

И.И.ОЛЬХОВСКИЙ

**КУРС
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ
МЕХАНИКИ**
для физиков



И. И. ОЛЬХОВСКИЙ

КУРС ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ ДЛЯ ФИЗИКОВ

*Допущено Министерством
высшего и среднего специального образования СССР
в качестве учебного пособия
для студентов специальности «физика»
государственных университетов*



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1970

531
О 56
УДК 531.0(075.8)

5

8154

ЗВР
0567

Курс теоретической механики для физиков. Ольховский И. И.
Главная редакция физико-математической литературы изд-ва
«Наука», М., 1970 г.

Книга содержит систематическое изложение классической механики. Большое внимание уделено основным понятиям и законам механики Ньютона, законам изменения и сохранения импульса, кинетического момента и энергии, уравнениям Лагранжа, Гамильтона и Гамильтона — Якоби для класса обобщенно-потенциальных сил. В книге подробно излагаются: задача двух тел и классическая теория рассеяния, законы изменения импульса, кинетического момента и энергии относительно неинерциальных систем отсчета, теория линейных колебаний систем под действием потенциальных, гироскопических и диссипативных сил, метод Крылова — Боголюбова для слабо нелинейных систем; рассматриваются канонические преобразования. Книга содержит большое количество примеров, интересных для физиков, в частности рассматриваются примеры на движение зарядов в заданных электромагнитных полях, задачи на рассеяние и захват частиц, колебания молекул, нелинейные колебания, поведение систем с нестационарными связями и т. д. Книга может служить введением в курс теоретической физики.

Рисунков 119, библиография 31 названий.

8380-19-77 Wp 1896

ТЕМА

ОГЛАВЛЕНИЕ

<i>Предисловие</i>	5
Глава I. Основные понятия и законы классической механики . .	7
§ 1. Понятия о материальной точке, о пространстве и времени	8
§ 2. Понятия о силе и массе	24
§ 3. Понятие об инерциальной системе отсчета и законы механики Ньютона. Принцип относительности Галилея	32
§ 4. Решение уравнений движения и начальные условия	38
Глава II. Законы изменения и сохранения импульса, кинетического момента и энергии	55
§ 5. Законы изменения и сохранения импульса и момента импульса материальной точки	55
§ 6. Законы изменения и сохранения энергии материальной точки . .	60
§ 7. Движение в центрально-симметричном поле	70
§ 8. Движение под действием силы, обратно пропорциональной квадрату расстояния до центра силы. Законы Кеплера	75
§ 9. Движение центра масс; законы изменения и сохранения импульса системы	85
§ 10. Законы изменения и сохранения кинетического момента системы	93
§ 11. Законы изменения и сохранения энергии системы	97
Глава III. Задача двух тел и классическая теория рассеяния частиц	104
§ 12. Задача двух тел	104
§ 13. Упругое рассеяние и захват частиц	109
§ 14. Поперечные сечения рассеяния и сечение захвата	127
§ 15. Распад частиц	138
Глава IV. Движение относительно неинерциальных систем отсчета	142
§ 16. Положение системы отсчета (твердого тела)	142
§ 17. Поступательное движение и изменение ориентации системы отсчета (твердого тела)	147
§ 18. Общий случай движения системы отсчета (твердого тела) . . .	155
§ 19. Положение, скорость и ускорение материальной точки относительно разных систем отсчета	157
§ 20. Уравнение движения материальной точки относительно неинерциальной системы отсчета; силы инерции	165
§ 21. Законы изменения кинетического момента и кинетической энергии относительно поступательно движущейся системы центра масс	173
§ 22. Законы изменения и сохранения импульса, кинетического момента и энергии относительно произвольных неинерциальных систем отсчета	182

Глава V. Уравнения Лагранжа	193
§ 23. Основная задача динамики несвободной системы и понятие о связях	193
§ 24. Действительные, возможные и виртуальные перемещения; идеальные связи	197
§ 25. Уравнения Лагранжа с реакциями связей; законы изменения импульса, кинетического момента и энергии для систем со связями	201
§ 26. Уравнения Лагранжа в независимых координатах и общее уравнение механики; циклические координаты и симметрия силового поля и связей	209
§ 27. Структура уравнений движения в независимых координатах и функция Лагранжа	222
§ 28. Законы сохранения обобщенного импульса и обобщенной энергии	230
§ 29. Ковариантность уравнений Лагранжа в независимых координатах	241
Глава VI. Линейные колебания	245
§ 30. Собственные одномерные колебания	253
§ 31. Положение устойчивого равновесия	253
§ 32. Собственные и главные колебания системы под действием потенциальных сил	261
§ 33. Собственные колебания системы под действием потенциальных, гироскопических и диссипативных сил	280
§ 34. Вынужденные колебания	292
Глава VII. Нелинейные колебания	302
§ 35. Собственные колебания и метод Крылова — Боголюбова	302
§ 36. Вынужденные колебания и резонанс	313
Глава VIII. Динамика твердого тела	327
§ 37. Уравнения движения твердого тела	327
§ 38. Тензор инерции	336
§ 39. Плоскопараллельное движение твердого тела	345
§ 40. Движение твердого тела с одной неподвижной точкой. Уравнения Эйлера	353
§ 41. Линейные неголономные связи	364
Глава IX. Уравнения Гамильтона	368
§ 42. Канонические уравнения	368
§ 43. Фазовое пространство и теорема Лиувилля	375
§ 44. Скобки Пуассона	379
§ 45. Уравнение Гамильтона — Якоби	385
§ 46. Метод разделения переменных	391
§ 47. Движение материальной точки и волновой процесс	399
§ 48. Интегральный инвариант Пуанкаре — Картана	404
§ 49. Канонические преобразования	411
§ 50. Переменные «действие — угол» и адиабатические инварианты	422
§ 51. Уравнения движения и интегральные вариационные принципы	433
Литература	442
Предметный указатель	443

ПРЕДИСЛОВИЕ

В основу настоящей книги положены лекции, которые автор в течение ряда лет читает в Московском государственном университете на физическом факультете, где теоретическая механика преподается как первый раздел общего курса теоретической физики.

