металургійної академії України [1].

## РОЗДІЛ 1. ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ

### 1.1 Основні положення обробки металів тиском

В основі обробки металів тиском (ОМТ) лежить процес пластичної деформації, при якому змінюється форма без зміни маси. Усі розрахунки розмірів і форми тіла при обробці тиском засновані на законі сталості об'єму, суть якого полягає в тому, що об'єм тіла до і після пластичної деформації приймається незмінним:  $V_1 = V_2 = \text{const}$  ( $V_1$  і  $V_2$  – об'єми тіла до і після деформації).

Зміна форми тіла може відбуватися в напрямку трьох головних осей; при цьому кожна точка прагне переміщатися в тому напрямку, в якому створюється найменший опір її зміщенню. Це положення в теорії обробки металів тиском називається законом найменшого опору.

При вільній формозміні тіла в різних напрямках найбільша деформація відбувається в тому напрямку, у якому більшість точок, що переміщуються, зустрічає найменший опір своєму переміщенню.

Так, наприклад, якщо при прокатуванні в двох валках з поперечними насічками (рис. 1.1, а) плин металу уздовж осі прокатки стримується, а в поперечному напрямку збільшується, то при кругових насічках (рис. 1.1, в) буде спостерігатися зворотне явище.

Іншим прикладом чинності закону найменшого опору може служити перетворення квадратного перетину (чи будь-якого іншого) зразку при його осаджуванні в кругове (рис. 1.1). Це правило найменшого периметра при осаджуванні.

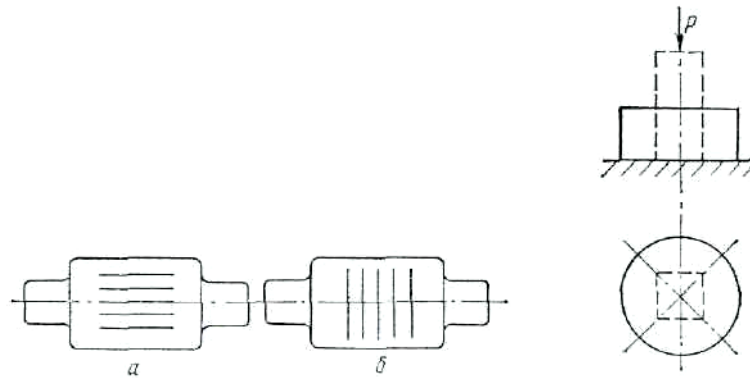


Рисунок 1.1 – Валок з поперечними (а) і круговими (б) насічками і схема осадки прямокутного зразка

Закони сталості об'єму і найменшого опору поширюються на всі способи обробки металів тиском.

При цьому закон сталості об'єму використовують для визначення розмірів заготовок, а закон найменшого опору дозволяє визначити, які розміри і форму поперечного перерізу одержить заготовка з тим чи іншим перетином у процесі обробки тиском.

Будь-який процес обробки металів тиском характеризується осередком деформації і коефіцієнтом деформації. На рис. 1.2 показаний осередок деформації при подовжньому прокатуванні. Різниця висоти заготовки, що прокочується, до і після прокатки називається лінійним або абсолютним обтисненням:  $\Delta h = h_0 - h_1$ .

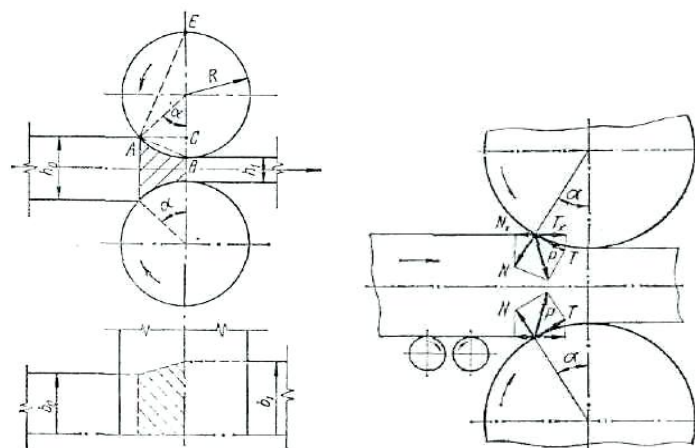


Рисунок 1.2 – Осередок деформації при прокатуванні та сили, що діють на метал при захопленні його валками

Відношення цієї величини до первісної висоти перетину заготовки, що прокочується, називається відносним обтисненням:  $(h_0 - h_1)/h_0 = \Delta h/h_0$ .

Різниця ширин перетинів металу, що прокочується, після прокатки і до прокатки називається розширенням:  $\Delta b = b_1 - b_0$ .

Як видно з рис. 1.4, метал при прокатуванні піддається деформації на деякій ділянці, яка по мірі обертання валків переміщується по металу, що прокочується. Ця ділянка називається поясом деформації і визначається дугою АВ, по якій валок стикається з металом, що прокочується.

АВ називається дугою захоплення, а кут  $\alpha$ , утворений двома радіусами, проведеними з центра валка в точки А і В, – кутом захоплення, що при даному лінійному обтисненні можна визначити з рівняння:

$$(h_0 - h_1)/2 = R - R \cdot \cos \alpha; \cos \alpha = 1 - (h_0 - h_1)/2R.$$

$$\text{Довжина дуги захоплення } l_d = \pi R \alpha^\circ / 180.$$

При малих кутах захоплення ( $< 20^\circ$ ) дуга захоплення може дорівнювати хорді, і тоді рівняння прийме вид, більш зручний для практичного користування. Як видно з рис. 1.2  $\Delta ABC$  подібний  $\Delta ABE$ , отже,  $AB/BE = BE/AB$ , тоді  $(AB)^2 = BE \cdot BE$ , тобто

$$(AB)^2 = 2R(h_0 - h_1)/2 \text{ і } AB = \sqrt{(h_0 - h_1)},$$

а тому що  $h_0 - h_1 = \Delta h$ , то  $AB = l_d = \sqrt{R \Delta h}$ .

Процес прокатки забезпечується тертям між металом і валками. У момент захоплення металу з боку кожного валка будуть діяти на метал дві сили (без обліку інерційних сил): нормальна сила  $N$  і дотична сила тертя  $T$  (рис. 1.2). Для того, щоб відбулося втягування металу в зьов валків, необхідне дотримання умови  $2T_x > 2N_x$  чи  $T \cdot \cos \alpha > N \cdot \sin \alpha$ . При цій умові результуюча сила  $P$  буде спрямована у бік руху металу. Сила тертя  $T$  дорівнює нормальній силі  $N$ , помноженій на коефіцієнт тертя  $\mu$ , причому відношення сили тертя до нормальної сили дорівнює тангенсу кута тертя  $\rho$ , тобто  $T = \mu N$ ,  $T/N = \text{tg } \rho = \mu$ . Отже, умову захоплення можна переписати у вигляді  $2\mu N \cdot \cos \alpha > 2N \cdot \sin \alpha$ , чи  $\mu > \text{tg } \alpha$ , тобто  $\text{tg } \rho > \text{tg } \alpha$  і остаточно  $\rho > \alpha$ .



За рахунок обтиснення валками довжина металу, що прокочується, через сталість об'єму буде збільшуватися. Відношення довжини ( $l_1$ ) металу після виходу з валків до первісної довжини ( $l_0$ ) називається витяжкою:  $\lambda = l_1/l_0$ . Практично за один прохід  $\lambda = 1,1 - 1,6$ , але в деяких випадках  $\lambda \leq 3$ .

По висоті смуга також змінює свої розміри; позначимо коефіцієнт деформації по висоті або коефіцієнт зменшення висоти  $\gamma = h_1/h_0$ , коефіцієнт деформації по ширині або коефіцієнт розширення  $\beta = b_1/b_0$ .

Визначимо взаємозв'язок розглянутих коефіцієнтів деформації. З умови сталості об'єму можна записати:

$$V_0 = V_1 = h_0 b_0 l_0 = h_1 b_1 l_1 = \text{const.}$$

Позначимо площі поперечного перерізу штаби до і після прокатки відповідно  $F_0 = h_0 b_0$  і  $F_1 = h_1 b_1$ , тоді:

$$F_0 l_0 = F_1 l_1 \text{ чи } F_0/F_1 = l_1/l_0 = \lambda.$$

Отже, відношення площин поперечного перерізу штаби зворотно пропорційне довжинам.

З рівняння  $h_0 b_0 l_0 = h_1 b_1 l_1$  можна записати  $h_1/h_0 = b_0 l_0/b_1 l_1 = \gamma$  і  $b_1/b_0 = h_0 l_0/h_1 l_1 = \beta$ .

І, нарешті,  $h_1 b_1 l_1/h_0 b_0 l_0 = 1$  чи  $\lambda \gamma \beta = 1$ , тобто добуток коефіцієнтів деформації по висоті, ширині і довжині дорівнює одиниці. З останнього рівняння можна записати  $\lambda = 1/\gamma \beta$ . При прокатуванні в деяких випадках можна зневажати явищем розширення, тобто вважати  $b_0 = b_1$  і  $\beta = b_1/b_0 = 1$ , тоді:

$$\lambda = 1/\gamma \text{ чи } \lambda = h_0/h_1.$$

Витяжка в цьому випадку дорівнює зворотній величині коефіцієнта зменшення висоти і буде виражатися відношенням площин або відношенням відповідних висот.

Розглянемо поняття про зміщений об'єм і швидкість деформації. Для цього використовуємо основне рівняння закону сталості об'єму  $\lambda \gamma \beta = 1$ . Логарифмуючи останнє рівняння, одержимо  $\ln \gamma + \ln \beta + \ln \lambda = 0$ , тобто сума натуральних логарифмів коефіцієнтів деформації по всім трьох напрямках дорівнює нулю.

Геометричний зміст останнього рівняння полягає в тому, що зменшення висоти викликає збільшення довжини і ширини. Якщо зсув по висоті позначити мінусовим знаком (висота зменшується), а по довжині і ширині плюсовим (і та, і інша збільшуються), то алгебраїчна сума зсувів, узятих в усіх напрямках, буде дорівнювати нулю.

Зіставляючи ці міркування з нашим рівнянням, можна зробити висновок, що натуральний логарифм коефіцієнта деформації в будь-якому напрямку являє собою питомий зміщений об'єм у тому ж напрямі, а сума таких питомих обсягів, взятих в усіх напрямках, дорівнює нулю.

Для підтвердження розглянемо випадок стиску циліндра під молотом або пресом (рис.1.3).

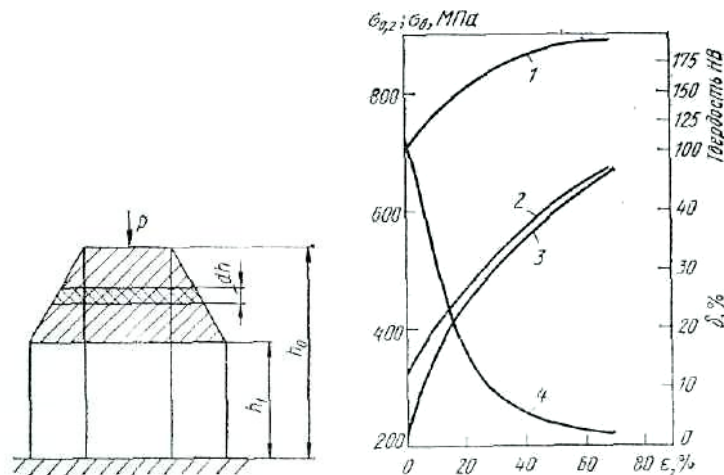


Рисунок 1.3 – Схема осаджування циліндра і залежність механічних властивостей вуглецевої сталі 08кп від ступеня деформації: 1– твердість HB; 2 –  $\sigma_B$ ; 3 –  $\sigma_{0,2}$ ; 4 –  $\delta$

При деформації циліндра на нескінченно малу величину  $dh$  зміщений об'єм буде  $dV_d = Fdh$  ( $F = V/h$  – площа перетину).

Зважаючи на те, що обсяг циліндра незмінний:  $V = \text{const}$ , то  $dV_d = V (dh/h)$ .

Інтегруючи останнє рівняння, одержимо:

$$V_d = \int V dh/h = V \cdot \ln h$$

Зважаючи на те, що  $h_0/h_1 = 1/\gamma$ , то повний зміщений об'єм можна виразити так:

$$V_d = V \cdot \ln(1/\gamma),$$

тоді питомий зміщений об'єм дорівнює:  $V_d/V = \ln(1/\gamma) = \ln \lambda$ .

Зміщений об'єм служить також і мірою швидкості деформації, під якою звично мається на увазі відношення питомого зміщеного об'єму до проміжку часу, протягом якого зміщується цей об'єм. Якщо позначити питомий зміщений об'єм через  $\ln \varepsilon$ , а час зсуву цього об'єму в секундах через  $\tau$ , то швидкість деформації можна виразити наступною формулою:

$$v_{\text{деф}} = \ln \varepsilon / \tau, \text{ с}^{-1}$$

У результаті холодного пластичного деформування утвориться волокниста структура, метал одержує стан наклепу. Його міцність і твердість підвищуються, а пластичність і в'язкість знижуються, тобто відбувається зміцнення (нагартування) і збільшення крихкості металу.

Для обробки тиском істотно те, що зі збільшенням ступеня пластичної деформації границя текучості зростає швидше, ніж тимчасовий опір; при цьому процес зміцнення найбільш інтенсивно протікає при ступені деформації приблизно до 30 % (рис. 1.3). При ступені деформації 80 – 90 % пластичність металу знижується настільки, що подальша обробка тиском стає скрутною і може призвести до руйнування. Властивості наклепаного металу відновлюються при його нагріванні.

При невисокому нагріванні відбуваються процеси повернення, що призводять до деякого зниження міцності і збільшення пластичності. Повне відновлення вихідних механічних властивостей металу відбувається в результаті рекристалізації – процесу утворення і росту нових зерен при нагріванні до  $t_{\text{рек}} = \alpha t_{\text{пл}}$  (де  $t_{\text{рек}}$  і  $t_{\text{пл}}$  – абсолютні температури початку рекристалізації і плавлення, К). Для вуглецевих сталей  $\alpha = 0,4$  і  $t_{\text{рек}} = 550 - 650$  °С. При утворенні великих зерен у процесі рекристалізації міцність і особливо пластичність металу знижуються. Величина зерна залежить

від багатьох факторів: температури, тривалості нагрівання, ступеня попередньої пластичної деформації і т.д.

Температуру нагрівання і величину деформації, при сполученні яких відбувається максимальний ріст зерен металу, називають критичними. Так, наприклад, для низько вуглецевої сталі критичний інтервал ступеня деформації складає приблизно 5 – 10 %.

У реальних умовах деформації в широкому інтервалі температур процеси знеміцнення можуть протікати одночасно з процесом зміцнення. В залежності від того, в якому ступені при деформуванні встигають протікати процеси знеміцнення, розрізняють: 1) холодну пластичну деформацію, якщо вона не супроводжується процесами вороття і рекристалізації, а ступінь зміцнення при деформуванні поступово зростає; 2) неповну холодну пластичну деформацію, при якій відбувається тільки процес вороття, ступінь зміцнення менше, ніж при холодній деформації; 3) неповну гарячу пластичну деформацію, при якій встигають пройти вороття і частково рекристалізація, причому ступінь зміцнення виявляється ще менше; 4) гарячу пластичну деформацію, при якій встигають пройти всі основні процеси знеміцнення – вороття і рекристалізація без помітного зміцнення деформованого тіла.

Для підрахунку зусиль гарячої деформації металів і їх сплавів необхідно знати величину дійсного опору деформації при відповідних температурах, швидкостях і ступенях деформації.

Дійсний опір деформації – напруга, обумовлена як відношення зусилля розтягання до площі дійсного поперечного переріза зразка в даний момент деформації.

Величину дійсного опору деформації визначають на спеціальних установках – пластометрах, що дозволяють одночасно вимірювати основні параметри: температуру, ступінь і швидкість деформації.

На рисунку 1.4 представлений графік зміни дійсного опору деформації в залежності від основних термомеханічних параметрів: температури, ступеня і швидкості деформації.

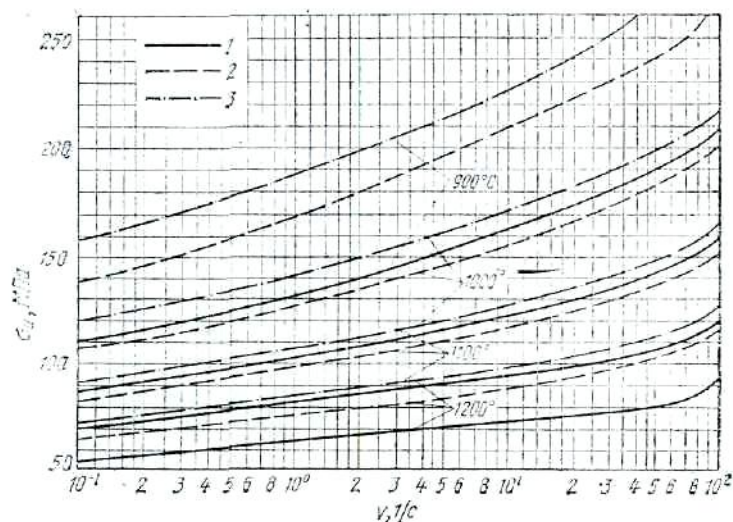


Рисунок 1.4 – Залежність дійсного опору деформації легованої сталі типу X18N9T від температури, ступеня і швидкості деформації: 1 –  $\varepsilon = 10\%$ ; 2 –  $20\%$ ; 3 –  $40\%$

## 1.2 Короткі відомості з теорії пластичної деформації металів

При будь-якому виді навантаження в матеріалі виникають нормальні і дотичні напруження.  $S_n = S_0 \cdot \cos^2 J$ ,  $\tau = 0,5 S_0 \cdot \sin 2J$

Площинки, по яким дотичні напруження не діють, називають головними площинками, а нормальні напруги, що діють по цим площинкам, – головними напруженнями.

Однак у більшості випадків матеріал піддається розтягання або стиску по двом чи трьом напрямкам, тобто знаходиться в складному напруженому стані. В теорії пружності показано, що в кожній точці будь-якого напруженого тіла можна провести три взаємно перпендикулярні головні площинки, через які передаються три головних нормальних напруги:  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ .

В кожній точці напруженого тіла можна виділити елементарний кубик, гранями якого служать головні площинки, по яким діють три взаємно перпендикулярні головні напруги.

В випадку простого розтягання (до утворення шийки на зразку) одна головна площинка в кожній точці перпендикулярна до осі стрижня, а дві інші паралельні цій осі. В цьому випадку тільки одна з трьох головних напружень не

дорівнює нулю і спрямована паралельно силі, що розтягує; такий напружений стан називається лінійним (Л).

Якщо матеріал піддається розтяганням або стиску по двом взаємно перпендикулярним площадкам, то такий випадок називається плоским напруженим станом (П).

Якщо ж усі три головні напруги не дорівнюють нулю в розглянутій точці, то має місце схема об'ємного напруженого стану (О).

На рисунку 1.5 показано дев'ять можливих схем напруженого стану. За допомогою таких схем напруженого стану визначається пластичність металу – його стан, що залежить не тільки від хімічного складу й інших внутрішніх факторів, але і від схеми напруженого стану, тобто від способу деформування.

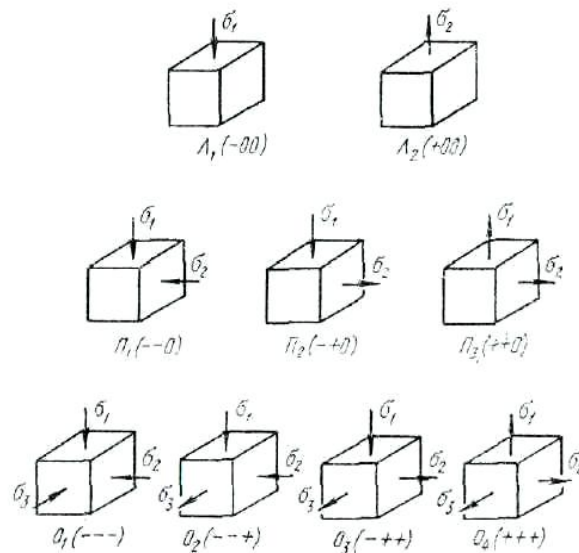


Рисунок 1.5 – Схеми напруженого стану

На рисунку 1.6 показані три основні схеми деформації. У першому випадку (схема D<sub>I</sub>) метал надходить в одному напрямку, а йде в двох напрямках.

В другому випадку (схема D<sub>II</sub>) метал надходить в одному напрямку, а йде в іншому. У третьому випадку (схема D<sub>III</sub>) метал надходить в двох напрямках, а йде в одному напрямку.

Всі ці три схеми взаємозалежні і при цьому можливий перехід від однієї схеми до іншої в процесі деформування. Зважаючи на те, що число схем

деформацій три, а схем напруженого стану дев'ять, то та сама схема деформації може бути здійснена при різних схемах напруженого стану.

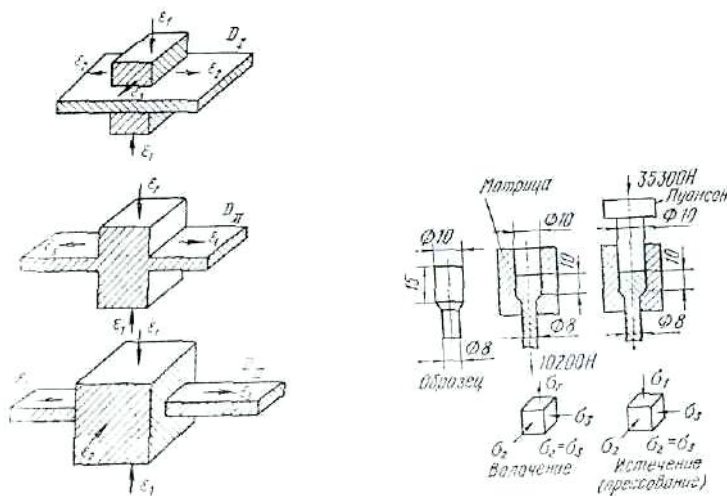


Рисунок 1.6 – Можливі схеми деформації і вплив напруженого стану на опір деформації (по С. І. Губкіну)

Прикладом використання схеми  $D_I$  може служити прокатка вузької штаби, прокатка ж широкої штаби проходить за схемою  $D_{II}$ . Характерним прикладом використання схеми  $D_{III}$  є протягання металу через вічко.

Пояснимо вплив різних схем напруженого стану при одній і той самій схемі деформації  $D_{III}$  дослідженням, проведеним С. І. Губкіним. Мідний зразок, показаний на рис. 1.6, закладали в матрицю і при розтяжному зусиллі 10 200 Н піддавали волочінню. Потім здійснювали пресування, збільшивши зусилля деформування, якщо це необхідно до 35300 Н. Безумовно, механічні властивості зразка при першому і другому навантаженнях не змінювалися, отже, опір деформації залежить від схеми напруженого стану.

Опір деформації залежить також від температури і швидкості деформації (рис. 1.4).

Для початку пластичної деформації зсувові напруги повинні досягти деякої величини, тому пластична деформація може відбуватися тільки в пружно деформованому тілі.

Теорія граничного стану встановлює залежність між границею текучості і напругами в металі при його пластичній деформації.

Існують чотири теорії граничного стану. Через те, що теорії найбільших нормальних напружень і найбільших деформацій застаріли, розглянемо лише третю і четверту теорії.

Відповідно до третьої теорії граничного стану, пластична деформація настає, коли різниця двох головних нормальних напружень досягає  $\sigma_T$  деформованого металу, тобто виконується умова пластичності:  $\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_T$ . Ця теорія не враховує впливу середньої головної нормальної напруги  $\sigma_2$ . Четверта, енергетична, теорія граничного стану розроблена Губером, Мізесом і Генкі.

Відповідно до цієї теорії, пластична деформація в тілі настає, коли потенційна енергія пружної деформації, спрямована на зміну форми тіла, а не об'єму, досягає визначеного значення.

Потенційна енергія пружної деформації:  $A = A_0 + A_\phi$  ( $A_0$  – потенційна енергія, яку необхідно накопичити в матеріалі для зміни його об'єму;  $A_\phi$  – потенційна енергія, яку необхідно накопичити в матеріалі для зміни форми тіла).

При об'ємній схемі деформування металу пружна деформація йде по трьом напрямкам, і повна потенційна енергія виражається рівнянням:

$$A = (\sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 + \sigma_3 \varepsilon_3)/2$$

Зважаючи на те, що відносні деформації за законом Гука дорівнюють:

$\varepsilon_1 = [\sigma_1 - \mu \cdot (\sigma_2 + \sigma_3)]/E$ ;  $\varepsilon_2 = [\sigma_2 - \mu \cdot (\sigma_1 + \sigma_3)]/E$ ;  $\varepsilon_3 = [\sigma_3 - \mu \cdot (\sigma_2 + \sigma_1)]/E$ , то повна потенційна енергія дорівнює:

$$A = [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu \cdot (\sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_2 \cdot \sigma_3 + \sigma_1 \cdot \sigma_3)]/(2E).$$

Коефіцієнт Пуассона для усіх відомих матеріалів:  $\mu = (\Delta b/b)/(\Delta l/l) \leq 0,5$ .

Збільшення об'єму тіла при пружній деформації дорівнює сумі деформацій у трьох взаємно перпендикулярних напрямках, тобто

$$\Delta V/V = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 1 - 2\mu \cdot ((\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/E).$$

Потенційна енергія зміни об'єму дорівнює половині добутку збільшення об'єму на середню напругу, тобто



$$A_0 = 0,5(\Delta V/V)(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3 = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 (1 - 2\mu)/(6E).$$

Користуючись розглянутими рівняннями, знаходимо питому потенційну енергію, спрямовану на зміну форми тіла:

$$A_\phi = A - A_0 = [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] (1 + \mu)/(6E).$$

На підставі численних досліджень встановлено, що питома потенційна енергія зміни форми при пластичній деформації є величиною постійною, що не залежить від схеми напруженого стану при деформації, тобто  $A_\phi = A_{\phi. \text{лін}}$ .

Таким чином, при лінійній схемі деформації, коли  $\sigma_2 = 0$  і  $\sigma_3 = 0$ , рівняння набуде вигляду:  $A_{\phi. \text{лін}} = 2\sigma_T^2(1 + \mu)/(6E)$ . І, отже, рівняння пластичності:  $(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_T^2 = \text{const}$ .

З формули зрозуміло, що сума квадратів різниць головних нормальних напружень при схемі об'ємної деформації (як і при будь-якій іншій схемі деформації) є величина постійна, що дорівнює подвоєному квадрату границі текучості матеріалу за даних умов деформації.

Порівняємо тепер третю і четверту теорії граничного стану. Для цього розглянемо рівняння пластичності для випадків  $\sigma_2 = \sigma_3$  і  $\sigma_2 = \sigma_1$ . В обох випадках одержимо, що  $\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_T$ , тобто в цих випадках третя і четверта теорії дають однаковий результат. Для випадку ж, коли  $\sigma_2 = (\sigma_1 + \sigma_3)/2$ , рівняння пластичності набуде вигляду:  $\sigma_1 - \sigma_3 = (2/\sqrt{3})\sigma_T = 1,15\sigma_T$ .

Таким чином, середня головна нормальна напруга впливає на граничний стан (не більше ніж на 15 %) і третя теорія граничного стану є частним випадком четвертої теорії при  $\sigma_2 = \sigma_3$  і  $\sigma_2 = \sigma_1$ .

Тому енергетичну теорію пластичності можна виразити більш простим рівнянням  $\sigma_1 - \sigma_3 = \beta\sigma_T$ .

Коефіцієнт  $\beta$  у залежності від значення  $\sigma_2$  змінюється від 1 до 1,15.

Рівняння пластичності має дуже велике значення при визначенні зусиль, які вимагаються в різних випадках обробки металів тиском, тому що усі форми для визначення зусиль виводяться з використанням рівняння пластичності.

## РОЗДІЛ 2. ОСНОВНІ ПОЛОЖЕННЯ МЕХАНІКИ СУЦІЛЬНИХ СЕРЕДОВИЩ

### 2.1 Вектори і тензори другого рангу

Введемо в тривимірному евклидовому просторі декартову систему  $Ox_1x_2x_3$ . Позначимо через  $\overset{p}{e}_1, \overset{p}{e}_2, \overset{p}{e}_3$  одиничні вектори (орти) цієї системи координат. Введемо математичний об'єкт у вигляді направленої відрізка  $\overset{p}{A}$  витікаючою з початку координат, який назвемо вектором. Підкреслимо, що  $\overset{p}{A}$  не залежить від напрямку координатних осей, тобто за визначенням, є інваріантним об'єктом.

Розкладемо вектор  $\overset{p}{A}$  по одиничних векторах  $\overset{p}{e}_1, \overset{p}{e}_2, \overset{p}{e}_3$ :

$$\overset{p}{A} = a_1 \overset{p}{e}_1 + a_2 \overset{p}{e}_2 + a_3 \overset{p}{e}_3 = \sum_{i=1}^3 a_i \overset{p}{e}_i. \quad (2.1)$$

Числа  $a_1, a_2, a_3$ , називаються компонентами вектора  $\overset{p}{A}$  в системі координат  $Ox_1x_2x_3$ , і повністю характеризують цей вектор.

Виконаємо тепер жорсткий поворот осей координат і дійдемо нової системи  $Ox'_1x'_2x'_3$  з одиничними векторами  $\overset{p}{e}'_1, \overset{p}{e}'_2, \overset{p}{e}'_3$ . Орти системи координат  $Ox_1x_2x_3$  і  $Ox'_1x'_2x'_3$  зв'язані лінійними співвідношеннями:

$$\overset{p}{e}'_j = \sum_{i=1}^3 \beta_{ij} \overset{p}{e}_i,$$

де  $\beta_{ij}$  - тензор направляючих косинусів між осями систем координат.

Представимо тепер вектор  $\overset{p}{A}$  у вигляді розкладання по одиничних векторах системи координат  $Ox'_1x'_2x'_3$ :

$$\overset{p}{A} = \sum_{j=1}^3 a'_j \overset{p}{e}'_j$$

Встановимо зв'язок між компонентами одного і того ж вектора в різних системах координат:

$$\overset{p}{A} = \sum_{j=1}^3 a'_j \left( \sum_{i=1}^3 \beta_{ij} \overset{p}{e}_i \right) = \sum_{i=1}^3 \left( \sum_{j=1}^3 \beta_{ij} a'_j \right) \overset{p}{e}_i = \sum_{i=1}^3 a_i \overset{p}{e}_i.$$

Звідси слідує

$$a_i = \sum_{j=1}^3 \beta_{ij} a'_j. \quad (2.2)$$

Виходячи від поняття вектора як наочного геометричного образу у вигляді направленого відрізка і розумітимемо під вектором  $\vec{A}$  впорядковану трійку чисел  $(a_1, a_2, a_3)$  пов'язану з певною системою координат. У системі координат  $Ox_1x_2x_3$  така трійка чисел має вигляд  $(a'_1, a'_2, a'_3)$ . Для того, щоб ці трійки чисел представляли один і той же об'єкт, необхідно, щоб координати  $(a_1, a_2, a_3)$  і  $(a'_1, a'_2, a'_3)$  були зв'язані співвідношенням (2.2). Визначимо тепер вектор  $\vec{A}$  як впорядковану трійку чисел  $(a_1, a_2, a_3)$  яка при повороті системи координат перетвориться згідно співвідношенням (2.2).

Узагальнимо таке розуміння вектора на інваріантні об'єкти, координати яких залежать від двох індексів. Такі об'єкти називаються тензорами 2-го рангу. Первинна трудність сприйняття поняття тензора пов'язана з тим що для тензора відсутній такий же наочний геометричний образ, як направлений відрізок для вектора.

Тензор 2-го рангу як математичний об'єкт задається набором з 9-ти чисел, званих компонентами тензора. Позначатимемо тензор через  $T$ , а його компоненти – через  $t_{ij}$ . Компоненти тензора впорядковані у вигляді таблиці:

$$\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix}.$$

Хай  $t'_{ij}$  - компоненти того ж тензора  $T$ , але в системі координат  $Ox'_1x'_2x'_3$ . Для того, щоб компоненти  $t_{ij}$  і  $t'_{ij}$  задавали один і той же об'єкт, необхідно, щоб ці компоненти були зв'язані співвідношеннями:

$$t_{ij} = \sum_{k=1}^3 \sum_{m=1}^3 \beta_{ki} \beta_{mj} t'_{km}. \quad (2.3)$$

Ця властивість і кладеться в основу формального визначення тензора, згідно якому тензором 2-го рангу називається набір з 9-ти чисел, впорядкованих у вигляді таблиці  $3 \times 3$ , які при повороті системи координат перетворюються згідно співвідношенням (2.3).

