1. ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

1.1 Комплексні числа і дії над ними

Означення 1.1. *Комплексним числом* z називають впорядковану пару дійсних чисел $(x, y) \in R^2$ [4, 8, 9]. Для будь-яких двох комплексних чисел $z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2)$ визначено:

1) відношення рівності: $z_1 = z_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2$;
2) операцію додавання: $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$;
3) операцію множення: $z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$.

Множина таких чисел з введеними операціями додавання і множення утворює поле, яке називають *полем комплексних чисел* і позначають C [8-13]. Відношення порядку на множині комплексних чисел не вводиться, тобто це поле, яке неможливо впорядкувати. Для операцій додавання і множення на множині комплексних чисел справедливі закони комутативності, асоціативності і дистрибутивності.

Якщо кожному комплексному числу вигляду $(x,0) \in C$ поставити у відповідність дійсне число $x \in R$, то буде встановлено взаємно-однозначну відповідність (бієкцію) між полем дійсних чисел і комплексними числами вигляду $(x,0)$, причому сумі елементів даної множини відповідатиме сума елементів з R, а добутку – добуток. В силу встановленого ізоморфізму, можна ототожнити елементи цих полів. Приймемо за означенням $(x,0) \equiv x \in R$. Звідси випливає, що множину дійсних чисел можна розглядати як підмножину множини комплексних чисел, тобто $R \subset C$.

У полі C існують нуль – число $0 = (0,0)$, одиниця – число $1 = (1,0)$ та уявна одиниця – число $i = (0,1)$, причому

$$i^2 = (0,1) \cdot (0,1) = (-1,0) = -1.$$

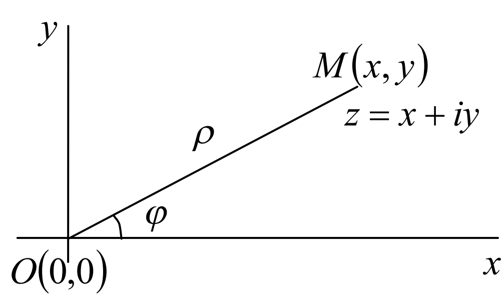
Кожне комплексне число можна представити в одній із трьох форм: алгебраїчній, тригонометричній, показниковій. Використовуючи означення операцій додавання і множення комплексних чисел, запишемо: $z = (x, y) = (x,0) \cdot (1,0) + (0,1) \cdot (y,0) = x + iy$.

Означення 1.2. Вираз $z = x + iy$ називають *алгебраїчною формою* запису комплексного числа, $x = \operatorname{Re} z$ називають *дійсною частиною* комплексного числа z, $y = \operatorname{Im} z$ – *уявною частиною* комплексного числа z [8, 9].

Додавання та множення комплексних чисел в алгебраїчній формі аналогічні відповідним діям над многочленами. Наведемо приклади:

1) $(2 + 3i) + (1 - i) = 3 + 2i$,
2) $(2 + 3i) - (1 - i) = 1 + 4i$,
3) $(2 + 3i)(1 - i) = 2 - 2i + 3i - 3i^2 = 2 + i + 3 = 5 + i$,

4)
$$\frac{2+3i}{1-i} = \frac{2+3i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} = \frac{2+2i+3i-3}{1+1} = \frac{-1+5i}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2} i.$$



Кожному комплексному числу $z = x + iy$ відповідає точка $M(x, y)$ або вектор, початок якого знаходиться в точці $O(0{,}0)$, а кінець – в точці $M(x, y)$ (рис. 1.1).

Довжину ρ вектора $\overline{OM}$ називають *модулем* комплексного числа і позначають $|z|$, тобто $\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. (1.1)

Рис. 1.1

Кут φ, утворений вектором $\overline{OM}$ з додатнім напрямком вісі OX, називають *аргументом* комплексного числа і позначають $\varphi = \operatorname{Arg} z$, він визначається не однозначно, а з точністю до доданка, кратного 2π:

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi,\ k \in Z,$$

де $\arg z$ – головне значення $\operatorname{Arg} z$, $-\pi < \arg z \le \pi$, причому

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg}\frac{y}{x}, & x > 0; \\ \pi + \operatorname{arctg}\frac{y}{x}, & x < 0,\ y \ge 0; \\ -\pi + \operatorname{arctg}\frac{y}{x}, & x < 0,\ y < 0; \\ \frac{\pi}{2}, & x = 0,\ y > 0; \\ -\frac{\pi}{2}, & x = 0,\ y < 0. \end{cases} \tag{1.2}$$

Тоді $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $z = x + iy = \rho\cos\varphi + i\rho\sin\varphi$

Означення 1.3. Вираз $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ називають *тригонометричною формою* запису комплексного числа [8, 9].

З геометричної точки зору сумою та різницею комплексних чисел є сума та різниця відповідних векторів. При множенні комплексних чисел їх модулі перемножують, а аргументи додають, тобто виконують розтягнення або стискання одного з векторів і поворот.

При виконанні дій з комплексними числами використовують формулу Ейлера [11]:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi. \tag{1.3}$$

Тоді $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \rho e^{i\varphi}$.

Означення 1.4. Вираз $z = \rho e^{i\varphi}$ називають *показниковою формою* запису комплексного числа [8, 9].

Запишемо число $z = -2 + 2\sqrt{3}i$ в тригонометричній та показниковій формі. Маємо: $x = -2$, $y = 2\sqrt{3}$, $\rho = \sqrt{(-2)^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 + 12} = 4$,

$$\varphi = \pi + \operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{3}}{-2} = \pi - \operatorname{arctg}\sqrt{3} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}.$$

Таким чином, $z = 4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = 4e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

Означення 1.5. Комплексне число $\bar{z} = x - iy$ називають *комплексно-спряженим* (або спряженим) до числа $z = x + iy$ [1, 2, 4, 8].

Наведемо властивості спряжених чисел:

1) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$,
2) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$,
3) $\bar{\bar{z}} = z$,
4) $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$, $n \in N$,
5) $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$

Розглянемо послідовність $\{z_n\}$ комплексних чисел, тобто відображення натуральних чисел на комплексну площину [4, 8, 9].

Означення 1.6. Якщо $\forall M > 0 \exists n_0 \in N : \forall n > n_0 |z_n| > M$, то говорять, що послідовність $\{z_n\}$ збігається до нескінченно віддаленої точки, або просто до нескінченності, і пишуть $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$.

Доповнюючи площину комплексної змінної введеною так нескінченно віддаленою точкою $z = \infty$, одержимо *розширену площину комплексної змінної*, яку позначають $\overline{C}$.

Околом нескінченно віддаленої точки будемо вважати сукупність усіх точок z, які задовольняють нерівність $|z| > R$ (з приєднанням нескінченно віддаленої точки), тобто сукупність усіх точок z, які розташовано поза кругом з центром в початку координат достатньо великого радіусу R.

1.2 Топологія комплексної площини. Сфера Рімана

Геометричною інтерпретацією множини комплексних чисел поряд з комплексною площиною може бути комплексна сфера. Оберемо у просторі R^3 прямокутну декартову систему координат $O\xi\eta\zeta$ таким чином, що вісі $O\xi$ і $O\eta$ співпадають з осями Ox і Oy системи координат комплексної площини C (рис. 1.2), і розглянемо сферу S, яку визначено в цій системі координат рівнянням:

$$\xi^2 + \eta^2 + \left(\zeta - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}. \tag{1.4}$$

Кожному комплексному числу $z = x + iy$ з координатами (x, y) на площині C поставимо у відповідність точку $Z(\xi, \eta, \zeta)$ – точку перетину зі сферою S променя, який виходить з точки $N(0,0,1)$ (полюса сфери) і проходить через точку z площини C. Точку Z називають сферичним зображенням комплексного числа $z \in C$. Побудовану відповідність називають *стереографічною проекцією*, а саму сферу S – *сферою Рімана*.

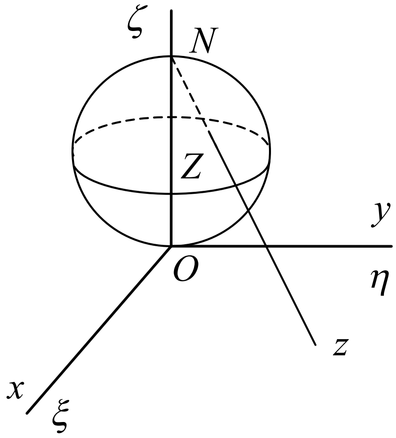


Рис. 1.2

Формули стереографічного проектування, що визначають зв'язок між координатами відповідних точок, мають вигляд:

$$\xi = \frac{x}{1+|z|^2},\ \eta = \frac{y}{1+|z|^2},\ \zeta = \frac{|z|^2}{1+|z|^2}, \tag{1.5}$$

$$x = \frac{\xi}{1-\zeta},\ y = \frac{\eta}{1-\zeta}. \tag{1.6}$$

Таким чином, стереографічна проекція визначає взаємно-однозначну відповідність між точками комплексної площини C і точками сфери Рімана S без її полюса. Полюсу сфери $N(0,0,1)$ ставиться у відповідність нескінченно віддалена точка $z = \infty$.

Ототожнення розширеної комплексної площини $\overline{C}$ зі сферою Рімана S дає геометричну інтерпретацію нескінченно віддаленої точки і не виділяє точку $z=\infty$ серед інших точок $\overline{C}$.

Наведемо наступні властивості розглянутого відображення:

- кола на комплексній площині відображаються в кола на сфері Рімана і, навпаки, кола на сфері Рімана, які не проходять через точку $N(0,0,1)$, мають своїми прообразами кола на комплексній площині;
- прямі на комплексній площині відображаються в кола на сфері Рімана, які проходять через точку $N(0,0,1)$ і, навпаки, кола на сфері Рімана, які проходять через точку $N(0,0,1)$, мають своїми прообразами прямі на комплексній площині.

Відповідно до двох способів геометричного представлення комплексних чисел вводять дві метрики: евклідову та сферичну. Евклідова метрика на множині комплексних чисел визначається за формулою:

$$d(z_1,z_2)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}\,, \tag{1.7}$$

де $z_1=x_1+iy_1$, $z_2=x_2+iy_2$.

Сферичну метрику на множині точок розширеної комплексної площини визначають за допомогою евклідової метрики в R^3 як відстань між сферичними образами точок z_1 та z_2 на сфері Рімана за формулами:

$$\rho(z_1,z_2)=\frac{|z_1-z_2|}{\sqrt{\left(1+|z_1|^2\right)\left(1+|z_2|^2\right)}},\qquad \text{якщо } z_1,z_2\in C\,, \tag{1.8}$$

$$\rho(z_1,z_2)=\rho(z_1,\infty)=\frac{1}{\sqrt{1+|z_1|^2}}\,,\ \text{якщо } z_1\in C\,,\ z_2=\infty\,. \tag{1.9}$$

Введення кожної з метрик перетворює множину комплексних чисел на метричний простір. Для обмежених множин евклідова та сферичні метрики є еквівалентними. Тому сферичну метрику використовують частіше при розгляді необмежених множин.

1.3 Функції комплексної змінної та їх диференціювання

Розглянемо множину точок комплексної площини. Областю на комплексній площині називають таку множину точок D, для якої виконуються дві властивості [5, 10]: 1) разом із кожною точкою із множини D цій множині належить і круг з центром в цій точці достатньо малого радіуса (властивість відкритості), 2) будь-які дві точки множини D можна поєднати ламаною, яка складається із точок множини D (властивість зв'язності).

Означення 1.7. Говорять, що в області D визначено однозначну (многозначну) функцію $w=f(z)$, якщо кожній точці $z\in D$ поставлено у відповідність одне (декілька) значень w.

Таким чином, функція $w=f(z)$ задає відображення точок комплексної площини z на відповідні точки комплексної площини w. Поняття графіка функції w відсутнє, оскільки ми задаємо відображення однієї комплексної площини на іншу.

Нехай функція $w = f(z)$ однозначна на множині D комплексної змінної z і при цьому двом різним точкам цієї множини відповідають різні точки площини w, то таке відображення взаємно-однозначне, або *однолисте* в D.

Нехай функція $w = f(z)$ відображає множину D на D^1, а функція $\omega = g(w)$ множину D^1 на D^2. Тоді функцію $\omega = h(z) = g(f(z))$ називають *складною функцією*, а відображення h – *суперпозицією відображень* g та f.

Приклад 1.1. *Лінійна функція* визначається на всій комплексній площині співвідношенням:

$$w = az + b, \tag{1.10}$$

$a \neq 0$ і b – довільні комплексні сталі. Нехай $|a| = k$, $\operatorname{Arg} a = \alpha$, тобто $a = k(\cos\alpha + i\sin\alpha)$. Представимо функцію (1.10) як складну функцію, складену із функцій:

а) $z_1 = (\cos\alpha + i\sin\alpha)z$;

б) $z_2 = kz_1$;

в) $w = z_2 + b$.