В первой главе излагаются основные понятия и законы механики Ньютона, а также те физические допущения, которые содержатся в этих законах и понятиях. В «Курсе» подчеркивается большая роль законов изменения и сохранения импульса, кинетического момента и энергии, связь законов сохранения с симметрией силовых полей, важность общих теорем механики об инвариантности различных величин. Более половины «Курса» посвящается изложению уравнений Лагранжа, Гамильтона и Гамильтона — Якоби, а также инварианта Пуанкаре — Картана и канонических преобразований, причем в этих разделах все общие теоремы излагаются для класса обобщенно-потенциальных сил, включающего в себя как обычные потенциальные силы, так и силы, действующие на заряды, движущиеся в заданных электромагнитных полях, и силы инерции. В «Курсе» подробно рассматривается классическая теория рассеяния частиц; излагаются законы изменения импульса, кинетического момента и энергии относительно неинерциальных систем отсчета; в теорию колебаний включен метод Крылова — Боголобова для слабо нелинейных систем; излагается большое число примеров, представляющих интерес для физиков. В частности рассматриваются задачи о движении зарядов в заданных электромагнитных полях, о движении спутника, о рассеянии встречных пучков и захвате частиц, о колебаниях молекул (в том числе вращающихся), об автоколебаниях, задачи о движении точки с нестационарными связями, о движении заряженного твердого тела и т. д.

Такой отбор материала для курса теоретической механики стал возможным ввиду сокращения ряда разделов, содержание которых сравнительно редко используется физиками; например, «Курс» не содержит большого по объему раздела статики, многих сведений из кинематики (понятий о годографах, центроидах, аксоидах и др.). Кроме того в книге опущены разделы, ставшие привычными в курсах теоретической механики и посвященные теории векторов и другим математическим вопросам, поскольку в настоящее время эти разделы

достаточно глубоко изучаются в курсах высшей математики, предшествующих курсу теоретической механики. Учитывалось также, что до изучения теоретической механики (на физическом факультете МГУ она изучается на 4—5 семестрах) студенты знакомятся с основами механики в общем курсе физики.

«Курс теоретической механики для физиков» написан в соответствии с программой, утвержденной Учебно-методическим управлением по высшему образованию МВ и ССО СССР.

Автор выражает глубокую благодарность А. А. Соколову за ценные указания и большую помощь, оказанную при работе над книгой.

Автор глубоко благодарен Г. Н. Свешникову, Л. Г. Лойцянскому, В. В. Добронравову, С. П. Стрелкову и С. М. Таргу, внимательно прочитавшим книгу в рукописи и сделавшим много ценных замечаний.

Автор искренне благодарит Ю. М. Лоскутова, работа которого по редактированию этой книги способствовала ее улучшению, а также А. Б. Куканова и Ю. Г. Павленко, принимавших участие в чтении корректуры.

Автор

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ЗАКОНЫ КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Все известные нам материальные объекты: поля, элементарные частицы, атомы, молекулы, неживые и живые тела — движутся в самом общем смысле этого слова, т. е. «изменяются вообще» (Энгельс). Наиболее простой формой движения тел является их перемещение относительно друг друга. Любая другая форма движения, будучи связанной с каким-либо перемещением, не исчерпывается этим перемещением и является более сложной.

«Само собой разумеется, что изучение природы движения должно было исходить от ... простейших форм его ... И, действительно, мы видим, что в историческом развитии естествознания раньше всего разрабатывается теория простого перемещения, механика небесных тел и земных масс» (Энгельс). Эта теория называется классической механикой. В ней рассматриваются движения макроскопических тел, т. е. тел, состоящих из большого количества атомов и молекул, причем неявно допускается, что движения совершаются со скоростями, малыми по сравнению со скоростью света. Итак, *классическая механика — это теория достаточно медленных перемещений одних макроскопических тел относительно других* *).

Основными понятиями классической механики являются понятия о пространстве и времени, о силе и массе, об инерциальной системе отсчета. Основными законами являются закон инерции Галилея — Ньютона (первый закон Ньютона), уравнение движения относительно инерциальной системы отсчета (второй закон Ньютона), закон равенства действия и противодействия (третий закон Ньютона). Эти понятия и законы были сформулированы И. Ньютоном в его гениальном трактате «Математические начала натуральной философии» (1687 г.).

С точки зрения современного состояния науки взаимодействие тел осуществляется посредством полей, причем взаимодействия передаются с конечной скоростью — со скоростью света; совокупность тел и полей представляет собой единую материальную систему. Под влиянием взаимодействия тела могут изменять свое расположение относительно друг друга, т. е. перемещаться в пространстве. Вместе с тем изменение относительного расположения обладает длительностью, т. е.

*) В некоторых частных случаях классическая механика описывает также движение микрочастиц.

перемещение происходит не только в пространстве, но и во времени. Однако пространство и время не являются объектами, подобными телам, полям и т. д. *Пространство и время представляют собой общие формы существования всех материальных объектов.* Энгельс подчеркивал, что «...обе эти формы существования материи без материи суть ничто, пустые представления, абстракции, существующие только в нашей голове». Создание общей теории относительности подтвердило правильность такого представления о пространстве и времени. По мнению Эйнштейна, основателя общей теории относительности, «если бы исчезла материя, то исчезли бы и пространство и время».

Классическая механика изучает такие перемещения тел в пространстве и времени, при которых процесс передачи взаимодействия тел можно считать практически мгновенным; тем самым процессы, протекающие в самих полях, мы можем не рассматривать. Несмотря на это ограничение, область применимости классической механики очень велика (скорости тел должны быть малыми по сравнению со скоростью света). Отметим также, что большое количество понятий и аналитических приемов классической механики с успехом используется в других разделах теоретической физики.

§ 1. Понятия о материальной точке, о пространстве и времени

Реальные движения тел настолько сложны, что, изучая их, нужно отвлечься от несущественных для рассматриваемого движения деталей. С этой целью используются понятия, применимость которых зависит от того, какое именно движение тел изучается. Среди этих понятий большое значение имеет понятие о материальной точке. Материальной точкой называется тело исчезающе малых размеров; в задачах механики о движении реальных тел понятие материальной точки применимо к такому телу, размерами которого можно пренебречь по сравнению с размерами, характеризующими движение этого тела. Например, изучая движение Земли вокруг Солнца, и Землю и Солнце можно считать материальными точками, хотя радиус Земли примерно $6 \cdot 10^8$ м, а радиус Солнца $7 \cdot 10^8$ м. Дело в том, что эти размеры весьма малы по сравнению с расстоянием между центрами Солнца и Земли, составляющим примерно $1,5 \cdot 10^{11}$ м. С другой стороны, при изучении вращения Земли вокруг своей оси представление о Земле как материальной точке неприменимо. Действительно, максимальным размером, характеризующим это движение, является длина окружности, по которой движется какая-либо точка поверхности Земли, находящаяся на экваторе. Очевидно, что радиусом Земли нельзя пренебречь по сравнению с указанной длиной.