Для спрощення запису виразів, що містять компоненти векторів і тензорів, звичайно використовується правило підсумовування, запропоноване А. Ейнштейном: у тензорних виразах маєтся на увазі підсумовування по індексом, що повторюється, і знак суми опускається. Відповідно до цього правила, вираз (2.3) можна записати в спрощеній формі:

$$t_{ij} = \beta_{ki} \beta_{mj} t'_{km}.$$

Крім того, використовується спрощений запис приватних похідних по просторових змінних, тобто приймаються позначення:

$$f_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}; a_{i,j} = \frac{\partial a_i}{\partial x_j}; t_{ij,k} = \frac{\partial t_{ij}}{\partial x_k}.$$

Тензор  $T$  називається симетричним, якщо  $t_{ij} = t_{ji}$ . Введемо симетричний тензор Кронекера:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$

У теорії пластичних середовищ особливе значення має розкладання тензора 2-го рангу на кульовий тензор  $T_\sigma$  і девіатор  $T_d$ :

$$T = T_\sigma + T_d.$$

Позначимо через  $t = \frac{1}{2}(t_{11} + t_{22} + t_{33}) = \frac{1}{3}t_{ij}\delta_{ij}$ ; тоді кульовим тензором називається тензор:

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix},$$

а девіатором - тензор:

$$T_d = \begin{pmatrix} t_{11} - t & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} - t & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} - t \end{pmatrix}.$$

Вектори і тензори, як інваріантні об'єкти, володіють скалярними інваріантами, тобто певними комбінаціями компонент, що не змінюються при повороті системи координат. Вектор має один незалежний інваріант, як якого природно приймати довжину вектора, або, краще, квадрат довжини вектора:

$$I(\overset{\vee}{A}) = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2.$$

Тензор 2-го рангу має три незалежні інваріанти. При вивченні пластичної деформації особливе значення мають два перші інваріанти:

$$I_1(T) = t; I_3(T) = (t_{ij} - t\delta_{ij})(t_{ij} - t\delta_{ij})$$

В цілях зручності ці інваріанти звичайно уживаються з деякими коефіцієнтами.

## 2.2 Деформований стан

Якщо для опису суцільного середовища прийняти підхід Лагранжа, то деформований стан повністю описується вектором  $\bar{u} = (u_1, u_2, u_3)$  переміщень всіх матеріальних точок тіла. Позначимо через  $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$  координати матеріальної точки тіла в початковий момент процесу деформації, через  $y_i(\bar{x}, t)$  - координати тієї ж точки у момент часу  $t$ . Тоді вектор переміщення  $\bar{u}$  має координати:

$$u_i(\bar{x}, t) = y_i(\bar{x}, t) - x_i, \quad i = 1, 2, 3$$

Використання вектора  $\bar{u}(\bar{x}, t)$  як заходи деформованого стану не цілком розумно, оскільки при русі тіла як жорсткого цілого, тобто за відсутності деформації вектор  $\bar{u}(\bar{x}, t)$  відмінний від нуля. Тому для опису власне деформованого стану використовуються похідні від вектора характеристики:

$$\varepsilon_{ij}(\bar{x}, t) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i(\bar{x}, t)}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j(\bar{x}, t)}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial u_k(\bar{x}, t)}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial u_k(\bar{x}, t)}{\partial x_j} \quad (2.4)$$

При русі тіла як жорсткого цілого маємо  $\varepsilon_{ij}(\bar{x}, t) \equiv 0$ .

Показано, що величини  $\varepsilon_{ij}$  при повороті декартової системи координат перетворюються за законом перетворення компонент тензора 2-го рангу, тобто в

сукупності утворюють інваріантний об'єкт - тензор 2-го рангу, який називається тензором деформацій Лагранжа.

Співвідношення (2.4) вводяться без яких-небудь обмежень на величини деформацій і переміщень, і тому справедливі як у разі малих, так і у разі великих (кінцевих) деформацій. Відзначимо, що зв'язок між переміщеннями і деформаціями згідно (2.4) є *нелінійним*. Якщо вважати деформації малими і відкинути малі 2-го порядку, то приходимо до лінійних співвідношень Коші для компоненту тензора малих деформацій:

$$\varepsilon_{ij}(\bar{x}, t) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i(\bar{x}, t)}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j(\bar{x}, t)}{\partial x_i} \right)$$

Для характеристики темпу зміни деформації в часі в рамках підходу Лагранжа вводиться тензор швидкостей деформацій Лагранжа:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}(\bar{x}, t) = \frac{\partial \varepsilon_{ij}(\bar{x}, t)}{\partial t},$$

компоненти якого виражається через компоненти  $\dot{u}_i(\bar{x}, t)$  вектора швидкості переміщень матеріальної частинки співвідношеннями:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}(\bar{x}, t) = \frac{1}{2} (\dot{u}_{ij} + \dot{u}_{ji}) + \dot{u}_{ki} u_{kj} + u_{ki} \dot{u}_{kj}$$

*лінійними* щодо швидкостей переміщень.

При малих деформаціях маємо:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}(\bar{x}, t) = \frac{1}{2} (\dot{u}_{ij} + \dot{u}_{ji})$$

В рамках підходу Ейлера рух суцільного середовища однозначно визначається вектором швидкостей  $\bar{v}(\bar{x}, t)$  матеріальних крапок, які у момент часу  $t$  знаходяться в точках  $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$  простору. Поняття переміщення в підході Ейлера втрачає сенс.

Для того, щоб характеризувати чисто деформаційну частину руху суцільного середовища, вводиться поняття швидкості деформації Ейлера:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} (v_{ij} + v_{ji}) \quad (2.5)$$

Показано, що величини, можуть розглядатися як компоненти симетричного тензора 2-го рангу, який називається тензором швидкостей деформацій Ейлера (або просто тензором швидкостей деформацій).

Відзначимо, що зв'язок (2.5) між компонентами тензора швидкостей деформацій і вектора швидкості є лінійним і при великих деформаціях і переміщеннях. Підкреслимо також, що, не дивлячись на схожі назви, тензори  $\epsilon_{ij}$  і  $\zeta_{ij}$  мають абсолютно різний сенс. Зокрема, компоненти  $\zeta_{ij}$  не можна одержувати з  $\epsilon_{ij}$  шляхом диференціювання за часом.

Таким чином, деформація суцільних середовищ як при підході Лагранжа, так і при підході Ейлера характеризується інваріантними математичними об'єктами - векторами і тензорами 2-го рангу.

Представимо тензор деформацій у вигляді суми кульового тензора і девіатора:

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_0 \delta_{ij} + e_{ij}; \quad \epsilon_0 = \frac{1}{3} \epsilon_{ij} \delta_{ij}.$$

Кульовий тензор з компонентами  $\epsilon_0 \delta_{ij}$  характеризує деформацію зміни об'єму в околиці даної матеріальної крапки, а девіатор тензора деформацій з компонентами  $e_{ij}$  - деформацію зміни форми.

Аналогічно при використанні підходу Ейлера тензор швидкостей деформацій розбивається на суму кульового тензора і девіатора:

$$\zeta_{ij} = \zeta_0 \delta_{ij} + \eta_{ij}; \quad \zeta_0 = \frac{1}{3} \zeta_{ij} \delta_{ij}$$

При побудові моделей пластичного тіла використовуються два перші інваріанти тензорів деформації і тензорів швидкостей деформацій. Як перший (лінійного) інваріант звичайно приймається: середня деформація  $\epsilon_0$  - при підході Лагранжа; швидкість зміни об'єму  $\zeta_0$  - при підході Ейлера.

Другі (квадратичні) інваріанти найчастіше вибираються у вигляді інтенсивності деформацій:

$$\epsilon_u = \sqrt{\frac{2}{3} e_{ij} e_{ij}}$$

або інтенсивності деформацій зрушення:

$$\varepsilon_u = \Gamma = \sqrt{2e_{ij}e_{ij}}$$

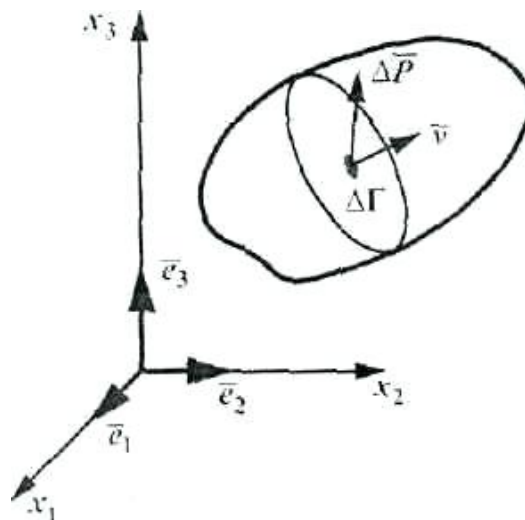
В рамках підходу Ейлера звичайно використовується, як другий інваріант, інтенсивність швидкостей деформацій зрушення:

$$\varsigma_u = H = \sqrt{2\varsigma_{ij}\varsigma_{ij}}$$

## 2.3 Напружений стан

Якщо тверде тіло піддати зовнішнім діям, то таке тіло, деформуючись, зберігає, в певних межах, свою цілісність і безперервність. Залишаючись в рамках концепції суцільного середовища, таке явище можна пояснити появою гіпотетичних *внутрішніх зусиль*, що виникають як реакція на деформацію і що забезпечують цілісність тіла. Вивчення природи таких внутрішніх зусиль лежить за межами моделі суцільного середовища і для побудови механіки тіла, що деформується, не є обов'язковим.

Введемо кількісні характеристики внутрішніх зусиль, використовуючи підхід Ейлера. У деякий момент часу  $t$  розітнемо деформоване тіло площиною, що проходить через крапку  $(x_1, x_2, x_3)$ . Орієнтацію такої площини задаватиме вектором одиничної нормалі (рис. 2.1).



Рисунрк 2.1 – Вектор напруг



Виділимо в перетині цієї щільністю деяку малу околицю  $\Gamma$  точки  $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$ , яку називатимемо майданчиком з нормаллю  $\bar{v}$  в крапці  $\bar{x}$ . Оскільки кожна з частин розітнутого тіла знаходиться в рівновазі, то це можна забезпечити введенням внутрішніх зусиль, що діють в точках площини розтину. Хай  $\Delta\vec{P}_v$  - вектор внутрішніх зусиль, прикладених до майданчика  $\Gamma$ . Щоби виключити вплив розмірів майданчика, розділимо силу, на площу  $\Gamma_0$ . Якщо така межа існує і не залежить від способу зменшення майданчика, то вектор

$$\vec{P}_v = \lim_{\Delta\Gamma \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{P}_v}{\Delta\Gamma}$$

називається *вектором напруг* в крапці  $\bar{x}$  на майданчику з нормаллю  $\bar{v}$ .

Якщо побудувати вектори напруг на всіх майданчиках, що проходять через фіксовану точку простору, то, очевидно, одержимо повну характеристику напруженого стану в цій крапці. Такий опис навряд чи можна вважати задовільним, оскільки в кожній крапці можна побудувати нескінченне число майданчиків, і, отже, для опису напруженого стану в крапці буде потрібно нескінченне число векторів напруг. Проте виявилось, що можна описати напружений стан в крапці, використовуючи тільки кінцеве число параметрів.

Побудуємо в точці  $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$  три взаємноперпендикулярні майданчики з нормаллями, паралельними координатним осям, тобто, співпадають по напрямку з ортами  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  системи координат. Позначимо через  $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3$ , вектори напруг на цих майданчиках. Розкладемо вектори  $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3$  по векторах базису  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ :

$$\begin{aligned} \vec{P}_1 &= \sigma_{11}\vec{e}_1 + \sigma_{12}\vec{e}_2 + \sigma_{13}\vec{e}_3, \\ \vec{P}_2 &= \sigma_{21}\vec{e}_1 + \sigma_{22}\vec{e}_2 + \sigma_{23}\vec{e}_3, \\ \vec{P}_3 &= \sigma_{31}\vec{e}_1 + \sigma_{32}\vec{e}_2 + \sigma_{33}\vec{e}_3 \end{aligned} \quad (2.6)$$

Коефіцієнти розкладання, впорядковані у вигляді таблиці

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix},$$

при повороті системи координат перетворюються за законом перетворення компонент тензора 2-го рангу. Цей тензор називається тензором напруг Ейлера.

Сенс введення тензора напруг як інваріантної характеристики напруженого стану пояснюється тим, що вектор напруг на *будь-якому* майданчику, що проходить через точку, може бути виражений через компоненти тензора напруг в цій точці. Насправді, проведемо через точку  $\bar{x}$  довільний майданчик з нормаллю  $\bar{v}$ . і хай  $\Delta\bar{P}_v$  - вектор напруг на цьому майданчику. Цей вектор можна виразити через вектори  $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3$ :

$$\Delta\bar{P}_v = \bar{P}_1 \cos(\bar{v}, x_1) + \bar{P}_2 \cos(\bar{v}, x_2) + \bar{P}_3 \cos(\bar{v}, x_3) = \bar{P}_i v_i$$

Підставляючи тепер замість, відповідні вирази згідно (2.6).

одержуємо: 
$$\Delta\bar{P}_v = \sigma_{ij} v_j \bar{e}_i.$$

Отже, для повного опису напруженого стану в точці досить мати в своєму розпорядженні лише дев'ять компонентів тензора напруг.

Компонентам тензора напруг можна додати наступний механічний сенс:  $\sigma_{ij}$  можна розглядати як проекцію на вісь  $x_j$  вектора напруг, що діє на майданчику з нормаллю  $\bar{e}_i$ . При  $i = j$  значення  $\sigma_{ij}$  називаються *нормальними*, а при  $ij$  - *дотичними* напругами (рис. 2.2).

Тензор напруг Ейлера характеризує напружений стан в поточному положенні тіла і представляється найбільш природною мірою напруженого стану.

Тензор напруг Лагранжа характеризує напружений стан в точці тіла по відношенню до майданчиків, узятих в початковому стані. Оскільки в процесі деформації змінюється як орієнтація, так і розміри майданчиків, то тензор напруг Лагранжа має умовний зміст і застосовується в основному у разі малих

деформацій, коли зміною розмірів і орієнтації майданчиків можна нехтувати і тензори напруг Ейлера і Лагранжа співпадають.

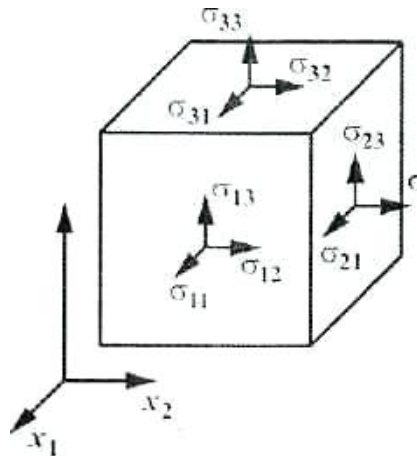


Рисунок 2.2 – Механічний сенс компонент тензора напруг

У теорії ОМТ у разі кінцевих деформацій використовуються, як правило, співвідношення Сен-Венана-Льові-Мізеса, у які входить повний вектор напруг Ейлера, і потреби в диференціюванні параметрів напруженого стану немає. При малій пружнопластичності деформаціях, в якості міри для швидкості зміни напруженого стану приймається тензор 2-го рангу, складений з похідних за часом від компонент тензора напруг Лагранжа.

Розкладемо тензор напруг Ейлера на кульову і девіаторну частини:

$$\sigma_{ij} = \sigma_0 \delta_{ij} + s_{ij}$$

Скалярна величина

$$\sigma_0 = \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})$$

називається середнім гідростатичним тиском і є лінійним інваріантом тензора напруг.

Як квадратичні інваріанти тензора напруг звичайно використовуються або інтенсивність напруг:

$$\sigma_u = \sqrt{\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij}},$$

або інтенсивність дотичних напруг:

$$\tau_u = T = \sqrt{\frac{1}{2} s_{ij} s_{ij}}$$

## РОЗДІЛ 3. ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ОБРОБКИ МЕТАЛІВ ТИСКОМ

### 3.1 Умови взаємодії заготовки і інструменту. Постановка краєвих задач

Пластична деформація при обробці тиском відбувається під дією валків, штампів, матриць і інших інструментів. Звичайно деформації інструменту малі в порівнянні з деформацією заготовок, тому вважаємо інструмент жорстким.

Відзначимо принципові особливості контактної взаємодії інструменту і заготовки. У більшості процесів обробки тиском фактичний майданчик контакту наперед невідомий і підлягає визначенню. Друга особливість пов'язана з наявністю тертя на майданчику фактичного контакту. Виникає проблема визначення областей зчеплення і областей ковзання; межа розділу цих областей наперед невідома і також є об'єктом рішення задачі. Крім того, умови взаємодії повинні відобразити напрям ковзання, яке не може бути визначене наперед. Нарешті, сили тертя є неконсервативними, тому рішення задачі залежить від історії руху штампу.

Коректне математичне формулювання умов контактної взаємодії повинне враховувати всі відмічені особливості і не пов'язувати постановку завдання з фіксацією певних майданчиків контакту, областей зчеплення і ковзання і т.п. Як наслідок таких загальних вимог виникають неklasичні умови, що містять нерівності [3].

Відмітимо, що в багатьох дослідженнях по комп'ютерному моделюванню в ОМТ вказані особливості явно не відображаються в краєвих умовах, а враховуються за допомогою ряду евристичних алгоритмів вже в процесі чисельного рішення. Крім очевидної логічної недосконалості такого підходу, виключається можливість якої-небудь теоретичної оцінки погрішності отриманих результатів, стає неможливим обґрунтування збіжності, а

відсутність чіткої початкової постановки може служити джерелом прямих помилок.

Розглянемо спочатку постановку умов контактної взаємодії в змінних Лагранжа. Виходимо з того, що майданчик контакту заготовки і інструменту наперед невідомий, проте у будь-якому випадку це майданчик є частиною  $\Gamma_c$  поверхні заготовки.

Називатимемо  $\Gamma_c$  областю можливого контакту.

Взаємодію інструменту і заготовки описуватимемо за допомогою векторів  $i$ , а переміщень і напруг, визначених в точках поверхні  $\Gamma_c$ . Хай  $v$  - вектор одиничної зовнішньої нормалі до поверхні  $\Gamma_c$ . Розкладемо вектори  $i$  і  $z$  на нормальні і дотичні компоненти:

$$uv = wv; \quad m\tau = i - uvv$$

$$GV = av; \quad c\tau = a - avv.$$

Взаємне положення інструменту і заготовки описуватимемо функцією  $\phi(x,\tau)$ , значення якої рівні відстані від поверхні  $\Gamma_c$  до поверхні інструменту, зміряній уздовж напрямку нормалі  $v$  і  $\Gamma_c$  у момент часу  $t$  (рис. 3.1).

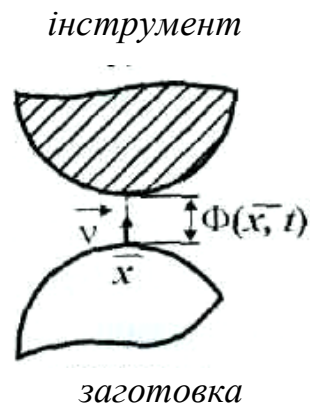


Рисунок 3.1 – Взаємодія інструменту і заготовки

Функція  $\Phi(x,t)$  може приймати і негативні значення, що відповідає зануренню інструменту в заготовку. Якщо в деякій точці  $x$   $\Gamma_c$  відбувається контакт заготовки і інструменту, то в цій точці  $uv(x,t) = \Phi(x,t)$ . Крім того, нормальні напруги  $v$  повинні бути такими, що стискають, тобто  $v(x,t) < 0$ . Якщо ж в точці  $x$  контакт відсутній, то  $uv(x,t) < \Phi(x,t)$ ,  $\sigma_v(x,t) = 0$ .

Запишемо одержані умови у формі, що не вимагає згадки про відсутність або наявність контакту в точці:

$$uv(x,t) < \Phi(x,t); \quad (3.1)$$

$$\sigma_v(x,t) \leq 0; \quad (3.2)$$

$$\sigma_v(x,t)[uv(x,t) - \Phi(x,t)] = 0. \quad (3.3)$$

Умова (3.2) називається умовою непроникнення. Умови (3.1) - (3.3) повинні бути виконані в усіх точках поверхні можливого контакту; при їх формулюванні немає необхідності указувати фактичні майданчики контакту.

Сформулюємо тепер умови, що накладаються на дотичні компоненти векторів переміщень і напруг.

Згідно закону Амонтона - Кулона, дотичні зусилля в точках контакту не повинні по модулю перевищувати величини  $f|\sigma_v(x,t)|$ , причому взаємне ковзання відбувається, якщо  $|\vec{\sigma}_\tau(x,t)| = f|\sigma(x,t)|$ , і ковзання відсутнє, якщо  $|\vec{\sigma}_\tau(x,t)| < f|\sigma(x,t)|$ . Числовий коефіцієнт  $f$  характеризує властивості контактуючих поверхонь і називається коефіцієнтом тертя. Окрім факту ковзання, умови дотичної взаємодії повинні також відображати напрям взаємного ковзання. Відразу підкреслимо, що напрям ковзання, взагалі кажучи, не співпадає з напрямом вектора переміщення. Напрямок ковзання слід пов'язувати з напрямом вектора швидкості взаємного ковзання.

Хай - різниця дотичних компонент швидкостей точки Гс і відповідної точки на поверхні інструменту. Напрямок взаємного ковзання визначає одиничний вектор, а напрям дотичного зусилля - одиничний вектор  $\frac{\mathcal{P}_\tau}{|\mathcal{P}_\tau|}$ . Приймаємо, що напрям взаємного ковзання протилежно напрямку дотичного зусилля, тобто:

$$\frac{\Delta u_\tau}{|\Delta u_\tau|} = -\frac{\mathcal{P}_\tau}{|\mathcal{P}_\tau|}.$$

Об'єднуючи сформульовані вимоги, приходимо до наступних умов дотичної взаємодії в точках поверхні Гс:

$$\sigma_v(x, t) \leq 0; \quad |\sigma_\tau^p(x, t)| \leq f|\sigma_v(x, t)| \quad (3.4)$$

$$\Delta \dot{u}_\tau^p(x, t) = 0 \quad \text{якщо } |\sigma_\tau^p(x, t)| < f|\sigma_v(x, t)| \quad (3.5)$$

$$\frac{\Delta \dot{u}_\tau^p(x, t)}{|\Delta \dot{u}_\tau^p(x, t)|} = -\frac{\sigma_\tau^p(x, t)}{|\sigma_\tau^p(x, t)|} \quad \text{якщо } |\sigma_\tau^p(x, t)| = f|\sigma_v(x, t)| \quad (3.6)$$

Підкреслимо, що при формулюванні умов (3.4) - (3.6) не вимагається ніякої інформації про фактичні майданчики зчеплення і ковзання.

Сформульовані умови контактної взаємодії описують всі відмічені вище особливості без яких-небудь апріорних припущень про характер рішення, зокрема, про фактичні майданчики контакту і фактичні майданчики зчеплення і ковзання.

Звернемо увагу на те, що умови містять нерівності, тобто мають некласичний характер. Умови дотичної взаємодії включають швидкості відносного ковзання, а не повні переміщення, причому ці співвідношення не є інтегрованими за часом. Цим пояснюється неконсервативний характер сил тертя. Заміна швидкостей повними переміщеннями можлива тільки за спеціальних умов зовнішнього вантаження, розглянутих [4].

Розглянемо тепер формулювання умов взаємодії металу і інструменту в змінних Ейлера. Виникаючі проблеми пов'язані з тим, що в "чистому" підході Ейлера поняття переміщення відсутнє. Тому безпосереднє переформулювання умов, одержаних раніше в змінних Лагранжа, неможливо. Ейлерове трактування завдання відноситься тільки до поточного стану жорстко-пластичного тіла і може бути послідовно проведена тільки для стаціонарних процесів формозміни без урахування зміцнення. В цьому випадку слід вважати, що майданчики фактичного контакту вже відомі, оскільки в рамках підходу Ейлера відсутній кінематичний критерій для визначення областей контакту і областей відставання.

Хай  $V_s(x,t)$  - вектор швидкостей точок поверхні інструменту. Умови нормальної взаємодії в точках майданчика контакту мають вигляд:

$$V_v(x,t) = (V_s)_v(x,t); \quad \sigma_v(x,t) \leq 0 \quad (3.7)$$

Позначимо через  $\Delta v_\tau^p(x,t)$  різницю дотичних компонент векторів швидкостей металу і інструменту в точках поверхні контакту. Виходячи із закону тертя Амонтона - Кулона, одержуємо наступні умови дотичної взаємодії:

$$|\sigma_\tau^p(x,t)| \leq f |\sigma_v(x,t)|, \\ \Delta v_\tau^p = 0, \text{ якщо } |\sigma_\tau^p(x,t)| < f |\sigma_v(x,t)| \quad (3.8)$$

$$\frac{\Delta v_\tau^p(x,t)}{|\Delta v_\tau^p(x,t)|} = - \frac{\sigma_\tau^p(x,t)}{|\sigma_\tau^p(x,t)|}, \text{ якщо } |\sigma_\tau^p(x,t)| = f |\sigma_v(x,t)| \quad (3.9)$$

У разі нестационарних процесів деформації тіла, що зміцнюється, дослідження пластичного тертя можливо тільки на основі з'єднання Ейлерового і Лагранжевого підходів. Звичайна схема реалізації такого з'єднання припускає розбиття процесу деформації на послідовні етапи, на кожному з яких відбувається переформулювання умов взаємодії в змінних Ейлера. Послідовна фіксація параметрів напружено-деформованого стану проводиться із застосуванням змінних Лагранжа. Інакше кажучи, на кожному етапі визначається форма області і поточний майданчик контакту, щодо яких і формулюються умови (3.7) - (3.9).

### *Краєві задачі пластичної деформації*

Сучасний етап розвитку комп'ютерного моделювання процесів ОМТ характеризується підвищеними вимогами до точності, достовірності, обґрунтованості одержуваних рішень. Вказані вимоги можуть бути виконані тільки з використанням коректних постановок відповідних математичних завдань. Розглянемо постановки завдання пластичної деформації як краєвих завдань для систем диференціальних рівнянь з приватними похідними. Далі, в



п. 3.2, будуть представлені так звані варіаційні постановки цих завдань, зручніші для побудови алгоритмів чисельного рішення.

Почнемо з постановок краєвих завдань в рамках підходу Лагранжа. Хай тіло, що деформується, займає в початковому недеформованому стані область, обмежену поверхнею  $\Gamma$ . Ця поверхня може складатися з трьох частин  $\Gamma_u$ ,  $\Gamma_\sigma$ ,  $\Gamma_s$ . На частини  $\Gamma_u$  точки тіла закріплені, частина  $\Gamma_\sigma$  вільна від навантажень. Взаємодія металу і інструменту може відбуватися в точках поверхні  $\Gamma_s$ . Хай компоненти тензорів напруг і деформацій зв'язані співвідношеннями деформаційного типу.

Сформуємо краєве завдання пластичної деформації як завдання визначення функцій  $u_i(x,t)$ ,  $\varepsilon_{ij}(x,t)$ ,  $\sigma_{ij}(x,t)$ , що задовольняють рівнянням рівноваги:

$$\sigma_{ij,j}(x,t) = 0; \quad (3.10)$$

співвідношенням Коші:

$$\varepsilon_{ij}(x,t) = \frac{1}{2} [u_{i,j}(x,t) + u_{j,i}(x,t)]; \quad (3.11)$$

визначальним співвідношенням:

$$\sigma_{ij}(x,t) = \frac{\partial W(x, \varepsilon_{ij}(x,t))}{\partial \varepsilon_{ij}}; \quad (3.12)$$

краєвою умовою:

$$\begin{aligned} u_i(x,t) &= 0 \text{ на } \Gamma_u; \\ \sigma_{ij}(x,t) \delta_{j(x)} &= 0 \text{ на } \Gamma_\sigma \end{aligned} \quad (3.13)$$

умовам (3.1) - (3.3) контактної взаємодії на  $\Gamma_s$ , а також початкових умовах  $u_i(x,0) = S_{ij}(x,0) = \sigma_{ij}(x,0) = 0$ .

Одержуємо краєве завдання визначення 15 функцій  $u_i(x,t)$ ,  $S_{ij}(x,t)$ ,  $\sigma_{ij}(x,t)$ , що задовольняють 15 рівнянням (3.10) - (3.12), краєвим умовам (3.1) - (3.3), (15.7) і початковим умовам.

Принципова трудність постановки завдань в рамках теорії пластичності диференціального типу пов'язана з колізією між неінтегрованих визначальних співвідношень і недиференціюванням умов у вигляді нерівностей.

Внаслідок цього постановка повинна містити, як характеристики напружено-деформованого стану, так і швидкості зміни цих характеристик.

Перейдемо від рівнянь рівноваги і співвідношень Коші, записаних відносних повних параметрів  $u_i$ ,  $S_{ij}$ ,  $\sigma_{ij}$  до їх аналогів, одержаних шляхом почленного диференціювання. Відмітимо, що умови, що містять нерівності, не допускають такого переходу. Щоб перейти до завдання в швидкостях, представимо переміщення, деформації і напругу в наступному вигляді:

$$\begin{aligned} u_i(x,t) &= \int_0^t \dot{u}_i(x,\tau) d\tau; \quad \varepsilon_{ij}(x,t) = \int_0^t \dot{\varepsilon}_{ij}(x,\tau) d\tau, \\ \sigma_{ij}(x,t) &= \int_0^t \dot{\sigma}_{ij}(x,\tau) d\tau \end{aligned} \quad (3.14)$$

Сформулюємо тепер завдання визначення напружено-деформованого стану як завдання визначення процесу зміни функцій,  $\dot{\varepsilon}_{ij}(x,t)$  в кожен момент часу тих, що задовольняють рівнянням рівноваги і співвідношенням Коші в диференціальній формі:

$$\dot{\varepsilon}_{ij,j}(x,t) = 0; \quad (3.15)$$

$$\dot{\varepsilon}_{ij}(x,t) = \frac{1}{2} [\dot{u}_{i,j}(x,t) + \dot{u}_{j,i}(x,t)]; \quad (3.16)$$

визначальним співвідношенням:

$$\dot{\sigma}_{ij} = A_{ijkl}(\dots) \dot{\varepsilon}_{kl}, \quad (3.17)$$

граничною умовою:

$$\begin{aligned} \dot{u}_i(x,t) &= 0 \text{ на } \Gamma_u \\ \dot{\sigma}_{ij}(x,t) v_j &= 0 \text{ на } \Gamma \end{aligned} \quad (3.18)$$

умовою контактної взаємодії – (3.1) – (3.6) з урахуванням співвідношень (3.14), а також початковою умовою:

$$u_i(x,0) = S_{ij}(x,0) = \sigma_{ij}(x,0) = 0.$$

Розглянемо, використовуючи підхід Ейлера, постановку завдання жорстко - пластичної течії. Хай  $\Omega$  - область простору, в якому відбувається пластичний перебіг металу. Напружено-деформований стан опишемо

вектором швидкостей  $v_i(x,t)$ , тензором швидкостей деформацій  $\xi_{ij}(x,t)$  тензором напруг  $\sigma_{ij}(x,t)$ .

Відповідне краєве завдання полягає у визначенні функцій  $v_i(x,t)$ ,  $\xi_{ij}(x,t)$ ,  $\sigma_{ij}(x,t)$ , що задовольняють рівнянням рівноваги:

$$\sigma_{ij,j}(x,t) = 0; \quad (3.19)$$

співвідношенням Коші - Стоксу:

$$\xi_{ij}(x,t) = \frac{1}{2} [v_{i,j}(x,t) + v_{j,i}(x,t)]; \quad (3.20)$$

співвідношенням Сен-Венана - Льові - Мізеса:

$$s_{ij}(x,t) = \frac{2F(\xi_u)}{\xi_u} \xi_{ij}(x,t); \quad (3.21)$$

краєвим умовам:

$$u_i(x,t) = 0 \text{ на } \Gamma_u; \quad (3.22)$$

умовам (3.7) - (3.9) взаємодії металу і інструменту.

Підкреслимо, що під областю  $\Omega$  розуміється область простору, в якій фактично відбувається пластична деформація. Ця область повинна бути відома до рішення задачі.

Представлені постановки краєвих завдань можуть бути використані як основа для дослідження пластичної деформації тільки в достатньо простих окремих випадках. Рішення складніших задач вимагає перетворення постановок завдань до інших форм, зручніших для цілей комп'ютерного моделювання, зокрема, до варіаційних формулювань.

### **3.2 Варіаційні формулювання краєвих задач обробки металів тиском**

#### *Поняття варіаційного принципу*

Розглянемо проблему дослідження формозміни металу з наступного. При заданій формі інструменту і заданих зусиллях логічно можливі різні форми перебігу металу. Проте фактично здійснюється лише одна певна картина течії.

Чим же дійсна картина течії відрізняється від інших варіантів течії, можливих, але що не реалізуються? Як найприродніше сформулювати критерій, згідно якому природа з безлічі можливостей вибирає один конкретний варіант?

Хай механічна система переходить з початкового стану  $A$  в кінцеве  $B$ . Можливий набір (множина)  $V$  можливих траєкторій  $v$  переходу із стану  $A$  в стан  $B$ , показаних на рис. 3.2 штриховими лініями, і існує єдина дійсна траєкторія  $i$  такого переходу (показана на рис. 3.2 суцільною лінією).



Рисунок 3.2 – Дійсні і можливі траєкторії

Один з критеріїв вибору дійсної траєкторії дає класичне формулювання у вигляді крайового завдання: тільки для дійсної траєкторії виконуються рівняння рівноваги, що визначають співвідношення, співвідношення Коші - Стоксу і крайові умови. Проте такий критерій залишає відчуття незадоволеності, оскільки не містить прямої відповіді на питання, чим же "краще" дійсна траєкторія в порівнянні зі всіма можливими.

Упевненість в гармонійному, якнайкращому пристрої привела до переконання, що дійсним процесом протікання природних явищ відповідає найменше значення деякої величини, наприклад, енергії. Вже в XVIII столітті було встановлено, що завдання механіки можна формулювати у вигляді варіаційного принципу.