Згадуючи геометричний зміст множення (див. підрозділ 1.1), ми бачимо, що відображення а) задає поворот на кут α, відображення б) – подібне перетворення площини з коефіцієнтом подібності k, відображення в) – зсув площини на вектор b. Отже, лінійне відображення (1.10) є суперпозицією цих відображень, тому є взаємно-однозначним на всій площині. Воно перетворює прямі в прямі (причому кути між ними зберігаються) і кола в кола.

Нехай $z = x + iy$, $w = u + iv$. Тоді залежність $w = f(z)$ між комплексною функцією w і комплексною змінною z може бути записана за допомогою двох дійсних функцій $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ дійсних змінних x та y. Наприклад, нехай $w = z^2$. Вважаючи, що $z = x + iy$, одержуємо наступне:

$$w = (x + iy)^2 = x^2 + 2xiy + i^2y^2 = x^2 - y^2 + i \cdot 2xy,$$

тобто $u(x, y) = x^2 - y^2$, $v(x, y) = 2xy$.

Означення 1.8. Околом точки z_0 площини комплексної змінної z називають будь-яку область, яка включає в себе точку z_0; δ-околом точки z_0 називають множину усіх точок z, які розташовані всередині круга радіуса δ з центром в точці z_0, тобто множину усіх точок z, які задовольняють нерівність $|z - z_0| < \delta$ [10].

Нехай функція $f(z)$ визначена в деякому околі Ω точки z_0, крім, можливо, самої точки z_0.

Означення 1.9. Число a називають границею функції $f(z)$ в точці z_0, якщо $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall z \in \Omega$ і таких, що $0 < |z - z_0| < \delta$, виконується нерівність: $|f(z) - a| < \varepsilon$. Позначають $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = a$.

Наведемо ще одне означення границі функції в точці. Нехай знову функція $f(z)$ визначена в деякому околі Ω точки z_0, крім можливо самої точки z_0.

Означення 1.10. Якщо для будь-якої послідовності $\{z_n\}$, $z_n \neq z_0$, збіжної до точки z_0, відповідна послідовність значень функції $\{f(z_n)\}$ збігається до числа a, то число a називають границею функції $f(z)$ в точці z_0: $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = a$.

Існування границі $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$, де $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, $z_0 = x_0 + iy_0$, рівносильне існуванню двох границь $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x,y)$ і $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x,y)$, причому

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x,y) + i \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x,y).$$

Означення 1.11. Функцію $w = f(z)$ називають неперервною в точці z_0, якщо $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$.

Для неперервності функції комплексної змінної $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ в точці $z_0 = x_0 + iy_0$ необхідно і достатньо, щоб функції $u(x,y)$ та $v(x,y)$ були неперервними в точці (x_0, y_0) за обома змінним одночасно. Функція $f(z)$ є неперервною в області, якщо вона неперервна в кожній точці цієї області. Сума, різниця і добуток двох неперервних в деякій області функцій комплексної змінної теж є неперервною функцією в цій області, а функція $\dfrac{f(z)}{g(z)}$ неперервна в тих точках області, де $g(z) \neq 0$.

Нехай функція $f(z)$ визначена в деякій області D комплексної змінної z і при цьому точки z і $z + \Delta z$ належать області D.

Означення 1.12. Функцію $w = f(z)$ називають диференційованою в точці $z \in D$, якщо існує скінченна границя $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$. Цю границю називають похідною функції і позначають $f'(z)$ [4, 8-10].

Основні правила диференціювання функції комплексної змінної такі самі, як і для дійсної функції.

Теорема 1.1. Для того щоб функція $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ була диференційованою в точці $z = x + iy$, необхідно і достатньо, щоб функції $u(x,y)$ та $v(x,y)$ були теж диференційовані в точці (x,y) і виконувались *умови Коші-Рімана*:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{1.11}$$

Означення 1.13. Функцію $f(z)$ називають аналітичною в даній точці $z \in D$, якщо вона диференційована, як в самій точці, так і в деякому її околі. Функцію $f(z)$ називають аналітичною в області D, якщо вона диференційована в кожній точці цієї області. Для будь-якої аналітичної функції $f(z)$ похідну можна обчислити за формулою:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{1.12}$$

1.4 Поняття конформного відображення

Розглянемо неперервне та взаємно-однозначне відображення області D комплексної площини змінної z на деяку область D^1 комплексної площини змінної w і задамо його у вигляді:

$$w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y), \tag{1.13}$$

де функції $u(x,y)$ та $v(x,y)$ в області D диференційовані та обмежені.

Зафіксуємо довільну точку $z_0 = x_0 + iy_0$ із області D та в околі цієї точки замінимо прирости функцій $u(x,y)$ та $v(x,y)$ диференціалами цих функцій. За означенням диференціалу [6, 10] прирости можна подати у вигляді:

$$\begin{cases} u - u_0 = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{z_0} \cdot (x - x_0) + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{z_0} \cdot (y - y_0) + \eta_1 \Delta r, \\ v - v_0 = \left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{z_0} \cdot (x - x_0) + \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{z_0} \cdot (y - y_0) + \eta_2 \Delta r, \end{cases} \tag{1.14}$$

де частинні похідні обчислюємо в точці z_0, $\Delta r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$, а величини η_1 та η_2 прямують до 0 при $\Delta r \to 0$. Заміна приростів функцій їх диференціалами зводиться до відкидання у співвідношенні (1.14) доданків $\eta_1 \Delta r$ та $\eta_2 \Delta r$, які є малими більш високого порядку малості, ніж інші доданки цих формул (передбачається, що величини $\left(\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{z_0}\right)^2 + \left(\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{z_0}\right)^2$ та $\left(\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{z_0}\right)^2 + \left(\left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{z_0}\right)^2$ відмінні від нуля).

Ця заміна рівносильна заміні відображення (1.14) наступним відображенням:

(1.15)

яке називають головною лінійною частиною відображення (1.14).

Відображення (1.15) можна записати у вигляді

(1.16)

де

$$a = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{z_0}, \; b = \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{z_0}, \; c = \left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{z_0}, \; d = \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{z_0},$$

$$l = u_0 - \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{z_0} x_0 - \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{z_0} y_0, \; m = v_0 - \left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{z_0} x_0 - \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{z_0} y_0 \tag{1.17}$$

не будуть залежати від змінних x та y. Зазначимо, що це відображення є так званим *лінійним перетворенням* площини (x,y).

Наведемо далі деякі властивості таких перетворень [10].

- Кожне лінійне перетворення (1.16) однозначно визначене на всій комплексній площині змінної z.
- Нехай визначник $\Delta = ad - bc \neq 0$. Тоді і обернене перетворення, яке задають формулами:

(1.18)

також однозначно визначене на всій комплексній площині змінної w. Таким чином, при $\Delta \neq 0$ перетворення (1.16) виконує взаємно-однозначне перетворення усієї комплексної площини змінної z на всю комплексну площину змінної w.
- Відображення (1.16) перетворює квадрати на площині змінної z в паралелограми на площині змінної w.

- При відображенні (1.16) кола з центром в точці z_0: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$ переходять в еліпси з центром в точці w_0: $\left(d^2+c^2\right)(u-u_0)^2-2(bd+ac)(u-u_0)(v-v_0)+\left(b^2+a^2\right)(v-v_0)^2=\Delta^2 r^2$.

Для того, щоб відображення (1.16) перетворювало кола в кола необхідно і достатньо виконання наступних умов:

$$\begin{cases} bd+ac=0, \\ a^2+b^2=c^2+d^2. \end{cases} \qquad (1.19)$$

Умови (1.19) призводять до двох випадків. У першому з них маємо:

$$a=d, \qquad b=-c. \qquad (1.20)$$

В цьому випадку $\Delta=ad-bc=a^2+b^2>0$. Нехай $a=d=\sqrt{\Delta}\cos\alpha$, $b=-c=\sqrt{\Delta}\sin\alpha$. Тоді перетворення (1.16) призводить до лінійної функції комплексної змінної

$$w=Az+B, \qquad (1.21)$$

де $A=\sqrt{\Delta}e^{i\alpha}$, $B=l+im$. Тобто маємо зсув площини z на вектор $B=l+im$, поворот на кут $\alpha=\operatorname{Arg}A$ та розтягнення (подібність) з коефіцієнтом $\sqrt{\Delta}=|A|$.

У другому випадку маємо:

$$a=-d, \qquad b=c. \qquad (1.22)$$

Відповідно визначник $\Delta=-a^2-b^2<0$. Виконуючи аналогічні дії, одержимо функцію:

$$w=A\cdot\bar{z}+B, \qquad (1.23)$$

де $A=\sqrt{-\Delta}e^{i\alpha}$, $B=l+im$. При виконанні умов (1.22) до перелічених перетворень додається ще перехід від z до $\bar{z}$, тобто симетрія відносно дійсної вісі.

Із геометричного змісту перетворень (1.21), (1.23) зрозуміло, що вони зберігають подібність фігур, зокрема зберігають кути між двома прямими, перетворюють квадрати на площині змінної z в квадрати на площині змінної w тощо.

Означення 1.14. Лінійні перетворення, які володіють властивістю збереження подібності фігур називають *ортогональними перетвореннями*. Умови (1.19) є умовами ортогональності для розглянутого перетворення (1.16).

Умови (1.20) виділяють ортогональні перетворення, що зберігають орієнтацію (напрямок обходу замкнутих контурів), а умови (1.22) – ортогональні перетворення, що змінюють її на протилежну.

Повернемось до розгляду довільного відображення (1.13)

Означення 1.15. Взаємно-однозначне відображення області D комплексної площини змінної z на деяку область D^1 комплексної площини змінної w, яке задають функцією (1.13), називають *конформним відображенням*, якщо в околі будь-якої точки області D головна лінійна частина цього відображення є ортогональним перетворенням, що зберігає орієнтацію. Відображення $w=f(z)$ називають *конформним відображенням другого роду*, якщо його головна лінійна частина є ортогональним перетворенням, що змінює орієнтацію.

Із означення випливають дві основні властивості конформних відображень:

1) Конформне відображення перетворює нескінченно малі кола в кола з точністю до нескінченно малих вищих порядків (*кругова властивість*).
2) Конформне відображення зберігає кути між кривими в точках їх перетину (*властивість збереження кутів*).

Перша властивість означає, що при малих радіусах коло $|z-z_0|=r$ переходить в таку криву, що відстань будь якої її точки від кола $|w-w_0|=\rho$ при розглянутому відображенні є нескінченно малою величиною відносно r. Друга властивість означає, що кут в точці z_0 між будь-якими кривими γ_1 та γ_2 дорівнює куту в точці w_0 між образами цих кривих Γ_1 та Γ_2. Під кутом між кривими розуміють кут між їх дотичними (рис. 1.3).

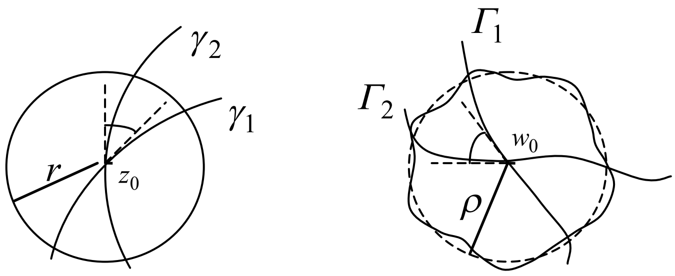


Рис. 1.3.

Враховуючи формули (1.17) та (1.20) ми можемо записати умови конформності відображення (1.16) у вигляді:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}, \tag{1.24}$$

причому

$$\Delta=\left(\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{z_0}\right)^2+\left(\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{z_0}\right)^2=|f'(z_0)|^2\neq 0. \tag{1.25}$$

Таким чином, умови конформності співпадають з умовами Коші-Рімана (1.11), причому нерівність (1.25) показує, що похідна повинна не дорівнювати нулю скрізь. Далі маємо наступне:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=\sqrt{\Delta}\cos\alpha, \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}=\sqrt{\Delta}\sin\alpha,$$

звідки одержуємо геометричну інтерпретацію похідної функції комплексної змінної:

$$|f'(z_0)|=\sqrt{\Delta},\ \arg f'(z_0)=\alpha. \tag{1.26}$$

Отже, *модуль і аргумент похідної* $f'(z)$ *означають відповідно коефіцієнт розтягнення і кут повороту головної лінійної частини відображення* $w=f(z)$ *в точці* z_0. При $|f'(z_0)|>1$ має місце розтягнення, а при $|f'(z_0)|<1$ – стискання.

Таким чином можна сформулювати наступний висновок: *для того, щоб функція (1.13) реалізовувала конформне відображення області* D*, необхідно і достатньо, щоб в цій області вона була однолистою, аналітичною, та щоб у неї скрізь в області* D *існувала похідна* $f'(z)\neq 0$.

Зауважимо, що останню умову $f'(z)\neq 0$ можна відкинути, оскільки вона випливає з умови однолистості відображення [10]. Також, якщо функція $w=f(z)$ однозначна, але не однолиста в області D, то вона реалізує відображення, яке є конформним в достатньо малому околі кожної точки z_0, для якої $f'(z_0)\neq 0$. Точки, в яких $f'(z)=0$, а також їх образи на рімановых поверхнях називають *точками розгалуження*.