Совокупность нескольких тел, каждое из которых можно считать материальной точкой, называют системой материальных точек. Например, нашу Галактику можно представлять как систему

очень большого числа материальных точек-звезд; в ряде задач газ, состоящий из молекул, также можно представлять себе как систему большого числа материальных точек-молекул. Из приведенных примеров и из определения материальной точки видно, что это понятие не связано с представлением об атомистическом строении вещества.

Важную роль в механике играет понятие абсолютно твердого тела или, кратко говоря, твердого тела. Так называется система материальных точек, расстояния между которыми не изменяются при произвольных перемещениях этой системы. Конечно, размеры реальных тел остаются практически неизменными либо в определенных условиях, либо в течение определенных интервалов времени. Например, годовое угловое смещение большинства звезд составляет примерно $0'',01$. Следовательно, система Солнце — «неподвижные» звезды может быть принята с известной степенью точности за твердое тело, причем для сравнительно длительных интервалов времени.

При изучении взаимного расположения материальных точек первостепенное значение имеет определение расстояний между ними с помощью эталона длины. Расстояния между точками будет определяться при этом тем числом раз, которое эталон длины «укладывается» на отрезке прямой, соединяющей точки. До 1960 г. за эталон длины принимался метр — длина некото-

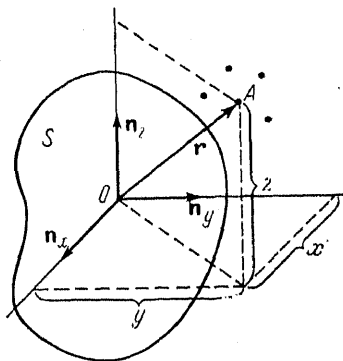


Рис. 1.1.

рого сплошного твердого тела, находящегося в стационарных условиях. Согласно единой международной системе СИ, введенной с 1960 г., за эталон длины принят метр — длина, равная $1\,650\,763,73$ длины волны излучения, соответствующего переходу между уровнями $2p_{10}$ и $5d_5$ атома криптона-86 (в вакууме). Этот эталон обеспечивает большую точность измерений по сравнению со старым эталоном.

Рассмотрим движение некоторой системы A материальных точек относительно системы S . Пусть для данных перемещений системы A систему S можно считать твердым телом. Тогда с телом S можно жестко связать три единичных вектора n_x, n_y, n_z , имеющих общее начало в некоторой точке O этого тела (для определенности будем считать выбранный базис ортогональным и правовинтовым — см. рис. 1.1). Положение любой материальной точки системы A относительно системы S зададим радиусом-вектором r этой точки*).

*) В дальнейшем, вместо того чтобы говорить «точка находится в положении, задаваемом радиусом-вектором r », мы будем для краткости говорить: «точка находится в положении r ».

Разложив вектор \mathbf{r} по трем осям Ox , Oy , Oz , которые определяются ортами \mathbf{n}_x , \mathbf{n}_y , \mathbf{n}_z , получим, что

$$\mathbf{r} = x\mathbf{n}_x + y\mathbf{n}_y + z\mathbf{n}_z, \quad (1.1)$$

где x , y , z — проекции радиуса-вектора на указанные оси. Таким образом, при определении положения материальной точки ей ставятся в соответствие три вещественные координаты x , y , z , называемые декартовыми координатами. Систему координат, жестко связанную с телом S , называют системой отсчета S . Заметим, что в формуле (1.1) неявно пренебрегается влиянием процесса изменения положения точки на само положение. Это допущение оправдывается при рассмотрении движений макроскопических тел; для атомных явлений эта привычная гипотеза неверна.

Чтобы определить положение всех точек системы A относительно системы S , нужно задать радиусы-векторы этих точек. Пусть система A состоит из N материальных точек. Тогда аналогично (1.1) имеем

$$\mathbf{r}_i = x_i\mathbf{n}_x + y_i\mathbf{n}_y + z_i\mathbf{n}_z \quad (i = 1, 2, \dots, N), \quad (1.2)$$

где \mathbf{r}_i — радиус-вектор i -й точки, а x_i , y_i , z_i — декартовы координаты i -й точки.

Приведем пример системы отсчета. Для изучения движения планет солнечной системы относительно системы Солнце — звезды можно в течение сравнительно длительного промежутка времени систему Солнце — звезды считать твердым телом. Совмещая начало системы отсчета с центром Солнца и связывая направления декартовых осей с направлениями на определенные звезды, получим гелиоцентрическую систему отсчета Коперника.

Рассмотрим свойства пространства, для чего возьмем любые две точки 1 и 2 . Положения этих точек относительно некоторой системы S зададим радиусами-векторами \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 :

$$\mathbf{r}_1 = x_1\mathbf{n}_x + y_1\mathbf{n}_y + z_1\mathbf{n}_z,$$

$$\mathbf{r}_2 = x_2\mathbf{n}_x + y_2\mathbf{n}_y + z_2\mathbf{n}_z.$$

Вектор, проведенный от точки 1 к точке 2 , равен

$$\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$$

(здесь и в дальнейшем порядок индексов 1 и 2 соответствует направлению вектора от точки 1 к точке 2), а расстояние между этими точками равно модулю вектора \mathbf{r}_{12} , т. е.

$$r_{12} = [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2]^{1/2}. \quad (1.3)$$

На основании опыта с макроскопическими телами, скорости которых достаточно малы, можно утверждать, что *величина данного пространственного интервала относительно разных произвольно движущихся систем отсчета — одна и та же в данный момент*

времени. Запишем это важнейшее утверждение аналитически, для чего возьмем две системы отсчета: систему S с началом в точке O и осями \mathbf{n}_x , \mathbf{n}_y , \mathbf{n}_z и систему S' с началом в O' и осями $\mathbf{n}_{x'}$, $\mathbf{n}_{y'}$, $\mathbf{n}_{z'}$ (рис. 1.2). Расстояние между точками 1 и 2 относительно системы S равно r_{12} . Расстояние между этими же точками относительно системы S' равно $r'_{12} = |\mathbf{r}'_2 - \mathbf{r}'_1|$, где

$$\mathbf{r}'_2 = x'_2 \mathbf{n}_{x'} + y'_2 \mathbf{n}_{y'} + z'_2 \mathbf{n}_{z'}$$

$$\mathbf{r}'_1 = x'_1 \mathbf{n}_{x'} + y'_1 \mathbf{n}_{y'} + z'_1 \mathbf{n}_{z'}$$

Утверждается, что, как бы ни двигалась «штрихованная» система отсчета относительно «нештрихованной», расстояния r_{12} и r'_{12} , взятые в один и тот же момент времени, равны между собой, т. е.

$$[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2]^{1/2} = [(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2]^{1/2}. \quad (1.4)$$

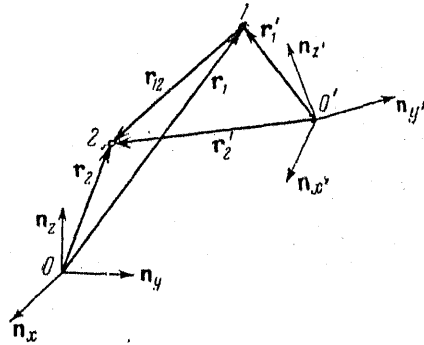


Рис. 1.2.