Кожній траєкторії  $v$  з множини  $V$  зіставимо за певним правилом деяке число  $J(v)$ . Тоді говорять, що на більшості  $V$  заданий функціонал  $J(v)$ . Варіаційний принцип має наступну форму: існує такий функціонал  $J(v)$ , що визначений на безлічі можливих траєкторій і володіє тією властивістю, що

саме на дійсній траєкторії цей функціонал досягає свого найменшого значення. Для реальних механічних систем такий функціонал має конкретний механічний сенс.

Очевидно, що критерій вибору дійсної траєкторії у вигляді варіаційного принципу представляється глибшим і природнішим, чим критерій у вигляді краєвого завдання. Л. Ейлер писав: "Оскільки будівля всього світу абсолютно і зведено премудрим Творцем, то в світі не відбувається нічого, в чому б не було видно сенсу якогось максимуму або мінімуму". Додамо, що всесвітньо відомий курс теоретичної фізики Л.Д. Ландау і Е.М. Лівшица [5] заснований на застосуванні варіаційних принципів як початкових постулатів.

Відмітимо, що часто не вдається одержати варіаційний принцип в екстремальній формі; тоді використовується стаціонарна форма варіаційного принципу у вигляді рівності нулю першої варіації функціонала  $J(\&)$ .

Оскільки обидва вказані критерії, - і у вигляді краєвого завдання, і у вигляді варіаційного принципу, - дозволяють виділити дійсну траєкторію, то очевидно, що між обома критеріями повинен існувати певний зв'язок. Виявилось, що варіаційні принципи можуть бути формально-математичними методами одержані з постановок краєвих завдань. Навпаки, при деяких обмеженнях критерій у вигляді краєвого завдання витікає з відповідного варіаційного принципу. Всупереч поширеній помилці, обидва ці критерії не є еквівалентними: варіаційний принцип володіє більшою спільністю. На цій обставині ми зупинимося пізніше.

Після появи на початку ХХ століття фундаментальних робіт Д. Гильберта і В. Рітца виразно виявилася роль варіаційних принципів як принципової основи для побудови наближених методів рішення краєвих задач. Зокрема, виявилось, що саме варіаційні формулювання найбільш зручні для використання в сучасних методах комп'ютерного моделювання пластичного формозміни. Далі для основних класів визначальних співвідношень встановимо форму варіаційних постановок завдань і покажемо зв'язок між краєвими завданнями і варіаційними принципами.

*Варіаційні формулювання крайових задач для визначення співвідношень деформаційного типу*

На прикладі співвідношень деформаційного типу розглянемо типові прийоми отримання варіаційних формулювань, виходячи з постановок у вигляді крайових завдань. Встановимо також, що при додаткових обмеженнях з варіаційного принципу виходять співвідношення крайового завдання.

1. Одержимо дві форми варіаційного формулювання, виходячи із співвідношень крайового завдання. Хай  $u_i, S_{ij}$ ,  $ij \in$  рішенням крайової задачі, тобто задовольняють в області  $\Omega$  рівнянням рівноваги:

$$\sigma_{ij,j} = 0 \quad (3.23)$$

визначальним співвідношенням:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W(\epsilon_{km})}{\partial \epsilon_{ij}}, \quad (3.24)$$

співвідношенням Коші:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad (3.25)$$

а також крайовим умовам:

$u_i - U_i$  на частині  $\Gamma_u$  межі  $\Gamma$  області  $\Omega$ ;

$\sigma_{ij} n_j = S_i$  на частині  $\Gamma_\sigma$  межі  $P$ , що залишилася.

При виведенні варіаційних формулювань ключову роль грає формула Остроградського – Гауса. Хай область  $\Omega$  обмежена кусочно-гладкою поверхнею  $\Gamma$ , а функції  $P_i(x)$ , і їх приватні похідні,  $\frac{\partial P_i}{\partial x_j}$  безперервні в області  $\Omega$ . Тоді, згідно теоремі Остроградського-гауса, справедливо співвідношення:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial P_i}{\partial x_j} \delta \Omega = \int_{\Gamma} P_i v_j d\Gamma. \quad (3.26)$$

Формула Остроградського – Гауса дозволяє перетворити інтеграл, взятий по тривимірній області, в інтеграл, обчислений по поверхні цієї області, і навпаки.

Варіаційне формулювання містить три основні елементи: визначення безлічі допустимих функцій, введення функціонала, визначеного на цій множині, і твердження про екстремальну або стаціонарну властивість функціонала для дійсних функцій.

Введемо множину  $V$  - допустимі переміщення. Включимо в цю множину всі вектори  $u^*(x)$  переміщень, компоненти яких безперервні і мають безперервні приватні похідні, і крім того, задовольняють граничній умові на  $\Gamma$ . Будь-який елемент  $u^*$  множини  $V$  називатимемо можливим переміщенням, а відповідні згідно співвідношенням Коші величини

$$\varepsilon_{ij}^* = \frac{1}{2}(u_{i,j}^* + u_{j,i}^*)$$

називатимемо компонентами можливого тензора деформацій.

Оскільки для дійсних напруг  $\sigma_{ij}$  виконані умови рівноваги, то в кожній точці області  $\Omega$  справедлива рівність:

$$-\sigma_{ij,j}(u_i^* - u_i) = 0$$

Інтегруючи по області, одержуємо:

$$-\int_{\Omega} \sigma_{ij,j}(u_i^* - u_i) d\Omega = 0 \quad (3.27)$$

Перетворимо під інтегральний вираз за допомогою формули диференціювання твору:

$$\sigma_{ij,j}(u_i^* - u_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} [\sigma_{ij}(u_i^* - u_i)] - \sigma_{ij}(u_{i,j}^* - u_{i,j}).$$

Тоді (3.27) представляється у вигляді:

$$-\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} [\sigma_{ij}(u_i^* - u_i)] d\Omega = -\int_{\Gamma} \sigma_{ij}(u_{i,j}^* - u_{i,j}) d\Omega = 0 \quad (3.28)$$

Вважаючи  $P_j = \sigma_{ij}(u_i^* - u_i)$ , застосуємо формулу Остроградського-Гауса до першого інтеграла:

$$-\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} [\sigma_{ij} (u_i^* - u_i)] d\Omega = -\int_{\Gamma} \sigma_{ij} (u_{i,j}^* - u_{i,j}) v_j d\Gamma = 0$$

Оскільки тензор  $\sigma_{ij}$  є симетричним, то:

$$\sigma_{ij} (u_{i,j}^* - u_{i,j}) = \sigma_{ij} \left[ \frac{1}{2} (u_{i,j}^* + u_{i,j}^*) - \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{i,j}) \right] = \sigma_{ij} (\varepsilon_{ij}^* - \varepsilon_{ij})$$

Тоді рівність (3.28) приймає вигляд:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} (\varepsilon_{ij}^* - \varepsilon_{ij}) d\Omega - \int_{\Gamma} \sigma_{ij} v_j (u_i^* - u_i) d\Gamma = 0 \quad (3.29)$$

Враховуючи, що:

$$\Gamma = \Gamma_u + \Gamma_{\sigma}; \quad u_i^* = u_i \text{ на } \Gamma_u; \quad \sigma_{ij} n_j = S_i \text{ на } \Gamma$$

одержуємо:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} (\varepsilon_{ij}^* - \varepsilon_{ij}) d\Omega - \int_{\Gamma_{\sigma}} S_i (u_i^* - u_i) d\Gamma = 0$$

Виразимо  $\sigma_{ij}$  через компоненти дійсного тензора деформацій згідно визначальним співвідношенням і одержимо інтегральну рівність:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} (\varepsilon_{ij}^* - \varepsilon_{ij}) d\Omega - \int_{\Gamma_{\sigma}} S_i (u_i^* - u_i) d\Gamma = 0 \quad (3.30)$$

Одержана рівність справедливо для всіх допустимих переміщень і деформацій і називається *варіаційним рівнянням*. Сенс цього рівняння, одержаного як формальне слідство диференціальної постановки завдання, полягає в тому, що тільки для дійсних переміщень  $u_i$  і дійсних деформацій  $S_{ij}$  рівність (3.30) справедливо при всіх можливих переміщеннях  $u_i^*$  і відповідних можливих деформаціях  $\varepsilon_{ij}^*$ .

Покажемо, що завдання рішення варіаційного рівняння еквівалентне завданню мінімізації деякого функціонала на множині  $V$ . Істотну роль в подібних перетвореннях варіаційних рівнянь в екстремальні завдання грає одна властивість опуклих функцій. Нагадаємо, що функція  $f(z_1, z_2, \dots, z_n)$  називається опуклою, якщо для двох будь-яких наборів змінних  $(z_1^{(1)}, z_2^{(1)}, \dots, z_n^{(1)})$  і  $(z_1^{(2)}, z_2^{(2)}, \dots, z_n^{(2)})$  виконано нерівність



$$f\left[(1-\lambda)z_1^{(1)} + \lambda z_1^{(2)}, (1-\lambda)z_2^{(1)} + \lambda z_2^{(2)}, \dots, (1-\lambda)z_n^{(1)} + \lambda z_n^{(2)}\right] \leq \\ \leq (1-\lambda)f(z_1^{(1)}, z_2^{(1)}, \dots, z_n^{(1)}) + \lambda f(z_1^{(2)}, z_2^{(2)}, \dots, z_n^{(2)})$$

справедливе для всіх чисел  $\lambda \in [0, 1]$ .

Для опуклих функцій, що безперервно-диференціюються, справедливо нерівність

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial z_i} \Big|_{z_1=z_1^{(1)}, \dots, z_n=z_n^{(1)}} (z_i^{(2)} - z_i^{(1)}) \leq f(z_1^{(2)}, z_2^{(2)}, \dots, z_n^{(2)}) - f(z_1^{(1)}, z_2^{(1)}, \dots, z_n^{(1)}) \quad (3.31)$$

яке і використовується при переході до екстремального формулювання.

Візьмемо за функцію  $f$  функцію  $W(S_{ij})$  як функцію шести змінних. Для реальних матеріалів при малих деформаціях функція  $W(S_{ij})$  є опуклою. Нерівність (3.31) приймає вигляд:

$$\frac{\partial W(\varepsilon_{ij})}{\partial \varepsilon_{ij}} (\varepsilon_{ij}^* - \varepsilon_{ij}) \leq W(\varepsilon_{ij}^*) - W(\varepsilon_{ij}) \quad (3.32)$$

Замінюючи в (3.30)  $\frac{\partial W(\varepsilon_{ij})}{\partial \varepsilon_{ij}} (\varepsilon_{ij}^* - \varepsilon_{ij})$  згідно (3.32), одержуємо нерівність:

$$\int_{\Omega} W(\varepsilon_{ij}) d\Omega - \int_{\Gamma_{\sigma}} S_i u_i d\Gamma \leq \int_{\Omega} W(\varepsilon_{ij}^*) d\Omega - \int_{\Gamma_{\sigma}} S_i u_i^* d\Gamma. \quad (3.33)$$

Введемо функціонал:

$$J(u_i) = \int_{\Omega} W(\varepsilon_{ij}^*) d\Omega - \int_{\Gamma_{\sigma}} S_i u_i^* d\Gamma.$$

Нерівність (3.33) означає, що серед всіх переміщень  $u_i^*$  з допустимої множини  $V$  саме дійсним переміщенням відповідає найменше значення функціонала  $J(u_i^*)$ .

Сформулюємо тоді наступне екстремальне варіаційне завдання: знайти переміщення  $u_i \in V$ , що доставляє значення точної нижньої грані на множині  $V$  функціоналу  $J(u_i^*)$ , тобто:

$$J(u_i) = \inf J(u_i^*); \quad (3.34)$$

$$u_i^* \in V.$$

Таким чином, рішення задачі в диференціальній постановці (тобто у вигляді краєвого завдання) є рішенням екстремальної варіаційної задачі (3.34).

Зворотне твердження справедливо лише при додаткових припущеннях про властивості рішення екстремальної задачі.

Доведемо спочатку, що рішення екстремальної варіаційної задачі є рішенням варіаційного рівняння. Хай  $u_i^*$  - довільне допустиме переміщення. Очевидно, що переміщення  $w_i = u_i^* + t(u_i^* - u_i)$  при будь-якому числі  $t$  також буде допустимим. Зафіксуємо певну функцію  $u_i^*$ . Тоді функціонал на безлічі переміщень  $w_i$  - перетворюється на функцію однієї змінної:

$$J(u_i + t(u_i^* - u_i)) = F(t)$$

Оскільки при  $w_i = u_i$ , тобто при  $t = 0$ , функціонал приймає найменше значення, то для функції  $F(t)$  виконано необхідну умову екстремуму:

$$\left. \frac{\partial F}{\partial t} \right|_{t=0} = 0,$$

тобто:

$$\frac{d}{dt} \left\{ \int_{\Omega} W[\varepsilon_{ij} + t(\varepsilon_{ij}^* - \varepsilon_{ij})] d\Omega - \int_{\Gamma_{\sigma}} [u_i + t(u_i^* - u_i)] d\Gamma \right\} \Big|_{t=0} = 0$$

Виконавши диференціювання підінтегральних функцій, одержимо:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial W[\varepsilon_{ij} + t(\varepsilon_{ij}^* - \varepsilon_{ij})]}{\partial \varepsilon_{ij}} (\varepsilon_{ij}^* - \varepsilon_{ij}) d\Omega - \int S_i (u_i^* - u_i) d\Gamma = 0$$

Вважаючи  $t = 0$ , приходимо до варіаційного рівняння (3.30).

Отже, формулювання завдань у вигляді варіаційного рівняння і у вигляді екстремального варіаційного завдання *повністю еквівалентні*. Тому можна говорити про дві форми представлення одного і того ж варіаційного завдання.

Дамо тепер відповідь і на останнє питання: чи є рішення варіаційної задачі рішенням задачі в диференціальній постановці. Додатково припустимо, що рішення варіаційної задачі що двічі безперервно диференціюється в області  $\Omega$ .

Хай  $\varepsilon_i$  - компоненти довільного вектора переміщень, нульові значення, що безперервно диференціюються в області  $\Omega$  і приймаючі, на межі  $\Gamma$  області  $\Omega$ .

Покладемо  $u_i^* = u_i + \eta_i \in V$ . Тоді варіаційне рівняння (3.30) приймає вигляд:

$$\int_{\Omega} \frac{dW(\varepsilon_{ij})}{\varepsilon_{ij}} \left( \frac{\partial \eta_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \eta_j}{\partial x_i} \right) d\Omega = 0 \quad (3.35)$$

Застосовуючи формулу диференціювання твору, представимо підінтегральний вираз у вигляді

$$\int_{\Omega} \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} \left( \frac{\partial \eta_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \eta_j}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} \eta_i \right) - \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} \eta_j \right).$$

Застосовуючи формулу Остроградського-Гауса, який перетворений (3.35) до вигляду:

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} v_j u_i d\Gamma - \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} \right) \eta_j d\Omega = 0$$

Оскільки  $\eta_i \equiv 0$  на  $\Gamma$ , а  $\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}}$  то одержуємо рівність:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \eta_i d\Omega = 0 \quad (3.36)$$

Враховуючи, що  $\eta_i$  - довільні функції, укладаємо, що рівність (3.36) можливо лише при  $\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \equiv 0$  в області  $\Omega$ , тобто рішення варіаційного завдання задовольняє рівнянням рівноваги.

Залишається показати, що на  $\Gamma_{\sigma}$  виконані краєві умови в напругах. Знову введемо довільні функції  $\zeta_i$  визначені на  $\Gamma$  і дорівнюють нулю на  $\Gamma_u$ . З урахуванням вже доведеного рівняння рівноваги аналогічно перетворимо варіаційне рівняння до вигляду:

$$\int_{\Gamma_{\sigma}} (\sigma_{ij} v_j - S_i) \zeta_i d\Gamma = 0$$

і зважаючи на довільність  $\zeta_i$  одержуємо, що:

$$\sigma_{ij} v_j = S_i, \text{ на } \Gamma_{\sigma}$$

Отже, рішення варіаційної задачі є рішенням краєвої задачі лише при додатковому припущенні про існування безперервних других похідних. Тому говорять, що рішення варіаційної задачі є узагальненим рішенням краєвої задачі. Встановлений зв'язок між двома формами постановок дозволяє замінити рішення краєвої задачі рішенням відповідної варіаційної задачі.

### *Варіаційні нерівності*

Варіаційні завдання, розглянуті раніше, відповідають так званим класичним краєвим завданням, коли на фіксованій частині поверхні тіла задані змінні, а на тій, що залишилася - зусилля. Проте для обробки тиском типовою є деформація під дією інструменту. Як показано в п. 3.1, умови взаємодії заготовки з інструментом не можна описати тільки класичними краєвими умовами: у число умов на межі області входять ще і умови у вигляді нерівностей. Вивчення завдання з краєвими умовами у вигляді нерівностей почалося в 60-і роки ХХ сторіччя, причому найбільш ефективним виявився саме варіаційний підхід.

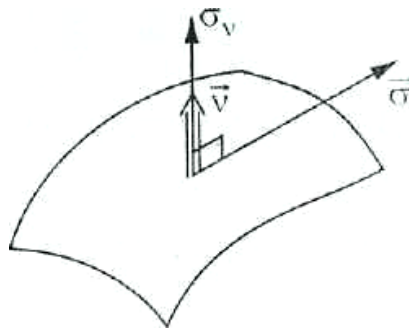


Рисунок 3.3 - Розкладання вектора напруги

Виявилось, що в подібних некласичних завданнях замість варіаційного рівняння з'являється варіаційна нерівність, тому весь клас завдань з краєвими умовами, що містять нерівності, одержав назву варіаційних нерівностей.

Спочатку для спрощення вважаємо, що тертя між заготовкою і інструментом відсутнє. Хай поверхня заготовки складається з трьох частин  $\Gamma_u$ ,

$\Gamma_\sigma, \Gamma_c$ . На частини  $\Gamma_u$  і  $\Gamma$  задані класичні краєві умови в переміщеннях і напругах відповідно. На частини  $\Gamma_c$  відбувається взаємодія заготовки з інструментом. Умови, така взаємодія, що описує, викладені в п. 3.1 Одержимо варіаційні формулювання для такого класу завдань. Введемо безліч допустимих переміщень, в яку включимо всі вектори переміщень, що задовольняють умові в переміщеннях на  $\Gamma_u$ , а також умові непроникнення на  $\Gamma_c$ :

$$u_v^* \leq \Phi \text{ на } \Gamma_c.$$

Оскільки інтегральна рівність (3.29) одержана без яких-небудь припущень про вид граничних умов, то скористаємося (3.29) і у разі некласичних умов контактної взаємодії. Представимо інтеграл його поверхні  $\Gamma$  у вигляді суми інтегралів по  $\Gamma_u, \Gamma_\sigma$  і  $\Gamma_c$ . Для елементів множини інтеграл по  $\Gamma_u$  звертається в нуль, а інтеграл по  $\Gamma$ , як і раніше, перетвориться до вигляду:

$$\int_{\Gamma_\sigma} S_i(u_i^* - u_i) d\Gamma$$

Зупинимося докладніше на інтегралі по  $\Gamma_c$ . Перетворимо заздалегідь підінтегральний вираз. Хай  $\nu$  - вектор одиничної зовнішньої нормалі до  $\Gamma_c$ . Розкладемо вектори переміщень і вектори зусиль на  $\Gamma_c$  на нормальні і дотичні складові:

$$u_v = u_i \nu_i; \quad u_v^* = u_v^* \nu_i; \quad \sigma_v = \sigma_{ij} \nu_j \nu_i; \quad \sigma_v^* = \sigma_v^* \nu_i$$

$$(u_\tau^*) = u_i^* - u_v^* \nu_i; \quad (\sigma_\tau^*)_i = \sigma_{ij} \nu_j - \sigma_v^* \nu_i$$

Тоді підінтегральний вираз перетвориться до вигляду:

$$\sigma_{ij} \nu_j (u_i^* - u_i) = \sigma_v (u_v^* - u_v) + (\sigma_\tau^*)_i ((u_\tau^*)_i - (u_\tau)_i)$$

Припущення про відсутність тертя означає, що  $(\sigma_\tau)_i = 0$ , тоді підінтегральний вираз приймає простіший вигляд:

$$\sigma_{ij} \nu_j (u_i^* - u_i) = \sigma_v (u_v^* - u_v).$$

Хай  $x \in \Gamma_c$  - довільна точка поверхні  $\Gamma_c$ . Можливі два варіанти: а) у точці  $x$  відбувається фактично контакт заготовки і інструменту; б) у точці  $x$  контакт відсутній.

У варіанті а) маємо:  $uv = \Phi; u_v^* = \Phi; \sigma_v = 0$ . Тоді:

$$\sigma_v(u_v^* - u_v) = \sigma_v(u_v^* - \Phi) \geq 0$$

У варіанті б) маємо  $\sigma_v = 0$ , і підінтегральний вираз дорівнює нулю. Отже, в усіх точках поверхні  $\Gamma_c$  виконується нерівність:

$$\sigma_v(u_v^* - u_v) \geq 0$$

Тоді, відкидаючи в інтегральній рівності інтеграл:

$$\int_{\Gamma_c} \sigma_v(u_v^* - u_v) d\Gamma \geq 0$$

приходимо до варіаційної нерівності:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} (\varepsilon_v^* - \varepsilon_v) d\Omega - \int_{\Gamma_c} S_i(u_i^* - u_i) d\Gamma \geq 0, \quad \forall u_i^* \in \tilde{V}. \quad (3.37)$$

Доведено [6], що таке варіаційна нерівність еквівалентно варіаційному завданню:

$$\inf J(u_i^*); \\ u_i^* \in \tilde{V}$$

З іншого боку, доведено [6], що рішення варіаційної нерівності є узагальненим рішенням крайової задачі з неklasичними крайовими умовами у вигляді нерівностей.

Одержимо варіаційні формулювання крайових завдань з урахуванням тертя на контактній поверхні. Відразу відмітимо, що сформульовані в п. 3.1 умови тертя, відповідні закону Амонтона-Кулона, не узгоджуються з визначальними співвідношеннями деформаційного тіла. Насправді, умови (3.4) - (3.6) формулюються щодо швидкостей переміщень, а визначальні співвідношення використовують повні деформації, і, отже, повні переміщення. У теорії пружності у зв'язку з такою ситуацією використовується заміна швидкостей в (3.5), (3.6) повними переміщеннями. Умови, при яких така заміна є законною, сформульовані [4]. Вважатимемо, що умови з [4] виконані, і використовуємо співвідношення закону тертя в наступному вигляді:

$$|\sigma_\tau(x, t)| \leq f |\sigma_v(x, t)|; \\ u_\tau^j(x, t) = 0, \text{ якщо } |\sigma_\tau(x, t)| < f |\sigma_v(x, t)|; \quad (3.38)$$

$$\frac{\Delta \rho_{\tau}^{\rho}(x, t)}{|\Delta \rho_{\tau}^{\rho}(x, t)|} = - \frac{\sigma_{\tau}(x, t)}{|\sigma_{\tau}(x, t)|} \text{ якщо } |\sigma_{\tau}(x, t) = f|\sigma_{\nu}(x, t)|$$

Представимо поверхню Гс можливого контакту у вигляді об'єднання поверхонь Гс(0), Гс(a), Гс(s). На частини Гс контакт заготовки і інструменту відсутній, на частини Гс(a) здійснюється зчеплення контактуючих поверхонь, а на частини Гс(5) відбувається взаємне ковзання.

Розглянемо вираз  $A_{\tau} = -\rho_{\tau}(\rho_{\tau}^* - \rho_{\tau}^i)$  на кожній з вказаних частин. Хай  $\rho_{\tau}^{(i)}$  - дотична складова переміщень точок контакту. Тоді А можна представити таким чином:

$$A_{\tau} = -\rho_{\tau}(\rho_{\tau}^* - \rho_{\tau}^{(i)} - (\rho_{\tau} - \rho_{\tau}^{(i)})) = -\rho_{\tau}(\Delta \rho_{\tau}^* - \Delta \rho_{\tau}^i),$$

де  $\Delta \rho_{\tau}^* = \rho_{\tau}^* - \rho_{\tau}^{(i)}$ ,  $\Delta \rho_{\tau}^i = \rho_{\tau} - \rho_{\tau}^{(i)}$  - відносні можливе і дійсне дотичні переміщення поверхні Гс і поверхні інструменту.

1. На частини Гс(0) маємо, і, отже:

$$A_{\tau} = 0.$$

2. На частини Гс(a) виконані умови:

$$\Delta \rho_{\tau}^i = 0, |\rho_{\tau}^i| < f|\sigma_{\nu}|.$$

Тоді:

$$\begin{aligned} A_{\tau} &= -\rho_{\tau}(\Delta \rho_{\tau}^* - \Delta \rho_{\tau}^i) = -\sigma_{\tau} \Delta \rho_{\tau}^* = |\rho_{\tau}| |\Delta \rho_{\tau}^*| \cos(-\rho_{\tau}^{\wedge}, \Delta \rho_{\tau}^*) \leq \\ &\leq |\rho_{\tau}| |\Delta \rho_{\tau}^*| = |\rho_{\tau}| (\Delta \rho_{\tau}^* - \Delta \rho_{\tau}^i) \leq f|\rho_{\tau}| (\Delta \rho_{\tau}^* - \Delta \rho_{\tau}^i). \end{aligned}$$

3. На частини Гс(s), згідно закону Амонтана - Кулона, справедлива рівність:

$$|\rho_{\tau}^i| = f|\rho_{\nu}^i|, \rho_{\tau}^i = -\frac{\rho_{\nu}^i}{|\rho_{\tau}^i|} \rho_{\tau}^i,$$

і, отже

$$\begin{aligned} A_{\tau} &= -\sigma_{\tau} \Delta \rho_{\tau}^* + -\sigma_{\tau} \Delta \rho_{\tau}^i = |\rho_{\tau}| |\Delta \rho_{\tau}^*| \cos(-\rho_{\tau}^{\wedge}, \Delta \rho_{\tau}^*) - |\Delta \rho_{\tau}^i| \frac{\rho_{\tau}^i \cdot \sigma_{\tau}}{|\rho_{\tau}^i|} \leq \\ &\leq |\rho_{\tau}| |\Delta \rho_{\tau}^*| - |\rho_{\tau}| |\Delta \rho_{\tau}^i| = |\rho_{\tau}| (|\Delta \rho_{\tau}^*| - |\Delta \rho_{\tau}^i|) = f|\sigma_{\nu}| (|\Delta \rho_{\tau}^*| - |\Delta \rho_{\tau}^i|). \end{aligned}$$

Таким чином, на всіх ділянках виконано нерівність:

$$A_\tau \leq f |\mathcal{P}_\tau| (|\Delta u_\tau^*| - |\Delta u_\tau^p|),$$

тобто:

$$-\int_{\Gamma_c} \mathcal{P}_\tau (\Delta u_\tau^* - \Delta u_\tau^p) d\Gamma \leq \int_{\Gamma_c} |\mathcal{P}_\tau| (|\Delta u_\tau^*| - |\Delta u_\tau^p|) d\Gamma.$$

Приходимо до наступної інтегральної нерівності:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} (\varepsilon_v^* - \varepsilon_v) d\Omega - \int_{\Gamma_c} S_i (u_i^* - u_i) d\Gamma + \int_{\Gamma_c} f |\mathcal{P}_\tau| (|\Delta u_\tau^*| - |\Delta u_\tau^p|) d\Gamma \geq 0 \quad \forall u^* \in \tilde{V}. \quad (3.39)$$

На відміну від варіаційної нерівності (3.37), одержана нерівність (3.39) не може бути перетворена до еквівалентного екстремального завдання.

Формальна причина полягає в тому, що вираз  $f |\mathcal{P}_\tau| (|\Delta u_\tau^*| - |\Delta u_\tau^p|)$  не може бути розбитий на різницю двох виразів, одне з яких залежить тільки від параметрів можливого стану, а друге - тільки від параметрів дійсного стану. Джерелом цього утруднення є неконсервативний характер сили тертя. Зважаючи на відсутність еквівалентного екстремального завдання нерівність (3.39) можна назвати квазіваріаційними.

Беручи до уваги переваги екстремальних формулювань, розглянемо ітераційний процес заміни квазіваріаційної нерівності (3.39) послідовністю варіаційних нерівностей, що мають еквівалентне формулювання у вигляді екстремального завдання.

Як нульове наближення приймається рішення варіаційної нерівності (3.37). Хай  $\sigma_v^{(0)}$  - відповідне розподіл нормальних контактних напруг;  $\sigma_v^{(0)}$  є відомою функцією координат точок поверхні  $\Gamma_c$ .

Далі знаходимо перше наближення, як рішення варіаційної нерівності:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} (\varepsilon_v^* - \varepsilon_v) d\Omega - \int_{\Gamma_\sigma} S_i (u_i^* - u_i) d\Gamma + \int_{\Gamma_c} f |\sigma_v^{(0)}| (|\Delta u_\tau^*| - |\Delta u_\tau^p|) d\Gamma \geq 0, \quad \forall u_i^* \in \tilde{V}.$$

Очевидно, така нерівність еквівалентно екстремальному завданню для функціонала:

$$J^{(1)}(\Delta u_i^*) = \int_{\Omega} W(\varepsilon_{ij}^*) d\Omega - \int_{\Gamma_\sigma} S_i u_i^* d\Gamma + \int_{\Gamma_c} f |\sigma_v^{(0)}| u_i^* d\Gamma.$$



На кроці ітераційного процесу визначається рішення варіаційної нерівності:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} (\varepsilon_{ij}^* - \varepsilon_{ij}) d\Omega - \int_{\Gamma_{\sigma}} S_i (u_i^* - u_i) d\Gamma + \int_{\Gamma_c} f |\sigma_v^{(p-1)}| (|\Delta u_{\tau}^{\rho*}| - |\Delta u_{\tau}^{\rho}|) d\Gamma \geq 0,$$

якому відповідає еквівалентне екстремальне завдання для функціонала:

$$J^{(p)}(\Delta u_i^*) = \int_{\Omega} W(\varepsilon_{ij}^*) d\Omega - \int_{\Gamma_{\sigma}} S_i u_i^* d\Omega + \int_{\Gamma_c} f |\sigma_v^{(p-1)}| |\Delta u_{\tau}^*| d\Gamma$$

Показано [3.7] що питання про збіжність такого ітераційного процесу еквівалентно питанню про існування рішення крайової задачі з тертям. Це принципове питання дотепер не знайшло повного дозволу. Проте практика чисельного рішення показує, що звичайно описаний ітераційний процес сходиться достатньо швидко.

Звернемо увагу на те, що із-за наявності  $|\Delta u_{\tau}^{\rho*}|$  в інтегралі по  $\Gamma_c$  функціонал  $J^{(p)}(u_i^*)$  є таким, що не диференціюється. Відомо, що не диференційованість функціонала може привести до явищ "заїдання" алгоритму оптимізації в неоптимальній крапці. Щоб виключити таку небажану можливість, можна рекомендувати заміну  $|\Delta_{\tau}^*|$  близьким, але таким, що диференціюється при  $u_{\tau}^* = 0$  виразом. Наприклад, покласти  $|\Delta u_{\tau}^{\rho*}| \approx \omega_{\varepsilon}(|\Delta u_{\tau}^{\rho*}|)$ , де:

$$\omega_{\varepsilon}(|\Delta u_{\tau}^{\rho*}|) = \begin{cases} |\Delta u_{\tau}^{\rho*}| - \frac{\varepsilon}{2}, & |\Delta u_{\tau}^{\rho*}| > 0, \\ \frac{1}{2\varepsilon} \Delta u_{\tau}^{\rho} \cdot \Delta u_{\tau}^{\rho}, & |\Delta u_{\tau}^{\rho*}| \leq \varepsilon, \end{cases}$$

значення  $\varepsilon > 0$  вибираються достатньо малими.

*Варіаційні формулювання крайових задач із застосуванням співвідношень диференціального типу*

У сучасних технологіях прецизійної обробки тиском пружна деформація сумісно з пластичним. Інша особливість таких технологій обумовлена істотно складним характером деформації. Зокрема, результат

обробки тиском може залежати від історії пружно пластичної деформації. Оскільки співвідношення деформованого типа зв'язують кінцеві значення напруг і деформацій, то застосування таких співвідношень виключає можливість урахування історії деформації. Тому як визначальні співвідношення при складному вантаженні доцільно використовувати співвідношеннях диференціального типа, які, принаймні, у принципі, здатні описувати вказану залежність від історії деформації.

Беручи до уваги істотну роль історії деформації, під рішенням задачі обробки тиском розуміємо весь процес зміни параметрів напружено деформованою стани, тобто об'єктами рішення є функції:  $u_i(x,t)$ ,  $S_{ij}(x,t)$ ,  $\sigma_{ij}(x,t)$ ,  $t \in [0, T]$ , де  $T$  - повний час деформації.

Хай тіло  $\Omega$  обмежене поверхнею  $\Gamma$ , що складається з трьох частин  $\Gamma_u$ ,  $\Gamma_\sigma$ ,  $\Gamma_s$ . На частини  $\Gamma_u$  тіло закріплене, на частини  $\Gamma_\sigma$  вільно від навантажень, а частина  $\Gamma_s$  піддається дійсно інструменту. Взаємодія заготовки і інструменту описується співвідношеннями (3.38). Процес деформації визначається законом руху інструменту в процесі обробки.