Визначимо, наприклад, в яких областях відображення $w=3z$ та $w=(z-12i)^2$ є конформними.

Оскільки функція $w=f(z)=3z$ є аналітичною і однолистою на всій комплексній площині z, а її похідна $f'(z)=3\neq 0$, то відображення $w=3z$ є конформним на всій комплексній площині.

Відображення $w=(z-12i)^2$ конформне на всій комплексній площині, крім точки $z=12i$, в якій похідна $f'(z)=2(z-12i)$дорівнює нулю.

1.5 Основна задача теорії конформних відображень

Для довільної аналітичної функції ми можемо розглядати різні конформні відображення, які вона реалізує. Будь-яка область D, в якій ця функція однолиста, за допомогою цієї функції конформно відображається на деяку область D^1. Таким чином, ми можемо одержати різні приклади конформних відображень, які геометрично ілюструють дану функцію.

Але для практики більш важливою є більш складна обернена задача, так звана *основна задача теорії конформних відображень*: задано області D та D^1, потрібно побудувати функцію, яка реалізує конформне відображення однієї з цих областей на іншу [10].

Для розв'язку цієї задачі не існує достатньо простого алгоритму. Тому розвиток теорії конформних відображень проводять в наступних напрямках:

1) знаходження загальних умов існування конформного відображення і його єдиності;
2) знаходження частинних класів областей, відображення яких можна будувати за допомогою комбінації елементарних функцій;
3) за допомогою загальних властивостей аналітичних функцій досліджують властивості конформних відображень в залежності від виду областей, на яких будують відображення;
4) розробка наближених методів конформних відображень.

Зупинимось спочатку на першій із проблем. Зрозуміло, що в загальному формулюванні ця проблема нерозв'язна. Але для деяких видів областей відомі основні твердження.

Теорема 1.2. (*Рімана*) Які б не були однозв'язні області D та D^1 (границі яких складаються більше ніж з однієї точки) і які б не були задані точки $z_0\in D$, $w_0\in D^1$ і дійсне число α_0, існує одне і тільки одне конформне відображення $w=f(z)$ області D на область D^1 таке, що $f(z_0)=w_0$, $\arg f'(z_0)=\alpha_0$ [8, 9].

Зауважимо, що для єдиності відображення у випадку неперервної функції $w=f(z)$ в області D також може бути достатнім, щоб $z_0\in D$ і точка z_1 її границі переходили відповідно в точку $w_0\in D^1$ і в точку w_1 її границі ($f(z_0)=w_0$, $f(z_1)=w_1$), або три граничні точки області переходили в три граничні точки області D^1 ($f(z_1)=w_1$, $f(z_2)=w_2$, $f(z_3)=w_3$), причому, якщо при русі по границі області D від z_1 до z_3 через z_2, область була ліворуч (праворуч), то потрібно щоб при русі по границі області D^1 від w_1 до w_3 через w_2 область D^1 також залишалась ліворуч (праворуч).

При побудові і дослідженні конформних відображень використовують наступні основні принципи.

Теорема 1.3. (*Принцип взаємно-однозначної відповідності границь*). Нехай область D обмежена гладким або кусочно-гладким контуром . Нехай функція $w=f(z)$ аналітична в області D та на її границі γ і відображає контур γ на деякий контур Γ, який обмежує область D^1, причому коли точка z обходить контур γ так, що область D залишається ліворуч, відповідна точка w обходить контур Γ так, що область D^1 також залишається ліворуч. Тоді область D за допомогою функції $w=f(z)$ буде відображена взаємно-однозначно та конформно на область D^1 [8, 9].

Нехай, наприклад, в області D, яка обмежена контуром γ: $x^2+y^2-2x=0$, задано функцію $w=3z+i$. Визначимо в яку область перейде область D при відображенні цією функцією. Оскільки $z=x+iy$, $w=u+iv$, то співвідношення $w=3z+i$ має вигляд: $u+iv=3x+i(3y+1)$, тобто $u=3x$, $v=3y+1$, або $x=\frac{u}{3}$, $y=\frac{v-1}{3}$. Тоді зображенням γ буде крива Γ:

$$\left(\frac{u}{3}\right)^2+\left(\frac{v-1}{3}\right)^2-2\cdot\frac{u}{3}=0,$$

$$(u-3)^2+(v-1)^2=9,$$

тобто коло радіуса 3 з центром в точці $M(3,1)$. Додатній напрямок обходу контура γ відповідає додатному напрямку обходу контура Γ. В цьому можна впевнитись, якщо задати контури параметричними рівняннями:

$$\gamma:\begin{cases}x=1+\cos\varphi,\\ y=\sin\varphi,\ 0\le\varphi<2\pi,\end{cases}\qquad \Gamma:\begin{cases}u=3+3\cos\varphi,\\ v=3\sin\varphi+1,\ 0\le\varphi<2\pi.\end{cases}$$

Згідно з принципом взаємно-однозначної відповідності границь область D відобразиться на внутрішність кола Γ, тобто на область, обмежену контуром Γ.

Теорема 1.4. (*Принцип симетрії*). Нехай область D, яка містить у складі своєї границі деякий прямолінійний відрізок γ (скінченної або нескінченної довжини), відображається функцією $w=f(z)$ на область D^1 так, що γ переходить у прямолінійний відрізок Γ, який входить у границю області. Позначимо відповідно через l та L прямі, яким належать відрізки γ та Γ. Згідно з принципом симетрії виконується наступне: якщо функція $w=f(z)$ аналітична в області D, а також в усіх внутрішніх точках граничного відрізка γ, то ця функція буде аналітичною також в області, яка симетрична до області D відносно прямої l, та при цьому буде виконуватись наступна умова: будь-які дві точки z_1 та z_2 (одна з яких належить області), які симетричні відносно , відображаються в точки w_1 та w_2, які симетричні відносно L [8, 9].

Розглянемо, наприклад, точки $z_1=2+3i$ і $z_2=3+2i$, які симетричні відносно прямої $y=x$. Лінійна функція $w=e^{-i\frac{\pi}{2}}z$ відображає точки прямої $y=x$ в точки прямої $y=-x$, яка їх перпендикулярна. Згідно з принципом симетрії точки $z_1 = 2 + 3i$ і $z_2 = 3 + 2i$, які симетричні відносно прямої $y = x$, перейдуть в точки $w_1 = 3 - 2i$ і $w_2 = 2 - 3i$, які симетричні відносно прямої $y = -x$.

Для того, щоб будувати відображення за допомогою комбінацій елементарних функцій, у наступних підрозділах розглянемо основні елементарні функції комплексної змінної та відображення, які вони здійснюють.

1.6 Дробово-лінійні відображення

Означення 1.16. *Дробово-лінійною функцією* називають функцію виду:

$$w = f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \text{ де } a, b, c, d \in C,\ ad - bc \neq 0. \tag{1.27}$$

При $c = 0$ дробово-лінійна функція є лінійною функцією, властивості якої розглянуто раніше (див. приклад 1.1) [8, 9].

Функцію (1.27) визначено в усіх точках комплексної площини, крім точки $z = -\frac{d}{c}$. Зазвичай вважають, що дробово-лінійна функція (1.27) переводить точку $z = -\frac{d}{c}$ в точку $w = \infty$, а точку $z = \infty$ в точку $w = \frac{a}{c}$, (легко перевірити, що $\lim\limits_{z \to \infty} \frac{az + b}{cz + d} = \frac{a}{c}$). Довизначена зазначеним способом дробово-лінійна функція (1.27) відображає $\overline{C}$ в $\overline{C}$.

Обчислимо похідну функції (1.27):

$$f'(z) = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2}. \tag{1.28}$$

Ця похідна існує скрізь при $z \neq -\frac{d}{c}$, тобто функція (1.27) аналітична скрізь на комплексній площині крім точки $z = -\frac{d}{c}$, в якій вона має полюс першого порядку. Рівняння (1.27) однозначно можна розв'язати відносно z:

$$z = \frac{-dw + b}{cw - a}, \tag{1.29}$$

причому функція (1.29) також визначена на всій площині w (її значення в точці $w = \frac{a}{c}$ вважається рівним ∞, а в точці $w = \infty$ рівним $-\frac{d}{c}$). Тому дробово-лінійна функція виконує однолисте відображення розширеної комплексної площини змінної z на розширену комплексну площину змінної w. Зауважимо, що дробово-лінійна функція – це єдина функція, яка має таку властивість [10]. Відображення дробово-лінійною функцією (1.27) є гомеоморфізмом (неперервним, взаємно-однозначним відображенням) розширеної комплексної площини на себе. Відображення дробово-лінійною функцією (1.27) є конформним відображенням.

Формула (1.29) показує, що функція, яка обернена до дробово-лінійної, також є дробово-лінійною. Легко показати, що складна функція, складена із дробово-лінійних функцій також є дробово-лінійною.

З’ясуємо геометричні властивості дробово-лінійної функції. Для цього представимо функцію (1.27) у вигляді:

$$w = f(z) = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c^2\left(z + \frac{d}{c}\right)}, \text{ або}$$

$$w = A + \frac{B}{z - D}, \tag{1.30}$$

і будемо розглядати це відображення як складне, складене із трьох наступних відображень:

а) $z_1 = z - D$, яке задає зсув (лінійна функція);

б) $z_2 = \dfrac{1}{z_1}$, яке є інверсією (розглянемо в наступному прикладі);

в) $w = A + Bz_2$, яке задає зсув, поворот і розтягнення (лінійна функція).

Приклад 1.2. Розглянемо функцію:

$$w = \frac{1}{z}. \tag{1.31}$$

Точки M і M' називають *симетричними відносно кола* Γ, якщо [8]

1) вони розташовані на одному промені, який виходить з центра кола;
2) добуток їх відстаней від центра кола дорівнює квадрату радіуса кола: $OM \cdot OM' = R^2$ (рис. 1.4).

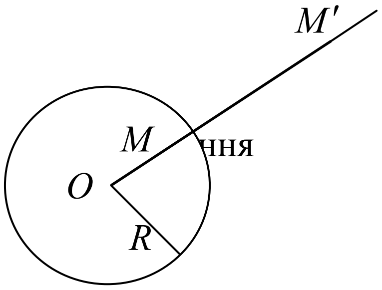


Рис. 1.4.

Зауважимо, що точки кола симетричні самим собі. Центр кола симетричний до нескінченно віддаленої точки.

$w = \dfrac{1}{z}$ складається із двох симетричних відображень: відносно одиничного кола і відносно дійсної вісі (рис. 1.5) і його називають *інверсією*.

Це перетворення є конформним і таким, що змінює орієнтацію, (конформним відображенням другого роду) на всій розширеній комплексній площині, причому точці $z = 0$ відповідає точка $w = \infty$, а точці $z = \infty$ відповідає точка $w = 0$.

Вважають, що кут між лініями в нескінченно віддаленій точці однієї з площин (z або w) дорівнює куту між зображеннями цих ліній в початку координат іншої площини.

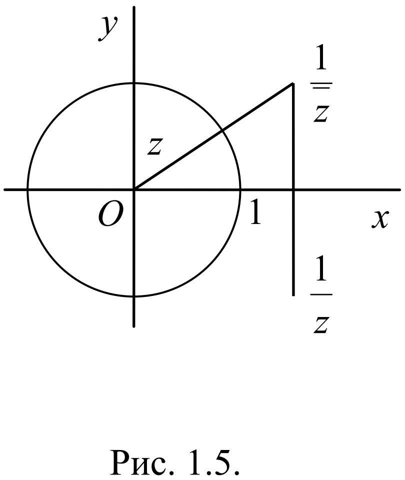


Рис. 1.5.

Кола (а також прямі, які можна вважати колами, але в більш широкому розумінні) при відображенні $w = \dfrac{1}{z}$ переходять в кола або прямі. Нерухомими точками цього перетворення є точки $z = 1$ та $z = -1$.

Наведемо основні властивості дробово-лінійних відображень. Доведення цих властивостей можна знайти в підручнику [10].

1) *Групова властивість.* Сукупність усіх дробово-лінійних функцій утворює неабелеву групу, де груповою операцією розглядають суперпозицію дробово-лінійних функцій.
2) *Кругова властивість.* Дробово-лінійне відображення перетворює коло в коло (пряму вважають колом нескінченного радіусу).