Пространство, в котором соотношение (1.4) выполняется при любой ориентации интервала, называется евклидовым. Таким образом, данные опыта приводят к заключению о том, что *пространство в классической механике — это евклидово пространство**.

Далее, на основе (1.4) постулируется равенство векторов

$$\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}'_{12}, \quad (1.5)$$

где $\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}'_{12} = \mathbf{r}'_2 - \mathbf{r}'_1$.

Отсюда вытекает простое, но очень важное соотношение радиус-векторов одной и той же точки относительно разных систем отсчета. Пусть $\mathbf{r}_{O'}$ — радиус-вектор начала системы S' относительно системы S , \mathbf{r} — радиус-вектор точки относительно системы S , а \mathbf{r}' — радиус-вектор той же точки относительно S' . Тогда, полагая $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}$, $\mathbf{r}'_2 = \mathbf{r}'$, $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_{O'}$, $\mathbf{r}'_1 = 0$, из (1.5) получим

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_{O'} + \mathbf{r}'. \quad (1.6)$$

Подчеркнем еще раз, что утверждения (1.5) и (1.6) справедливы

*) Ньютон подчеркивал: «...Самое проведение прямых линий и кругов, служащее основанием геометрии, в сущности относится к механике. Геометрия не учит тому, как проводить эти линии, но предполагает (постулирует) выполнимость этих построений». «Итак, геометрия основывается на механической практике» (из предисловия Ньютона к первому изданию «Математических начал», см. [3]).

только в классической механике. Если же скорости тел не пренебрежимо малы по сравнению со скоростью света, то эти «очевидные» постулаты становятся неверными. Движение тел с любыми скоростями (в том числе сравнимыми со скоростью света) рассматривается в более глубокой теории — в релятивистской механике Эйнштейна.

Важную роль в механике играет понятие периодического процесса, т. е. регулярно повторяющегося явления. Например, такими процессами являются колебания маятника, вращение Земли вокруг своей оси, движение Земли по орбите вокруг Солнца и т. п. Тело, с помощью которого осуществляется периодический процесс, может служить часами, а длительность периода — эталоном времени. Конечно, длительность периода реального периодического процесса постоянна лишь с определенной степенью точности. До 1960 г. эталоном времени служила определенная часть средних солнечных суток. Но, ввиду экспериментально доказанной (с помощью атомных часов) неравномерности вращения Земли, а также изменений среднего тропического года, за эталон времени в системе СИ принята секунда — длительность, равная $1/31\,556\,925,9747$ части тропического года для 1900 г., января 0, в 12 часов эфемеридного времени *).

В классической механике постулируется *существование таких часов, длительность периода которых не изменяется при произвольных перемещениях этих часов*. Этот постулат эквивалентен утверждению о том, что *величина данного временного интервала относительно разных произвольно движущихся систем отсчета одинакова*, т. е.

$$t_{12} = t'_{12}; \quad (1.7)$$

здесь $t_{12} = t_2 - t_1$ — длительность определенного процесса относительно системы S , $t'_{12} = t'_2 - t'_1$ — длительность того же процесса относительно системы S' . Кроме того, в классической механике предполагается, что измерение длительности некоторого процесса можно провести, не влияя на саму длительность.

Согласно (1.7) в любых системах отсчета координат можно произвольно выбрать одно и то же начало отсчета времени и тем самым ввести одну временную «координату» t . Постулат (1.7), как и постулат (1.5), справедлив, пока скорости движения макроскопических тел пренебрежимо малы по сравнению со скоростью света **).

*) См., например, К. А. Куликов, Курс сферической астрономии, Физматгиз, 1961, гл. II «Измерение времени».

**) Утверждения (1.5) и (1.7), по существу, использовались Ньютоном. Однако Ньютон возвел их в абсолютные постулаты и тем самым пришел к представлениям о времени и пространстве как о «пустых» вместимостях тел и событий. Ньютон писал: «Длительность или продолжительность существования вещей одна и та же, быстры ли движения (по которым измеряется время), медленны ли, или их совсем нет...» и «Как неизменен порядок частей времени, так неизменен и порядок частей пространства», см. [3].

Используя рассмотренные выше понятия и постулаты, можно экспериментально определить закон движения материальной точки, т. е. определить положение материальной точки в любой момент времени относительно данной системы отсчета S и задать его с помощью радиуса-вектора точки как функции времени:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t). \quad (1.8)$$

Конец этого радиуса-вектора описывает в пространстве кривую, называемую траекторией точки.

Заметим, что в классической механике постулируется непрерывность как координат, так и времени; тем самым постулируется непрерывность функции (1.8).

Скоростью точки относительно системы отсчета S называется отношение бесконечно малого приращения $d\mathbf{r}$ радиуса-вектора

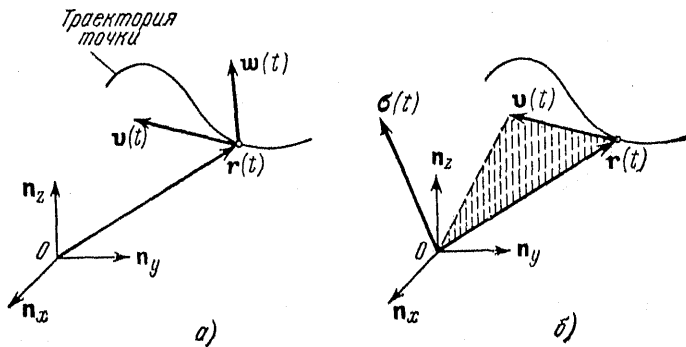


Рис. 1.3.