Звернемо тепер увагу на те, що умови контактної взаємодії сформульовані щодо повних переміщень і напруг, а що визначають співвідношення - щодо швидкостей деформацій і швидкостей зміни напруг. Шляхом диференціювання за часом можна також записати в швидкостях рівняння рівноваги і співвідношення Коші:

$$\dot{\varepsilon}_{y,j} = 0; \dot{\varepsilon}_{y,j} = \frac{1}{2}(\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i}).$$

Проте повний перехід до завдання в швидкостях неможливий, оскільки умови контактної взаємодії містять нерівності, які не можна почленно диференціювати. Це створює додаткові труднощі при побудові варіаційних формулювань.

Обмежуючись на початку випадком відсутності тертя, побудуємо припустиму множину  $V^*$ , до якої віднесемо всі процеси  $\dot{u}^*(x,t)$  зміни

швидкостей переміщення, що задовольняє в кожен момент часу  $t \in [0, T]$  наступним вимогам:  $\dot{u}_\Gamma(x, t) = 0$  на  $\Gamma_u$ ;

$$\int_0^1 \dot{u}_\Gamma(x, t) d\tau \leq \Phi(x, t) \quad (3.40)$$

$$\dot{u}_\Gamma(x, t) = \Phi(x, t) \text{ якщо } \sigma_\nu(x, t) < 0 \text{ на } \Gamma_c$$

Показано [8], що якщо  $\dot{u}_\Gamma(x, t)$ ,  $\dot{\varepsilon}_y(x, t)$  - дійсні швидкості зміни переміщень і деформацій, то для всіх допустимих процесів  $\dot{u}_\Gamma(x, t) \in \mathcal{V}$  виконується інтегральна рівність:

$$\int_0^T \left\{ \int_{\Omega} A_{ikm} \varepsilon_{km} (\varepsilon_{ij}^* - \varepsilon_{ij}) d\Omega \right\} dt = 0 \quad (3.41)$$

Зворотне твердження справедливо в наступному формулюванні: рішення рівняння (3.41), що володіє безперервним другим приватним похідним по просторових змінних і відповідні швидкості викладу деформацій  $\dot{\varepsilon}_y(x, t)$  і напруг  $\dot{\sigma}_y(x, t)$  задовольняють всім співвідношенням в початковій (диференціальній) постановці.

Звернемо увагу на одну особливість представленого формулювання: визначення допустимої множини  $\mathcal{V}$  використовує шукану напругу  $\sigma_{ij}(x, t)$ . Тому рівнянню (3.41) не можна зіставити еквівалентне екстремальне завдання, а саме рівняння природно назвати квазіваріаційним.

У роботі [8] запропонований підхід до дослідження і чисельного рішення квазіваріаційної рівності і нерівностей такого вигляду, що полягає в попередній напівдискретизації за часом. Це дозволило звести завдання до послідовності варіаційних рівнянь, відповідних вузловим моментам часу і, отже, до послідовності екстремальних варіаційних завдань.

Одержавши  $\dot{u}_\Gamma(x, t)$ ,  $\dot{\varepsilon}_y(x, t)$ ,  $\dot{\sigma}_y(x, t)$  як рішення варіаційного рівняння (3.41), неважко побудувати шукані процеси зміни параметрів напружено-деформованого стану:

$$u_i(x, t) = \int_0^t \dot{u}_i(x, \tau) d\tau; \quad \varepsilon_{ij}(x, t) = \int_0^t \dot{\varepsilon}_{ij}(x, \tau) d\tau; \quad \sigma_{ij}(x, t) = \int_0^t \dot{\sigma}_{ij}(x, \tau) d\tau.$$

Викладемо варіаційне формулювання в припущенні, що тертя на поверхні контакту заготовки і інструменту можна описати співвідношеннями закону Ломтона - Кулона. Виділимо в множині  $V_f$  підмножину, додатково зажадавши, щоб допустимі процеси зміни швидкостей переміщень задовольняли умовам:

$$\Delta \dot{u}_i^*(x, t) = 0 \text{ якщо } \sigma_v(x, t) < 0 \text{ або } |\dot{\sigma}_\tau(x, t)| < f |\sigma_v(x, t)|;$$

$$\frac{\Delta \dot{u}_i^*(x, t)}{|\dot{\sigma}_\tau(x, t)|} = - \frac{\dot{\sigma}_\tau(x, t)}{|\dot{\sigma}_\tau(x, t)|} \text{ якщо } \sigma_v(x, t) < 0 \text{ або } |\dot{\sigma}_\tau(x, t)| = f |\sigma_v(x, t)|$$

Тоді, як показано [7] серед всіх допустимих процесів зміни швидкостей переміщень  $\dot{u}_i^*(x, t) \in V_f$ , тільки для дійсних процесів зміни переміщень  $u_i^*(x, t)$  виконано квазіваріаційне рівняння вигляду:

$$\int_0^T \left\{ \int_{\Omega} A_{ijk}(\dots) \dot{\varepsilon}_{km}^* (\varepsilon_{ij}^* - \varepsilon_{ij}) d\Omega + \int_{\Gamma_c} \frac{d}{dt} \left\{ f |\sigma_v| \left( |\Delta \dot{u}_i^*| - |\dot{\sigma}_\tau| d\Gamma \right) \right\} \right\} = 0, \quad (3.42)$$

справедливе для всіх  $\dot{u}_i^*(x, t)$  з множини  $V_f$ .

У [7] запропонований прийом напівдискретизації, що зводить завдання рішення нерівності (3.42) до послідовності завдань рішення варіаційної рівності, відповідної вузловим моментам часу.

### *Варіаційні постановки крайових задач для жорстко-пластичних тіл*

Для більшості процесів обробки тиском характерно розвинена пластична деформація; при цьому частка пружних деформацій нікчемно мала. Це дає підставу відкинути взагалі пружні деформації. З одного боку, таке допущення приводить до певного спрощення завдання, зокрема, дозволяє використовувати Ейлеров підхід і розглядати деформацію як перебіг металу. Проте, з іншого боку, оскільки зміна об'єму зв'язується з пружною деформацією і напругою всестороннього стиснення, то подібне допущення створює проблеми іншого

роду, які набувають гострої форми при побудові варіаційних формулювань і подальшому чисельному рішенню задач.

Проте величезні труднощі рішення задач ОМТ при великих пружно-пластичних деформаціях вимушують звертатися до схеми жорстко-пластичної течії. Слід визнати, що більшість розроблених і ефективно працюючих варіантів комп'ютерного моделювання в ОМТ заснована саме на варіаційних формулюваннях завдань жорстко-пластичної течії. Використовується звичайно або варіаційне формулювання в швидкостях (принцип Лагранжа), або змішане формулювання щодо швидкостей і середнього гідростатичного тиску. Вкажемо прийоми отримання цих формулювань і звернемо увагу на переваги і недоліки кожного з двох альтернативних підходів.

Вважатимемо, що пластична деформація відбувається у області простору, і ця область відома до рішення задачі. Дане припущення є істотним, оскільки виділення областей пластичної деформації і жорстких зон є окремою серйозною проблемою. Хай область  $\Omega$  обмежена поверхнею  $\Gamma$ , що складається з трьох частин  $\Gamma_u$ ,  $\Gamma_\sigma$ ,  $\Gamma_c$ . На частини  $\Gamma_c$  швидкості дорівнюють нулю, частина  $\Gamma_\sigma$  вільна від навантажень, а на частини  $\Gamma_c$  відбувається взаємодія з інструментом. Вважаємо, що фактичний майданчик контакту в даний момент співпадає з  $\Gamma_c$ . Напружено-деформований стан характеризуватимемо Ейлеровими змінними:

$$\xi_{ij}(x,t) = \frac{1}{2} [v_{i,j}(x,t) + v_{j,i}(x,t)].$$

Під  $x$  розуміються точки області  $\Omega$ .

Дотичну взаємодію описуємо співвідношеннями закону тертя Амонтона - Кулона. Позначимо через  $w_v$  нормальну компоненту швидкості інструменту в даній точці поверхні контакту, а через  $\Delta v_\tau^p = v_\tau^p - w_\tau^p$  - різниця дотичних компонент швидкостей заготовки та інструменту в точках контактної поверхні. Умови контактної взаємодії приймають вигляд:

$$v_v = w_v; |\sigma_\tau^p| \leq f |\sigma_v|,$$

причому:  $\Delta v_\tau^p = 0$  якщо  $|\sigma_\tau^p| < f |\sigma_v|$ ;

$$\frac{\Delta \rho_\tau}{|\Delta \rho_\tau|} = -\frac{\sigma_\tau}{|\sigma_\tau|} \text{ якщо } |\rho_\tau| = f|\sigma_\tau|.$$

Вкажемо підхід до отримання варіаційних формулювань типу Лагранжа. Введемо допустиму множину  $V_f$  полів швидкостей, в яке включимо всі безперервні і функції, що безперервно диференціюються по просторових змінних  $v_i^*(x, t)$ , задовольняють умові:

$$\epsilon_i = 0 \text{ на } \Gamma_u$$

умові не проникнення на  $\Gamma_c$ :

$$V_v^* = wv \text{ на } \Gamma_c$$

а також умові нестискуваної:

$$\text{div}(v^*) = \xi_{ij}^* \delta_{ij} = 0,$$

$$\text{де } \xi_{ij}^* = \frac{1}{2} [v_{i,j}^* + v_{j,i}^*].$$

Хай  $\sigma_{ij}(x, t)$  - дійсні напруги. Це, зокрема означає, що у всій області  $\Omega$  виконані рівняння рівноваги, тобто:  $-\sigma_{ij,j} \equiv 0$ .

Умножаючи на  $v^* - v$ , і інтегруючи по області  $\Omega$  одержуємо:

$$-\int_{\Omega} \sigma_{ij,j} (v_i^* - v_i) d\Omega = 0$$

Використовуючи ті ж прийоми, що і при отриманні варіаційного формулювання в рамках деформаційної теорії, приходимо до інтегральної рівності:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} (\xi_{ij}^* - \xi_{ij}) d\Omega - \int_{\Gamma} \sigma_{ij} v_j (v_i^* - v_i) d\Gamma = 0 \quad (3.43)$$

Представимо  $ij$  у вигляді суми кульового тензора і девиатора:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{0ij} \delta + s_{ij}$$

$$\text{тоді: } (s_{ij} + \sigma_{0ij} \delta) (\xi_{ij}^* - \xi_{ij}) = s_{ij} (\xi_{ij}^* \delta_{ij} - \xi_{ij} \delta_{ij}) = s_{ij} (\xi_{ij}^* - \xi_{ij}).$$

Застосовуючи визначальні співвідношення, одержуємо, що:

$$s_{ij}(\xi_{ij}^* - \xi_{ij}) = \frac{2F}{\xi_u} \xi_{ij}(\xi_{ij}^* - \xi_{ij}).$$

Розбиваємо інтеграл по  $\Gamma$  на суму інтегралів по  $\Gamma_u$ ,  $\Gamma_\sigma$ ,  $\Gamma_c$ . Очевидно, що інтеграли по  $\Gamma_u$  і  $\Gamma_\sigma$  дорівнює нулю.

Підінтегрований вираз в інтегралі по  $\Gamma_c$  перетвориться до вигляду:

$$\sigma_{ij} v_i (v_i^* - v_i) = f |\sigma_v| (|\Delta v_\tau^*| - |\Delta v_\tau|) d\Gamma,$$

тоді (3.43) приводиться до наступного квазіваріаційного рівняння:

$$\int_{\Omega} \frac{2F}{\xi_u} \xi_{ij} (\xi_{ij}^* - \xi_{ij}) d\Omega + \int_{\Gamma_c} f |\sigma_v| (|\Delta v_\tau^*| - |\Delta v_\tau|) d\Gamma = 0 \quad (3.44)$$

Очевидно, що рівнянню (3.44) не можна зіставити еквівалентні екстремальні завдання. Щоб дістати можливість переходу до екстремального завдання, застосуємо ітераційною процес, аналогічний описаному раніше. На кроці такого ітераційного процесу розглядається рішення варіаційного рівняння:

$$\int_{\Omega} \frac{2F}{\xi_u} \xi_{ij} (\xi_{ij}^* - \xi_{ij}) d\Omega + \int_{\Gamma_c} f |\sigma_v^{(p-1)}| (|\Delta v_\tau^*| - |\Delta v_\tau|) d\Gamma = 0,$$

у якому  $\sigma_v^{(p-1)}$  розуміється відома функція координат, одержана на попередньому кроці ітераційного процесу.

Перейдемо до еквівалентного екстремального завдання. Введемо питому потужність деформації:

$$P(\xi_{ij}^*) = \int_0^{\xi_{ij}^*} s_{ij} d\xi_{ij} = \int_0^{\xi_{ij}^*} \frac{2F}{\xi_u} \xi_{ij} d\xi_{ij}.$$

Вважаємо  $P(\xi_{ij}^*)$  опуклою функцією шести змінних  $\xi_{ij}$ . Так само, як раніше, використовуючи властивості опуклості, приходимо до наступного екстремального формулювання: серед всіх допустимих смуг швидкостей  $v_i^*(x, t) \in V_f$  тільки для дійсних полів швидкостей функціонал

$$J^{(p)}(v_i^*) = \int_{\Omega} P(\xi_{ij}^*) d\Omega + \int_{\Gamma_c} f |\sigma_v^{(p-1)}| |\Delta v_\tau^*| d\Gamma$$

приймає найменше значення на безлічі  $V_f$ .

Одержане варіаційне формулювання формально близьке до варіаційного формулювання в рамках теорій деформаційного типу, з одним, але дуже істотною відмінністю: можливі поля швидкостей повинні ще задовольняти умові нестискуваної в усіх точках області  $\Omega$ . Така вимога за своєю природою принципова відрізняється від кінематичних умов на межі. Задовольнити апріорі умові нестискуваної, як правило, не вдається. Інша проблема полягає в тому, що, використовуючи знайдене поле швидкостей, за допомогою співвідношень Сен-Венана - Льові-Мізеса можна одержати тільки девиаторную частину тензора напруг. Звичайні рекомендації використовувати інтеграцію рівнянь рівноваги часто нездійснимі через відсутність початкових значень напруг на межі області пластичної течії.

Беручи до уваги привабливу сторону варіаційного формулювання типу Лагранжа – її екстремальний характер, розглянемо підхід, ідея якого полягає в тому, щоб виключити вимогу нестискуваної з визначення допустимої множини. Суть підходу запозичення з теорії умовної оптимізації і заснована на ідеї методу штрафних функцій.

Очевидно, що  $(div v^p)^2 \geq 0$ , причому рівність можливо тоді і тільки тоді, коли в даній точці виконано умову нестискуваної. Поширюючи цей висновок на всі точки області  $\Omega$ , приходимо до інтегральної нерівності:

$$\int_{\Omega} (div v^p)^2 d\Omega \geq 0$$

Рівність досягається тоді і тільки тоді, коли в усіх точках області  $\Omega$  виконано умова нестискуваної. Складемо допоміжний функціонал:

$$\int_{\Omega} \Pi(\xi_{ij}^*) d\Omega + \int_{\Gamma_c} f |\sigma_v^{(p-1)}| |\Delta v_{\tau}^p| d\Gamma + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} (div v^p)^2 d\Omega$$

Числовий параметр  $\frac{1}{\varepsilon} > 0$  має сенс штрафного тарифу за порушення умови нестискуваної. Введемо допустиму множину  $V_f(S)$  швидкості  $v_i^*(x, t)$ , що задовольняють тільки кінематичним умовам  $v_i^*(x, t) = 0$  на  $\Gamma_u$ . Введемо числову послідовність  $\{\varepsilon_n\}$ , що володіє наступними властивостями:



$$a) S_0 > S_1 > S_2 > \dots > S_n > S_{n+1} > \dots;$$

б)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$ , і розглянемо відповідну послідовність екстремальних завдань визначення швидкостей  $v_i^{(n)}(x, t)$ , для яких функціонал

$$J^{(p)}(v_i^*) = \int_{\Omega} \Pi(\xi_{ij}^*) d\Omega + \int_{\Gamma} f |\sigma_v^{(p)}| |\Delta v_{\tau}^*| d\Gamma + \frac{1}{\varepsilon_n} \int (\operatorname{div} v)^2 d\Omega$$

досягає найменшого значення на множині  $V_f(S)$ . Показано, що послідовність при зводиться до рішення задачі мінімізації  $J(v_i^*)$  на безлічі  $V_f$ . Цікаво, що при цьому виявляється справедливою асимптотична оцінка:

$$\sigma \sim \frac{2}{\varepsilon} \operatorname{div} v. \quad (3.45)$$

Іншими словами, застосування принципу Лагранжа в поєднанні з методом штрафних функціоналів дає принципову можливість одержати, як поле швидкостей, так і поле середнього гідростатичного тиску. Проте практичне здійснення такого підходу стикається з певними труднощами. Зокрема, після дискретизації виникає скінченномірне завдання мінімізації, що володіє несприятливими обчислювальними властивостями - функція, що мінімізується, при малих  $S$  має характер, "яру". Крім того, виявилось, що дискретизація штрафного функціонала не може виконуватися по тому ж алгоритму, що і дискретизація функціонала  $J(v_i)$ ; потрібна розробка процедур неповної (скороченого) інтеграції і т.д. Точність асимптотичного співвідношення унаслідок неминучої дискретизації варіаційного завдання виявляється невисокою. Щоб в деякій мірі усунути вказані проблеми, доцільно вирішувати варіаційні задачі, послідовно зменшуючи параметр  $S_n$  і використовуючи одержане рішення як початкове наближення для наступного етапу. Рішення задачі відразу для малих  $S$  приводить до значних похибок. Рішення скінченномірних задач слід проводити, використовуючи методи прямої мінімізації. Треба особливо застерегти від спроб переходу до рішення системи лінійних рівнянь алгебри на основі необхідної умови екстремуму.

Подальше рішення такої системи прямими методами при малих  $S$  приводить до принципів помилок із-за поганої обумовленості матриці системи.

### *Варіаційне формулювання Марков - Німеччини*

Як вже наголошувалося, саме наявність умови нестискуваної, з одного боку, і неможливість безпосереднього отримання напруженого стану, з іншого боку, є найбільш істотними недоліками моделі жорстко-пластичного тіла. Один з шляхів рішення цих проблем, заснований на методі штрафних функціоналів, описаний вище. Інший можливий підхід полягає в тому, щоб ввести середній гідростатичний тиск в число шуканих характеристик, тобто розглядати варіаційні завдання щодо можливих швидкостей і можливого середнього гідростатичного тиску. Такі формулювання одержали назву змішаних.

Так само як і при використанні штрафних функціоналів, розглядається безліч  $Vf$  допустимих швидкостей. На допустимі значення середнього гідростатичного тиску ніяких додаткових умов не накладається.

Хай  $v_i, \sigma_{ij}$  – дійсні швидкості, швидкості деформацій і напруги, тобто виконана тотожність:

$$\sigma_{ij,j} \equiv 0 \quad (3.46)$$

$$\text{div} \mathcal{V} = \xi_{ij} \delta_{ij} = 0 \quad (3.47)$$

Позначимо через  $v_i^*$ , - можливі швидкості і швидкості деформацій, через  $\sigma_0^*$  - можливий середній тиск. Помножимо (3.46) на  $(v_i^* - v_i)$ , а (3.47) – на  $i$

$$\text{складемо: } \sigma_{ij,j} (v_i^* - v_i) + \xi_{ij} \delta_{ij} (\sigma_0^* - \sigma_0) \equiv 0$$

Інтегруючи по області  $\Omega$ , одержуємо:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij,j} (v_i^* - v_i) d\Omega + \int_{\Omega} \xi_{ij} \delta_{ij} (\sigma_0^* - \sigma_0) d\Omega \equiv 0$$

Перетворимо перший доданок і одержимо:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij,j} (v_i^* - v_i) d\Omega = \int_{\Omega} s_{ij} (\xi_{ij}^* - \xi_{ij}) d\Omega + \int_{\Omega} \sigma_0 \delta_{ij} (\xi_{ij}^* - \xi_{ij}) d\Omega + \int_{\Gamma_c} f |\sigma_v| (|\Delta v_{\tau}^*| - |\Delta v_{\tau}|) d\Gamma$$

Використовуючи визначальні співвідношення, приходимо до варіаційного рівняння:

$$\int_{\Omega} \frac{2F}{\xi_u} (\xi_{ij}^* - \xi_{ij}) d\Omega + \int_{\Omega} \sigma_0 \delta_{ij} (\xi_{ij}^* - \xi_{ij}) d\Omega + \\ + \int_{\Omega} \xi_{ij} (\sigma_0^* - \sigma_0) d\Omega + \int_{\Gamma_c} f |(\sigma_v) (\left| \Delta v_{\tau}^* \right| - \left| \Delta v_{\tau} \right|)| d\Gamma = 0 \quad (3.48)$$

Звернемо увагу на те, що навіть за відсутності тертя рівняння принципово не зводиться до відповідного варіаційного завдання. Ця обставина є загальною для всіх змішаних формулювань. Відсутність екстремальної форми варіаційного принципу істотно ускладнює дослідження і чисельне рішення задач.

Покажемо, що квазіваріаційне рівняння (3.48) фактично є умова стаціонарності деякого функціонала. Представимо  $v_i^*$ ,  $\xi_{ij}^*$ ,  $\sigma_0^*$  у вигляді  $v_i^* = v_i + \delta v_i$ ,  $\sigma_0^* = \sigma_0 + \delta \sigma_0$ . Тоді (3.48) можна представити у вигляді:

$$\int_{\Omega} \frac{2F}{\xi_u} \delta \xi_{ij} d\Omega = \int_{\Omega} \xi_{ij} \delta_{ij} \delta \sigma_0 d\Omega + \int_{\Gamma_c} f |\sigma_v| \delta \left| \Delta v_{\tau} \right| d\Gamma = 0$$

Враховуючи, що  $\Pi(\xi_{ij}^*) = \int_{\xi_u}^{\xi_{ij}^*} \frac{2F}{\xi_u} d\xi_{ij}$ , одержуємо:

$$\frac{2F}{\xi_u} \delta \xi_{ij} = \frac{\partial \Pi(\xi_{ij})}{\partial \xi_{ij}} \delta \xi_{ij} = \delta \Pi(\xi_{ij}).$$

Приходимо до рівняння:

$$\delta J(v_i, \sigma_0) = 0 \quad (3.49)$$

де  $J(v_i, \sigma_0) = \int_{\Omega} \Pi(\xi_{ij}) d\Omega + \int_{\Omega} \sigma_0 \operatorname{div} v d\Omega + \int_{\Gamma_c} f |\sigma_v| \left| \Delta v_{\tau} \right| d\Gamma$

Підкреслимо, що  $|\sigma_v|$ , вважається заданою функцією координат.

Умова (3.49) називається умовою стаціонарності функціонала  $J(v_i, \sigma_0)$ . Отже, тільки для дійсних полів швидкостей і середнього гідростатичного тиску функціонал  $J(v_i, \sigma_0)$  досягає стаціонарного значення. Очевидно, якщо функціонал володіє екстремальною властивістю, для нього виконано умову стаціонарності; зворотне твердження, взагалі кажучи,

невірно. Тому умова стаціонарності розглядається як необхідна умова екстремуму функціонала.

Встановимо зв'язок між екстремальним принципом Лагранжа і стаціонарним принципом Марков - Германця. Виключимо умову нестискуваної за допомогою методу множників Лагранжа і розглянемо функціонал:

$$J(v_i, \lambda) = J(v_i) + \int_{\Omega} \lambda \operatorname{div} v_i d\Omega.$$

Очевидно,  $J(v_i, \lambda)$  співпадає з функціоналом Марков, якщо як множник Лагранжа прийняти середній гідростатичний тиск.

Переваги використання принципу Марков при комп'ютерному моделюванні жорстко-пластичної течії мають двоякий характер. По-перше, зникає необхідність апріорного виконання умови нестискуваної. Більш того, як випливає зі встановленого зв'язку принципів Лагранжа і Марков, поля швидкостей, знайдені з умови  $\delta J(v_i, \lambda) = 0$ , автоматично задовольняють умові нестискуваної. По-друге, середній гідростатичний тиск визначається, як рішення задачі, тому можна відразу одержати всі компоненти напруженого стану:

$$\sigma_{ij} = \sigma_0 \delta_{ij} + \frac{2F(\xi_{ij})}{\xi_u} \xi_{ij}.$$

Ключовий недолік принципу Марков полягає у відсутності еквівалентного екстремального формулювання. Внаслідок цього для вирішення виникаючих після дискретизації скінченномірних завдань не можна застосовувати ефективні методи прямої мінімізації. Звичайно така система замінюється послідовністю систем лінійних рівнянь алгебри. Матриці цих систем не є позитивно визначеними, що виключає застосування ітераційних і ефективних прямих методів (наприклад, методу Холецкого). Тому практично єдиним підходом до рішення вказаних систем є прямі методи, засновані на ідеї виключення.

## РОЗДІЛ 4. МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ КОВКИ

### 4.1 Процес протяжки

Визначення режимів деформації при протяжці на пресах виконується в даний час на основі досвіду заводських технологів і носить, як правило, наближений характер. Існуючі методики розрахунку процесів кування засновані або на інженерних моделях, які не дозволяють розрахувати напружено-деформований стан кожної точки вогнища деформації з комплексним обліком тривимірного перебігу металу, форми інструменту, властивостей, реологій металу і умов тертя, на контакті, або на експериментальних методах, які надзвичайно трудомісткі [10, 19]. Розглянемо застосування розроблених методів до завдання протяжки заготовки у вирізних бойках.

Форма інструменту в даному випадку спрощено характеризується двома площинами, нахиленими під однаковими кутами і обмеженими вширшки бойок (рис. 4.1).

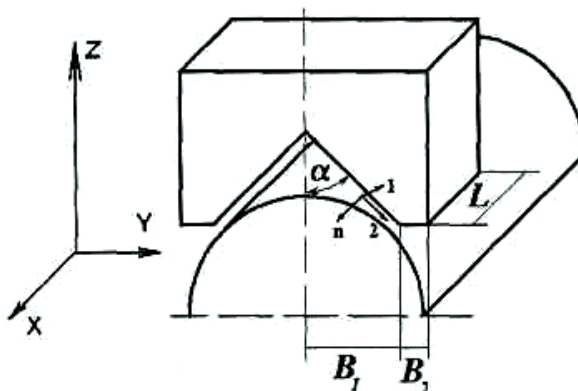


Рисунок 4.1 – Схема до моделювання протяжки у вирізних бойках

Локальні осі координат 1 і 2 направимо дотично до поверхні інструменту уздовж осі поковки (1) і перпендикулярно цієї осі.

Залежно від того, на яку ділянку інструменту виходить вузол, значення направляючих косинусів розраховуються по формулах:

– для ділянки B2:

$$w_1 = 0; w_2 = 0; wn = wtool;$$

$$ax = 0; ay = 0; az = 1;$$

$$a_{x1} = 1; a_{x2} = 0; a_{y1} = 0; a_{y2} = 1$$

де  $w$  – швидкості руху інструменту в напрямках 1, 2;

$n$ ;  $ax$ ,  $ay$ ,  $az$  – косинуси нормалі, напрямних  $n$ , до поверхні інструменту;

$ax1$ ,  $ax2$ ,  $ay1$ ,  $ay2$  – що направляють косинуси між осями локальною і глобальною системами координат;

$wtool$  – швидкість опускання бойок;

– для ділянки  $B_1$ :

$$w_1 = 0; w_2 = wtool \cos(D); wn = wtool \sin(D);$$

$$ax = 0; ay = \cos(D); az = \sin(D);$$

$$a_{x1} = 1; a_{x2} = 0; a_{y1} = 0; a_{y2} = \cos(1/2-D).$$

Розглянемо протяжку злитка діаметром 1000 мм і завдовжки 1500 мм з неіржавіючої сталі 12X18H9T. Температура деформації 1200°C. Властивості, реологій, задані за даними роботи [20]. Величина чинника тертя прийнята 0,8 і відповідає грубо шорстким бойкам. Завдання розв'язувалося з використанням умов симетрії заготовки щодо площин XOZ і XOY. Початкова звичайно-елементна сітка, що згенерувала модулем підготовки даних складається з 175 вузлів і 96 елементів. Розглянемо початковий етап протяжки. Кути вирізу бойков приймалися наступні – 105°, 135° і 180° (плоскі бойки). Відносна подача приймалася 0,46 і у всіх прикладах залишалася постійною. Розглянуті результати на двох етапах деформації – при робочому ході бойок 100 мм і 280 мм. На рисунку 4.2 показана деформована сітка елементів для цих етапів деформації при вугіллі вирізу бойків 135°.

Розглянемо зміну середньої гідростатичної напруги по довжині поковки уздовж її центральної осі OX і уздовж бічної кромки вогнища деформації. З рисунку 4.3, а видно, що із зменшенням кута вирізу істотно зростає середня гідростатична напруга. Цей факт загальновідомий, проте отримання

чисельних величин напруг з урахуванням перерахованих вище чинників представляє істотний інтерес при виборі бойків для конкретної технології.

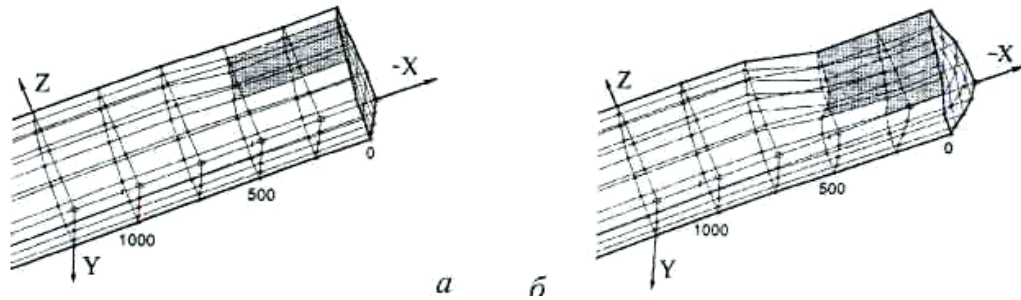


Рисунок 4.2 - Деформована сітка кінцевих елементів на різних етапах деформації при протяжці в бойках з кутом вирізу 1350: а – робочий хід бойок 100 мм; б – 280 мм

При малих обтисках, коли деформація локалізується у контактній поверхні, усередині металу з'являються розтягуючі напруги  $-x$  і  $-y$  і величина середньої гідростатичної напруги ставала позитивною, не перевищуючи, проте в даних розрахунках 1 – 2 МПа.

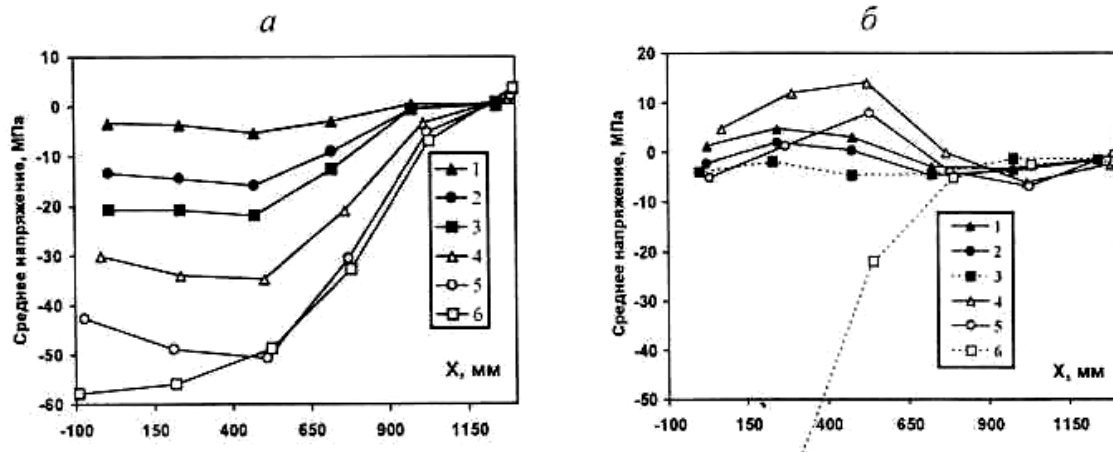


Рисунок 4.3 – Зміна середньої гідростатичної напруги в поковці уздовж осі X при початковому етапі протяжки: а - по центру поковки; б - по бічній кромці поковки (1, 2, 3 – робочий хід верхнього бойок 100 мм; 4, 5, 6 - 280 мм; 1, 4 - плоскі бойки; 2,5 - вирізні з кутом вирізу 1350; 3, 6 - вирізні з кутом вирізу 1050)

На бічній поверхні поковки при збільшенні обтискання можуть переважати напруги, що розтягують (рис. 4.3, б). Це особливо сильно виявляється при куванні в плоских бойках (криві 1 і 4) і у меншій мірі – у вирізних бойках з кутом вирізу 1350 (останнє тільки при значному обтисканні, крива 5). Величина виникаючих напруг і допустимий рівень напруг розтягування визначаються властивостями, реологій, і ресурсом пластичності даного матеріалу.

Розглянемо зміну середньої гідростатичної напруги по висоті поковки при  $X = 450$  мм і  $Y = 0$  мм (рис. 4.4, а). При малих деформаціях в плоских бойках стискаючі напруги переважають у контактній поверхні, істотно зменшуючись до центру поковки (крива 1). Із збільшенням деформації напруги по перетину вирівнюються (крива 4).