   Наведемо формули, за допомогою яких можна знаходити образи прямих та кіл при відображенні (1.27):

   а) Прямим $\operatorname{Re}(\lambda z)=\alpha$, які не проходять через точку $z=-\dfrac{d}{c}$, відповідають кола $|w-w_0|=\rho$, де
   $$w_0=\frac{2a\alpha\bar{c}+a\bar{d}\bar{\lambda}+b\bar{c}\lambda}{2\alpha|c|^2+2\operatorname{Re}(c\bar{d}\bar{\lambda})},\qquad \rho=\left|\frac{a}{c}-w_0\right|=\left|\frac{(ad-bc)\lambda}{2\alpha|c|^2+2\operatorname{Re}(c\bar{d}\bar{\lambda})}\right|. \tag{1.32}$$

   б) Прямим $\operatorname{Re}(\lambda z)=-\operatorname{Re}\left(\lambda\dfrac{d}{c}\right)$, які проходять через точку $z=-\dfrac{d}{c}$, відповідають прямі
   $$\operatorname{Re}\left(\frac{ad-bc}{c^2}\lambda\bar{w}\right)=\operatorname{Re}\left(\frac{ad-bc}{c^2}\cdot\frac{\lambda\bar{a}}{\bar{c}}\right). \tag{1.33}$$

   в) Колам $|z-z_0|=r$, які не проходять через точку $z=-\dfrac{d}{c}$, відповідають кола $|w-w_0|=\rho$, де
   $$w_0=\frac{(az_0+b)(\overline{cz_0}+\bar{d})-a\bar{c}r^2}{|cz_0+d|^2-|c|^2r^2},\qquad \rho=\frac{r|ad-bc|}{\left||cz_0+d|^2-|c|^2r^2\right|}. \tag{1.34}$$

   г) Колам $|z-z_0|=\left|z_0+\dfrac{d}{c}\right|$ відповідають прямі
   $$\operatorname{Re}\left(\frac{ad-bc}{c(cz_0+d)}\bar{w}\right)=\frac{|ad-bc|^2+2\operatorname{Re}\left(c(az_0+b)(\overline{ad}-\overline{bc})\right)}{2|c(cz_0+d)|^2}. \tag{1.35}$$
3) *Властивість симетрії.* Точки, симетричні відносно кола, відображаються дробово-лінійною функцією в точки, які будуть симетричні відносно зображення цього кола. *Наслідок:* якщо при дробово-лінійному відображенні пряма або коло γ переходить в коло Γ, і одна із двох симетричних точок відносно γ переходить в центр кола Γ, то друга точка перейде в нескінченно віддалену точку.
4) *Окремі випадки.* З'ясуємо спочатку питання про умови, які визначають дробово-лінійне відображення. З формули (1.27) випливає, що такі відображення задають чотирма коефіцієнтами a, b, c і d. Оскільки хоча б один з цих коефіцієнтів відмінний від нуля і його можна вважати рівним одиниці, поділивши на цей коефіцієнт чисельник і знаменник дробу, то дробово-лінійне відображення фактично залежить від трьох комплексних або шести дійсних параметрів. Таким чином, дробово-лінійне відображення визначається умовами, які приводять до шести незалежних співвідношень між дійсними та уявними частинами коефіцієнтів. Наведемо деякі такі відображення:

а) *Відображення трьох різних точок.* Існує єдина дробово-лінійна функція, яка три задані точки z_1, z_2, z_3 площини z переводить у три задані точки w_1, w_2, w_3 площини w. Вона має вигляд:

$$\frac{w-w_1}{w-w_2}\cdot\frac{w_3-w_2}{w_3-w_1}=\frac{z-z_1}{z-z_2}\cdot\frac{z_3-z_2}{z_3-z_1}. \qquad (1.36)$$

Якщо одна з точок z_k або w_k, $k=1,2,3$ є нескінченно віддаленою точкою, то в формулі (1.36) слід замінити одиницями усі різниці, які включають цю точку.

б) *Відображення круга в круг.* Будь-який круг площини z за допомогою дробово-лінійної функції можна відобразити в будь-який круг площини w. Для побудови такого відображення можна вибрати 3 точки на колі в площині z і відповідно 3 точки на колі в площині w і далі скористатись формулою (1.36).

в) *Відображення двох точок при заданій похідній.* Існує єдина дробово-лінійна функція, похідна якої $w'(z_2)=a$, і яка дві задані точки z_1, z_2 площини z переводить у дві задані точки w_1, w_2 площини w. Вона має вигляд:

$$\frac{w-w_1}{w-w_2}\cdot a=\frac{w_2-w_1}{z_2-z_1}\cdot\frac{z-z_1}{z-z_2}. \qquad (1.37)$$

г) Відображення верхньої півплощини на верхню півплощину. Будь-яку дробово-лінійну функцію $w=f(z)$, яка відображає верхню півплощину z на верхню півплощину w, можна одержати із формули (1.36), задаючи по три точки на дійсних осях x та u. Після перетворення така функція буде мати вигляд:

$$w=f(z)=\frac{az+b}{cz+d}, \text{ де } a,b,c,d\in R,\ ad-bc>0. \qquad (1.38)$$

Якщо $ad-bc<0$, то будемо мати відображення на нижню півплощину.

1.7 Степенева функція. Обернене відображення

При піднесенні комплексного числа до натурального степеня зазвичай використовують формулу Муавра [9]:

$$z^n=(x+iy)^n=\rho^n(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=\rho^n e^{in\varphi}=\rho^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi). \qquad (1.39)$$

Означення 1.17. Функцію виду $w=f(z)=z^n$, де $n\in N$ називають *степеневою функцією*. При $n=1$ степенева функція є лінійною функцією, властивості якої розглянуто раніше. Надалі будемо розглядати випадок $n\in N$, $n>1$.

Степенева функція здійснює конформне відображення в усіх точках комплексної площини, крім точки $z=0$. Зауважимо, що в точках $z=0$ та $z=\infty$ не виконується властивість збереження кутів при конформному відображенні. Кути між кривими з вершиною в точці $z=0$ та точці $z=\infty$ степенева функція збільшує в n разів.

Степенева функція не є однолистою. Кожен сектор

$$\left\{z: z=\rho e^{i\varphi}\ ,\alpha<\varphi<\alpha+\frac{2\pi}{n}\right\},\alpha\in R \qquad (1.40)$$

цією функцією відображається взаємно однозначно (однолисто) на комплексну площину з розрізом уздовж променя, що виходить з точки $z=0$ і проходить під кутом $n\alpha$. Сектор (1.40) є областю однолистості степеневої функції, а комплексну площину можна розбити на n областей однолистості. Таким чином при відображенні степеневою функцією комплексна площина «накриває» сама себе n разів.

При відображенні степеневою функцією $w=f(z)=z^n$, $n\in N$, $n>1$ розширена комплексна площина переходить у себе таким чином, що кожна точка $w\in\overline{C}$ має n праобразів, які визначають формулою:

$$z_k=\sqrt[n]{|w|}\left(\cos\frac{\arg w+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\arg w+2k\pi}{n}\right),\ k=0,1,...,n-1. \qquad (1.41)$$

Таким чином для степеневої функції можна визначити обернене відображення $z=\sqrt[n]{w}$. Для цього розглянемо степеневу функцію $w=f(z)=z^n$ на множинах:

$$D_k=\left\{z: z=\rho e^{i\varphi}\ ,\ 0\le\rho<\infty,\ \frac{2\pi k}{n}<\varphi<\frac{2\pi(k+1)}{n}\right\},k=\overline{0,n-1},$$

кожну з яких при відповідному фіксованому k степенева функція однолисто відображає на комплексну площину. При цьому очевидно, що $\bigcup\limits_{k=0}^{n-1}D_k=C$. Кожну з областей (стандартних областей однолистості) виду $\left\{z: z=\rho e^{i\varphi}\ ,\ 0<\rho<\infty,\ \frac{2\pi k}{n}<\varphi<\frac{2\pi(k+1)}{n}\right\},k=\overline{0,n-1}$ степенева функція взаємно однозначно відображає на комплексну площину C з розрізом уздовж променя, який виходить з точки $z=0$ і проходить під кутом 0.

Розглянемо n листів комплексних площин C з розрізами уздовж додатньої частини дійсної вісі. Розташуємо ці площини одна над одною. Нижній край розрізу верхньої площини «склеїмо», тобто ототожнимо, з верхнім краєм розрізу нижньої площини і проробимо цю дію відповідну кількість разів. На останньому кроці нижній край розрізу n площини «склеїмо» з верхнім краєм розрізу першої площини. Отримали поверхню, що складається з n листів, причому степенева функція здійснює неперервне взаємно однозначне відображення комплексної площини на n-листу поверхню. Визначимо обернене відображення до степеневої функції наступним чином: при кожному фіксованому k, $k=\overline{0,n-1}$ довільному комплексному числу w, розташованому на відповідному листі n-листої поверхні, єдиним чином ставиться у відповідність певне комплексне число $z_k\in D_k$, $z_k^n=w$. Отже, на комплексній площині визначають n різних однозначних функцій, які в сукупності називають многозначним відображенням, оберненим до степеневої функції і позначають $z=\sqrt[n]{w}$. Відповідні однозначні функції, які визначають співвідношеннями (1.41), називають гілками однозначності відображення $z=\sqrt[n]{w}$. Описану вище поверхню називають n-листою поверхнею Рімана відображення $z=\sqrt[n]{w}$.

Зауважимо, що точки, при обході яких по замкнутих контурах відбувається перехід з одного листа поверхні Рімана на інший, називають *точками розгалуження* відповідного відображення. Якщо за скінченну кількість обходів n замкнутим контуром навколо точки розгалуження здійснюється перехід на початковий лист поверхні Рімана, таку точку розгалуження називають *алгебраїчною точкою розгалуження* $(n\text{-}1)$-го порядку. Для відображення $z=\sqrt[n]{w}$ точки $w=0$ та $w=\infty$ є алгебраїчними точками розгалуження $(n\text{-}1)$-го порядку.

1.8 Показникова функція. Обернене відображення

Означення 1.18. *Показникову функцію* $w=e^z$ визначають як суму абсолютно збіжного на всій комплексній площині степеневого ряду [8, 9]:

$$w=e^z=1+z+\frac{z^2}{2!}+\ldots+\frac{z^n}{n!}+\ldots \tag{1.42}$$

Показникова функція має властивості:

а) $e^{z_1+z_2}=e^{z_1}e^{z_2}$, де z_1 і z_2 – будь-які комплексні числа.

б) $e^{z+2k\pi i}=e^z$, $k\in Z$, тобто e^z є періодичною функцією с періодом $2k\pi i$.

Показникова функція $w=e^z$ є продовженням у комплексну площину C дійсної функції e^x, яку визначено на дійсній осі, тобто на R.

Покажемо, що функція $w=e^z$ є аналітичною на всій комплексній площині. Виділимо дійсну та уявну частини функції, маємо:

$$w=e^z=e^{x+iy}=e^x\cdot e^{iy}=e^x(\cos y+i\sin y)=e^x\cos y+ie^x\sin y,$$

$$u(x,y)=e^x\cos y,\ v(x,y)=e^x\sin y.$$

Функції $u(x,y)$ та $v(x,y)$ диференційовані для будь-яких x та y. Перевіримо виконання умов Коші-Рімана.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=e^x\cos y,\qquad \frac{\partial v}{\partial x}=e^x\sin y,\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-e^x\sin y,\qquad \frac{\partial v}{\partial y}=e^x\cos y.$$

Умови (1.11) виконано, тому функція $w=e^z$ аналітична на комплексній площині. Для похідної за формулою (1.12) можна одержати:

$$\left(e^z\right)'=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=e^x\cos y+ie^x\sin y=e^x(\cos y+i\sin y)=e^z\neq 0,\ \forall z\in C.$$

Таким чином, показникова функція здійснює конформне відображення в усіх точках комплексної площини. Показникова функція не є однолистою, вона кожну смугу

$$\{z\colon \alpha<\operatorname{Im}z<\alpha+2\pi\},\alpha\in R \tag{1.43}$$

взаємно однозначно (однолисто) відображає на комплексну площину C з розрізом уздовж променя, що виходить з точки $w=0$ і проходить під кутом α. Смуга (1.43) є областю однолистості показникової функції, а комплексну площину можна розбити на зчисленну кількість областей однолистості. Таким чином, при відображенні показниковою функцією комплексна площина «накриває» сама себе зчисленну кількість разів.

При відображенні показниковою функцією $w = f(z) = e^z$ комплексна площина C переходить у себе таким чином, що кожна точка $w \in C$, крім $w = 0$, має зчисленну кількість різних праобразів, які визначають формулою:

$$z = \mathrm{Ln}\, w = \ln|w| + i\,\mathrm{Arg}\, w = \ln|w| + i\arg w + 2k\pi i, \; k \in Z. \tag{1.44}$$

Зауважимо, що для логарифмів справедливі співвідношення при $z_1 \neq 0$, $z_2 \neq 0$: $\mathrm{Ln}(z_1 z_2) = \mathrm{Ln}\, z_1 + \mathrm{Ln}\, z_2$, $\mathrm{Ln}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \mathrm{Ln}\, z_1 - \mathrm{Ln}\, z_2$. Головним значенням $\mathrm{Ln}\, w$ називають те значення, яке отримуємо при $k = 0$, його позначають $\ln w$, тобто $\ln w = \ln|w| + i\arg w$.

Для показникової функції визначимо обернене перетворення логарифму $z = \mathrm{Ln}\, w$ [10]. Для цього розглянемо показникову функцію $w = f(z) = e^z$ на множинах $D_k = \{z \in C\colon 2\pi k \leq \mathrm{Im}\, z < 2\pi(k+1)\}, k \in Z$, кожну з яких при відповідному фіксованому k показникова функція однолисто відображає на комплексну площину C. При цьому очевидно $\bigcup\limits_{k \in Z} D_k = C$. Кожну з областей $\{z \in C\colon 2\pi k < \mathrm{Im}\, z < 2\pi(k+1)\}, k \in Z$ (стандартних областей однолистості) показникова функція взаємно однозначно відображає на площину C з розрізом уздовж променя, що виходить з точки $w = 0$ і проходить під кутом 0.