точки к бесконечно малому интервалу времени dt , за который происходит указанное изменение радиуса-вектора. Приращение $d\mathbf{r}$ есть приращение относительно системы S , орты которой жестко скреплены с телом S . В связи с этим *скорость точки \mathbf{v} относительно системы S равняется производной радиуса-вектора по времени при постоянных ортах $\mathbf{n}_x, \mathbf{n}_y, \mathbf{n}_z$ (рис. 1.3, а)*)*:

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}, \quad (1.9)$$

где $\dot{\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$.

Ускорение точки \mathbf{w} относительно системы S определяется как первая производная скорости по времени при постоянных ортах $\mathbf{n}_x, \mathbf{n}_y, \mathbf{n}_z$. Учитывая (1.9), ускорение можно также

*) Скорость точки \mathbf{v} иногда называется линейной скоростью.

записать в виде второй производной от \mathbf{r} по времени. Таким образом,

$$\mathbf{w} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}}, \quad (1.10)$$

где $\dot{\mathbf{v}} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$, $\ddot{\mathbf{r}} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$.

В ряде задач используется понятие секторной скорости точки σ , по определению равной

$$\sigma = \frac{1}{2} [\mathbf{r}\mathbf{v}]. \quad (1.11)$$

Величина $1/2 |[\mathbf{r} d\mathbf{r}]|$ равна площади, очерчиваемой радиусом-вектором при элементарном перемещении точки на $d\mathbf{r}$. Следовательно, модуль секторной скорости равен скорости, с которой изменяется

площадь, очерчиваемая радиусом-вектором точки (рис. 1.3, б). Иногда также рассматривают секторное ускорение $\dot{\sigma}$.

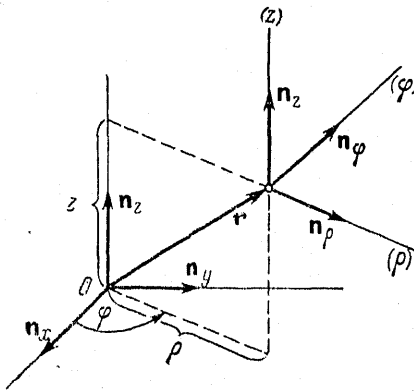


Рис. 1.4.

Радиусы-векторы точек, их скорости и ускорения задают с помощью различных координат. В *декартовых координатах* радиус-вектор точки как функция времени задается тремя скалярными функциями $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ (см. (1.1), (1.8) и рис. 1.1). Этот вектор определяет положение точки относительно выбранной системы отсчета S в любой момент времени. Дифференцируя радиус-вектор $\mathbf{r}(t)$ по времени при постоянных ортах \mathbf{n}_x , \mathbf{n}_y , \mathbf{n}_z , найдем

скорость и ускорение точки в виде (см. (1.9) и (1.10))

$$\mathbf{v} = \dot{x}\mathbf{n}_x + \dot{y}\mathbf{n}_y + \dot{z}\mathbf{n}_z, \quad (1.12)$$

$$\mathbf{w} = \ddot{x}\mathbf{n}_x + \ddot{y}\mathbf{n}_y + \ddot{z}\mathbf{n}_z. \quad (1.13)$$

Следовательно, проекции скорости и ускорения точки на декартовы оси равны

$$\begin{aligned} v_x = \dot{x}, & \quad v_y = \dot{y}, & \quad v_z = \dot{z}; \\ w_x = \ddot{x}, & \quad w_y = \ddot{y}, & \quad w_z = \ddot{z}. \end{aligned} \quad (1.14)$$

В *цилиндрических координатах* $\mathbf{r}(t)$ задается скалярными функциями $\rho(t)$, $\varphi(t)$, $z(t)$ (рис. 1.4):

$$\mathbf{r} = \rho\mathbf{n}_\rho + z\mathbf{n}_z. \quad (1.15)$$

где орты цилиндрических координат связаны с ортами декартовых координат соотношениями

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_\rho &= \mathbf{n}_x \cos \varphi + \mathbf{n}_y \sin \varphi, \\ \mathbf{n}_\varphi &= -\mathbf{n}_x \sin \varphi + \mathbf{n}_y \cos \varphi, \\ \mathbf{n}_z &= \mathbf{n}_z. \end{aligned} \quad (1.16)$$

При перемещениях точки относительно системы S положение ортов \mathbf{n}_ρ и \mathbf{n}_φ изменяется, а положение ортов \mathbf{n}_x , \mathbf{n}_y и \mathbf{n}_z фиксировано. Учитывая это, в результате дифференцирования \mathbf{r} по времени найдем, что

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\rho} \mathbf{n}_\rho + \rho \dot{\mathbf{n}}_\rho + \dot{z} \mathbf{n}_z.$$

Замечая далее, что, согласно (1.16),

$$\dot{\mathbf{n}}_\rho = \dot{\varphi} \mathbf{n}_\varphi,$$

для скорости точки относительно системы S получаем выражение

$$\mathbf{v} = \dot{\rho} \mathbf{n}_\rho + \rho \dot{\varphi} \mathbf{n}_\varphi + \dot{z} \mathbf{n}_z. \quad (1.17)$$

Таким образом, проекции скорости на координатные оси (ρ) , (φ) , (z) оказываются равными

$$v_\rho = \dot{\rho}, \quad v_\varphi = \rho \dot{\varphi}, \quad v_z = \dot{z}. \quad (1.18)$$

Аналогично, дифференцируя по времени \mathbf{v} и учитывая зависимость \mathbf{n}_ρ и \mathbf{n}_φ от $\varphi(t)$, получим ускорение точки относительно S в виде разложения по ортам цилиндрических координат:

$$\mathbf{w} = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2) \mathbf{n}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{d}{dt} (\rho^2 \dot{\varphi}) \mathbf{n}_\varphi + \ddot{z} \mathbf{n}_z. \quad (1.19)$$

Отсюда видно, что проекции ускорения на оси (ρ) , (φ) , (z) равны

$$\omega_\rho = \ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2, \quad \omega_\varphi = \frac{1}{\rho} \frac{d}{dt} (\rho^2 \dot{\varphi}), \quad \omega_z = \ddot{z}. \quad (1.20)$$

Отметим, что проекция ускорения ω_φ связана с проекцией секторной скорости σ_z соотношением

$$\omega_\varphi = \frac{2}{\rho} \frac{d\sigma_z}{dt}, \quad (1.21)$$

поскольку, согласно (1.11), (1.15) и (1.17),

$$\sigma_z = \frac{1}{2} \rho^2 \dot{\varphi}. \quad (1.22)$$

В сферических координатах радиус-вектор точки задается функциями $r(t)$, $\theta(t)$, $\varphi(t)$ (рис. 1.5). Разложение радиуса-вектора по ортам сферических координат и сами орты определяются формулами