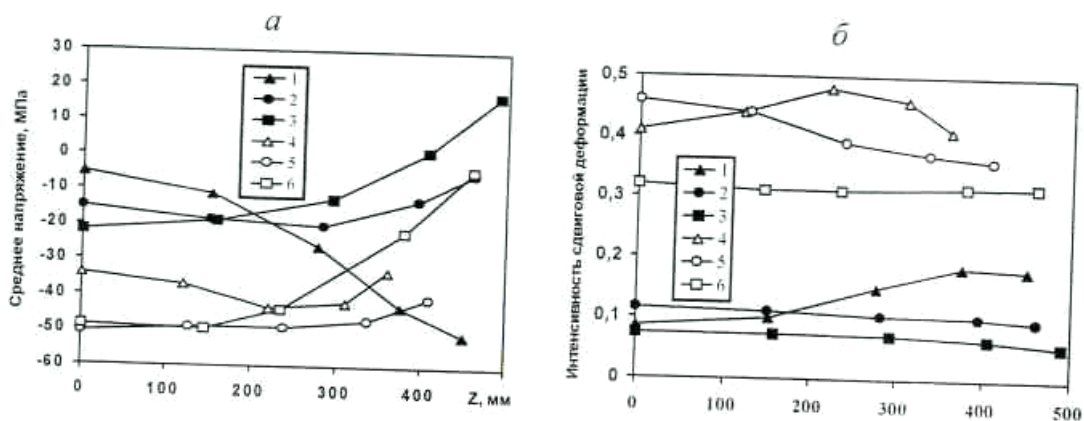


Рисунок 4.4 – Результати моделювання напружено-деформованого стану металу при куванні у вирізних бойках: а – зміна середньої гідростатичної напруги по висоті заготівки (1, 2, 3 – робочий хід верхнього бойок 100 мм, 4, 5, 6 – 280 мм; 1,4 – плоскі бойки; 2, 5 – вирізні з кутом вирізу 1350; 3, 6 – вирізні з кутом вирізу 1050); би – зміна інтенсивності деформації здвигу по висоті поковки (1, 2, 3 – робочого ходу верхнього бойок 100 мм; 4, 5, 6 – 280 мм; 1, 4 – плоскі бойки; 2, 5 – вирізні з кутом вирізу 1350, 3, 6 – вирізні з кутом вирізу 1050)

При використанні бойків з кутом вирізу 1350 напруги розподіляються практично рівномірно при будь-якому обтисканні, а при деформації в бойках з



кутом вирізу 1050 в об'ємах металу, розташованих жвавому, в районі вершини вирізу бойок виникають значні напруги розтягування (крива 3). Ці шари металу не взаємодіють з жвавому безпосередньо, але розтягуються за рахунок механізму перетікання металу на контактну поверхню, що збільшує площу поверхні металу (будучи спочатку циліндровою, вона при деформації приймає форму бойків).

У технологічних процесах кування істотне значення має опрацювання внутрішніх об'ємів металу. Зміна інтенсивності деформації здвигу по висоті поковки при  $X = 450$  мм і  $Y = 0$  мм показано на рисунку 4.4, б. Найбільша нерівномірність деформації спостерігається при протяжці в плоских бойках (криві 1 і 4). Практично рівномірний розподіл деформації по висоті забезпечують бойки з кутом вирізу 1050 (криві 3 і 6).

#### 4.2 Експериментальна перевірка розрахунку напруг

Експериментальна оцінка напруг, що виникають при куванні, зв'язана із значними труднощами, слідством чого є невелика кількість експериментальних робіт в цій області. Для тестування розробленої моделі по напруженому стану скористаємося результатами досліджень В.К. Воронцова і П.І. Полухина [19], в яких автори методом фото пластичності визначають напружений стан металу при куванні у вирізних бойках в умовах плоского деформованого стану.

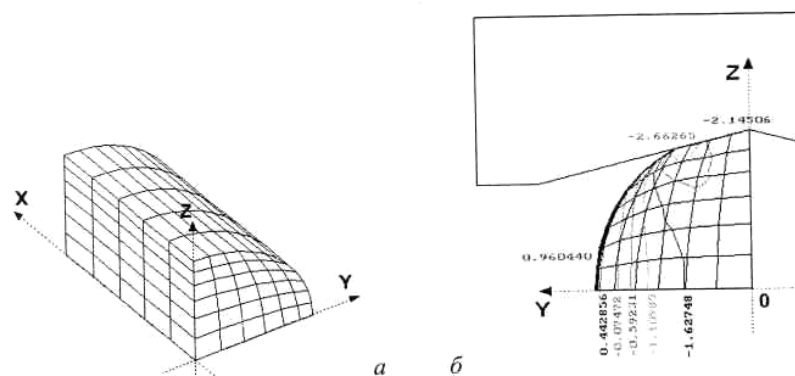


Рисунок 4.5 – Початкова сітка кінцевих елементів (а) і результати розрахунку поля напруг - z у площині симетрії заготовки X0Z (б)

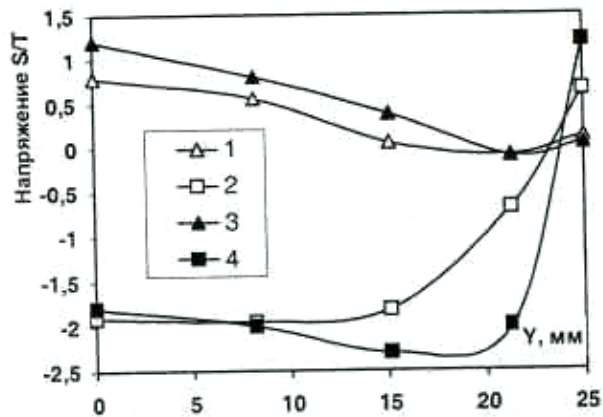


Рисунок 4.6 – Розподіл розрахункових (1 –  $n$ , 2 –  $-z$ ) і експериментально одержаних в роботі [19] напруг (3 –  $-y$ , 4 –  $-z$ )

За допомогою об'ємної моделі виконаємо розрахунок напруг при куванні відповідно до умов експерименту, приведеного в роботі [19, с. 265-277]. Діаметр заготовки – 50 мм, довжина 70 мм, кут вирізу бойків –  $155^\circ$ . Матеріал заготовки – сплав свинцю з 3% Sb. На рис. 4.5, а показана початкова сітка кінцевих елементів, використана при моделюванні і результати моделювання у вигляді одержаного поля напруг  $-z$ , а на рис. 4.6 – порівняння розподілів напруг по горизонтальній осі симетрії поковки між розрахунковими даними і експериментальними для деформації 10%. Істотним є факт якісного збігу зон виникнення напруг розтягування в поковці. Слід зазначити, що, оскільки метод фото пластичності є наближеним, рівень кількісного збігу навряд чи можна вважати достовірною оцінкою.

### 4.3 Моделювання процесу закову горловини

Розглянемо процес закову горловини порожнистої заготовки у вирізних бойках з кутом вирізу  $135$  градусів. Креслення готової поковки представлено на рисунку 4.7. Технологічний процес отримання даної поковки був розроблений спільно з ВАТ "Днепропресс" і увійшов до технологічної документації до пресу зусиллям 31,5 МН, який введений в експлуатацію на Ісфаханському металургійному комбінаті (Іран). Матеріал поковки – сталь 56NiCrMoV7.

Крива, реології даного матеріалу, була узята за даними роботи [20] і приведена на рисунку 4.8.

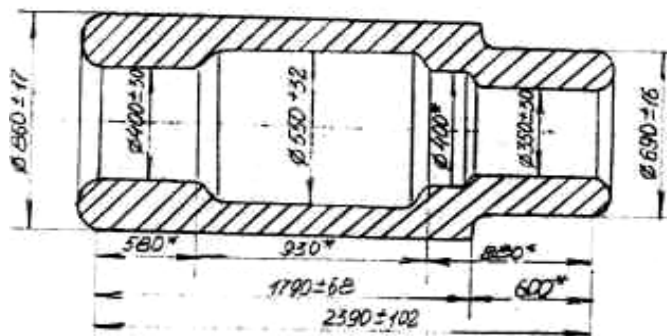


Рисунок 4.7 – Креслення готової поковки

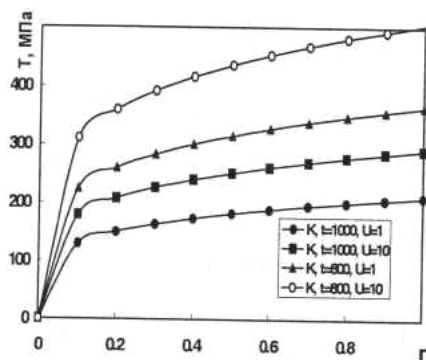


Рисунок 4.8 – Властивості реологій сталі 56NiCrMoV7

За допомогою моделі тривимірного перебігу металу при розробці технології кування було виконане дослідження процесу закову горловини. На рис. 4.9 приведений фрагмент технологічної карти на кування даної деталі, в якій розробка режиму деформації і перевірка перебігу металу на стадії загортання горловини були виконані за допомогою моделі тривимірного перебігу металу. Модельована стадія відповідає 5-му винесенню поковки відповідно до технологічної карти, на цій стадії температура поковки складає  $1000^{\circ}\text{C}$ . Розглянемо етап протяжки з двома кантівками на  $90^{\circ}$ . У розрахунку виконаний аналіз виконання внутрішнього вільного розміру поковки, розподіли деформацій (деформаційного опрацювання) і напруг розтягування в небезпечних перетинах. На рис. 4.10 показана початкова сітка кінцевих елементів, використовується для виконання даного аналізу і ескізи поковки на

розглянутому етапі розтягування виготовлення деталі. Зокрема, змодельований процес загортання горловини "1" на рис. 4.9.

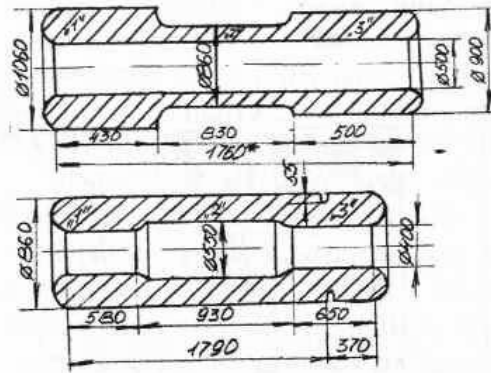
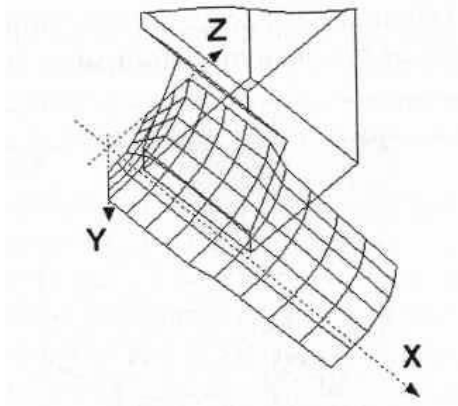


Рисунок 4.9 – Ескіз переходу, відповідного закову горловини "1" і "3"



Рисунку 4.10 – Початкова сітка кінцевих елементів

На рис. 4.11 показано розподіл середньої напруги на внутрішній поверхні поковки. Область появи значних напруг розтягування виділена сірим кольором. У таблиці 4.1 показані стадії деформації заготовки до кантівки (а, б) і після кантівки на  $90^\circ$  (γ, з). На рисунках таблиці видно процес формування внутрішнього профілю поковки. З одержаних даних зроблений висновок про необхідність більшої кількості кантівок для отримання більш рівномірного розподілу деформації і кращого виконання форми внутрішнього отвору діаметром 550 на рис. 4.9 при використанні даного типа бойків і режиму обтиснень.

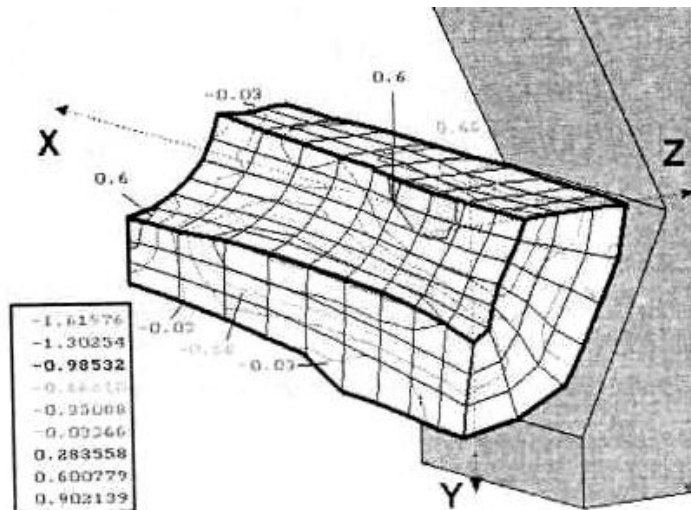
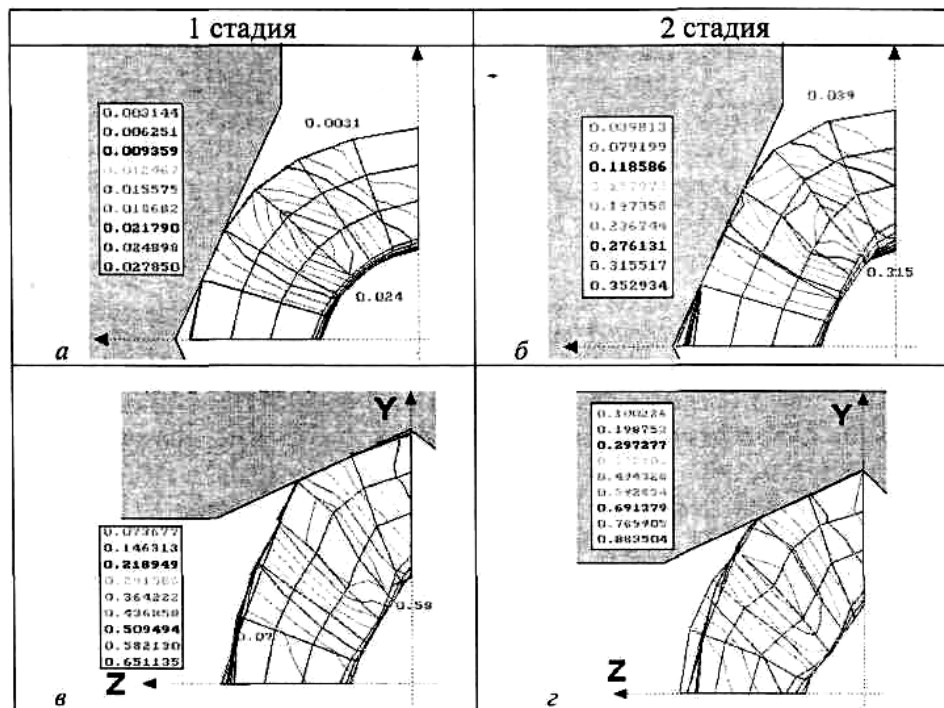


Рисунок 4.11 – Розподіл відносної середньої напруги на першому етапі процесу заковування горловини

Таблиця 4.1. Розподіл деформації на торці поковки при обтисненні з кантівкою на 90°



Приведений аналіз процесу протяжки використаний при розробці технологічних режимів кування на пресі 31,50 МН виробництва ВАТ "Днепропресс" (Україна, м. Дніпропетровськ) і вдосконаленні конструкції деформуючого інструменту до цього пресу.

## РОЗДІЛ 5. КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ПРЕСУВАННЯ ПРОФІЛІВ

### 5.1 Основні рівняння, що описують деформацію металу при пресуванні

Завдання про пресування профілів є одним із завдань теорії обробки металів тиском, що базується на механіці суцільних середовищ. Це означає, що базові рівняння, що описують крайове завдання пресування профілів, не відрізняються від рівнянь більшості інших крайових завдань ОМТ. Особливостями пресування профілів з погляду формулювання крайового завдання можна вважати виражений тривимірний характер формо змінення металу, великі деформації, істотний вплив на деформацію металу теплових процесів у вогнищі деформації. Для повноти викладу приведемо в замкнутому вигляді рівняння і граничні умови, що описують крайове завдання пресування профілів.

Диференціальні рівняння рівноваги (3 рівняння, в яких як невідомі функції входять компоненти тензора напруг  $\sigma_{ij}$ ):

$$\sigma_{ij} = 0$$

З урахуванням симетричності тензора напруг, число цих невідомих функцій дорівнює 6. Інерційними навантаженнями в даному випадку нехтуємо.

Співвідношення зв'язку напруженого і деформованого станів (скористаємося теорією пластичного перебігу нестискуваного нелінійно-в'язкого середовища з деформаційним зміцненням):

$$\sigma_{ij} = \delta_{ij} \sigma_0 + \frac{2T(H, \Lambda, t)}{H} \xi_{ij}$$

де  $E_{ij}$  – тензор Кронекера;  $u_{ij}$  – компоненти тензора швидкості деформації;  $H$  – інтенсивність швидкості деформації здвигу;  $\sigma_0$  – середня напруга.

Властивості, реологій металу, визначаються при такій постановці завдання тільки залежністю інтенсивності напруг здвигу  $T$  від інтенсивності швидкості деформації здвигу  $H$ , температури  $t$  і величини накопиченої деформації, яка обчислюється за формулою:

$$\Lambda = \int_0^{\tau} H d\tau$$

де  $\tau$  – час деформації. Основу такого припущення складає гіпотеза єдиної кривої [11, стор. 84-85].

Залежність  $T(H, t, \Lambda)$  називатимемо кривою, реології матеріалу. Задається вона за наслідками пластометричних випробувань або за літературними даними для конкретного матеріалу і діапазону умов його деформації.

Нелінійність кривої, реології, є серйозною перешкодою для вирішення завдання. При використанні методу кінцевих елементів, а в деяких випадках і методу граничних елементів, для лінеаризації завдання може бути використаний метод гідродинамічних наближень [14], який є аналогом методу січного модуля А.А. Ільюшина стосовно теорії пластичної течії.

У рівняннях зв'язку напруженого і деформованого станів маємо 12 невідомих (компоненти тензорів напруг і швидкостей деформацій), які входять в 6 рівнянь алгебри.

– Рівняння Стоксу, зв'язуючи швидкості перебіг металу  $V_i$  і компоненти тензора швидкості деформації  $u_{ij}$  (6 рівнянь, в які входять 6 компонент тензора швидкості деформації і 3 компоненти вектора швидкості течії):

$$\xi_{ij} = \frac{1}{2}(V_{i,j} + V_{j,i})$$

Таким чином, в цілому маємо 15 невідомих функцій й 15 рівнянь, 9 з яких – диференціальні рівняння в приватних похідних.

Окрім основної системи рівнянь є ще ряд наступних умов, яким повинно задовольняти рішення. Умова постійності об'єму:

$$\delta_{ij} \xi_{ij} = 0$$

Граничні умови на поверхні контакту деформуючого інструменту (матриця, внутрішні стінки контейнера, робоча поверхня пуансона) і металу задані у вигляді змішаних умов. У напрямі, нормальному до поверхні контакту швидкість перебігу металу  $V_n$  повинна тат рівної швидкості руху інструменту  $w_n$ . Цю умову іноді називають умовою непроникності інструменту або умовою обтікання інструменту. Записується воно таким чином:

$$V_n - w_n = 0$$

Інша умова на поверхні контакту металу і деформуючого інструменту пов'язана з дією напруг тертя. Його формулювання розбивається на дві частини, пов'язані з напрямом дії і величиною напруг тертя. У першій частині необхідно забезпечити узгодження напрямку швидкості ковзання металу по інструменту  $V_i$  і дії напруг тертя у кожній точці контакту. Записується ця умова таким чином:

$$\sigma_n = \left| \vec{\sigma}_\tau \right| \frac{|\Delta V_i|}{|\Delta V_i|}$$

У тривимірному випадку дана умова не може бути задана в явному вигляді, оскільки швидкість ковзання наперед не відома і підлягає визначенню з рішення. З цієї причини різні автори пропонують алгоритми ітераційного уточнення напрямку дії напруги тертя. Ця проблема докладніше буде розглянута далі при рішенні тривимірних задач пресування за допомогою методу кінцевих елементів. У другій частині умови на поверхні контакту у напрямі дії напруг тертя задається їх величина відповідно до використовуваного закону тертя. Дослідження у області моделювання процесів пресування показали, що якнайкращі результати дає використання закону тертя, одержаного з експериментальних досліджень А.Н. Льванова [21]:

$$\sigma_\tau = K_n \left[ 1 - \exp\left(-\frac{1,25\sigma_n}{\sigma_s}\right) \right] \tau_s$$

де  $K_n$  – константа поверхні;  $\sigma_n$  – опір металу пластичної деформації на зрушення;  $\sigma_n$  – нормальна контактна напруга;  $\tau_s$  – опір металу пластичної деформації.



Граничні умови на вільних поверхнях задаються в напругах, за відсутності натягнення переднього кінця:

$$\sigma_i = 0$$

При натягненні  $\sigma_x = 0$ ;  $\sigma_y = 0$ ;  $\sigma_z = \sigma_{нат}$  ( $z$  – напрям пресування).

Строго кажучи, поверхня контакту металу з інструментом і вільна поверхня металу наперед не визначені. При пресуванні профілів це може виявлятися за певних умов у вигляді відходу металу від поверхні робочого поясочка матриці або утворення у тяжини на останній стадії процесу. З цієї причини для визначення, чи знаходиться точка на контакті з деформуючим інструментом, використовують умову відриву – нормальні напруги  $\sigma_n$  на контакті можуть бути такими, що тільки стискають:

$$\sigma_n < 0$$

Оскільки умова записана у вигляді нерівності, це породжує певні труднощі, пов'язані з необхідністю додаткового ітераційного процесу по уточненню дійсної поверхні контакту. Вперше той факт, що граничні умови в завданнях ОМТ формулюються у вигляді нерівностей був досліджений В.І. Кузьменко (у тому числі і стосовно процесу пресування [16]).

Крайове завдання пресування профілів має також і варіаційне формулювання. Гідністю її є пониження порядку похідних на одиницю, формулювання завдання у вигляді одного варіаційного принципу, деякі спрощення при задоволенні граничних умов на вільних поверхнях і на поверхнях, на яких задані всі три компоненти швидкості течії. Опускаючи ряд подробиць, істотно важливих для обґрунтування існування варіаційного формулювання, (їх можна знайти в книгах [9]), вкажемо лише один з найбільш поширених варіаційних принципів, вживаних для моделювання пластичної деформації нестискуваних матеріалів – принцип А.А. Маркова:

$$J = \int_V \left( \int_0^H T dH \right) dV + \int_V \sigma_0 \xi_0 dV - \int_F \sigma_\tau v_\tau dF$$

де  $v_\tau$  – повна швидкість ковзання металу по інструменту;  $F$  – поверхня контакту інструменту і металу;  $y_0$  – швидкість деформації всебічного

стиснення. У даному варіаційному принципі рішення шукається виходячи з умови стаціонарності функціонала на полях швидкості перебігу  $V_i$  і середньої напруги  $\_0$ .

Формулювання крайового теплового завдання буде дане в розділі, присвяченому температурі пресування. Відзначимо тільки, що результати рішення теплової задачі і завдання визначення формо змінення металу істотно зв'язані між собою через криву, реології матеріалу, виділення тепла пластичної деформації і тепла тертя металу при ковзанні по поверхні інструменту. З цієї причини необхідно вирішувати зв'язану термо-в'язкопластичну задачу.

## 5.2 Основні рівняння моделі теплових процесів при пресуванні

Розглянемо постановку завдання теплопровідності стосовно процесу пресування профілів. Основу її складає рівняння нестационарної теплопровідності, записане в наступному вигляді:

$$c_{eff}(t)\rho(t)\frac{dt}{d\tau} = \text{div}(k(t)\text{grad}(t)) + q_{def}$$

де  $\rho(t)$  – щільність металу, кг/м<sup>3</sup>;  $t$  – температура (К);  $\tau$  – час, с;  $k(t)$  – коефіцієнт теплопровідності, Вт/м;  $c_{eff}(t)$  – приведена теплоємність (з урахуванням тепла алотропічного перетворення), Дж/кг До;  $q_{def}$  – потужність пластичної деформації на одиницю об'єму Вт/м<sup>3</sup>:

$$q_{def} = 0,9\sigma_u\xi_u$$

Граничні умови задаються відповідно до закону конвективного теплообміну (граничні умови третього роду):

$$q_{conv} = \alpha(t - t_\infty)$$

де  $q_{conv}$  – теплова енергія, яка передається через одиницю поверхні за одиницю часу, Вт/м<sup>2</sup>;  $D$  – коефіцієнт теплопередачі, Вт/м<sup>2</sup>К;  $t_\infty$  – температура навколишнього середовища (у разі контакту металу з інструментом – температура поверхні матриці або контейнера).

На контактi металу, що деформується, з інструментом відбувається видiлення тепла унаслідок тертя ковзання металу по інструменту. Потужність, що видiляється в цьому випадку у вигляді тепла визначається виразом:

$$q_{fr} = 0,9\sigma_{\tau}v_{\tau}$$

При цьому як у разі тепла деформації, так і тепло від тертя ковзання, не вся енергія видiляється у вигляді тепла. Звичайно передбачається, що близько 10% цій енергії переходить в енергію внутрішніх дефектів в металі, а не в теплову енергію. Тепло, що видiляється унаслідок тертя, частково переходить в метал, а частково – в інструмент. Можна приблизно прийняти, що це тепло розподiляється пропорційно абсолютним температурам металу і інструменту в точці їх зіткнення. Таким чином, частина тепла тертя, перехідна в метал запишеться таким чином:

$$q_{fr \rightarrow met} = \frac{q_{fr} T_{tool}}{T_{met} + T_{tool}}$$

де  $T_{tool}$  – абсолютна температура інструменту;  $T_{met}$  – абсолютна температура металу в конкретній точці контакту з інструментом.

Постановка завдання теплопровiдності при пресуванні можлива у варіаційному формулюванні. При цьому дійсне поле температури повинне задовольняти умові мінімуму наступного функціонала:

$$J = \int_V \left[ \frac{k(t)}{2} \left( \left( \frac{dt}{dx} \right)^2 + \left( \frac{dt}{dy} \right)^2 + \left( \frac{dt}{dz} \right)^2 \right) - Qt \right] dV + \int_S \frac{\alpha}{2} (t - t_{\infty})^2 dS + \int_S q_{fr \rightarrow met} t dS$$

де  $Q$  – функція, що враховує додаткові тепловидiлення:

$$Q = q_{def} + \frac{dt}{d\tau}$$

Останній член виразу пов'язаний з нестационарною теплових процесів. При рiшенні теплових задач методом кінцевих елементів або варіаційно-різницевим методом, цей член замiнюється кінцево-різним аналогом.

В деяких випадках при рiшенні теплової задачі пресування розглядають характерну фазу цього процесу. В цьому випадку похідні за часом пропадають, а в рiвнянні теплопровiдності і у функціоналі з'являються конвективні члени.

Проблеми, що з'являються при такому формулюванні і шляху їх рішення будуть далі розглянуті.

### 5.3 Приклади рішення тестових задач пресування профілів

Як приклад розглянемо стаціонарну фазу процесу пресування різних профілів при чиннику тертя  $m=0,1$ . Діаметр контейнера у всіх випадках дорівнює 90 мм. Матеріал – жорстко-в'язкопластичне середовище. Розглянемо пресування прямокутної штаби 20x40 мм. Для цього випадку варіант розташування каналу матриці очевидний, оскільки процес має дві площини симетрії. З цієї причини розглянемо цей варіант як тестовий, вважаючи, що швидкості на виході з вогнища деформації повинні бути строго паралельні осі пресування.

На рис. 5.1, *а* показано векторне поле швидкостей, одержане в результаті рішення. Для спрощення сприйняття вектора показані тільки на торці профілю і показана тільки частина сітки, відповідна області найбільш інтенсивної течії. Для порівняння на рис. 5.1, *б* показано рішення для випадку несиметричного розташування каналу матриці в цьому завданні, по векторній діаграмі видно напрям вигину профілю.

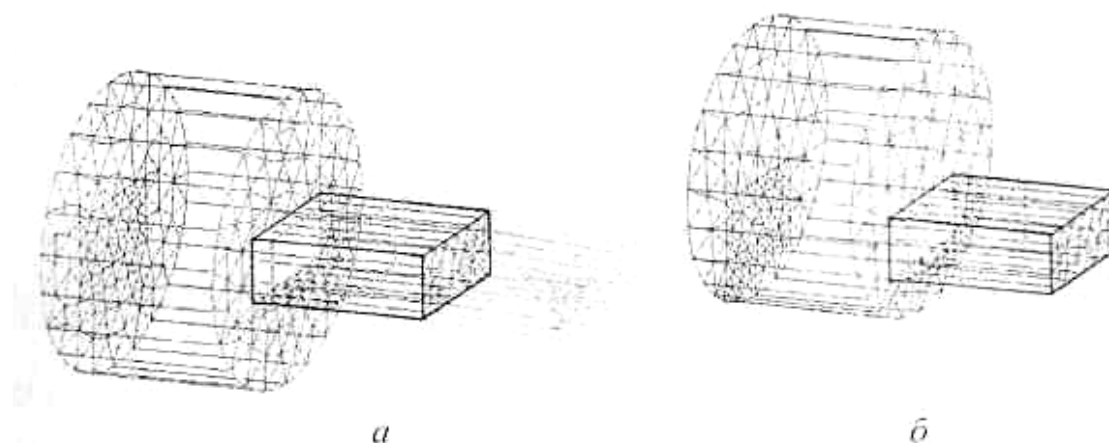


Рисунок 5.1 – Рішення тестової задачі пресування для зміщеного каналу матриці

Практичні завдання звичайно пов'язані з підбором положення каналу матриці для профілю складного перетину. Розглянемо пресування несиметричного куточка. На рис. 5.2 показані варіанти розташування каналу матриці, для яких виконувався розрахунок і векторні діаграми швидкостей на торці профілю (вигляд з боку профілю). Для розташування каналу, відповідного рис. 5.2, *a*, показана інша проекція сітки і векторної діаграми швидкостей (рис. 5.3). Як видно з векторних діаграм, у всіх випадках ми маємо різні поєднання вигину профілю з його крученням.

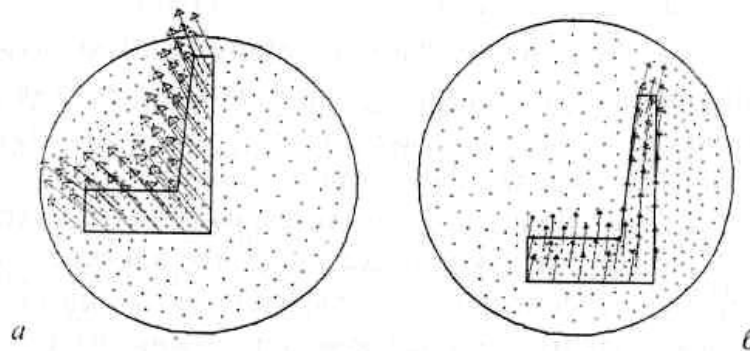


Рисунок 5.2 – Результати моделювання впливу положення каналу матриці на напрям перебігу кінця профілю

Очевидно, що для багатьох профілів підбором положення каналу матриці не вдасться забезпечити ідеально прямолінійний вихід профілю. У цих випадках, вибравши варіант з мінімальним викривленням профілю, далі можна підбирати інші параметри калібрування чи переходити до іншої схеми пресування (наприклад, багато ниткової). Аналіз таких схем також можливий в рамках даної моделі.

Отримані результати свідчать про можливість підбору оптимального розташування каналу матриці при розробці технології пресування профілів, не виконуючи дорогих промислових експериментів. При цьому структура початкових даних моделі така, що графічна інформація про форму профілю, контейнера і інших елементів калібрування прочитуються у форматі більшості популярних

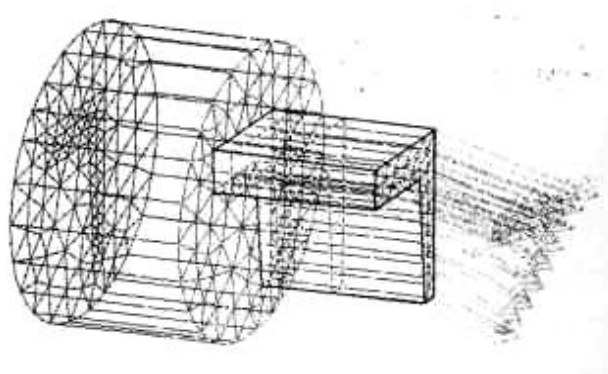


Рисунок 5.3 – Векторне поле швидкостей на кінці профілю

CAD-систем, що значно спрощує роботу з підготовки даних для розрахунку. У поєднанні з автоматичною генерацією сітки, це зводить до мінімуму вимоги до кваліфікації технолога у області чисельних методів.

Використання одержаних рішень можливо також для детального аналізу напружено-деформованого стану металу і прогнозу виникнення браку не тільки по кривизні і скручуванню профілю. Перебіг металу по дзеркалу матриці є одним з результатів розрахунку, для якого можливо зіставлення з експериментальними даними.

Виконаємо розрахунок пресування приведених профілів. У цих розрахунках приймалися наступні умови. Матеріал – жорстко-пластичне середовище Мізеса, чинник тертя прийнятий 0,2. Довжина контейнера складала 100 мм. Моделювалося ізотермічне пресування. Прийняти які те конкретніші умови було неможливе, оскільки ці дані не були приведені в роботі [22].