Розглянемо зчисленну кількість листів комплексних площин C з розрізами уздовж додатньої частини дійсної вісі. Розташуємо ці площини одна над одною. Нижній край розрізу верхньої площини «склеїмо», тобто ототожнимо, з верхнім краєм розрізу нижньої площини і проробимо цю дію зчисленну кількість разів. Отримаємо поверхню, що складається із зчисленної кількості листів, причому показникова функція буде здійснювати неперервне взаємно однозначне відображення комплексної площини на таку поверхню. Визначимо обернене відображення до показникової функції наступним чином: при кожному фіксованому k довільному комплексному числу w, розташованому на відповідному листі поверхні, єдиним чином поставимо у відповідність певне комплексне число $z_k \in D_k$: $e^{z_k} = w$.

Означення 1.19. На комплексній площині визначають зчисленну кількість різних однозначних функцій, які в сукупності називають *многозначним відображенням логарифма* і позначають $z = \mathrm{Ln}\, w$. Відповідні однозначні функції, які визначають співвідношеннями (1.44), яких зчисленна кількість, називають *гілками однозначності* відображення $z = \mathrm{Ln}\, w$. Описану вище поверхню називають поверхнею Рімана відображення $z = \mathrm{Ln}\, w$.

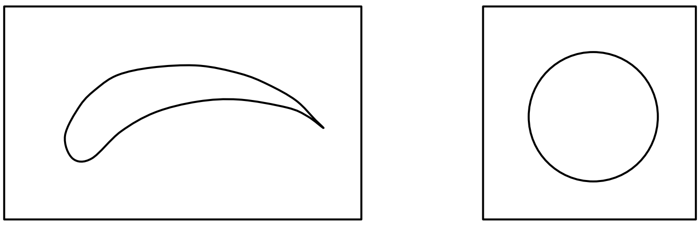
Для відображення $z = \mathrm{Ln}\, w$ точки $w = 0$ та $w = \infty$ є точками розгалуження. Причому, ні за яку скінченну кількість обходів замкнутим контуром навколо точки розгалуження не здійснюється перехід на початковий лист поверхні Рімана. Таку точку розгалуження називають *точкою розгалуження нескінченного порядку*, або *логарифмічною точкою розгалуження*. Для відображення $z = \mathrm{Ln}\, w$ точки $w = 0$ та $w = \infty$ є логарифмічними точками розгалуження.

1.9 Функція Жуковського. Обернене відображення

Найбільш важливі застосування теорії конформних відображень відносять до питань фізики та механіки. Ще наприкінці 19 сторіччя конструктор, механік, математик Жуковський М.Є. досліджував швидкості часток газу в потоці, який рухається в певному каналі і обтікає при цьому певні перешкоди. Такі задачі легко розв'язувати у випадку, коли перешкоди мають просту форму (пластин, кругових циліндрів тощо).

Зокрема, коли треба розрахувати літак при його конструюванні, потрібно вміти підрахувати швидкості часток повітря в потоці, який обтікає крило літака. Крило літака у перерізі (профіль крила) має вигляд, представлений на рис. 1.6(а), але зручно проводити розрахунки для кругового профілю, який наведено на рис. 1.6(б). Виявляється, що для того, щоб звести задачу про обтікання крила літака до задачі про обтікання циліндра (більш простої) достатньо конформно відобразити фігуру, заштриховану на рис. 1.6(а) (зовнішність профілю крила) на фігуру, заштриховану на рис. 1.6(б) (зовнішність кола).

Таке відображення виконують за допомогою певних функцій комплексної змінної. Жуковський вивчав саме такі функції і деякі з цих функцій зараз носять його ім'я.



а) б)

Рис. 1.6.

Означення 1.20. Функцію виду

$$w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \; z \in C \setminus \{0\}. \tag{1.45}$$

називають *функцією Жуковського*. Функція Жуковського визначена та аналітична в усіх точках комплексної площини, крім $z = 0$, де вона має полюс першого порядку [8-10].

Обчислимо похідну цієї функції:

$$w' = f'(z) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{z^2}\right), \; z \in C \setminus \{0\}. \tag{1.46}$$

Похідна $f'(z) \neq 0$ при $z \neq \pm 1$. Довизначимо функцію Жуковського в точках $z = 0$ та $z = \infty$ граничним значенням ∞. Функцію Жуковського можна записати як композицію дробово-лінійних функцій та степеневої функції, а саме:

$$w = f(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) = \frac{1 + \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2}{1 - \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2}.$$

Тоді за властивостями дробово-лінійної функції та степеневої функції очевидно маємо, що довизначена в розширеній комплексній площині функція Жуковського здійснює конформне відображення в усіх точках $\overline{C}$, окрім точок $z = \pm 1$.

Функція Жуковського $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$, $z \in C \setminus \{0\}$ не є однолистою. Області однолистості не можуть вміщувати точок $\{z_1, z_2\} \subset C \setminus \{0\}$, $z_1 \neq z_2$, які задовольняють умову $z_1 z_2 = 1$. Зазвичай комплексну площину стандартно розбивають двома стандартними наборами областей однолистості.

Функція Жуковського кожну область

$$D_1 = \{z \in C : |z| < 1\}, \quad D_2 = \{z \in \overline{C} : |z| > 1\} \qquad (1.47)$$

взаємно-однозначно (однолисто) відображає на розширену комплексну площину $\overline{C}$ з розрізом уздовж відрізка дійсної осі $[-1,1]$. Тобто області (1.47) є областями однолистості функції Жуковського.

Функція Жуковського кожну область

$$D_1' = \{z \in C : \operatorname{Im} z > 0\}, \qquad D_2' = \{z \in C : \operatorname{Im} z < 0\} \qquad (1.48)$$

взаємно-однозначно (однолисто) відображає на комплексну площину C з розрізом уздовж частини дійсної осі $[-\infty, -1]$ та $[1, +\infty]$, тобто області (1.48) є областями однолистості функції Жуковського.

Таким чином, при відображенні функцією Жуковського комплексна площина C «накриває» сама себе двічі.

Для відображення функцією Жуковського характерні наступні геометричні властивості [10].

1) Кола $\{z \in C : |z| = R\}$, $0 < R < +\infty$, $R \neq 1$ функція Жуковського відображає в точки еліпса $\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1$, де $a = \frac{1}{2}\left(R + \frac{1}{R}\right) > 0$, $b = \pm\frac{1}{2}\left(R - \frac{1}{R}\right) > 0$ з фокусами в точках ± 1, причому напрямок обходу по колу та по відповідному еліпсу однаковий у випадку $R > 1$ та протилежний у випадку $0 < R < 1$.

Зауважимо, що коло $\{z \in C : |z| = 1\}$ функція Жуковського відображає в точки відрізка дійсної вісі $[-1,1]$, який обходять в одному та протилежному напрямку.

2) Промені $\{z \in C : \arg z = \varphi\}$, $\varphi \in R \setminus \left\{\frac{\pi k}{2}, k \in Z\right\}$ функція Жуковського відображає в точки відповідної гілки гіперболи $\frac{u^2}{\cos^2\varphi} - \frac{v^2}{\sin^2\varphi} = 1$ з фокусами в точках ± 1.

Промені $\{z \in C : \arg z = \varphi\}$, $\varphi = \frac{\pi(2k+1)}{2}, k \in Z$ функція Жуковського відображає в точки уявної вісі, промені $\{z \in C : \arg z = \varphi\}$, $\varphi = 2\pi k, k \in Z$ та $\{z \in C : \arg z = \varphi\}$, $\varphi = \pi(2k+1), k \in Z$ функція Жуковського відображає в точки дійсної вісі $[1, +\infty]$ та $[-\infty, -1]$ відповідно, які обходять в одному та протилежному напрямку.

Таким чином, геометричним образом комплексної площини при відображенні функцією Жуковського є двулиста поверхня, причому функція

Жуковського здійснює неперервне взаємно однозначне відображення комплексної площини C на цю поверхню.

Визначимо обернене до функції Жуковського відображення. Виразимо змінну z із рівняння $w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$. Одержимо функцію:

$$z = w + \sqrt{w^2 - 1}, \tag{1.49}$$

яку визначають двома гілками однозначності відповідно до гілок однозначності кореня.

Часто гілку однозначності відображення, оберненого до функції Жуковського, фіксують значенням у точці, а саме $z(\infty)=0$ або $z(\infty)=\infty$, що відповідає відображенню комплексної площини на внутрішність або зовнішність одиничного кола. Також гілку однозначності фіксують значенням у точці наступним чином: $z(0)=i$ або $z(0)=-i$, що відповідає відображенню комплексної площини на верхню або нижню півплощину.

Описану вище поверхню називають поверхнею Рімана для відображення, оберненого до функції Жуковського. При цьому для відображення (1.49) точки $w=1$ та $w=-1$ є алгебраїчними точками розгалуження.

1.10 Тригонометричні та гіперболічні функції. Обернені відображення

Означення 1.21. *Тригонометричні функції* $\sin z$ і $\cos z$ визначають степеневими рядами [8, 9]:

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots, \tag{1.50}$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots, \tag{1.51}$$

абсолютно збіжними при будь-якому комплексному значенні z. Функції $\sin z$ і $\cos z$ – періодичні з періодом $2\pi k$, $k \in Z$, і мають лише дійсні нулі $z = k\pi$ і $z=\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k \in Z$. Функція $\sin z$ – непарна, $\cos z$ – парна.

Для дійсних значень $z = x \in R$ функції $\sin z$ і $\cos z$ збігаються з дійсними тригонометричними функціями дійсної змінної x. Для тригонометричних функцій при $z \in C$ залишаються вірними формули тригонометрії (додаток А).

Використовуючи формулу Ейлера (1.3), можна отримати:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}. \tag{1.52}$$

Функції $\sin z$ і $\cos z$ визначені та аналітичні в усіх точках комплексної площини, при цьому $(\sin z)' = \cos z$, $(\cos z)' = -\sin z$.

Таким чином, функції $\sin z$ і $\cos z$ задають конформні відображення в усіх точках комплексної площини, крім тих, де похідна дорівнює нулю ($z = k\pi$,$k \in Z$ для $\cos z$ і $z=\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k \in Z$ для $\sin z$).

Функції $\sin z$ і $\cos z$ не є однолистими. При відображенні тригонометричними функціями $\sin z$ і $\cos z$ комплексна площина C переходить у себе таким чином, що кожна точка $w \in C$ має зчисленну кількість різних праобразів. При відображенні тригонометричними функціями $\sin z$ і $\cos z$ комплексна площина C «накриває» сама себе зчисленну кількість разів.

Визначимо області однолистості функції $w = \cos z$. Зрозуміло, що функцію $w = \cos z$ легко подати як композицію лінійної функції $w_1 = iz$, показникової $w_2 = e^z$ та функції Жуковського $w_3 = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$. Із властивостей цих відображень випливає, що функція $\cos z$ кожну смугу

$$D_k = \{z \in C : k\pi < \operatorname{Re} z < (k+1)\pi\},\ k \in Z, \tag{1.53}$$

взаємно однозначно (однолисто) відображає на комплексну площину C з розрізом уздовж частини дійсної вісі $[-\infty, -1]$ та $[1, +\infty]$. Області (1.53) є областями однолистості функції $\cos z$, а комплексну площину можна розбити на зчисленну кількість областей однолистості.

Функція $\cos z$ здійснює неперервне взаємно однозначне відображення комплексної площини C на поверхню, що складається із зчисленної кількості листів. Оберненим до функції $\cos z$ називають відображення $z = \operatorname{Arccos} w$, яке визначають наступним чином: при кожному фіксованому k довільному комплексному числу w, розташованому на відповідному листі поверхні, єдиним чином ставиться у відповідність певне комплексне число $z_k \in D_k$: $\cos z = w$. Тобто на комплексній площині визначають зчисленну кількість різних однозначних функцій, які в сукупності називають многозначним відображенням $z = \operatorname{Arccos} w$.

Для знаходження виразу для $z = \operatorname{Arccos} w$ знайдемо z із рівняння $\cos z = w$. З використанням формули (1.52) маємо:

$$\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = w, \quad e^{iz} + \frac{1}{e^{iz}} = 2w, \quad e^{2iz} - 2we^{iz} + 1 = 0, \quad e^{iz} = w + \sqrt{w^2 - 1},$$

$$z = \operatorname{Arccos} w = -i \operatorname{Ln}\left(w + \sqrt{w^2 - 1}\right). \tag{1.54}$$

Відповідні однозначні функції, яких є зчисленна кількість, називають гілками однозначності многозначного відображення $z = \operatorname{Arccos} w$. Описану вище поверхню називають поверхнею Рімана відображення $z = \operatorname{Arccos} w$. Точки $w = 1$, $w = -1$ та $w = \infty$ є логарифмічними точками розгалуження многозначного відображення $z = \operatorname{Arccos} w$.