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= r\mathbf{n}_r, & \mathbf{n}_r &= (\mathbf{n}_x \cos \varphi + \mathbf{n}_y \sin \varphi) \sin \theta + \mathbf{n}_z \cos \theta, \\ \mathbf{n}_\theta &= (\mathbf{n}_x \cos \varphi + \mathbf{n}_y \sin \varphi) \cos \theta - \mathbf{n}_z \sin \theta, & (1.23) \\ \mathbf{n}_\varphi &= -\mathbf{n}_x \sin \varphi + \mathbf{n}_y \cos \varphi. \end{aligned}$$

Учитывая, что направления ортов \mathbf{n}_r , \mathbf{n}_θ , \mathbf{n}_φ зависят от положения точки, для ее скорости получим выражение *)

$$\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{n}_r + r\dot{\theta}\mathbf{n}_\theta + r \sin \theta \cdot \dot{\varphi}\mathbf{n}_\varphi. \quad (1.24)$$

Следовательно, проекции скорости точки на координатные оси (r) , (θ) , (φ) равны

$$\begin{aligned} v_r &= \dot{r}, & v_\theta &= r\dot{\theta}, \\ v_\varphi &= r \sin \theta \cdot \dot{\varphi}. & (1.25) \end{aligned}$$

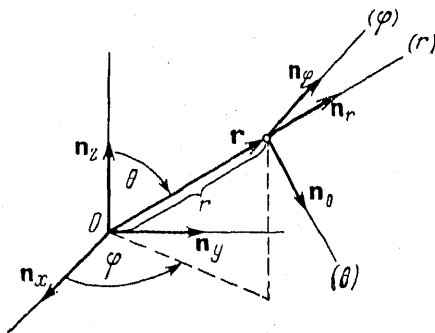


Рис. 1.5.

Иногда бывает удобным естественное задание движения точки, при котором в качестве аргумента радиуса-вектора точки

берется длина дуги траектории (длина дуги s отсчитывается от начального положения точки в направлении ее движения); сама длина дуги задается как функция времени:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s), \quad s = s(t). \quad (1.26)$$

С помощью векторной функции $\mathbf{r}(s)$ в каждой точке траектории можно определить орты, совокупность которых называется естественным трехгранником (рис. 1.6, а). Один из этих ортов \mathbf{n}_τ направляют по приращению $d\mathbf{r}$, определяющему касательную к траектории. Этот орт равен

$$\mathbf{n}_\tau = \frac{d\mathbf{r}}{ds}, \quad (1.27)$$

поскольку $|d\mathbf{r}|$ с точностью до бесконечно малых высшего порядка равен элементу дуги ds . Второй орт \mathbf{n} направляют по приращению

*) Проекция ускорения в сферических координатах будут получены более простым способом на стр. 222.

$d\mathbf{n}_\tau$, т. е. по главной нормали к траектории*). Используя (1.27), находим, что

$$\frac{d\mathbf{n}_\tau}{ds} = \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} = \left| \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} \right| \mathbf{n}, \quad (1.28)$$

т. е.

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\left| \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} \right|} \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}. \quad (1.29)$$

Орт \mathbf{n} можно записать с помощью радиуса кривизны траектории R , который определяется как отношение приращения длины дуги ds к $d\alpha$ — углу между \mathbf{n}_τ и $\mathbf{n}_\tau + d\mathbf{n}_\tau$:

$$R = \frac{ds}{d\alpha}. \quad (1.30)$$

Так как \mathbf{n}_τ — единичный вектор, то модуль его приращения $|d\mathbf{n}_\tau|$ с точностью до величины высшего порядка малости равен углу $d\alpha$

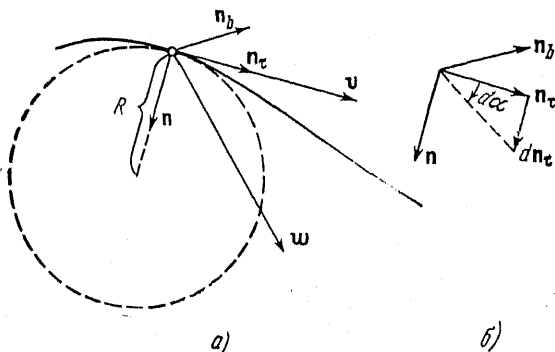


Рис. 1.6.

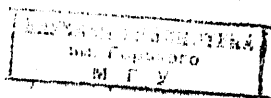
(рис. 1.6, б). Поэтому радиус кривизны R , согласно (1.30) и (1.28), может быть записан в виде

$$R = \frac{1}{\left| \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} \right|}, \quad (1.31)$$

а орт \mathbf{n} определится выражением

$$\mathbf{n} = R \frac{d\mathbf{n}_\tau}{ds}. \quad (1.32)$$

*) Легко показать, что приращение любого вектора \mathbf{a} постоянной длины перпендикулярно самому вектору. В самом деле, дифференцируя обе части равенства $a^2 = \text{const}$, получим $\mathbf{a} d\mathbf{a} = 0$, чем и доказывается утверждение.



Третий орт \mathbf{n}_b естественного трехгранника задается векторным произведением $[\mathbf{n}_\tau, \mathbf{n}]$ и определяет бинормаль к траектории.

Разложение скорости точки по «естественным» ортам получим, используя (1.9), (1.26) и (1.27):

$$\mathbf{v} = \dot{s} \mathbf{n}_\tau, \quad (1.33)$$

где $\dot{s} = \frac{ds}{dt}$.

Дифференцируя обе части (1.33) по времени, найдем ускорение точки

$$\mathbf{w} = \ddot{s} \mathbf{n}_\tau + \dot{s} \frac{d\mathbf{n}_\tau}{dt}.$$

Замечая, что, согласно (1.28) и (1.31),

$$\frac{d\mathbf{n}_\tau}{dt} = \frac{\mathbf{n}}{R} \dot{s},$$

окончательно получим

$$\mathbf{w} = \ddot{s} \mathbf{n}_\tau + \frac{\dot{s}^2}{R} \mathbf{n}. \quad (1.34)$$

Учитывая, что $\dot{s} = v$, ускорение точки в естественных координатах можно также представить в виде

$$\mathbf{w} = \dot{v} \mathbf{n}_\tau + \frac{v^2}{R} \mathbf{n}. \quad (1.35)$$

В заключение отметим, что введенные в этом параграфе понятия и соотношения дают возможность решать кинематические задачи, в которых движение описывается вне связи с причинами, вызывающими это движение.