Зіставлення векторного поля швидкостей перебігу металу по дзеркалу матриці з лініями струму, які видно на залишках пресу, показує якісна відповідність розрахункових і експериментальних даних. Одним з достовірних методів тестування тривимірних моделей може служити отримання за допомогою тривимірної моделі рішення двомірної задачі та зіставлення з двомірним рішенням. Як тестове двомірне рішення виберемо модель на основі МГЭ. Вибір МГЭ для тестування тривимірної моделі обумовлений тим фактом, що МГЭ заснований на абсолютно інших теоретичних

передумовах, чим МКЭ і має з МКЭ мінімум загальних рис. Таким чином, порівняння цих рішень і факт їх збігу в загальній області застосовності буде достовірнішим доказом адекватності тривимірної моделі, чим порівняння з двомірною звичайно-елементною моделлю, яка має багато загальних рис з тривимірною і може містити загальні джерела погрішності. Разом з тим, деякі тести виконані і за допомогою програми FORM2d, яка моделює процеси плоскої і осесиметричної деформації методом кінцевих елементів (програма надана фірмою Квантор-Софтвер для виконання наукових досліджень).

Розглянемо завдання пресування прямокутної штаби розміром 10x100 мм з прямокутного контейнера завдовжки 200 мм і перетином 100x200 мм. При цьому з достатньо високою точністю можна вважати деформацію плоскою і виконати моделювання цього процесу як за допомогою тривимірної моделі, так і за допомогою двомірної, побудованої на основі МГЭ. Оскільки найбільшу точність МГЭ має при моделюванні перебігу лінійно-в'язкого середовища, зупинимося в приведених нижче прикладах на цій моделі

чину в'язкості 1 МПа/с. Виключимо також погрішність завдання граничних умов, прийнявши величину чинника тертя рівну нулю. Розглядатимемо два варіанти пресування, що відрізняються положенням каналу щодо осі симетрії контейнера. На рис. 5.4, *а* і Рис. 5.4, *б* показані ці варіанти і величина зсуву каналу щодо осі симетрії. Радіус закруглення переходу в канал матриці 3 мм, довжина поясочка 1 мм. Розглянемо рішення даної задачі методом граничних елементів.

На рис. 5.5 показано розподіл швидкостей  $V_x$  і  $V_z$ , уздовж осі АВ відповідно до рис. 5.4. Варіанти 1 і 2 відповідають рис. 5.4, *а* і 5.4, *б*. Напрямок пресування співпадає з віссю Z. З векторів швидкостей на рис. 5.4 і відповідних кривих на рис. 5.5 видно зменшення поперечної швидкості перебігу металу у міру наближення каналу до центральної осі контейнера.

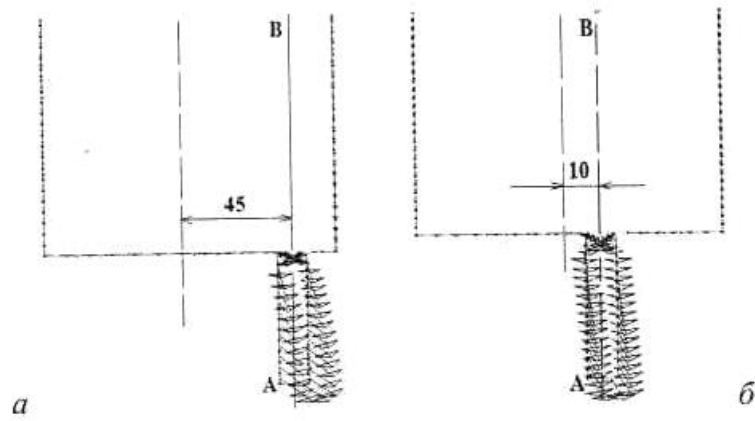


Рисунок 5.4 – Векторне поле швидкостей, одержане при моделюванні плоского завдання пресування методом граничних елементів

На рис. 5.6 показане розподіл середньої напруги уздовж осі АВ. Цей розподіл практично не залежить від положення каналу.

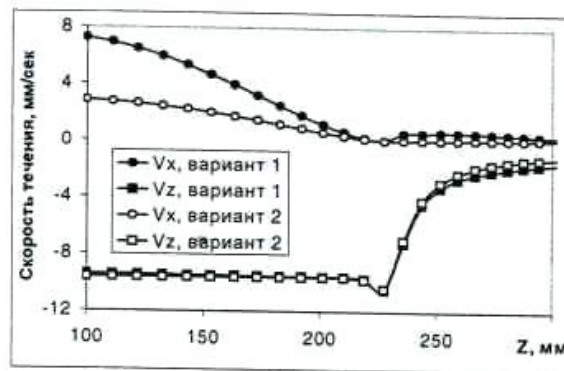


Рисунок 5.5 – Зміна швидкості перебіг металу уздовж осі пресування, одержаний за допомогою МГЭ для двох варіантів розташованій

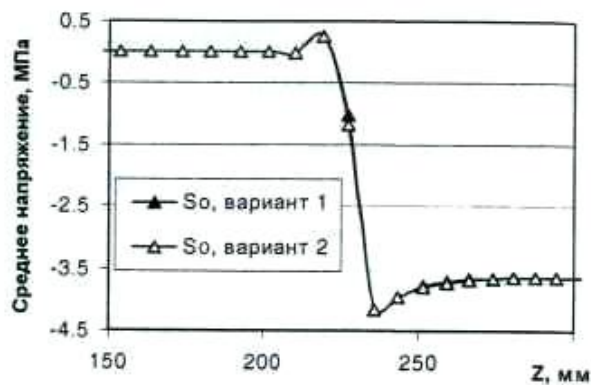


Рисунок 5.6 – Зміна середньої напруги уздовж осі пресування, одержана за допомогою МГЭ для двох варіантів розташування каналу



Розглянемо рішення цієї ж задачі за допомогою розробленої програми тривимірного моделювання. На рис. 5.5 показана розрахункові звичайно-елементні сітки, відповідні варіантам 1 (рис. 5.7, а) і 2 (рис. 5.7, б).

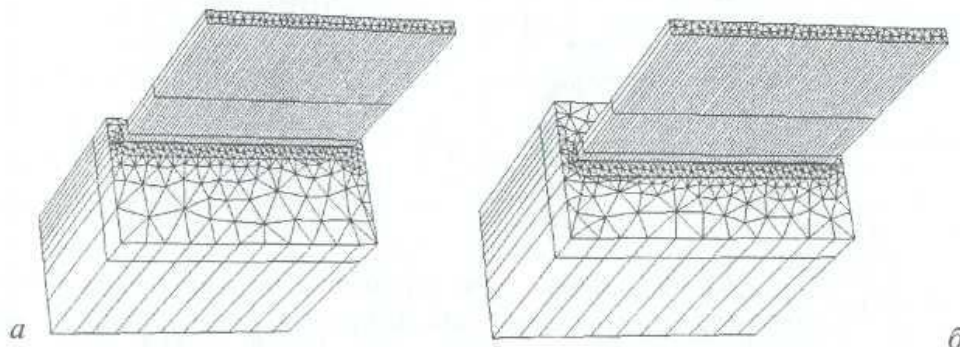


Рисунок 5.7 – Сітки кінцевих елементів, використані для моделювання за допомогою тривимірної моделі

Розподіл швидкості уздовж осі пресування, одержані в результаті рішення тривимірних задач показані на рис. 5.8 і рис. 5.9. В цілому, можна відзначити хорошу відповідність розподілів швидкості, одержаних різними методами. Так, для варіанту 1 по величині  $V_x$  на відстані 100 мм від площини матриці у бік вільного кінця різниця складає 5%. Для варіанту 2 ця ж величина рівна 12%. Проте, це максимальні значення відхилень, зміряні у області їх максимального посилення за рахунок руху вільного кінця значної довжини як жорсткого цілого.

У решті областей середовища, що деформується, різниця менша. По величині  $V$ , в усіх точках різниця між рішеннями нехтує мала. По величині середньої напруги відносна різниця між рішеннями не перевищує 4% за винятком зони різкого збільшення напруг при вході в канал матриці. Це збільшення дуже слабке виражено на рішенні, одержаному за допомогою МГЭ і виразно видно на тривимірній моделі (рис. 5.9). Це пояснюється тим, що тривимірний генератор сітки автоматично істотно згущує сітку в поясоцку, тоді як в гранично-елементній моделі на осі пресування сітка не була достатньо густою для моделювання цього локального ефекту

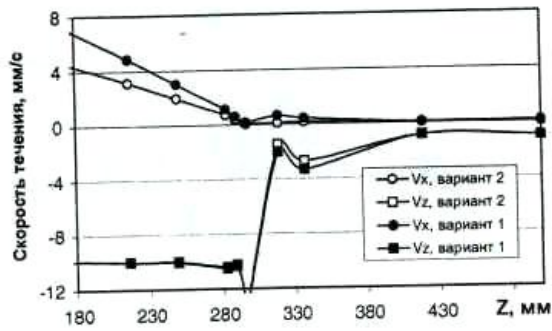


Рисунок 5.8 – Зміна швидкості металу уздовж осі пресування, одержана за допомогою тривимірної моделі

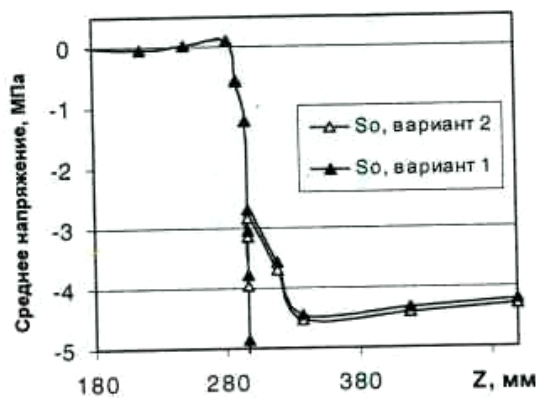


Рисунок 5.9 – Зміна середньої напруги уздовж осі пресування, одержана за допомогою тривимірної моделі

Для більшої переконливості тестування виконаємо порівняння результатів розрахунку по розробленій моделі з розрахунком за програмою FORM2d у області застосовності останньої. Умови виконання розрахунків наступні. Пресований матеріал - технічно чистий алюміній з добавкою 1% магнію. Висота поясочка 5 мм, чинник тертя 0,5. Висота і ширина контейнера 100 мм. Ширина штаби 10 мм. На жаль, програма FORM2d не дозволяє побудувати графік розподілу швидкості, з цієї причини обмежимося порівнянням одержаних полів і форми вільного кінця. На рис. 5.10 показана форма вільного кінця і деформована координатна сітка (рис. 5.10, а) і поле швидкості  $V_x$  (рис. 5.10, б). На рис. 5.11 показане рішення аналогічної

тривимірної задачі і також поле швидкості  $V_v$ . Зіставлення цих рішень між собою також показує як якісний, так і кількісний збіг результатів.

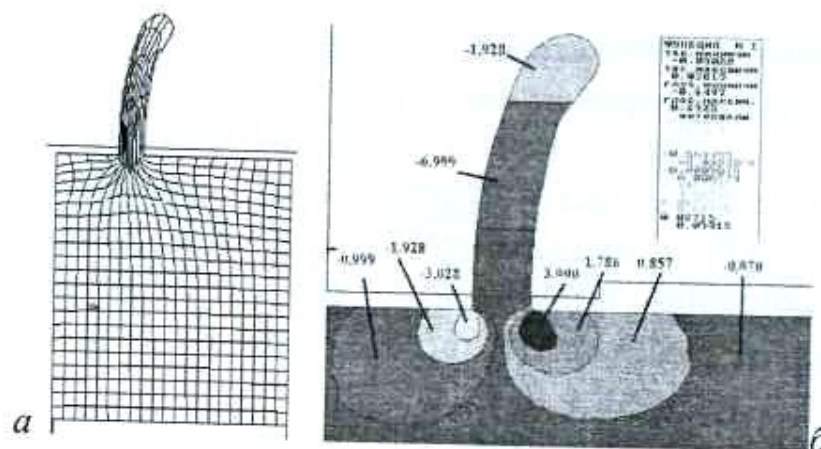


Рисунок 5.10 – Результати моделювання за допомогою програми FORM2d процесу пресування в умовах плоского деформованого стану: а - форма вільного кінця і деформована координатна сітка; б - поле швидкості  $V_x$

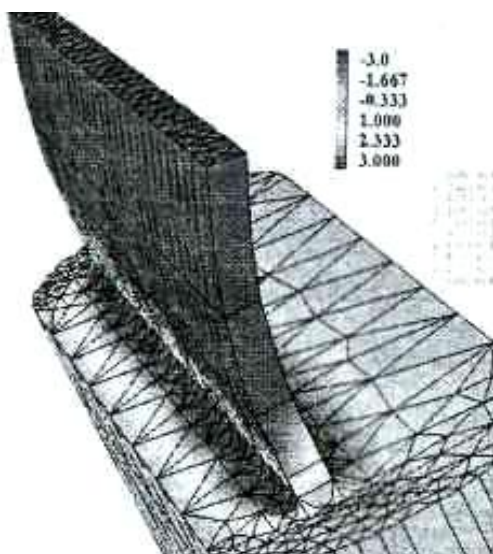


Рисунок 5.11 – Результати тривимірного моделювання пресування в умовах плоского деформованого стану металу

У даному прикладі виявляються особливості пресування при малій висоті контейнера, що має місце в фазах завершення пресування. Зокрема, відбувається віддзеркалення металу від поясочка матриці і вигин профілю в напрямі, протилежному напрямку вигину на рис. 5.4. Для детального аналізу

цього процесу був проведений додатковий розрахунок, в якому канал матриці був зміщений від осі симетрії ще на 30 мм. Одержана картина деформації і поле швидкостей у напрямі пресування показані на рис. 5.12. Ефект віддзеркалення виявляється в тому, що не дивлячись на явне прагнення металу згинатися убік від осі симетрії (про що свідчить відрив металу від каналу матриці, виділений на рис. 5.12), завдяки дії поясочка на протилежній стороні профілю, вигин відбувається в протилежному напрямі.

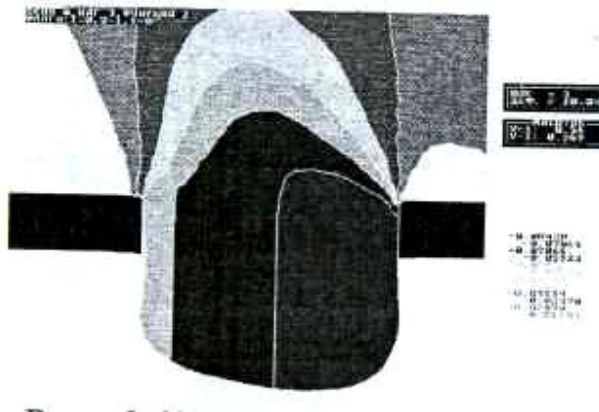


Рисунок 5.12 – Розрахунок за допомогою програми FORM2d процесу відшаровування металу від стінок робочого поясочка

Оскільки попередні тести показали достатньо високу достовірність рішення тривимірної задачі при моделюванні лінійно-в'язкого середовища, подальшим етапом тестування є аналіз рішення для реальних властивостей реологій металу при тривимірній течії. На цьому етапі тестування неможливо використовувати порівняння з іншими рішеннями у області застосовності останніх, оскільки існуючі теоретичні моделі вирішити таке тестове завдання не в змозі. З цієї причини скористаємося результатами експериментального дослідження процесу багатоканального пресування, опублікованими в роботі. Відповідно до умов експерименту, приведених в цих роботах, розглянемо процес пресування штаби з циліндрового контейнера. Схема розташування, номери і розміри каналів показані на рис. 5.13 за даними роботи. Пресований матеріал - свинець, що володіє властивостями, реологій,

наближеними до жорстко-пластичного середовища. Крива, реології використовуваного свинцю, приведена в книзі [15]. Умови тертя - гладка шліфувана поверхня матриці з мастилом. Чинник тертя для цих умов прийнятий 0,1. Швидкість пресування 1 мм/с. Калібруючі поясочки відсутні. Розглянуті два варіанти пресування - з розташуванням каналів по центру матриці і розташування, зміщене уздовж ряду каналів на величину 19 мм.

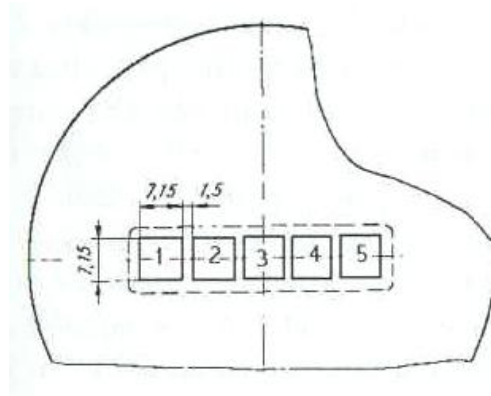


Рисунок 5.13 – Схема розташування каналів при експериментальному дослідженні багатоканального пресування

Зіставлення теоретичних і експериментальних даних дозволяє зробити наступні висновки.

- При реальних властивостях реологій пресованого матеріалу модель вірно передбачає зміну розподілу швидкостей закінчення при зсуві каналів по дзеркалу матриці.
- Модель досить добре змодельовала процес багатоканального пресування.

## РОЗДІЛ 6. КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ПРОКАТКИ ПРОФІЛІВ

Сучасні практичні завдання технології сортової прокатки вимагають теоретичного рішення на рівні, що дозволяє прогнозувати тривимірне формо змінення і напружений стан металу в калібрах. При цьому, рішення повинне враховувати складну просторову форму заготовки і валків, реальні властивості реологій матеріалу, тертя на поверхні взаємодії металу з валками, теплові процеси і ряд інших чинників. Таке формулювання завдання дозволяє вирішити методами комп'ютерного моделювання наступні проблеми, що стоять перед сучасним сортопрокатним виробництвом:

- оптимізація форми калібрів виходячи з необхідного перебігу металу;
- прогноз можливості появи дефектів формо змінення металу, таких як переповнювання калібру, вигин штаби на виході з валків і інших;
- прогноз руйнування металу;
- прогноз мікроструктури і механічних властивостей готового продукту.

Рішення цих питань експериментальними методами в даний час достатньо дорого і вимагає великих витрат часу. Ця обставина робить актуальною розробку математичних моделей тривимірних процесів прокатки профілів в калібрах. Зважаючи на складність завдання в приведеному формулюванні, рішення її аналітичними методами не представляється можливим. Цим обумовлена необхідність використання методу кінцевих елементів для отримання шуканого рішення. Це, у свою чергу, визначає специфіку одержуваних нижче рішень, яка пов'язана з наближеним характером МКЭ, необхідністю розробки складних алгоритмів і програмного забезпечення при доведенні теоретичних розробок до рішення практичних задач оптимізації процесу плющення сортових профілів.

## **6.1 Аналіз існуючих підходів до моделювання тривимірного формозмінення металу при прокатуванні**

Перші роботи у області моделювання процесів прокатки є облік тривимірного перебігу металу на основі МКЭ були виконані в 80-х роках минулого сторіччя. Особливістю цих робіт було застосування об'ємних кінцевих елементів для вирішення завдання визначення розширення при прокатуванні на гладкій бочці. Надалі, ці та інші дослідження послужили основою для розробки моделей процесів сортової прокатки. Так, в роботі Park J.J і Oh S.I. була розроблена тривимірна кінцево-елементна модель процесу сортової прокатки, названа авторами SHPROL. У даному рішенні використовувалася теорія жорстко-пластичної деформації металу (яка до теперішнього часу цілком обґрунтовано застосовується для моделювання процесів гарячої деформації). Програма SHPROL була здатна моделювати прокатку складних профілів, проте, вимагала для цього багато часу. Так, для моделювання прокатки Н-образного профілю потрібно декілька місяців (!) розрахунків на міні комп'ютері VAX-11/750. Слід зробити поправку на рівень розвитку міні комп'ютерів в 1990 р., але і в цьому випадку час рішення однієї задачі надзвичайно великий. Зрозуміло, наступні роботи були присвячені прискоренню розрахунку і була зроблена спроба одержати квазістаціонарне рішення тривимірної задачі прокатки профілів. У роботі K.Mori і K.Osakada це було зроблено, і автори дістали всього лише 1,5 кратне прискорення рішення в порівнянні з нестационарним завданням. Окрім цього, стаціонарний підхід був застосовний не до всіх випадків прокатки, а нестационарне рішення було застосовне до профілів будь-якої складності. З погляду сучасного стану науки цей факт легко з'ясовний, оскільки отримання стаціонарного рішення вимагає уточнення положення вільних поверхонь. При складній геометрії завдання аналіз взаємодії поверхонь заготовки і інструменту вимагає великої кількості ітерацій.

Таким чином, до початку 90-х років було ясно, що тривимірні звичайно-елементні моделі процесу сортової прокатки можуть вельми достовірно передбачати течію і напружений стан металу при прокатуванні профілів. Проте, такі програми вимагали великого часу рішення і значних об'ємів оперативної пам'яті, що було пов'язано з необхідністю вирішувати великі системи нелінійних рівнянь. Цим обумовлено появу робіт, що спрощують тривимірне рішення для прокатки.

Піонерською роботою в цьому напрямі слід вважати статтю М. Kiuchi і J. Yanagimoto, в якій розглянута комбінація методу кінцевих елементів і так званого slab-методу (можна перевести як "пошарового методу"). На основі такого підходу авторами пізніше була розроблена програма CORMILL. Гідністю даної програми є розгляд багатоваріантного процесу прокатки. На рис. 3.1 15 показаний типовий результат моделювання прокатки профілів в системі CORMILL.

У роботі виконано розвиток даного підходу, що полягає в наступному.

Вся зона деформації поділяється на декілька шарів відповідно до форми металу і контактної поверхні. Кожен шар поділяється на сегменти. Кожен сегмент поділяється на 8-вузлові ізопараметричні елементи. На рис. 6.1 показані етапи цього ділення. Після цього задається швидкість руху поточного (першого) шару. Далі, за допомогою пошарового методу розраховується швидкість деформації у напрямі прокатки для всіх сегментів першого шару. Для цього використовуються рівняння рівноваги шару і умова зв'язку швидкостей деформації з напруженнями. Потім для цього шару (при заданому розподілі швидкості деформації у напрямі прокатки) розв'язується завдання за допомогою МКЕ. Після досягнення збіжності за швидкістю шару, здійснюється перехід до наступного шару. Приклад одержаного рішення показаний на рис. 6.1.



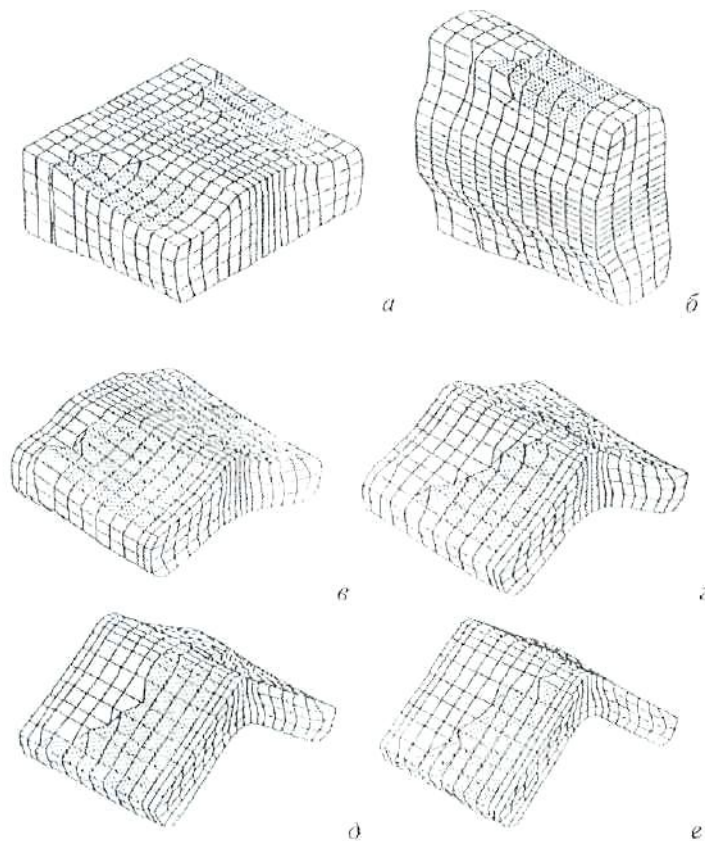


Рисунок 6.1 – Приклад результатів моделювання прокатки кутового профілю за допомогою системи CORMIL

Аналогічний підхід був розвинений в Краківській Гірничо-металургійній Академії, де одержав назву 2grid моделювання. У напрямі зведення тривимірного завдання - до послідовності двомірних безперервно працюють дослідники в даній області теорії ОМТ, наприклад, слід зазначити підходи в цьому напрямі, викладені в роботах [12, 13].

У роботі К.Комогі пропонується інший підхід до прискорення тривимірного рішення задачі прокатки профілів. У цьому методі мінімізується функціонал не для всієї сітки кінцевих елементів - а по зонах з подальшим ітераційним скріпленням зон між собою. Метод дозволяє понизити вимоги до оперативної пам'яті, але час розрахунку залишався великим.

Проте, ряд ефектів, пов'язаних з тією, що обважнює, вигином штаби у валках, в неконтактній деформацією, виникненням подовжніх напруг розтягування та стискання моделі розглянутого класу врахувати не можуть. У

зв'язку з цим, паралельно ведуться дослідження за рішенням тривимірної задачі сортової прокатки без спрощень, пов'язаних з обмеженнями деформації металу. Після згаданих на початку розділу перших робіт у області рішення повної тривимірної задачі прокатки, довгий час основні дослідження йшли у напрямі пошуку спрощених підходів. Проте пізніше, коли були вичерпані можливості таких методів, підвищилася продуктивність комп'ютерів і була розвинена техніка МКЭ, знову повернулися до ідеї рішення повної тривимірної задачі. Так, в роботах виконана розробка теоретичної частини моделі і програмного забезпечення для моделювання тривимірної деформації металу при прокатуванні профілів. На основі цих робіт побудовано виклад подальших розділів даного розділу. Одночасно (і дещо пізніше) з'явилася стаття , в якій розроблена аналогічна модель, приклади використання якої показані на рис. 6.2. Слід підкреслити, що в цих роботах час рішення задачі вже цілком прийнятно для технолога, з цієї причини в допущеннях спрощування, що огрублюють рішення, немає необхідності. Очевидно, що ситуація поліпшуватиметься за рахунок безперервного вдосконалення обчислювальної техніки.

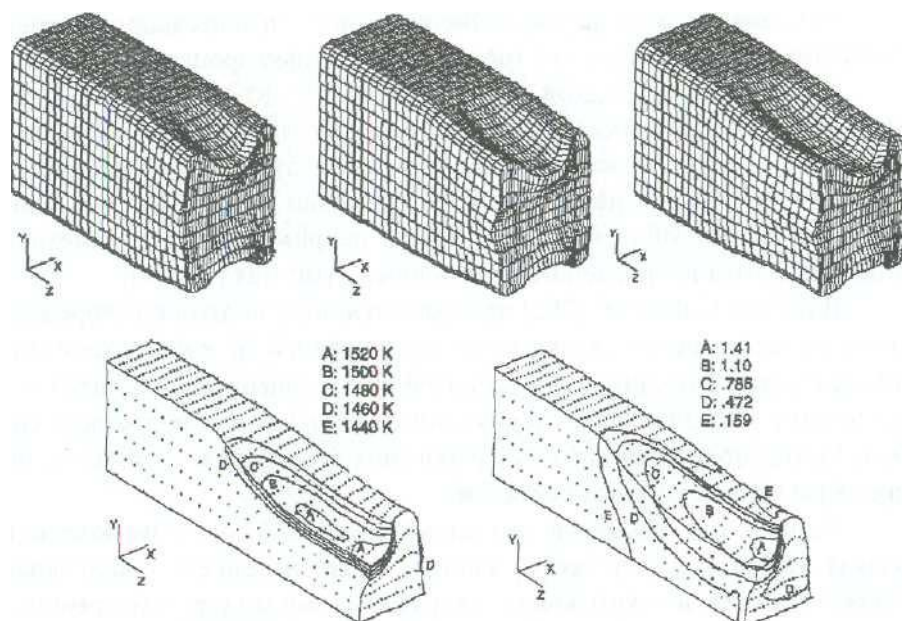


Рисунок 6.2 – Результати моделювання процесу сортової прокатки

Слід також підкреслити, що рішення задачі прокатки в даний час можна з вельми хорошою точністю одержати на основі використання таких програм, як FORGE3, DEFORM3 і ряду інших. Для аналізу об'ємного формо змінення, заповнення калібрів, енергосилових параметрів, температури ці програми цілком придатні і забезпечують хорошу збіжність з практичними даними.

Обмеження комерційних програм починають грати істотну роль при розвитку моделі у напрямі моделювання структури і властивостей металу, багатоваріантної оптимізації процесу, моделювання деформації багатофазних матеріалів і ін. Недоліком цих програм (окрім високої вартості) є також трудомісткість при підготовці даних, що утрудняє виконання практичної оптимізації інженерами - технологами.

Таким чином, перспективними напрямками у області моделювання процесів прокатки профілів слід вважати:

- розробка нових моделей, що описують властивості металу при немонотонному вантаженні і інтеграція цих моделей в кінцево-елементні програми;
- розробка систем, що застосовують методи теорії оптимізації при розробці технологій прокатки профілів на основі тривимірного моделювання;
- розробку моделей прогнозу і оптимізації мікроструктури і властивостей металопрокату.

## **6.2 Комбінований підхід до моделювання процесів прокатки методом кінцевих елементів**

За наслідками виконаного в попередніх розділах аналізу, найбільш перспективним є підхід на основі варіаційного формулювання Маркова. Переваги вказаного підходу в порівнянні із застосуванням методу штрафних функцій (МШФ) для задоволення умови не стискання металу в певних

випадках можуть не виявлятися, але для ряду завдань теорії прокатки мають принципове значення.

Як приклад розглянемо залежність розширення від ширини штаби при прокатуванні в гладких валках. На рис. 6.3 показана ця залежність, розрахована по різних методиках. Як випливає з кривих на рисунку, зменшення розширення із збільшенням ширини штаби не відстежується при побудові моделі на основі МШФ. Причина цього в наступному. Центральні об'єми металу при збільшенні ширини штаби піддаються більшому всебічному стисненню. Якщо метал є не стискуваним, то при збільшенні ширини штаби повинна зменшуватися частка поперечної течії і збільшуватися частка подовжньої течії. При щонайменших погрішностях у виконанні умови не стискуваної ця закономірність втрачається - метал трохи стискається в центрі штаби, і це приводить до істотної втрати точності моделювання залежності розширення від ширини штаби. При цьому варіанти плющення металу з відносно малою шириною штаби моделюються достатньо точно.

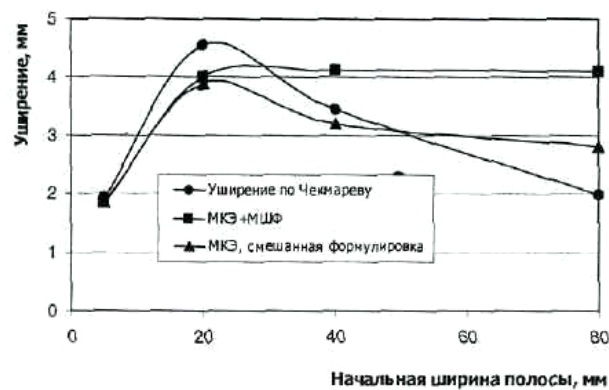


Рисунок 6.3 – Залежність розширення від ширини штаби, умови прокатки: Але – 10 мм; Н; = 6 мм; R = 100мм; т = 0,8

Розглянемо напружений стан штаби в даному прикладі. На рис. 6.6 показані розподіли напруги  $\sigma_z$  і швидкості перебігу  $V_y$  по поверхні металу для різної ширини штаби, розраховане за допомогою МКЭ на основі варіаційного принципу Марков. Як випливає з рис. 6.6, збільшення ширини штаби приводить

до збільшення значення напруг  $\sigma_z$ , що є слідством збільшення підпору поперечному перебігу металу з боку сил тертя. При достатньо строгому дотриманні умови не стискуваного металу, яка забезпечує використання варіаційного принципу Марков, зменшується частка поперечного перебігу металу в порівнянні з подовжньою. При нестрогому дотриманні умови не стискуваної (що властиво застосуванню МШФ), центральні об'єми металу при високих стискуючих напругах стискатимуться, а в розширенні братимуть участь тільки периферійні об'єми металу.

Таким чином, для випадку прокатки показано, що математичну модель цього процесу необхідно будувати на основі змішаного варіаційного принципу. Такий підхід, проте, збільшує витрати часу на рішення задачі. Отже, є суперечність, пов'язана з тим, що один метод дає швидке рішення, але істотну похибку в розрахунку деформації металу. Вирішуючи іншим методом, час рішення росте, але рішення виходить точніше.

Розглянемо дозвіл вказаної суперечності шляхом використання комбінованого підходу, заснованого на особливостях процесу прокатки [23].