Зауважимо, що області однолистості функції $\sin z$ можна легко визначити, враховуючи тригонометричні формули зведення.

Для знаходження виразу для $z = \operatorname{Arcsin} w$ виконаємо аналогічні дії, тобто знайдемо z із рівняння $\sin z = w$, з використанням формули (1.52) одержимо:

$$z = \operatorname{Arcsin} w = -i \operatorname{Ln}\left(iw + \sqrt{1 - w^2}\right), \tag{1.55}$$

Означення 1.22. Функції $\operatorname{tg} z$ і $\operatorname{ctg} z$ визначають рівностями [4, 8]:

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z},\ z \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z, \tag{1.56}$$

$$\operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z},\ z \neq \pi k,\ k \in Z. \tag{1.57}$$

Із означення тригонометричних функцій $\mathrm{tg}\, z$ і $\mathrm{ctg}\, z$ випливають наступні їх властивості:

- функція $\mathrm{tg}\, z$ визначена, аналітична та конформна в усіх точках комплексної площини, крім точок $z = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$; функція $\mathrm{ctg}\, z$ визначена, аналітична та конформна в усіх точках комплексної площини, крім точок $z = \pi k$, $k \in Z$; при цьому $(\mathrm{tg}\, z)' = \frac{1}{\cos^2 z}$, $(\mathrm{ctg}\, z)' = -\frac{1}{\sin^2 z}$;
- для дійсних значень $z = x \in R$ функції $\mathrm{tg}\, z$ і $\mathrm{ctg}\, z$ співпадають з дійсними тригонометричними функціями дійсної змінної x. Для тригонометричних функцій при $z \in C$ залишаються вірними формули тригонометрії;
- функції $\mathrm{tg}\, z$ і $\mathrm{ctg}\, z$ непарні;
- функції $\mathrm{tg}\, z$ і $\mathrm{ctg}\, z$ періодичні з періодом πk, $k \in Z$;
- функції $\mathrm{tg}\, z$ і $\mathrm{ctg}\, z$ не є однолистими, області однолистості визначають аналогічно визначенню областей однолистості $\sin z$ і $\cos z$.

Обернені функції мають відповідно вигляд:

$$z = \mathrm{Arctg}\, w = -\frac{i}{2} \mathrm{Ln} \frac{1 + iw}{1 - iw}, \tag{1.58}$$

$$z = \mathrm{Arcctg}\, z = -\frac{i}{2} \mathrm{Ln} \frac{w + i}{w - i}. \tag{1.59}$$

Означення 1.23. *Гіперболічні функції* визначають рівностями [4, 8]:

$$\mathrm{sh}\, z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \qquad \mathrm{ch}\, z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \qquad \mathrm{th}\, z = \frac{\mathrm{sh}\, z}{\mathrm{ch}\, z}, \quad \mathrm{cth}\, z = \frac{\mathrm{ch}\, z}{\mathrm{sh}\, z}. \tag{1.60}$$

Тригонометричні та гіперболічні функції пов'язані між собою наступними співвідношеннями:

$$\begin{aligned} &\sin z = -i\, \mathrm{sh}\, iz, && \mathrm{sh}\, z = -i \sin iz, \\ &\cos z = \mathrm{ch}\, iz, && \mathrm{ch}\, z = \cos iz, \\ &\mathrm{tg}\, z = -i\, \mathrm{th}\, iz, && \mathrm{th}\, z = -i\, \mathrm{tg}\, iz, \\ &\mathrm{ctg}\, z = i\, \mathrm{cth}\, iz, && \mathrm{cth}\, z = i\, \mathrm{ctg}\, iz. \end{aligned} \tag{1.61}$$

Аналогічно досліджують властивості гіперболічних функцій.

1.11 Приклади побудови конформних відображень

Наведемо приклади побудови конформних відображень за допомогою комбінацій розглянутих елементарних функцій, а також із використанням основних принципів теорії конформних відображень.

Приклад 1.3. Розглянемо відображення комплексної площини з розрізом вздовж прямолінійного відрізка уявної вісі від точки i до точки $3i$ (рис 1.7) на верхню півплощину (рис. 1.8).

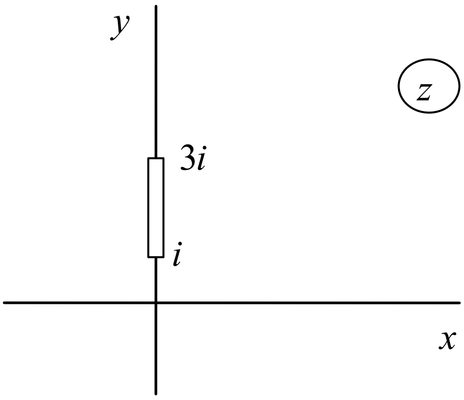


Рис. 1.7

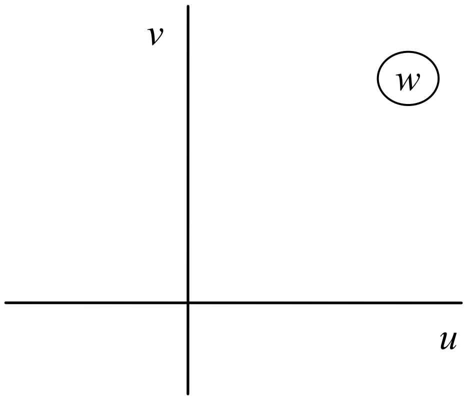


Рис. 1.8

Розглянемо спочатку функцію, яка перетворює комплексну площину з даним розрізом на комплексну площину з розрізом по променю, який виходить з початку координат. Відомо, що комплексну площину на комплексну площину відображає дробово-раціональна функція $w = f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$, причому точці $z=0$ відповідає точка $w = \dfrac{b}{d}$, точці $z=\infty$ відповідає точка $w = \dfrac{a}{c}$, точці $z = -\dfrac{b}{a}$ відповідає точка $w=0$, точці $z = -\dfrac{d}{c}$ відповідає точка $w=\infty$. Нехай $w_1 = \dfrac{z-i}{z-3i}$. Ця функція відображає кінці розрізу i та $3i$ відповідно в початок координат і нескінченно віддалену точку, і відповідно, задану область на площину w_1 з розрізом вздовж деякого променя, який виходить із початку координат. Для того, щоб з'ясувати напрямок цього променя, достатньо знайти на ньому хоча б одну проміжну точку. Точці $2i$ розрізу в площині z відповідає точка $w_1(2i) = \dfrac{2i-i}{2i-3i} = -1$ площини w_1. Таким чином, функція $w_1 = \dfrac{z-i}{z-3i}$ відображає дану область на площину w_1 з розрізом вздовж променя, що прямує по від'ємній частині дійсної вісі (рис. 1.9).

Виконаємо далі поворот на кут π за допомогою лінійної функції $w_2 = w_1 \cdot e^{\pi i} = -w_1$. Одержимо площину з розрізом вздовж променя, що прямує по додатній частині дійсної вісі (рис. 1.10).

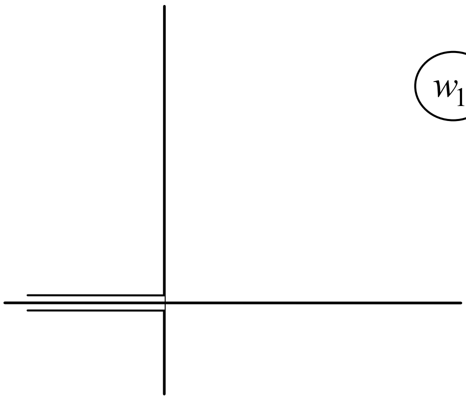


Рис. 1.9

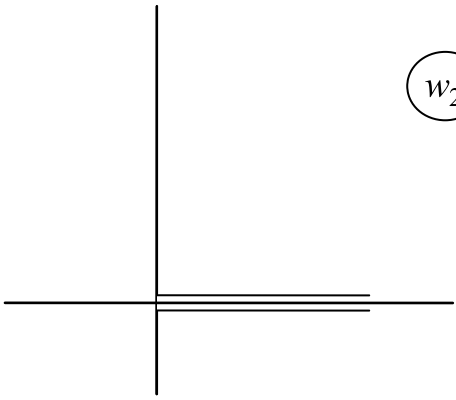


Рис. 1.10

Після цього за допомогою однієї з гілок функції $w=\sqrt{w_2}$ відобразимо площину w_2 з розрізом на верхню півплощину (рис.1.8). Таким чином, маємо функцію, яка здійснює відображення комплексної площини з розрізом вздовж прямолінійного відрізка уявної осі від точки i до точки $3i$ на верхню півплощину: $w=\sqrt{-\frac{z-i}{z-3i}}$.

Аналогічно, можна побудувати відображення на верхню півплощину площини з розрізом по відрізку, що поєднує точки $1+i$ та $2+2i$, ($w=\sqrt{\frac{z-1-i}{2+2i-z}}$, перевірте самостійно).

Приклад 1.4. Розглянемо відображення області $D:\begin{cases}|z|>1,\\ \mathrm{Im}\,z<1,\end{cases}$ (рис. 1.11) на верхню півплощину (рис. 1.12).

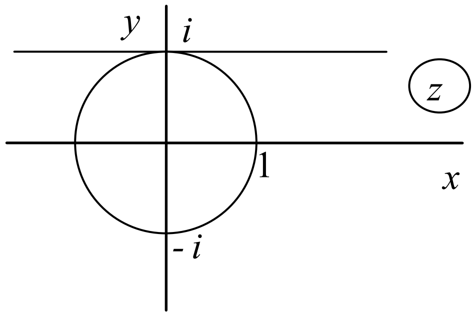


Рис. 1.11

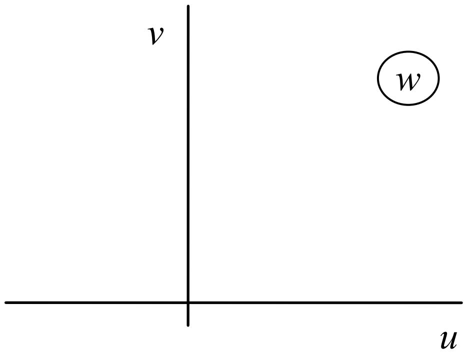


Рис. 1.12

Позначимо криві, які обмежують задану область: γ – коло $|z|=1$, γ_1 – пряма $\mathrm{Im}\,z=1$. Вони дотикаються в точці $z=i$. Відобразимо дану область на більш просту, використавши кругову властивість дробово-лінійної функції. Розглянемо таку дробово-лінійну функцію, яка переводить точку $z=i$ в нескінченно віддалену точку площини w_1: $w_1=\frac{z+i}{z-i}$. Тоді контури γ і γ_1 за допомогою цієї функції відобразяться на прямі, причому паралельні одна одній, оскільки конформне відображення зберігає кути між кривими. Знайдемо ці прямі. Виберемо дві точки на колі γ, наприклад, $z=-i$ та $z=1$, тоді $w_1(-i)=0$, $w_1(1)=\frac{1+i}{1-i}=i$, тобто образом кола γ буде уявна вісь площини w_1. Для побудови образа прямої γ_1 достатньо знайти значення в одній точці цієї прямої, оскільки образи γ і γ_1 паралельні. Виберемо, наприклад, точку $z=1+i$. Маємо $w_1(1+i)=\frac{1+i+i}{1+i-i}=1+2i$. Тобто образом прямої γ_1 при відображенні $w_1=\frac{z+i}{z-i}$ буде пряма $\mathrm{Re}\,w_1=1$, а образом даної області буде смуга одиничної ширини (рис. 1.13).

Функція $w_2=\pi w_1$ розтягне цю смугу до ширини π (рис. 1.14), а функція $w_3=e^{\frac{\pi}{2}i}w_2=iw_2$ поверне цю смугу на кут $\frac{\pi}{2}$ проти хода годинникової стрілки (рис. 1.15).