Пример 1.1. Траектория, скорость и ускорение материальной точки в декартовых координатах.

Закон движения точки относительно системы отсчета S имеет вид

$$x = a \cos \omega t, \quad y = b \sin \omega t, \quad z = 0,$$

где a , b и ω — постоянные величины. Найти траекторию, линейную и секторную скорости, а также ускорение точки относительно той же системы отсчета.

Дифференцируя по времени заданные функции $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$, получим проекции скорости и ускорения точки на декартовы оси (см. (1.12) — (1.14))

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -a\omega \sin \omega t, & \dot{y} &= +b\omega \cos \omega t, & \dot{z} &= 0; \\ \ddot{x} &= -a\omega^2 \cos \omega t, & \ddot{y} &= -b\omega^2 \sin \omega t, & \ddot{z} &= 0. \end{aligned}$$

Выражая проекции ускорения через проекции радиуса-вектора, убедимся в том, что ускорение в любой момент времени направлено к началу координат (рис. 1.7):

$$\ddot{x} = -\omega^2 x, \quad \ddot{y} = -\omega^2 y, \quad \ddot{z} = 0,$$

т. е. $\ddot{\mathbf{r}} = -\omega^2 \mathbf{r}$.

Для секторной скорости, используя функции $x(t)$, $y(t)$, $\dot{x}(t)$, $\dot{y}(t)$, найдем выражение

$$\sigma = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \mathbf{n}_x & \mathbf{n}_y & \mathbf{n}_z \\ x & y & 0 \\ \dot{x} & \dot{y} & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} ab\omega \mathbf{n}_z = \sigma_0,$$

где σ_0 — значение секторной скорости в момент времени $t=0^*$). Наконец, исключая t из функций $x(t)$ и $y(t)$, получим уравнение траектории

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad z = 0.$$

Таким образом, в рассмотренном случае точка движется с постоянной секторной скоростью по эллипсу, лежащему в плоскости $z=0$, причем ускорение все время направлено к центру эллипса.

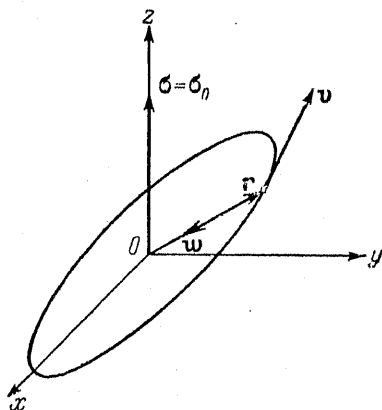


Рис. 1.7.

Пример 1.2. Траектория, скорость и ускорение материальной точки в цилиндрических координатах.

Цилиндрические координаты точки при ее движении относительно некоторой системы отсчета S изменяются по закону

$$\rho = \dot{\rho}_0 t + \rho_0, \quad \varphi = \dot{\varphi}_0 t + \varphi_0, \quad z = \dot{z}_0 t + z_0.$$

Найти траекторию, линейную и секторную скорости, а также ускорение точки.

Для простоты рассмотрим три частных случая:

$$\text{а) } \dot{\rho}_0 = 0; \quad \text{б) } \dot{\varphi}_0 = 0; \quad \text{в) } \dot{z}_0 = 0.$$

а) Полагая в заданных функциях $\dot{\rho}_0 = 0$ и исключая из них время, найдем уравнение траектории

$$\rho = \rho_0, \quad \frac{\varphi - \varphi_0}{\dot{\varphi}_0} = \frac{z - z_0}{\dot{z}_0},$$

*) Здесь и в дальнейшем все величины с индексом «нуль» являются постоянными.

а используя выражения (1.15), (1.17) и (1.19), получим

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \rho_0 \mathbf{n}_\rho + (\dot{z}_0 t + z_0) \mathbf{n}_z, \\ \mathbf{v} &= \rho_0 \dot{\varphi}_0 \mathbf{n}_\varphi + \dot{z}_0 \mathbf{n}_z, \quad \mathbf{w} = -\rho_0 \dot{\varphi}_0^2 \mathbf{n}_\rho. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что точка движется по винтовой линии (ее шаг равен $2\pi \dot{z}_0 / \dot{\varphi}_0$) с постоянными по абсолютной величине скоростью $v = (\rho_0^2 \dot{\varphi}_0^2 + \dot{z}_0^2)^{1/2}$ и ускорением $\mathbf{w} = \rho_0 \dot{\varphi}_0^2$; направлено же ускорение все время к оси цилиндра перпендикулярно к ней (рис. 1.8). Нетрудно

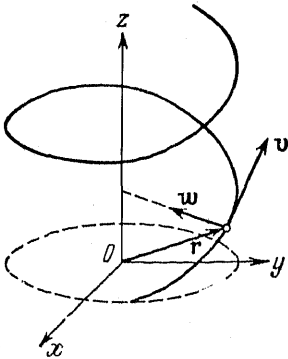


Рис. 1.8.

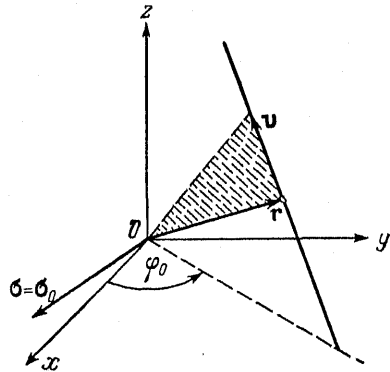


Рис. 1.9.

убедиться, что модуль и направление секторной скорости в этом случае не сохраняются.

б) Поступая аналогично предыдущему, найдем

$$\begin{aligned} \frac{\rho - \rho_0}{\dot{\rho}_0} &= \frac{z - z_0}{\dot{z}_0}, \quad \varphi = \varphi_0; \\ \mathbf{r} &= (\dot{\rho}_0 t + \rho_0) \mathbf{n}_\rho + (\dot{z}_0 t + z_0) \mathbf{n}_z, \\ \mathbf{v} &= \dot{\rho}_0 \mathbf{n}_\rho + \dot{z}_0 \mathbf{n}_z, \quad \mathbf{w} = 0, \\ \boldsymbol{\sigma} &= (z_0 \dot{\rho}_0 - \rho_0 \dot{z}_0) \mathbf{n}_\varphi. \end{aligned}$$

Таким образом, точка движется по прямой с постоянной линейной и секторной скоростями (рис. 1.9).