Відомо, що при прокатуванні деформація металу відбувається у вогнищі деформації і в зонах в неконтактної деформації. Решта частини металу (так звані жорсткі зони, в яких відсутня пластична деформація) здійснює тільки поступальну ходу уздовж напрямку прокатки або згинається унаслідок можливої несиметричної процесу. У будь-якому випадку ясно, що пластичних деформацій в цих зонах немає, і вони рухаються як жорстке тіло. Це дає можливість в жорстких зонах умову не стискуваної задовольнити за допомогою методу штрафних функцій з відносно невеликою величиною штрафу, а в зоні передбачуваної пластичної деформації - з використанням умови стаціонарності функціонала Марков. Даний підхід реалізований на прикладі моделювання тривимірного перебігу металу при прокатуванні.

Умови проведення розрахунків: моделювалася 1/4 частина зразка прямокутного перетину, довжина якого дорівнює 80 мм, ширина 18 мм, висота 6 мм; загальне число елементів склало 475, вузлів - 720; тип елементів - 8-ми

точкові ізопараметричні елементи; чинник тертя прийнятий рівним 0,6; матеріал – свинець. Розглядалися два варіанти розрахунку: на основі пропонованого комбінованого і на основі класичного, підходу з використанням функціонала Марков. У роботі [23] показана повна ідентичність одержуваних результатів. Порівняння часу рішення по етапах вантаження, показує значний вигащ за часом, який забезпечує застосування пропонованого підходу. Залежність цього показника від стадії нагрівання пояснюється різним співвідношенням кількості елементів різного вигляду, яка визначається автоматично, виходячи з поточних розмірів вогнища деформації.

Можна зробити висновок про те, що запропонований підхід до моделювання тривимірного перебігу металу при прокатуванні за допомогою методу кінцевих елементів, заснований на використанні функціонала Марков для елементів у вогнищі деформації і функціонала Лагранжа в поєднанні з методом штрафних функцій для жорстких кінців дозволяє одержувати вигащ в часі від 2 до 4 разів залежно від етапу вантаження, результати моделювання практично не відрізняється від класичного рішення на основі функціонала варіаційного принципу Марков.

Слід зазначити, що застосування даного підходу доцільно при рішенні нестационарних задач ОМТ (не тільки завдань прокатки) і в процесах з достатньо великими жорсткими зонами.

### **6.3 Моделювання процесів прокатування в гладких валках**

Розглянемо застосування розробленої моделі до процесу подовжньої прокатки в гладких циліндрових валках рівного радіусу. При цьому припускатимемо, що форма заготовки може бути достатньо складною. Процес прокатки в даному параграфі розглядатимемо в системі координат, рухомій з окружною швидкістю валків  $W_{tool}$  у напрямі прокатки.

Визначимо напрями осей локальної системи координат для даного вузла сітки, що робиться по наступному алгоритму.

Визначимо кут контакту  $A$  вузла  $i$  з валком радіусу  $R$  по формулі:

$$\varphi = \arctg\left(\frac{x_i - X_R}{z_i - Z_R}\right), \quad (6.1)$$

де  $x_i, z_i$  - координати вузла  $i$ , що вийшов на контакт з валком;  $X_R, Z_R$  координати центру валка.

Далі, визначимо швидкості валка в локальній системі координат і напрямку осей локальної системи координат у вузлі  $i$ :

$$\begin{aligned} w_1 &= w_{\text{tool}} \sin(A/2); & w_2 &= 0; & w_n &= w_{\text{tool}} \cos(A/2); \\ a_x &= \sin(A); & a_y &= 0; & a_z &= \cos(A); \\ a_{x1} &= \cos(A); & a_{x2} &= 0; & a_{y1} &= 0; & a_{y2} &= 1. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Як чисельний приклад розглянемо прокатку штаби заввишки 12 мм і шириною 48 мм. Матеріал заготовки – жорстко-пластичне середовище Мізеса. Тертя задавалося по Зібелю з величиною чинника тертя 0,5. У другому варіанті розрахунку розглянемо той же процес, але перетин штаби має опуклу форму з величиною опуклості 1 мм з кожної сторони штаби. Площі перетину в двох варіантах розрахунку між собою рівні. Кінцева висота штаби складала 10 мм.

На рис. 6.4 показані сітки кінцевих елементів - початкові і кінцеві (після деформації). За наявності опуклості на передньому і задньому торці заготовки утворюється характерне подовження. Розглянемо напружено-деформований стан на кромці штаби.

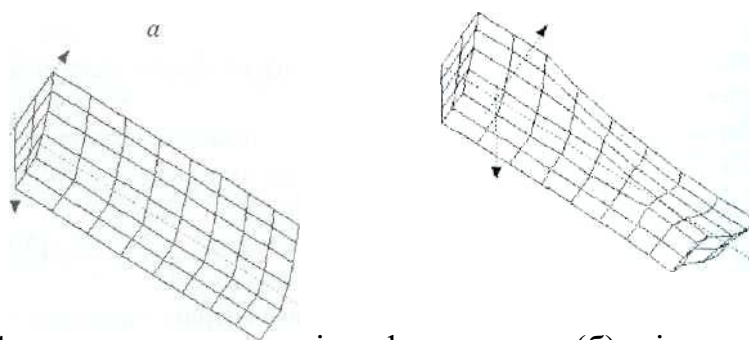


Рисунок 6.4 – початкова (а) і деформована (б) сітки при моделюванні прокатки штаби опуклою формою поперечного перетину (показано 1/4 частину об'єму).

На рис. 6.5 приведені графіки зміни подовжньої напруги  $x$  уздовж бічної кромки і центру штаби для штаби прямокутного перетину і опуклої.

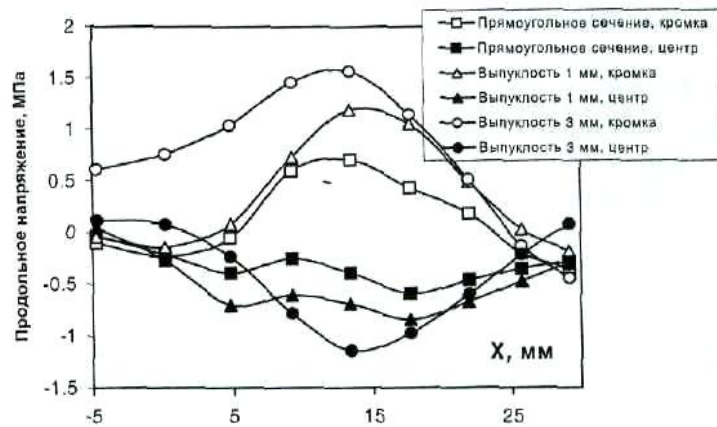


Рисунок 6.5 – Зміна подовжньої напруги  $x$  уздовж бічної кромки і осі симетрії штаби для штаби прямокутного перетину і опуклої

Унаслідок більшої витяжки центральної частини штаби в другому варіанті на кромці виникають значно великі подовжні напруги, чим при прокатуванні прямокутної штаби. Зворотна картина спостерігається при аналізі напруженого стану уздовж осі симетрії штаби. При прокатуванні опуклої штаби за рахунок гальмуючої дії кромки в центрі штаби виникають великі стискуючі подовжні напруги, чим при прокатуванні прямокутної штаби.

Представляє інтерес вплив нерівномірності обтискання в розглянутому процесі на співвідношення подовжньої і поперечної течії.

Таким чином, показана можливість застосування розробленої моделі об'ємного перебігу металу для аналізу процесів прокатки смуг нерівномірного по ширині перетину.



## РОЗДІЛ 7. ПРИКЛАДИ РОЗРАХУНКУ

### Приклад № 1

З метою вивчення впливу факторів (температури металу, твердості валків, окружної швидкості валків) на коефіцієнт тертя використовуємо повний факторний експеримент по методу Бокса-Уілсона.

Параметр оптимізації (Y) – коефіцієнт тертя (f).

Досліджувані фактори, характер їхніх змін і схеми кодування приведені в таблиці 7.1.

Таблиця 7.1 – Досліджувані фактори

Характеристика	Фактори		
	Температура металу, °C	Твердість валків	Окружна швидкість валків, м/с
Код	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	X <sub>3</sub>
Основний рівень	1000	70	5
Інтервал варіювання	200	20	2,5
Нижній рівень (кодовані значення -1, -)	800	50	2,5
Верхній рівень (кодовані значення +1, +)	1200	90	7,5

Таблиця 7.2 – Умови проведення дослідів (план експерименту)

Номер дослідів	Значення факторів в кодованому вигляді			
	X <sub>0</sub>	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	X <sub>3</sub>
1	+	+	+	+
2	+	-	+	+
3	+	+	-	+
4	+	-	-	+
5	+	+	+	-
6	+	-	+	-
7	+	+	-	-
8	+	-	-	-

Фактор, позначений "X<sub>0</sub>" – так називаємо фіктивну перемінну – уводимо

для розрахунку вільного члена шуканої моделі – коефіцієнт "b<sub>0</sub>".

Після складання таблиці перевіряємо правильність її заповнення. Умова симетричності репліки вимагає, щоб у кожному стовпці утримувалося рівне число мінусів і плюсів. Умова виконується.

Реалізація плану експерименту. Для визначення помилки експерименту досліди варто дублювати. Частіше дублюють не всі досліди, а тільки досліди на основному рівні. У цьому випадку розрахунок дисперсії дослідів  $S_y$  проводимо по формулі:

$$S_y^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(Y_{oi} - Y_o)^2}{f_1} \quad (10)$$

де  $n$  – кількість дублів на основному рівні;

$i$  – номер дублю;

$Y_{oi}$  – значення параметра оптимізації в  $i$ -ом дублі;

$Y_o$  – середнє арифметичне результатів усіх дублів;

$f_1$  – число ступіней свободи ( $f_1 = n - 1$ ).

Для визначення дисперсії дослідів були організовано досліди 9-11 на основному рівні. При цьому отримані наступні значення параметра оптимізації: досвід 9 – 0,39; досвід 10 – 0,42; досвід 11 – 0,4.

Визначаємо  $S_y^2$ . Будуємо розрахункову таблицю 7.3.

Таблиця 7.3 – Розрахункова таблиця дисперсії дослідів

Дослід	$y_e$	$ y_{oe} - y_o $	$\Delta y_e^2$	$\Sigma \Delta y$
9	0,39	0,01	0,0001	0,0005
10	0,42	0,02	0,0004	
11	0,4	0	0	
	$y_o = 0,4$			

Тоді

$$S_y^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(Y_{oi} - Y_o)^2}{f_1} = \frac{0,0005}{3-1} = 0,00025 ;$$

Побудова математичної моделі. Після реалізації всіх дослідів матриці

планування по їхніх результатах будують математичну модель досліджуваного процесу. Для цього при використанні ДФЕ розраховуємо коефіцієнти регресії рівняння по формулі:

$$b_j = \sum_{j=1}^n \frac{X_{jn} \cdot Y_n}{N} \quad (7.1)$$

де  $b_j$  – значення  $j$ -го коефіцієнту регресії;

$X_{jn}$  – значення  $j$ -го фактору в  $n$ -ом досліді в кодованому вигляді;

$Y_n$  – значення параметру оптимізації в  $n$ -ом досліді;

$N$  – число дослідів в матриці планування.

В результаті отримуємо модель, котра має наступний вигляд:

$$Y = b_0 + b_1X_1 + b_2X_2 + b_3X_3 + \dots + b_jX_j$$

В реалізації матриці планування отримані наступні результати (табл. 7.4).

Таблиця 7.4 – Результати дослідів

№№	Дослід							
	1	2	3	4	5	6	7	8
Результат	0,184	0,292	0,188	0,298	0,276	0,438	0,282	0,448

По формулі розраховуємо коефіцієнти регресії шуканих моделей:

$$b_0 = 1/8 \cdot [0,184 + 0,292 + 0,188 + 0,298 + 0,276 + 0,438 + 0,282 + 0,448] = 0,3,$$

$$b_1 = 1/8 \cdot [0,184 - 0,292 + 0,188 - 0,298 + 0,276 - 0,438 + 0,282 - 0,448] = -0,068,$$

$$b_2 = 1/8 \cdot [0,184 + 0,292 - 0,188 - 0,298 + 0,276 + 0,438 - 0,282 - 0,448] = -0,0033,$$

$$b_3 = 1/8 \cdot [0,184 + 0,292 + 0,188 + 0,298 - 0,276 - 0,438 - 0,282 - 0,448] = -0,06,$$

Таким чином, отримана лінійна модель має попередньо наступний вид:

$$y = 0,3 - 0,068 \cdot X_1 - 0,003 \cdot X_2 - 0,06 \cdot X_3$$

Лінійна модель має вигляд:  $y = 53,5 + 8,5 \cdot X_1 - 1,0 \cdot X_2 - 17 \cdot X_3$

*Статистичний аналіз моделі.* Метою аналізу є перевірка придатності моделі для її використання при описі досліджуваного об'єкта.

Аналіз складається з двох етапів. На першому етапі перевіряємо статистичну значимість коефіцієнтів регресії. У статистику прийнято

здійснювати перевірку значимості коефіцієнтів регресії за допомогою критерію Ст'юдента. Для цього розраховуємо довірчий інтервал коефіцієнтів

$$\Delta b_i = t_{\alpha, f_1} \cdot S_{bi} \quad (7.2)$$

де  $S_{bi}$  – середньоквадратична помилка у визначенні коефіцієнтів регресії;

$$S_{bi} = \sqrt{\frac{S_y^2}{N}} \quad (7.3)$$

$t_{\alpha, f_1}$  – значення критерію Ст'юдента, що вибирається в залежності від рівня значимості і числа ступенів волі при визначенні дисперсії дослідження  $f_1$ .

На другому етапі остаточно отримане рівняння перевіряємо на адекватність, тобто його придатність для опису об'єкта дослідження.

Розрахуємо довірчий інтервал коефіцієнтів регресії. Для цього спочатку визначимо  $S_{bi}$ .

$$S_{bi} = \sqrt{\frac{0,00025}{8}} = \pm 0,0056$$

Вибираємо для  $\alpha = 0,05$  и  $f_1 = 2$  значення критерію Ст'юдента, дорівнює 4,3. Визначаємо довірчий інтервал:

$$\Delta b_i = \pm 4,3 \cdot 0,0056 = \pm 0,024,$$

У такий спосіб у всіх випадках, в отриманих рівняннях коефіцієнт "b<sub>2</sub>" виявився статично не значимий, і рівняння здобувають остаточно наступний вид:

$$y = 0,3 - 0,068 \cdot X_1 - 0,06 \cdot X_3;$$

Тепер перевіряємо адекватність отриманих моделей у цілому. Для цього підставляємо в отримане рівняння послідовно для всіх дослідів значення "X<sub>i</sub>" у кодованому виді, що беремо з таблиці 7.2. Для визначення дисперсності неадекватності складаємо розрахункову таблицю 7.5. Складаємо виходячи з алгоритму перевірки отриманого рівняння на адекватність, тобто його придатності для опису об'єкта дослідження. Послідовність перевірки така:

1. По отриманій моделі визначають по черзі для всіх досвідів матриці планування розрахункові значення параметра оптимізації. Для цього в рівняння

підставляємо значення факторів у кодованому виді;

2. По формулі одержуємо оцінку дисперсії неадекватності:

$$S_{неад}^2 = \frac{\sum_{n=1}^N (y_n^{експер} - y_n^{расч})^2}{f_2} \quad (7.4)$$

де  $f_2 = N - K'$ ,  $K'$  – число коефіцієнтів моделі, включи  $b_0$ .

3. Визначають розрахункове значення критерію Фішера порівнюють з табличним, котре вибирають з таблиці у залежності від рівня значимості і числа ступенів волі  $f_1, f_2$ .

$$F_{f_1, f_2}^{расч} = \frac{S_{неад}^2}{S_y^2} \quad (7.5)$$

Таблиця 7.5 – Розрахунок дисперсії неадекватності

Дослід	Значення у		$\Delta y$	$\Delta y^2$	
	експер.	розрах.			
1	0,184	0,172	0,012	0,000144	
2	0,292	0,308	0,016	0,000256	
3	0,188	0,172	0,016	0,000256	
4	0,298	0,308	0,01	0,0001	
5	0,276	0,292	0,016	0,000256	
6	0,438	0,428	0,01	0,0001	
7	0,282	0,292	0,01	0,0001	
8	0,448	0,428	0,02	0,0004	

$$\Sigma = 0,0016$$

$$S_{неад}^2 = \frac{0,0016}{5} = 0,00032; \quad F_{f_1, f_2}^{расч} = \frac{2,25}{8} = 0,281;$$

З таблиці для  $\alpha = 0,05$ ;  $f_1 = 2$  і  $f_2 = 1$  знаходимо табличне значення критерію Фішера, рівне 2,3. Таким чином, умова адекватності моделі виконується і нею можна користуватися для розрахунку значень коефіцієнта тертя. При цьому варто пам'ятати, що отримана модель описує процес впливання факторів на коефіцієнт тертя тільки у вивчених межах варіювання факторів.

*Інтерпретація результатів.* Отримана адекватна модель дозволяє розрахувати значення параметра оптимізації для будь-якої крапки вивченого факторного простору.

Крім того, отриману залежність можна представити графічно у виді впливу окремих факторів на параметр оптимізації. При цьому звичайно будують залежність  $y = f(x_i)$  за умови, що всі інші фактори фіксують на постійному рівні. Тоді підставляємо в дане рівняння значення фактора  $X_2$  і  $X_3$  у кодованому виді (зі знаком "-"). Потім у перетворене (спрошене) рівняння підставляємо послідовно значення фактора  $X_1$  на нижньому, основному і верхньому рівнях, тобто -1; 0; +1 і одержуємо шуканий графік.

Представимо графічну залежність коефіцієнта тертя від температури металу (фактор  $X_1$ ) для випадку, коли інші  $X_j = 0$ .

Тоді рівняння прийме вид:

$$y = 0,3 - 0,068 \cdot X_1$$

Визначимо  $y$  для випадків, коли  $X_1 = -1; 0; +1$ . Підставимо ці значення в рівняння. Одержимо відповідно значення  $y$ :

$$y_1=0,232; y_2=0,3; y_3=0,368.$$

Аналогічно представимо графічну залежність коефіцієнта тертя від окружної швидкості валків (фактор  $X_3$ ) для випадку, коли інші  $X_j = 0$ . Тоді рівняння прийме вид:

$$y = 0,3 - 0,06 \cdot X_3$$

Визначимо  $y$  для випадків, коли  $X_3 = -1; 0; +1$ . Підставимо ці значення в рівняння. Одержимо відповідно значення  $y$ , рівні:

$$y_1=0,24; y_2=0,3; y_3=0,36.$$

Будуємо графічні залежності коефіцієнта тертя від температури металу та окружної швидкості валків на одних графіках (рис. 7.1-7.3).

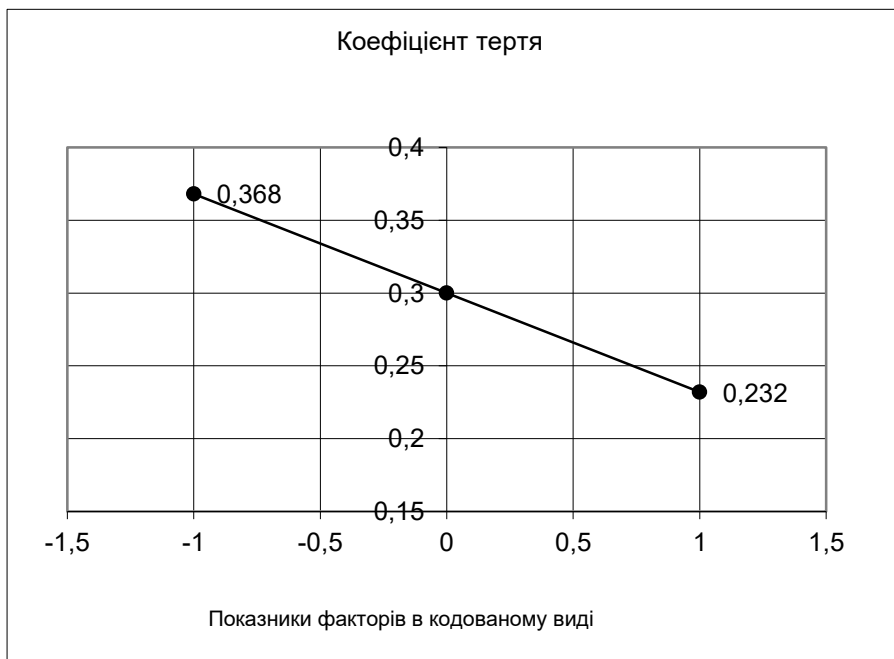


Рисунок 7.1 – Графічна залежність коефіцієнта тертя від температури металу

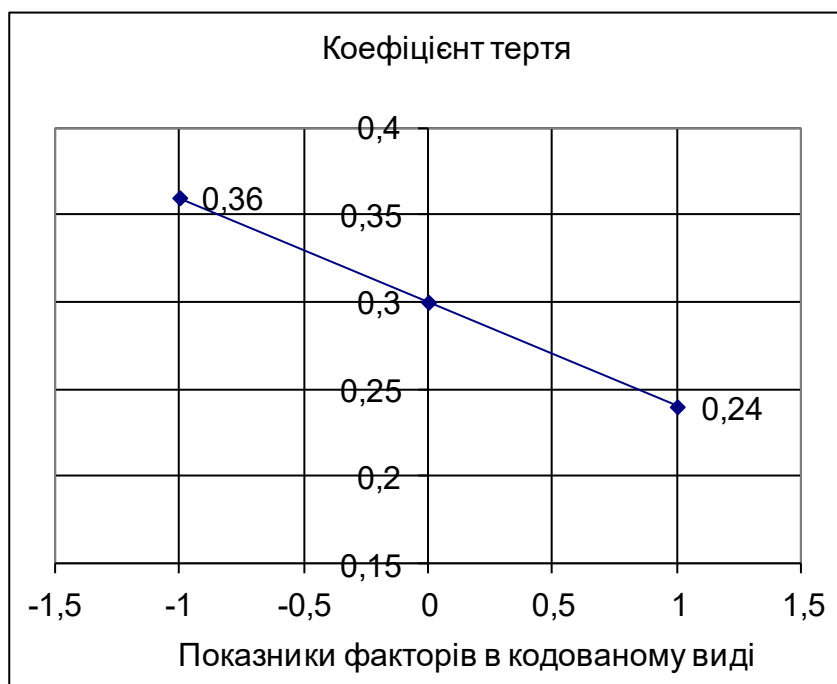


Рисунок 7.2 – Графічна залежність коефіцієнта тертя від окружної швидкості валків

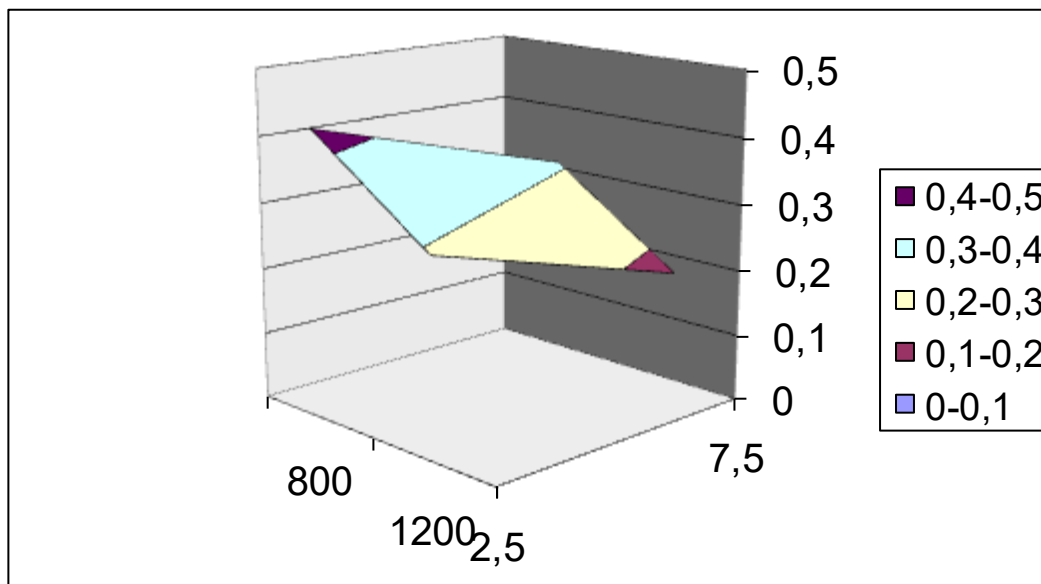


Рисунок 7.3 – Оптимальні поверхні відгуку коефіцієнта тертя

### Приклад № 2

#### *Математична модель механічних властивостей сталі 09Г2 при контрольованій прокатці крупно сортних профілів*

Експериментальні дослідження технології проведені в умовах крупно сортного стана 620 Краматорського металургійного заводу при виробництві штабових профілів № 18 – 24 зі сталі 09Г2.

У результаті системного аналізу впливу факторів технології прокатки на механічні властивості сталі в якості таких факторів було обрано: температура кінця прокатки (температура розкату на вході в чистовий калібр)  $t_{к.п.}$ ; вміст сталі вуглецю (C), марганцю (Mn) та кремнію (Si) у вигляді вуглецевого еквівалента:  $C_{екв} = C + 0,25 Mn + 0,1 Si$ ; товщина стінки штабового профілю  $d$ .

Діапазон варіювання температури кінця прокатки 930 – 770 °С визначений на верхньому рівні технологічною інструкцією з нагрівання сталі 09Г2 (не вище 1200 °С) та тепловими втратами за час деформування в обтискній та чорновій клітках, на нижньому рівні – припустимими енергосиловими параметрами прокатки в чистовій клітці. Реалізація температурного режиму прокатки здійснювалася з використанням дослідно-промислового пристрою для



прискореного між деформаційного підстужування розкату водоповітряною сумішшю.

Для визначення правомірності використання вуглецевого еквівалента в представленому виді проведена статистична обробка впливу хімічного складу на рівень механічних властивостей сталей 09Г2 та 10ХСНД при виробництві штабових профілів. На ЕОМ ЕС-1020 по стандартній програмі Regre оброблені результати здавальних випробувань за рік. Масиви склалися з даних випробувань 190 плавок сталі 09Г2 та 43 плавок сталі 10ХСНД. По тому самому масиві отримані рівняння двох типів: вплив всіх легуючих елементів у плавці й вплив вуглецевого еквівалента на рівень механічних властивостей. Розходження в коефіцієнтах множинної кореляції для даних рівнянь не перевищувало 0,04 – 0,15. Діапазон можливих змін хімічного складу низьколегованої сталі дослідженого класу визначений вимогами ДЕРЖСТАНДАРТ 5521 – 76.

Рівні варіювання геометричних розмірів прокату визначені профільним сортаментом стана 620 та склали  $d = 9 \div 13$  мм.

Відгуками впливу технологічних параметрів прокатки й хімічного складу сталі обрані статистичні оцінки властивостей міцності: границя текучості ( $\sigma_T$ ) та тимчасовий опір розриву ( $\sigma_B$ ), а також ударна в'язкість при температурі випробування – 40 °С (КСV<sup>-40</sup>). Ці характеристики є визначальними для дослідженого сортаменту відповідно до вимог Правил Регістра. Пластичні властивості прокату, як показали дослідно-промислові дослідження, мають значний запас та не лімітують випуск високоякісної продукції.

При розгляді можливих варіантів плану експерименту був обраний повний факторний експеримент (ПФЕ).

## Досліджуваний параметр – межа міцності

Досліджувані фактори, характер їхньої зміни й схеми кодування наведені в таблиці 7.6.

Таблиця 7.6 – Досліджувані фактори

Характеристика	Фактор		
	d, мм	C <sub>екв</sub>	t <sub>к.п.</sub> , °C
	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	X <sub>3</sub>
Основний рівень	11	0,5	850
Інтервал варіювання	1	0,03	50
Нижній рівень (кодоване значення -1, -)	10	0,47	800
Верхній рівень (кодоване значення +1, +)	12	0,53	900

### *Складання плану експерименту*

Щоб уникнути повторів дослідів, скористаємося принципом, представленим в таблиці 7.7.

Таблиця 7.7 – Складання плану експерименту

Номер дослідів	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	X <sub>3</sub>	X <sub>0</sub>
1	+	+	+	+
2	-	+	+	+
3	+	-	+	+
4	-	-	+	+
5	+	+	-	+
6	-	+	-	+
7	+	-	-	+
8	-	-	-	+

Фактор, позначений " $X_0$ " – так називаємо фіктивну змінну – уводимо для розрахунку вільного члена шуканої моделі – коефіцієнта " $b_0$ ". Після складання таблиці перевіряємо правильність її заповнення. Умова симетричності репліки вимагає, щоб у кожному стовпці знаходилося рівне число мінусів та плюсів. Умова виконується.

#### *Реалізація плану експерименту*

Для визначення помилки експерименту досліди будемо дублювати (на основному рівні). У цьому випадку розрахунок дисперсії досліду  $S_y$  проводимо по формулі:

$$S^2_y = (Y_{0i} - Y_0)^2 / f_1 = 3,14 / 2 = 1,57,$$

де  $n_0$  – кількість дублів на основному рівні;

$i$  – номер дубля;

$Y_{0i}$  – значення параметра оптимізації в  $i$ -ому дублі;

$Y_0$  – середнє арифметичне результатів всіх дублів;

$f$  – число ступенів волі ( $f_1 = n - 1$ ).

Для визначення дисперсії досліду реалізовано додаткові досліди 9 – 11 на основному рівні. При цьому отримано наступні значення параметра оптимізації дослід 9 – 500 МПа; 10 – 500 МПа; 11 – 505 МПа.

Визначаємо  $S_y$ . Складаємо розрахункову таблицю 7.8.

Таблиця 7.8 – Розрахункова таблиця

Дослід	$Y_e$	$ Y_{0e} - Y_0 $	$\Delta y_e^2$
9	500	2	4
10	500	2	4
11	505	3	9
	$Y_0 = 502$	$\Sigma = 7$	$\Sigma = 17$

Після реалізації всіх дослідів матриці планування по їх результатах будемо математичну модель процесу. Для цього при використанні ПФЕ розраховуємо коефіцієнти регресії рівняння по формулі:

$$b_j = \sum_{j=1}^n X_{jn} \cdot Y_n / N ,$$

$b_j$  – значення  $j$ -го коефіцієнта регресії ( $j = 0,1,2,\dots,n$ );

$X_{jn}$  – значення  $j$ -го фактора в  $n$ -му досліді в кодованому вигляді;

$Y_n$  – значення параметра оптимізації в  $n$ -му досліді ;

$N$  – число дослідів у матриці планування.

В результаті одержують модель, що має такий вигляд:

$$Y = b_0 + b_{1x} + b_{2x} + \dots + b_{jx} .$$

У реалізованій матриці планування отримані наступні результати (табл. 7.9).

Таблиця 7.9 – Результати дослідів

Дослід	1	2	3	4	5	6	7	8
Результат	505	515	475	485	535	545	495	515

Розраховуємо коефіцієнти регресії шуканої моделі. Для цього ми повинні взяти з таблиці 7.2 значення фактора " $X_i$ " у кодованому вигляді (+ 1 або – 1) та перемножити на відповідні їм значення " $y$ " узяті з таблиці 7.5. Підставивши ці значення одержимо:

$$b_1 = 1/8[505 - 515 + 475 - 485 + 535 - 545 + 495 - 515] = -6,25 .$$

Аналогічно визначаємо інші коефіцієнти:  $b_0 = 509$ ;  $b_2 = 16,25$ ;  $b_3 = - 13,75$ .

Таким чином, отримана лінійна модель має попередньо наступний вигляд:

$$y = 509 - 6,25 \cdot X_1 + 16,25 \cdot X_2 - 13,75 \cdot X_3 .$$

### *Статистичний аналіз моделі*

Метою аналізу є перевірка придатності моделі для її використання при описі досліджуваного об'єкта.

Аналіз складається із двох етапів. На першому етапі перевіряємо статистичну значимість коефіцієнтів регресії. У статистиці прийнято здійснювати перевірку значимості коефіцієнтів регресії за допомогою критерію Ст'юдента ( $t$  – критерію). Для цього розраховуємо довірчий інтервал коефіцієнтів:

$$\Delta b_i = t_{\alpha i} \cdot S_{b_i},$$

$S_{b_i}$  – середньоквадратична помилка у визначенні коефіцієнтів регресії:

$$S_{b_i} = \sqrt{\frac{S_y^2}{N}},$$

$t_{\alpha i}$  – значення  $t$ -критерію, що вибираємо залежно від рівня значимості " $\alpha$ " та числа ступенів волі при визначенні дисперсії дослідження  $f_1$ .

Значення коефіцієнтів регресії порівнюємо з  $\Delta b_i$  та ті, які виявляються по абсолютній величині менші довірчого інтервалу, виключаємо з рівняння.

На другому етапі остаточно отримане рівняння перевіряємо на адекватність, тобто його придатність для опису об'єкта дослідження.

Розраховуємо довірчий інтервал коефіцієнтів регресії. Для цього спочатку визначимо  $S_{b_i}$ :

$$S_{b_i} = \sqrt{\frac{8,5}{8}} = \pm 1,03.$$

Вибираємо для  $\alpha = 0,05$  та  $f_1 = 2$  значення критерію Ст'юдента, дорівнює 4,3. Визначаємо  $\Delta b_i = \pm 4,3 \cdot 1,03 = \pm 4,43$ .