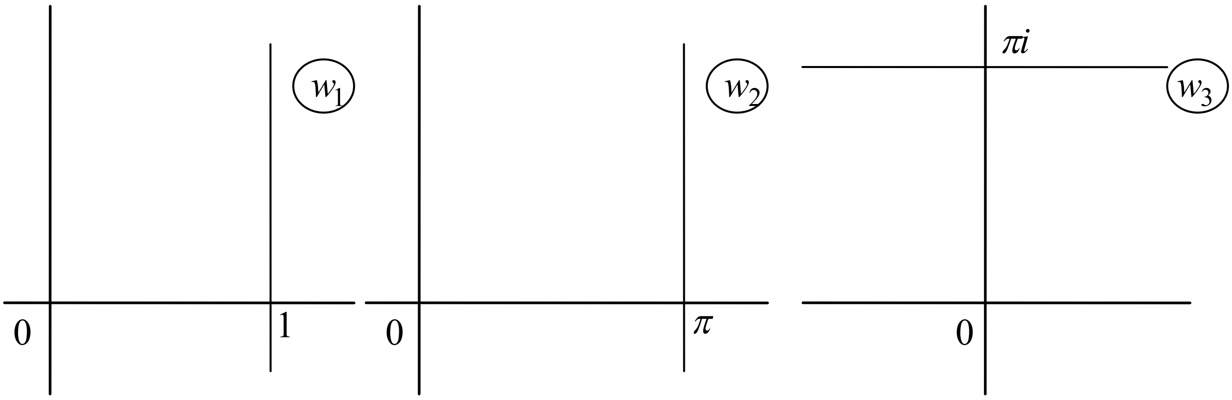


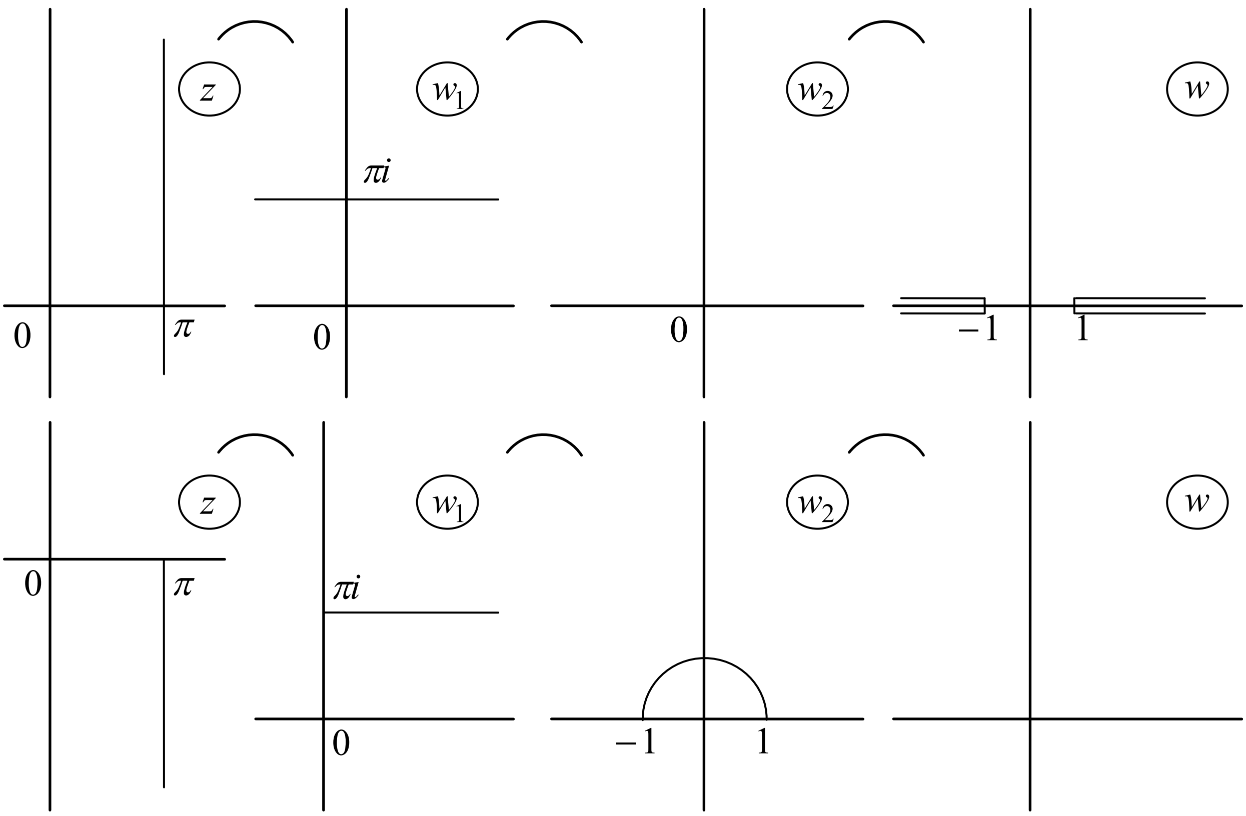
Рис. 1.13 Рис. 1.14 Рис. 1.15

Далі використаємо показникову функцію $w = e^{w_3}$, яка перетворює останню смугу на верхню півплощину.

Суперпозицією побудованих відображень буде $w = e^{\frac{z+i}{z-i}\pi i}$.

Приклад 1.5. Розглянемо відображення за допомогою тригонометричних функцій. Із формул (1.52) випливає, що відображення за допомогою синуса та косинуса є композицією більш простих відображень.

Зокрема, відображення $w = \cos z$ є композицією повороту на кут $\frac{\pi}{2}$ і відображень показниковою функцією та функцією Жуковського: $w_1 = iz$, $w_2 = e^{w_1}$, $w = \frac{1}{2}\left(w_2 + \frac{1}{w_2}\right)$. Одержимо наступні відображення деяких смуг і напівсмуг функцією $w = \cos z$ (рис. 1.16).



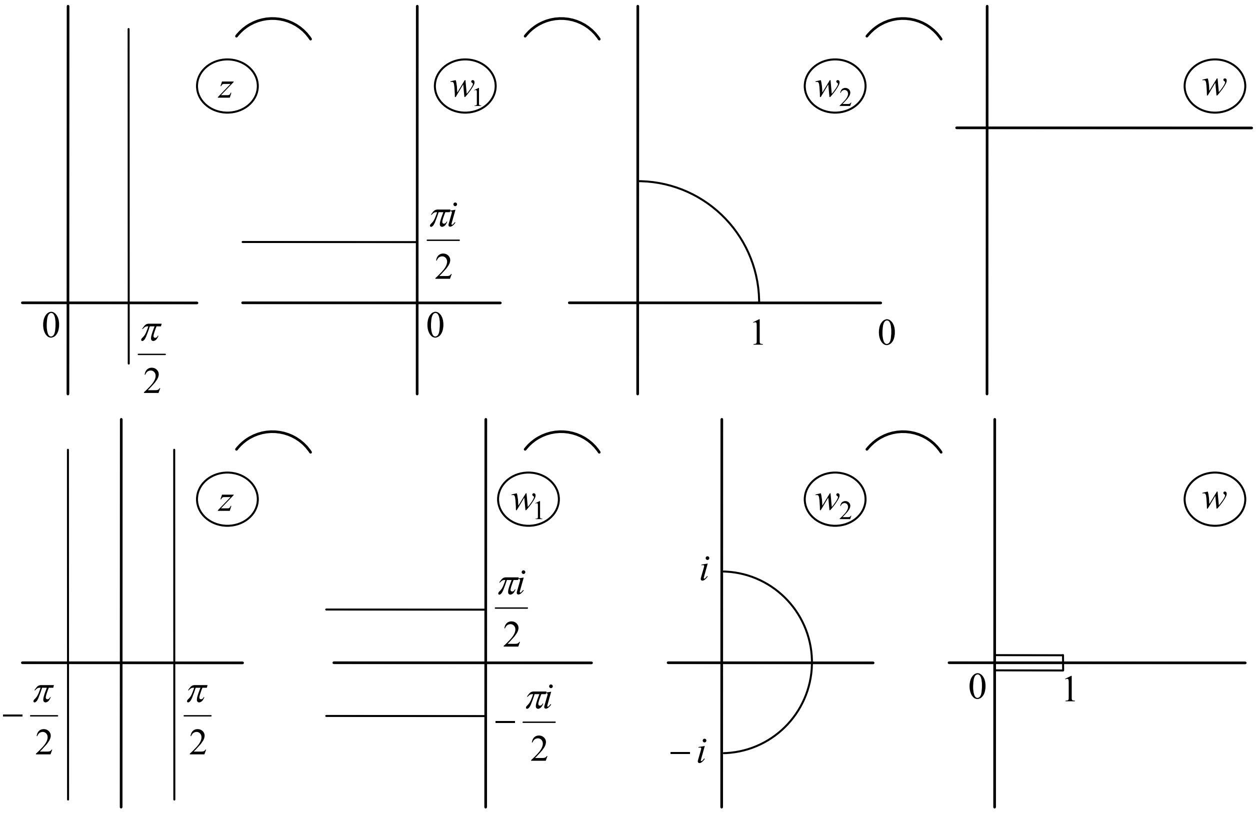


Рис. 1.16 Відображення за допомогою функції $w = \cos z$

Запишемо функцію $w = \sin z$ у вигляді:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{e^{i\left(z - \frac{\pi}{2}\right)} + e^{-i\left(z - \frac{\pi}{2}\right)}}{2}.$$

Одержимо, що відображення $w = \sin z$ є композицією відображень: $w_1 = z - \frac{\pi}{2}$, $w_2 = iw_1$, $w_3 = e^{w_2}$, $w = \frac{1}{2}\left(w_3 + \frac{1}{w_3}\right)$. Наприклад, образом смуги $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{2}$ при відображенні $w = \sin z$ буде площина з розрізами (рис. 1.17).

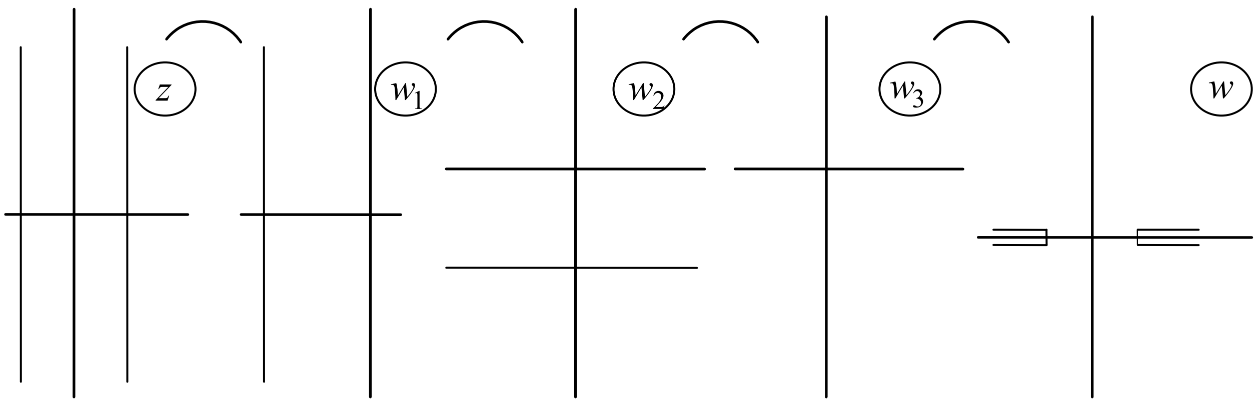


Рис. 1.17 Відображення за допомогою функції $w = \sin z$

Відображення за допомогою функцій тангенса і котангенса також є композиціями раніше розглянутих відображень. Так відображення

$$w = \operatorname{tg} z = -i \cdot \frac{e^{2iz} - 1}{e^{2iz} + 1}$$

є комбінацією відображень: $w_1 = 2iz$, $w_2 = e^{w_1}$, $w_3 = \dfrac{w_2 - 1}{w_2 + 1}$, $w = -iw_3$.

Одержимо відображення напівсмуги функцією $w = \operatorname{tg} z$ (рис. 1.18) та деяких смуг (рис. 1.19)