Таким чином, рівняння здобуває остаточно вигляд:

$$y = 509 - 6,25 \cdot X_1 + 16,25 \cdot X_2 - 13,75 \cdot X_3.$$

Тепер перевіряємо адекватність отриманої моделі в цілому. Для цього підставляємо в отримане рівняння послідовно для всіх дослідів значення " $X_i$ " у кодованому вигляді, які беремо з таблиці 7.2. Маємо:

$$y_1 = 509 - 6,25 \cdot (+1) + 16,25 \cdot (+1) - 13,75 \cdot (+1) = 505.$$

Аналогічно визначаємо всі інші " $y$ ". Результати заносимо в таблицю 7.10.

По формулі одержуємо оцінку дисперсії неадекватності:

$$S_{неад}^2 = \frac{\sum_{n=1}^N (y_n^{расч} - y_n^{эсп})}{f_2} = \frac{46}{8-4} = 11,5,$$

де  $f_2 = N - K'$ ,  $K'$  – число коефіцієнтів моделі, включаючи  $b_0$ .

Визначаємо розрахункове значення критерію Фішера:

$$F_{f, f_2}^{расч} = \frac{S_{неад}^2}{S_y^2} = \frac{11,5}{8,5} = 1,35.$$

Таблиця 7.10 – Розрахунок дисперсії неадекватності

Дослід	Значення у		$\Delta y$	$\Delta y^2$
	Експериментальне	Розрахункове		
1	505	505	0	0
2	515	518	3	9
3	475	473	2	4
4	485	485	0	0
5	535	533	2	4
6	545	545	0	0
7	495	500	5	25
8	515	513	2	4

$\Sigma = 46$

З довідкових даних для  $\alpha = 0,05$ ,  $f_1 = 2$  та  $f_2 = 4$  знаходимо табличне значення критерію Фішера, рівне 19,2. Таким чином, умова адекватності моделі  $F^{расч} < F^{табл}$  виконується й нею можна користуватися для розрахунку значень межі міцності. При цьому варто пам'ятати, що отримана модель описує межу міцності сталі тільки у вивчених межах варіювання факторів.

### *Інтерпретація результатів*

Отримана адекватна модель дозволяє розрахувати значення параметра оптимізації для будь-якої точки вивченого факторного простору.

Отриману залежність можна представити графічно у вигляді впливу окремих факторів на параметр оптимізації. При цьому зазвичай будують залежність  $y = f(x_i)$  за умови, що всі інші фактори фіксують на постійному рівні. Тоді підставляємо в дане рівняння значення фактора  $X_2$  та  $X_3$  у кодованому вигляді (зі знаком " - "). Потім у перетворене (спрощене) рівняння підставляємо послідовно значення фактора  $X_1$  на нижньому, основному й верхньому рівнях, тобто  $-1, 0, +1$  та одержуємо шуканий графік.

Представимо графічну залежність межі міцності сталі від товщини профілю (фактор  $X_1$ ) для випадку, коли інші " $X_i = 0$ ". Тоді рівняння має вигляд  $y = 509 - 6,25X_1$ .

Визначимо "у" для випадків, коли  $X_1 = -1$  та  $X_1 = +1$ . Підставимо ці значення в рівняння. Одержимо відповідно значення "у", рівні 509, 512,25 та 502,75 МПа. Будуємо графік (рис. 7.4). На цьому ж графіку наносимо лінії для інших рівнів інших факторів. В об'ємному зображенні залежність представлена на рис. 7.5.

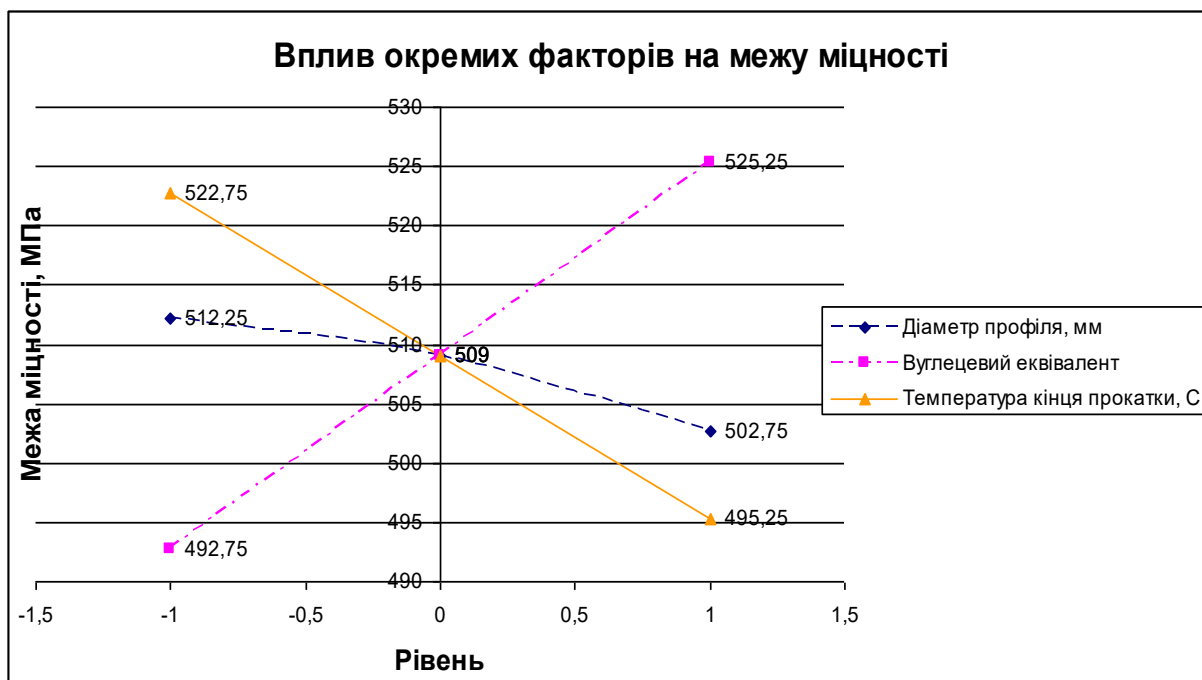


Рисунок 7.4 – Вплив окремих факторів на межу міцності

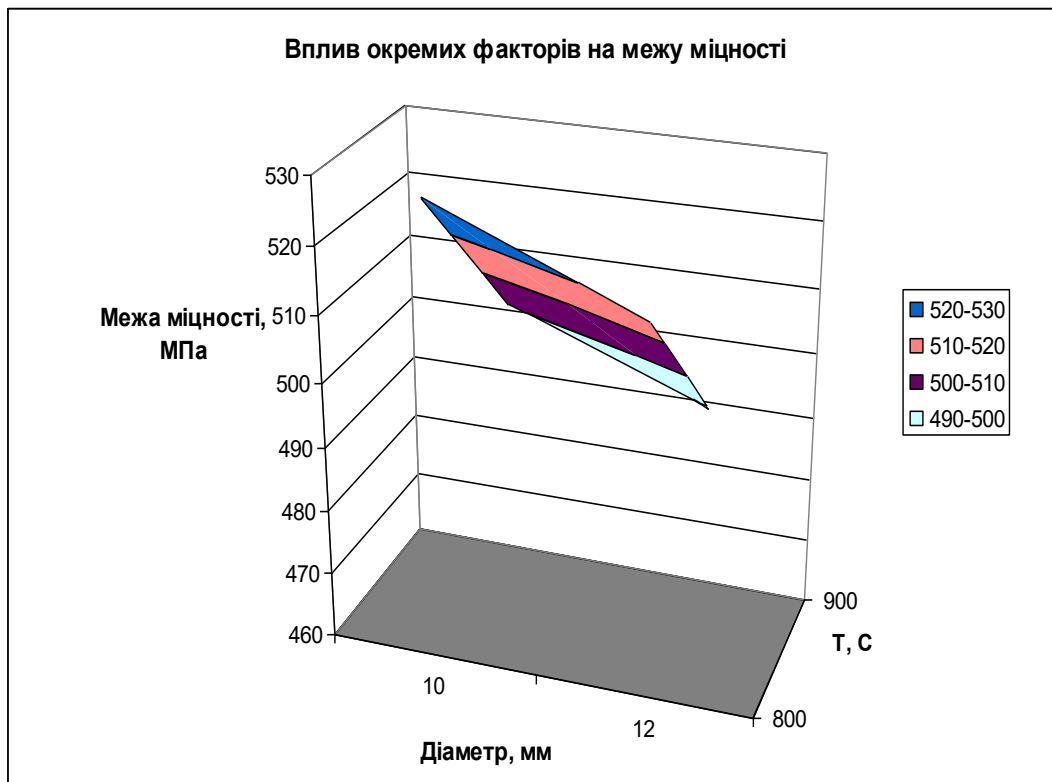


Рисунок 7.5 – Вплив окремих факторів на межу міцності (об'ємний вигляд)

## 2. Досліджуваний параметр - границя текучості

Досліджувані фактори, характер їхньої зміни й схеми кодування наведені в таблиці 7.6.

### *Складання плану експерименту*

Щоб уникнути повторів дослідів, скористаємося принципом, представленим в таблиці 7.7.

### *Реалізація плану експерименту*

Для визначення помилки експерименту досліді будемо дублювати (на основному рівні). У цьому випадку розрахунок дисперсії досліді  $S_y$  проводимо по формулі:

$$S^2_y = (Y_{0i} - Y_0)^2 / f_1 = 3,14 / 2 = 1,57.$$

Для визначення дисперсії досліді реалізовано додаткові досліді 9 – 11 на основному рівні. При цьому отримано наступні значення параметра оптимізації дослід 9 – 360 МПа; 10 – 365 МПа; 11 – 365 МПа.



Визначаємо  $S_y$ . Складаємо розрахункову таблицю 7.11.

Таблиця 7.11 – Розрахункова таблиця

Дослід	$Y_e$	$ Y_{0e} - Y_0 $	$\Delta y_e^2$
9	360	3	9
10	365	2	4
11	365	2	4
	$Y_0 = 363$	$\Sigma = 7$	$\Sigma = 17$

Після реалізації всіх дослідів матриці планування по їхніх результатах будуємо математичну модель процесу.

У реалізованій матриці планування отримано наступні результати (табл. 7.12).

Таблиця 7.12 – Результати дослідів

Дослід	1	2	3	4	5	6	7	8
Результат	360	370	335	345	395	405	360	370

Розраховуємо коефіцієнти регресії шуканої моделі. Для цього ми повинні взяти з таблиці 7.8 значення фактора " $X_i$ " у кодованому вигляді (+ 1 або - 1) та перемножити на відповідні їм значення " $y$ " узяті з таблиці 7.11. Підставивши ці значення одержимо:

$$b_1 = 1/8[360 - 370 + 335 - 345 + 395 - 405 + 360 - 370] = -5.$$

Аналогічно визначаємо інші коефіцієнти:  $b_0 = 367,5$ ;  $b_2 = + 15$ ;  $b_3 = - 15$ .

Таким чином, отримана лінійна модель має попередньо наступний вигляд:

$$y = 367,5 - 5 \cdot X_1 + 15 \cdot X_2 - 15 \cdot X_3.$$

### Статистичний аналіз моделі

Розраховуємо довірчий інтервал коефіцієнтів регресії. Для цього спочатку визначимо  $S_{bi}$ :

$$S_{bi} = \sqrt{\frac{8,5}{8}} = \pm 1,03.$$

Вибираємо для  $\alpha = 0,05$  та  $f_1 = 2$  значення критерію Ст'юдента, дорівнює 4,3. визначаємо  $\Delta b_i = \pm 4,3 \cdot 1,03 = \pm 4,43$ .

Таким чином, рівняння здобуває остаточний вигляд:

$$y = 367,5 - 5 \cdot X_1 + 15 \cdot X_2 - 15 \cdot X_3.$$

Тепер перевіряємо адекватність отриманої моделі в цілому. Для цього підставляємо в отримане рівняння послідовно для всіх дослідів значення " $X_i$ " у кодованому вигляді, які беремо з таблиці 7.8. Маємо:

$$y_1 = 367,5 - 5 \cdot (+1) + 15 \cdot (+1) - 15 \cdot (+1) = 362,5.$$

Аналогічно визначаємо всі інші "у". Результати заносимо в таблицю 7.13.

Таблиця 7.13 – Розрахунок дисперсії неадекватності

Дослід	Значення у		$\Delta y$	$\Delta y^2$
	Експериментальне	Розрахункове		
1	360	362,5	2,5	6,25
2	370	372,5	2,5	6,25
3	335	332,5	2,5	6,25
4	345	342,5	2,5	6,25
5	395	392,5	2,5	6,25
6	405	402,5	2,5	6,25
7	360	362,5	2,5	6,25
8	370	372,5	2,5	6,25

$\Sigma = 50$

По формулі одержуємо оцінку дисперсії неадекватності:

$$S_{неад}^2 = \frac{\sum_{n=1}^N (y_n^{расч} - y_n^{эксн})}{f_2} = \frac{50}{8-4} = 12,5.$$

Визначаємо розрахункове значення критерію Фішера:

$$F_{f, f_{21}}^{расч} = \frac{S_{неад}^2}{S_y^2} = \frac{12,5}{8,5} = 1,47.$$

З довідкових даних для  $\alpha = 0,05$ ,  $f_1 = 2$  та  $f_2 = 4$  знаходимо табличні значення критерію Фішера, рівне 19,2. Таким чином, умова адекватності моделі  $F^{расч} < F^{табл}$  виконується й нею можна користуватися для розрахунку значень границі текучості. При цьому варто пам'ятати, що отримана модель описує границю текучості сталі тільки у вивчених межах варіювання факторів.

### *Інтерпретація результатів*

Отримана адекватна модель дозволяє розрахувати значення параметра оптимізації для будь-якої точки вивченого факторного простору.

Представимо графічну залежність границі текучості сталі від товщини профілю (фактор  $X_1$ ) для випадку, коли інші " $X_i = 0$ ". Тоді рівняння має вигляд  $y = 367,5 - 5X_1$ .

Визначимо "у" для випадків, коли  $X_1 = -1$  та  $X_1 = +1$ . Підставимо ці значення в рівняння. Одержимо відповідно значення "у", рівні 367,5, 472,5 та 362,5 МПа. Будуємо графік. На цьому ж графіку наносимо лінії для інших рівнів інших факторів. В об'ємному зображенні залежність представлена на рисунок 7.6.

Після обробки результатів експерименту отримано наступні рівняння:

$$\sigma_B = 509 - 6,25 d + 16,25 C_{екв} - 13,75 t_{к.п.};$$

$$\sigma_T = 367,5 - 5 d + 15 C_{екв} - 15 t_{к.п.};$$

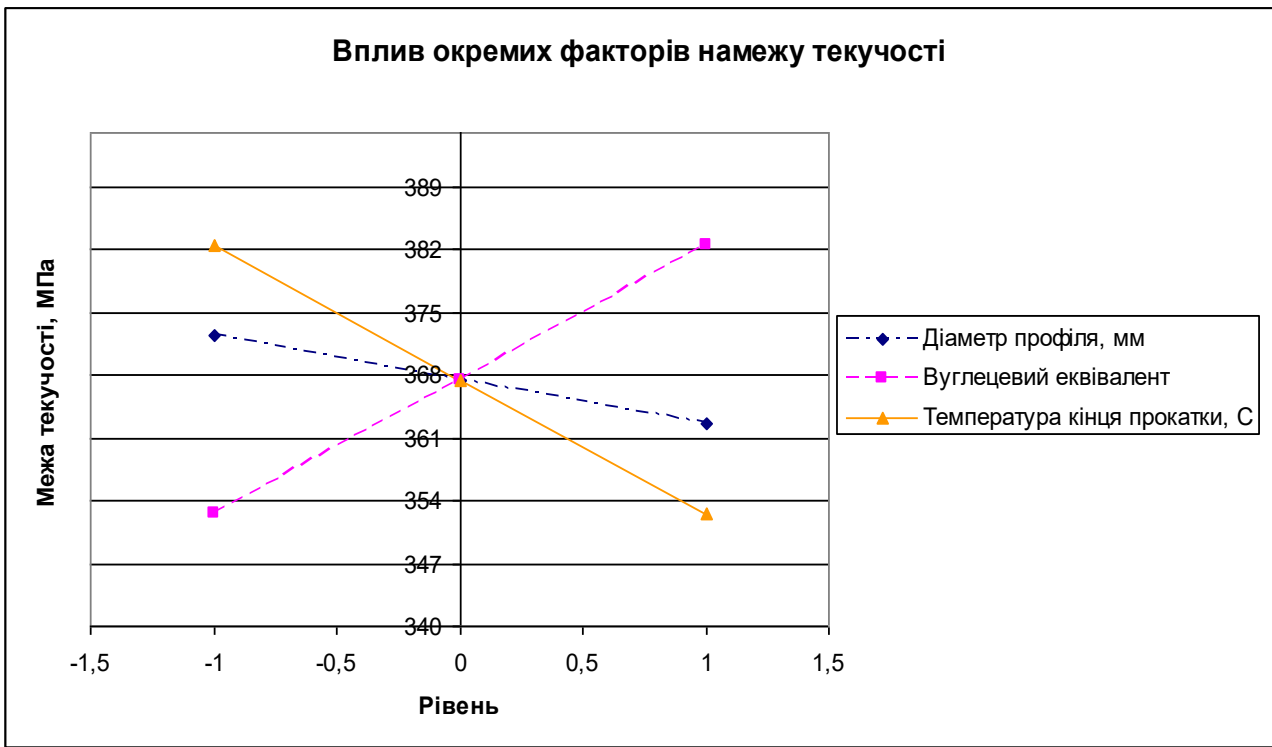


Рисунок 7.6 – Вплив окремих факторів на межу міцності

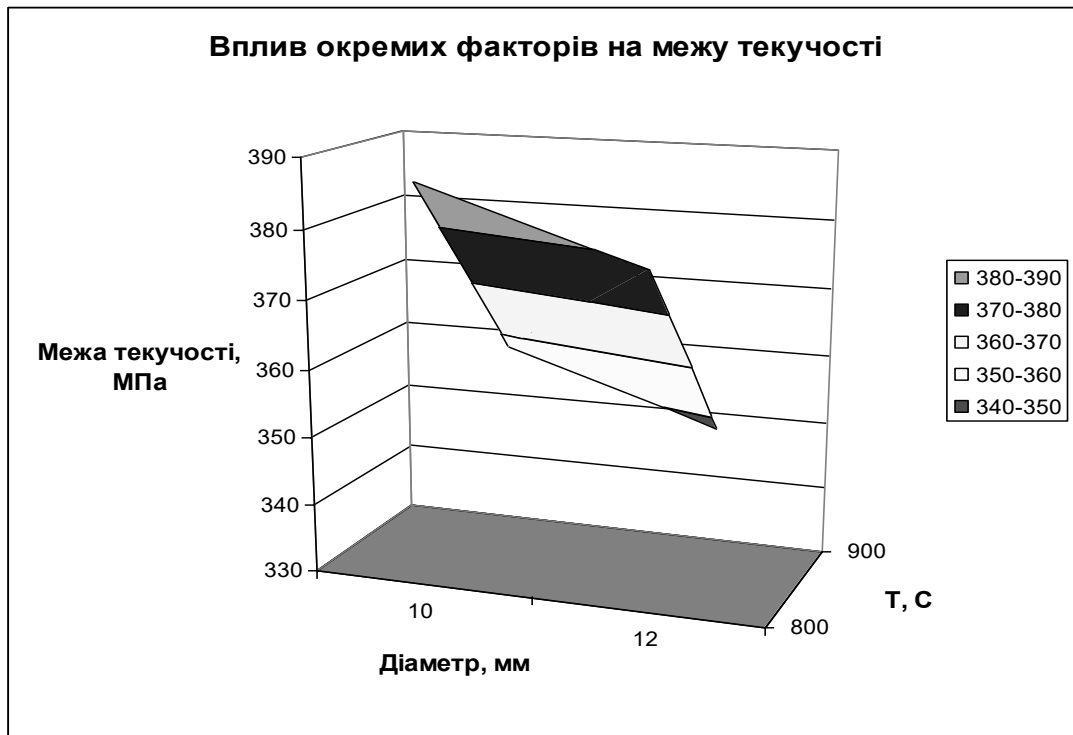


Рисунок 7.8 – Вплив окремих факторів на межу міцності (об'ємний вигляд)

Перевірка за допомогою критерію Фішера підтвердила відтворюваність дослідів та адекватність моделей, отриманих після відкидання незначних членів відповідно до критерію Ст'юдента.

Аналіз отриманих рівнянь показує, що зі зниженням температури кінця прокатки з 930 до 770 °С властивості міцності сталі збільшуються на 30 – 40 МПа, збільшення ударної в'язкості порядку 50 % становить від 1,2 – 1,6 до 1,9 – 2,3 МДж/м<sup>2</sup>.

При збільшенні вуглецевого еквівалента від 0,47 до 0,55 % властивості міцності сталі зростають на 40 – 55 МПа, грузлі на 0,4 – 0,5 МДж/м<sup>2</sup>.

Зі збільшенням товщини стінки профілю від 9 до 13 мм властивості міцності знижуються на 20 – 40 МПа, що може бути пояснено інерційністю процесу внутрішнього теплообміну в крупно сортних профілях, коли при однаковій температурі поверхні температура в центрі більш масивного профілю може бути значно вище.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Данченко В.Н., Миленин А.А., Кузьменко В.И., Гриневич В.А. Компьютерное моделирование процессов обработки металлов давлением. Численные методы. – Днепропетровск: «Системные технологии», 2005. – 448 с.
2. Кравчук А.С. К теории контактных задач упругости с трением на границе // Механика деформируемого твердого тела / Куйбышевск уп. т., 1976. – С.102-105.
3. Кравчук А.С. К теории контактных задач с учетом трения на поверхности соприкосновения // Прикл. математика и механика. – 1980. – Т.44.- Вып.1. – С.122-129.
4. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Краткий курс теоретической физики Механика. Электродинамика. – М.: Наука, 1969. – 272 с.
5. Кузьменко В.И. О вариационном подходе в теории контактных задач для нелинейноупругих слоистых тел // Прикл. математика и механика. – 1979. – Т.43. – Вып.1. – С.893-901.
6. Кузьменко В.И. Контактные задачи теории пластичности с учетом трения на контактной поверхности // Трение и износ. – 1987. – Т.8. – С.45-52.
7. Кузьменко В.И. О контактных задачах теории пластичности при сложном нагружении // Прикл. математика и механика. - 1984. – Т.48. – Вып.3. – С.473-481.
8. Кузьменко В.И., Балакин В.Ф. Решение на ЭВМ задач пластического деформирования. – Киев: Техника, 1990. – 136 с.
9. Теория обработки металлов давлением / Тарновский И.Я., Поздеев А.А., Ганаго О.А. и др. – М.: Металлургиздат, 1963. – 672 с.
10. Колмогоров В.Л. Механика обработки металлов давлением. – М.: Металлургия, 1986. – 688 с.
11. Дылюк А.Г. Малоотходная прокатка слябов в универсальных клетях. – М., 1997. – 62 с.

12. Калашников В.Д. Математическое моделирование процесса прокатки полос прямоугольного сечения с учетом уширения. – Днепропетровск. – 1988. – С.11-12.
13. Ильюшин А.А., Поздеев А.А., Тарновский И.Я., Тарновский В.И.. Метод гидродинамических приближений в вариационных задачах пластического течения. – 1961. – Т.1. – С.59-67.
14. Гунн Г.Я., Полухин П.И., Прудковский Б.А. Пластическое формоизменение металлов. – М.: Металлургия, 1968. – 416 с.
15. Гидропрессование труб // В.Ф. Балакин, Г.А. Фень. В.И. Кузьменко и др. – К.: Техника, 1986. – 136 с.
16. Гунн Г.Я. Математическое моделирование процессов обработки металлов давлением. – М.: Металлургия, 1983. – 352 с.
17. Моделювання та оптимальні металургійні системи: Навчальний посібник // В.Б. Охотським, В.М. Ковшов, А.Г. Кучер та ін. – К.: ІЗМН, 1998. – 156 с.
18. Воронцов В.К., Полухин П.И. Фотопластичность. – М.: Металлургия, 1969. – 400 с.
19. Хензель А., Шпиттель Т. Расчет энергосиловых параметров в процессах обработки металлов давлением / Справ. Изд.: Пер. с нем. - М.: Металлургия, 1982. – 360 с.
20. Контактное трение в процессах обработки металлов давлением / Леванов А.Н., Колмогоров В.Л., Буркин С.П. и др. – М.: Металлургия, 1976. – 416 с.
21. Перлин И.Л. Теория прессования металлов. – М.: Металлургия, 1964. – 344 с.
22. Миленин А.А., Корсун П.В., Лапенко С.А. Комбинированный подход к моделированию процессов прокатки методом конечных элементов // Удосконалення процесів та обладнання обробки тиском у металургії і машинобудуванні.: Зб. наук. пр. – Краматорськ – Слов'янськ, 2000. – 506 с.

23. Миленин А.А., Дыя Х., Мускальски З. Анализ с помощью метода конечных элементов процесса волочения проволоки с изменением направления волочения между проходами // в кн. Удосконалення процесів і обладнання обробки тиском в металургії і машинобудуванні: Тематик. зб. наук. пр. - Краматорськ, 2003. – С.98-104.
24. Миленин А.А., Дыя Х., Мускальски З., Кавалек А. Определение распределения температуры в очаге деформации при волочении проволоки // В кн. Машиностроение и техносфера XXI века, сб. трудов Междунар. Научно-техн. Конф.- Донецк: ДонНТУ.- 2003. Т.2. – С.252-257.
25. Методичні вказівки до практичних занять з курсу “Термічна обробка металів і сплавів” для студентів спеціальності 6.090404 “Обробка металів тиском” / Укл. Б.П.Середа, І.В.Палехова, І.В.Кругляк – Запоріжжя: ЗДІА, 2001. – 28 с.
26. Божков А. И., Настич В. П. Плоскостность тонколистового проката. – М.: «СП. ИНТЕРМЕТ ИНЖИНИРИНГ», 1998. – 264 с.
27. Будакова А. А., Коновалов Ю. В., Ткалич К. Н. Профилирование валков листовых станов. – К.: Техника, 1986. – 190 с.
28. Васильев Я. Д. Обработка металлов давлением: Сб. науч. тр. ДМетИ. – М.: Металлургия, 1980. – Вып. 60. – С. 35-38.
29. Васильев Я. Д., Григоренко В. У., Данченко В. Н. Научные основы эффективных технологий производства тонкостенной длинномерной металлопродукции. – Днепропетровск: РВА «Дніпро-ВАЛ», 2002. – 353 с.
30. Васильев Я. Д., Дементенко А. В. и др. Совершенствование технологии производства тонких холоднокатаных полос с улучшенной плоскостностью // Metallurg. и горноруд. пром-сть. – 2004. – № 5. – С. 28-32.
31. Васильев Я. Д., Дементенко А. В. Исследование точности поперечного профиля горячекатаного подката // Производство проката. – 2002. – № 8. – С. 16-21.



32. Васильев Я. Д., Дементенко А. В. Условия (критерии) плоскостности при прокатке полос и листов // Изв. вуз. Черная металлургия. 2003. – № 9. – С. 30-34.
33. Васильев Я. Д., Сафьян А. М. Производство полосовой и листовой стали. – К.: Вища школа, 1976. – 192 с.
34. Выдрин В. Н. Теория и технология прокатки: Сб. науч. тр. ЧПИ. – Челябинск: Южно-Уральское изд., 1972. – Вып. 102. – С. 193-207.
35. Гостев К.А. Основные направления повышения качества листовой прокатки и современные требования к валкам // Сталь. – 2002. – №2. – С. 52-55.
36. Даниэли. Новая клеть для полубесконечной прокатки // Сталь. – 2000. – №10. – С. 71-73.
37. Железнов Ю. Д. Прокатка ровных полос и листов. – М.: Металлургия, 1971. – 200 с.
38. Железнов Ю.Д., Коцарь С.Л. Статические исследования точности тонколистовой прокатки. – М.: Металлургия, 1974. – 240 с.
39. Комановский А. З. Листопрокатное производство (справочник). – М.: Металлургия, 1979. – 280 с.
40. Коновалов Ю. В., Остапенко А. Л. и др. Расчет параметров листовой прокатки: справочник. – М.: Металлургия, 1986. – 430 с.
41. Лямбах Р.В., Шишкинский В.И. Автоматизация технологических процессов холодной прокатки листов. – М.: Металлургия, 1981. – 264 с.
42. Мазур В. Л., Сафьян А. М., Приходько И. Ю. и др. Управлением качеством тонколистового проката. – К.: Техника, 1997. – 384 с.
43. Робертс В. Холодная прокатка стали / Пер. с англ. – М.: Металлургия, 1982. – 544 с.
44. Рокотян С. Е. Теория прокатки и качество металла. – М.: Металлургия, 1981. – 224 с.
45. Целиков А.И., Томленов А.Д., Зюзин В.И. и др. Теория прокатки: справочник. – М.: Металлургия, 1982. – 335 с.

- 46.Чекмарев А.П., Ольдзиевский С.А. Методы исследования процессов прокатки. – М.: Металлургия, 1969. – 294 с.
- 47.Шаталов Р.Л. Управление показателями качества и деформируемостью полос при прокатке // Сталь. – 2003. – №9. – С. 31-34.
- 48.Косинський В.В., Васильєв О.Г., Белоконь Ю.А. Дослідження та вдосконалення процесів ОМТ. – Запоріжжя: ЗДІА. – 2006. – 96 с.
- 49.Обработка цветных металлов и сплавов. Учебное пособие. – Запорожье: ЗГИА, 2000. – 215 с.
- 50.Горелик С.С. Рекристаллизация металлов и сплавов. – М.: Металлургия, 1978. – 568 с.
- 51.Гуляев А.П. Металловедение. 5-е издание. – М.: Металлургия, 1977. – 664 с.
- 52.Лахтин Ю.М. Металловедение и термическая обработка металлов. – М.: Металлургия, 1979. – 320 с.
- 53.Манцев В.Н., Комаров Л.Г., Ланцова Л.П. Предотвращение крупнокристаллической структуры при изготовлении обшивок двойной кривизны // Металловедение и термическая обработка металлов. – 1999. – №6. – С. 7-13.
- 54.Нестеренко А.М., Левченко Г.В. Вплив термічної обробки на структуру і механічні властивості листових низьколегованих сталей // Металознавство та обробка металів. – 2002. – №4. – С. 18-23.
- 55.Фридландер И.Н., Берстнев В.В., Ткаченко Е.А. и др. Влияние термической обработки и деформации на величину зерна и механические свойства сплавов типа дуралюмин // Металловедение и термическая обработка металлов. – 2003. – №7. – С. 3-6.
- 56.Хэтч. Дж.Е. Алюминий. Свойства и физическое металловедение. – М.: Металлургия, 1989. – 425 с.
- 57.Чейлях А.П. К вопросу о термической обработке хромистых сталей. “Металловедение и термическая обработка металлов”. №10. 2000. С.18-21

- 58.Пасичник Н.В., Гесслер Ю.В., Родинков С.В. Исследование влияния величины обжатия за проход на минимальную возможную толщину ленты. “Сталь”. №2. 2003. С.64-68
- 59.Стела Ф., Карбони А., Бабич Л. Совершенствование прокатки сверхтонкой полосы. “Сталь”. №11. 2003. С.58-65
- 60.Капустин С. Не ржавеет, Украина.”Металл”. №6. 2005. С.40-47
- 61.Матвеев Б.Н. Непрерывная отливка тонких полос. “Производство проката”. №4. 2004. С.33-40
- 62.Оробцев В.В., Коновалов Ю.В. Расчет комплекса энергосберегающей технологии производства холоднокатанных полос. «Производство проката». №8. 2003. С.14-18
- 63.Агишев Л.А., Никитин В.Д. Прокатка коррозионно стойких сталей на 20-ти валковом стане. «Сталь». №7. 1994. С.50-53
- 64.Пименов А.Ф., Гриднев А.Т. Новая профилировка валков 20-ти валковых станов. «Бюллетень, Чорная металлургия». №7. 1993. С.52-54
- 65.Полухин П.И., Железнов Ю.Д., Полухин В.П. «Тонколистовая прокатка и служба валков». Изд. Металлургия; Москва. 1967
- 66.Производство листовой нержавеющей стали. Ксензук Ф.А., Павлицев В.Б., Металлургия, 1975, 2-е изд., 384 с.
- 67.Омановский А.З., Трощенко Н.А., Мовшович В.С. «Производство легированных холоднокатанных листов». Изд. Металлургия. Моска. – 1967
- 68.Термическая обработка качественной стали на металлургических заводах. Сокол И.Я. М.: Металлургия, 1986. 160 с.
- 69.Химушин Ф.Ф. «Нержавеющие стали». Изд. Металлургия. Москва, 1967
- 70.Гуляев А.П. «Металловедение». 5-е переработанное издание. М.:Металлургия, 1977
- 71.Штехно О.Н., Могушович О.С. Холодная прокатка полос из нержавеющей стали на реверсивном 20-ти валковом стане. Технологическая инструкция. Запорожье. Облполиграфиздат, 1988

72. Конструкция и расчет машин и механизмов прокатных станов. Королев А.А. Изд. «Металлургия», 1969, 464 с.
73. Листопрокатное производство (Справочник). Омановский А.З. М., «Металлургия», 1979. 280 с.
74. Робертс В.Л. Холодная прокатка стали. Пер. с англ. М., «Металлургия», 544 с. с ил.
75. Прокатка на многовалковых станах. Полухин П.И., Пименов А.Ф. и др. М., «Металлургия», 1981. 248 с.