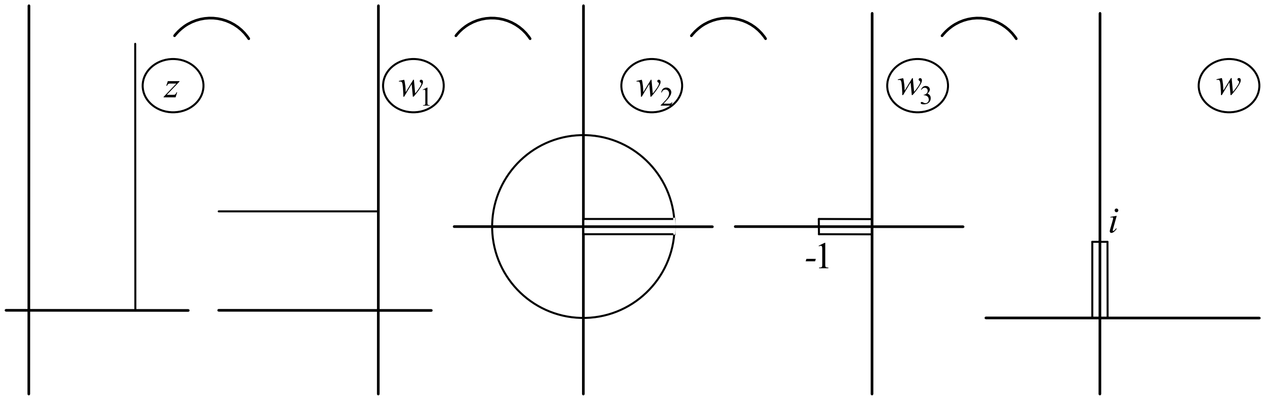


Рис. 1.18 Відображення за допомогою функції $w = \operatorname{tg} z$

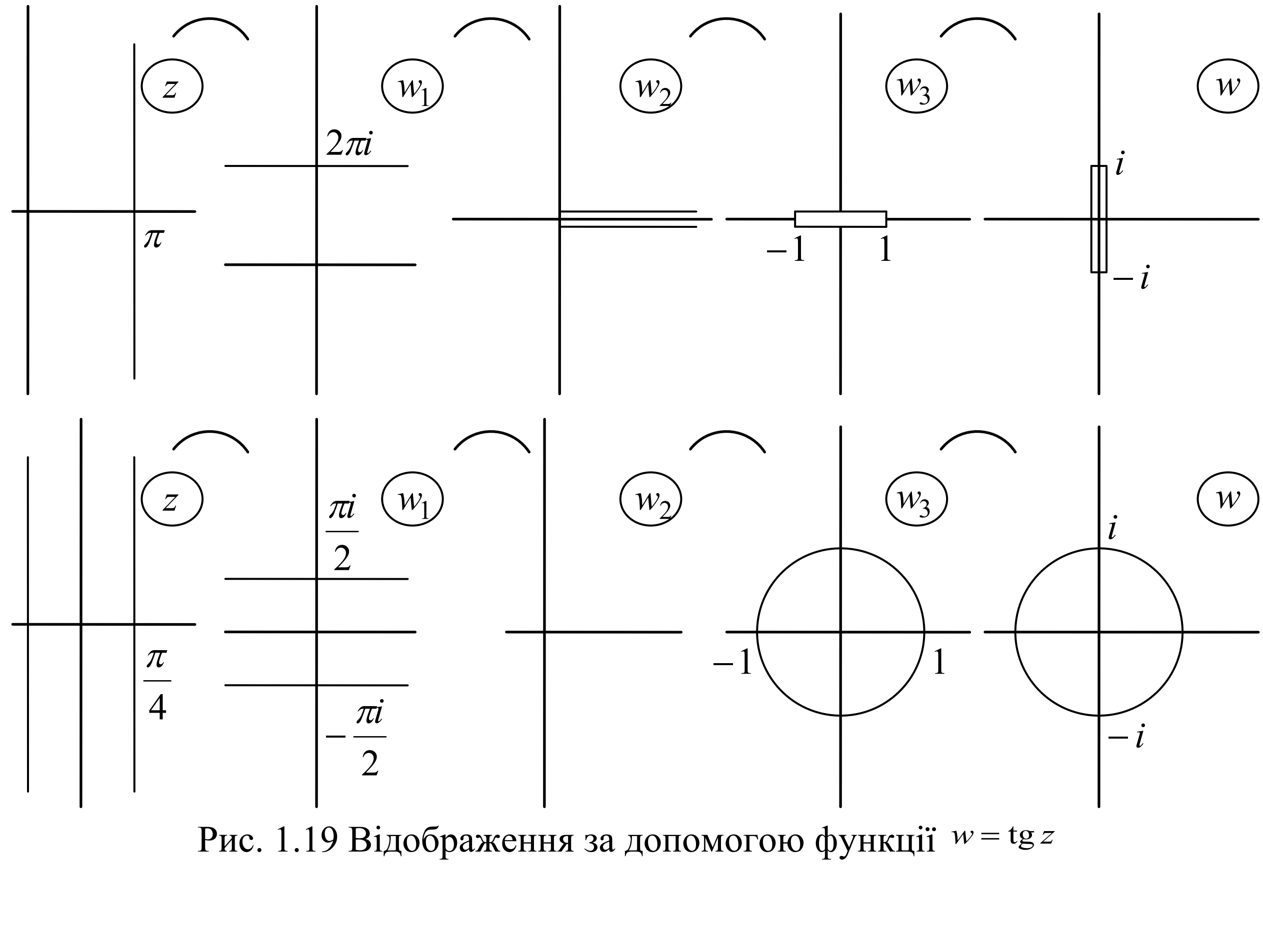


Рис. 1.19 Відображення за допомогою функції $w = \operatorname{tg} z$

1.12 Напрямки застосування теорії конформних відображень

Конформні відображення мають широке прикладне застосування [6, 7]. Вони являють собою достатньо зручний математичний апарат для розв’язку широкого кола задач математичної фізики, прикладної математики, картографії. Зокрема, на сучасному етапі розвитку математичного аналізу розв'язано задачі стосовно плоских гармонічних векторних полів. Застосовано цю теорію до задач про векторні гармонічні поля в механіці та фізиці, а саме:

- поле швидкостей сталої течії ідеальної рідини;
- поле швидкості рідини при сталій фільтрації;
- поля в стаціонарних задачах теорії теплопровідності;
- поля в задачах електростатики;
- поля в задачах магнітостатики;
- поля в задачах про стаціонарний електричний струм в однорідному електропровідному середовищі;
- поля в задачах про поперечні електромагнітні хвилі в різних системах.

Побудовано моделі та знайдено комплексні потенціали у відповідних прикладних задачах. Розв'язано деякі граничні задачі для гармонічних функцій.

Окремий напрямок сучасних досліджень присвячено задачам візуалізації гармонічних векторних полів методом конформних відображень. Зокрема, відомі дослідження про

- інваріантність аналітичних функцій при конформному відображенні;
- потік в криволінійній кутовій області;
- обтікання нескінченної кривої;
- потік в криволінійній полосі;
- візуалізацію електростатичного поля зарядженого провідного циліндра (плоска задача Робена);
- побудову функції джерела задачі Діріхле.

Розв'язано також задачі стосовно візуалізації плоских векторних полів з точечними особливостями тощо.

Сучасні дослідження також спрямовано на побудову конформних відображень складних областей з певними особливостями:

- відображення кругових двокутників (луночок);
- відображення зірочок і подібних до них многокутників;
- відображення трикутних та чотирикутних областей;
- відображення областей з різними видами розрізів.

Для побудови конформних відображень застосовують різні комп'ютерні програми та мови програмування. Наприклад, програмний пакет Maple має розвинену систему команд, дружній інтерфейс користувача і широкі графічні можливості, що дозволяє успішно застосувати Maple для математичного моделювання та візуалізації складних об'єктів і процесів, які досліджуються. Для візуалізації конформних відображень областей в Maple застосовується спеціальна функція conformal(), яка має таку специфікацію:

conformal(f(z), Zmin .. Zmax, params).

Розглянемо її основні параметри:

f(z) – функція комплексної змінної, за допомогою якої здійснюється конформне відображення двовимірної ортогональної сітки області комплексної площини (u, v): $u_{min} < u < u_{max}$, $v_{min} < v < v_{max}$. Зазвичай, в якості змінних (u, v) застосовують декартові координати (x, y) або полярні (ρ, φ). При цьому $z_{min} = u_{min} + iv_{min}$, $z_{max} = u_{max} + iv_{max}$. В системі Maple ці співвідношення можна записати наступним чином: Zmin = Umin + I*Vmin і Zmax = Umax + I*Vmax, де I – зарезервована в системі Maple змінна, яка позначає уявну одиницю. Розмір вихідної ортогональної сітки (число ліній вздовж кожної координатної осі) задається користувачем. Результатом роботи програми є набір плоских кривих – конформне відображення вихідної ортогональної сітки.

params – список параметрів, які дозволяють контрольювати якість графіки. Кожен параметр задається у вигляді param=value. Найбільш часто застосовуються наступні параметри:

grid = [n, m], де n і m – цілі числа, задає число ліній вихідної сітки по кожній координаті. За замовчуванням розмір вихідної сітки дорівнює 11x11;

coords задає систему координат; якщо coords = polar, то функція conformal працює в полярній системі координат, якщо ж параметр coords не заданий, то за замовчуванням використовується декартова система координат;

numxy = [m, n], де n і m – цілі числа, визначає число точок на лінії сітки по кожній координаті; за замовчуванням на кожній лінії береться 15 точок, збільшення цих параметрів робить криві більш гладкими, але й підвищує час обчислень;

view = [Xmin..Xmax, Ymin..Ymax] задає прямокутну область на комплексній площині, яка буде зображуватися на екрані;

axes = normal – тип виведення осей координат; можливі значення: normal – осі з центром на початку координат, boxed – графік вписується в рамку з нанесеною шкалою, frame – осі з центром в лівому нижньому куту, none – вивід зображення без нанесення осей;

xtickmarks = n, ytickmarks = m – число міток по горизонтальній і вертикальної осі відповідно; Якщо будь-яке зі значень дорівнює 0, то відповідна вісь виводиться без міток;

scaling = constrained задає тип масштабування; constrained – графік виводиться з однаковим масштабом по осях, unconstrained – графік масштабується за розміром графічного вікна, що задається параметром view;

style = line – вивід графіка лінією (line) або точками (point);

thickness = 1 – товщина лінії: 1 тонка (thin), 2 – середня (medium), 3 – товста (thick);

color = red – колір графіка; можливі значення: black, blue, brown, green, grey, magenta, white, yellow, red, ...

Приклад 1.6. Розглянемо візуалізацію конформного відображення, побудованого із застосуванням степеневої функції. Відповідні команди Maple мають наступний вигляд:

with(plots)
conformal(z^2, z = -1-I*0 .. 1+I, grid = [21, 11], numxy = [64, 64], view = [-1 .. 1, -1 .. 1], axes = boxed, xtickmarks = 0, ytickmarks = 0, scaling = constrained, style = line, thickness = 1, color = black);
Результат роботи програми наведено на рис. 1.20.

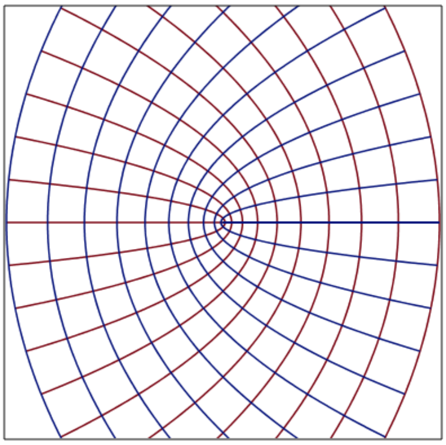


Рис. 1.20. Візуалізація відображення функцією $w = z^2$ за допомогою Maple

Для функції Жуковського маємо:
conformal(.5*(z+1/z), z = -1-I*0 .. 1+I, grid = [21, 11], numxy = [64, 64], view = [-5 .. 5, -5 .. 1], axes = boxed, xtickmarks = 0, ytickmarks = 0, scaling = constrained, style = line, thickness = 1, color = black)
і відповідне зображення (рис. 1.21).

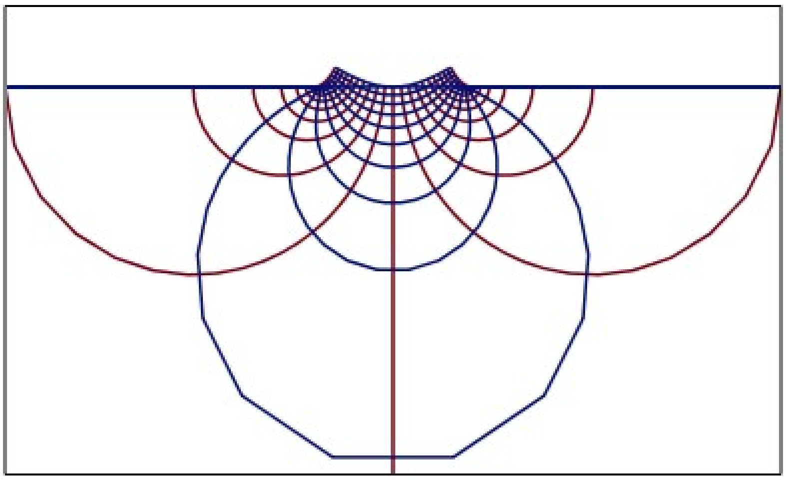


Рис. 1.21. Візуалізація відображення функцією Жуковського в Maple

Для функції $w = \operatorname{tg} z$ маємо наступну команду Maple:
conformal(tan(z), z = -1-I*0 .. 1+I, grid = [21, 11], numxy = [64, 64], view = [-2 .. 2, -1.5 .. 1.5], axes = boxed, xtickmarks = 0, ytickmarks = 0, scaling = constrained, style = line, thickness = 1, color = black)
і відповідне зображення (рис. 1.22).

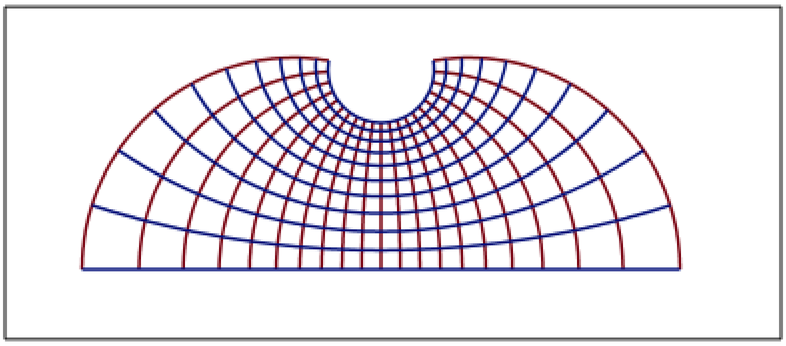


Рис. 1.22. Візуалізація відображення функцією $w = \operatorname{tg} z$ в Maple

Увагу вчених пригортають також наближені методи побудови конформних відображень.