в) Если задать $\dot{z}_0 = 0$ и, кроме того, положить $\rho_0 = 0$, $\varphi_0 = 0$, $z_0 = 0$, то найдем, что

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \dot{\rho}_0 t \mathbf{n}_\rho, \quad \mathbf{v} = \dot{\rho}_0 \mathbf{n}_\rho + \dot{\rho}_0 \dot{\varphi}_0 t \mathbf{n}_\varphi, \\ \mathbf{w} &= -\dot{\rho}_0 \dot{\varphi}_0^2 t \mathbf{n}_\rho + 2\dot{\rho}_0 \dot{\varphi}_0 \mathbf{n}_\varphi, \quad \boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{2} \dot{\rho}_0^2 \dot{\varphi}_0 t^2 \mathbf{n}_z. \end{aligned}$$

В этом случае секторная скорость изменяется по величине, но сохраняет свое направление, что обусловлено движением по плоской траектории. Исключая время из функций $\rho = \dot{\rho}_0 t$ и $\varphi = \dot{\varphi}_0 t$, получим урав-

нение траектории — архимедову спираль $\rho = \frac{\dot{\rho}_0}{\dot{\varphi}_0} \varphi$ (рис. 1.10). Такую кривую описывает точка, движущаяся с постоянной скоростью $\dot{\rho}_0$ вдоль прямой, которая сама вращается с постоянной угловой скоростью $\dot{\varphi}_0$.

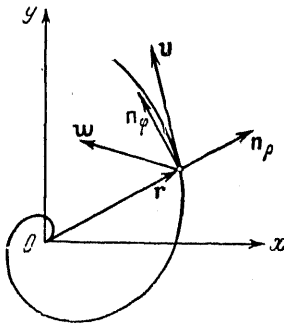


Рис. 1.10.

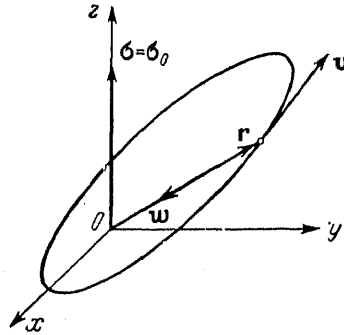


Рис. 1.11.

Пример 1.3. Ускорение точки, движущейся по эллипсу с постоянной относительно фокуса эллипса секторной скоростью.

Из эмпирически установленных двух законов Кеплера известно, что в гелиоцентрической системе отсчета любая планета описывает эллипс с фокусом в центре Солнца, а секторная скорость планеты *относительно фокуса* постоянна (рис. 1.11)*. Основываясь на этих законах, найти w — ускорение любой планеты как функцию ее расстояния от Солнца.

Выберем систему координат с учетом характера исследуемого движения. Начало координат поместим в центр Солнца, относительно которого секторная скорость постоянна, а одну из осей, например, ось Oz , направим перпендикулярно плоскости траектории. На этой плоскости введем полярные координаты; тогда условия задачи можно записать в виде (см. (1.22))

$$\rho = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}, \quad \sigma = \frac{1}{2} \rho^2 \dot{\varphi} n_z = \sigma_0$$

(здесь p — параметр эллипса, ε — его эксцентриситет). Найдем прежде всего проекции скорости v_ρ и v_φ как функции от ρ или φ . Используя выражение секторной скорости, получим

$$v_\rho = \dot{\rho} = \frac{d\rho}{d\varphi} \dot{\varphi} = -2\sigma_0 \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{\rho} \right), \quad v_\varphi = \rho \dot{\varphi} = \frac{2\sigma_0}{\rho};$$

*) Более подробное обсуждение законов Кеплера см. на стр. 79 — 80.

тогда скорость точки как функцию ее положения можно записать в виде

$$\mathbf{v} = 2\sigma_0 \left[-\mathbf{n}_\rho \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{\rho} \right) + \mathbf{n}_\varphi \frac{1}{\rho} \right]. \quad (1)$$

Проекция ускорения ω_φ в силу сохранения σ_z будет равна нулю (см. (1.21)), а значение ω_ρ вследствие того, что

$$\ddot{\rho} = \frac{d\dot{\rho}}{d\varphi} \dot{\varphi} = -\frac{4\sigma_0^2}{\rho^3} \frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{1}{\rho} \right), \quad \rho \dot{\varphi}^2 = \frac{4\sigma_0^2}{\rho^3},$$

будет определяться формулой Бине

$$\omega_\rho = -\frac{4\sigma_0^2}{\rho^3} \left[\frac{1}{\rho} + \frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{1}{\rho} \right) \right]. \quad (2)$$

Отсюда, используя уравнение эллипса, окончательно получим

$$\omega_\rho = -\left(\frac{4\sigma_0^2}{\rho} \right) \frac{1}{\rho^3}, \quad \omega_\varphi = 0.$$

Таким образом, исходя из законов Кеплера, приходим к выводу о том, что ускорение любой планеты обратно пропорционально квадрату расстояния от планеты до Солнца и направлено к центру Солнца (сравните этот результат с законом всемирного тяготения Ньютона (2.15)).

Отметим, что формулы (1) и (2) справедливы для любой плоской траектории, заданной в полярных координатах функцией $\rho(\varphi)$, причем формула (2) верна лишь при условии постоянства секторной скорости.

Пример 1.4. Ускорение точки, движущейся по эллипсу с постоянной относительно центра эллипса секторной скоростью.

Точка движется по эллипсу с полуосями a и b . Ее секторная скорость *относительно центра* эллипса постоянна. Определить ускорение точки как функцию ее положения.

Совместим начало декартовых координат с центром эллипса, а ось Oz направим перпендикулярно к плоскости траектории (см. рис. 1.7). Тогда оси Ox и Oy можно выбрать так, что траектория точки будет описываться уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Условие постоянства секторной скорости в декартовых координатах имеет вид

$$\sigma_z = \frac{1}{2} (x\dot{y} - y\dot{x}) = \sigma_0.$$

Дифференцируя левую и правую части уравнения эллипса по времени,

вместо исходных уравнений получим систему

$$\begin{aligned} -y\dot{x} + x\dot{y} &= 2\sigma_0, \\ \frac{x}{a^2}\dot{x} + \frac{y}{b^2}\dot{y} &= 0, \end{aligned}$$

из которой находим проекции скорости точки как функции x, y :

$$\dot{x} = -\frac{2\sigma_0}{b^2}y, \quad \dot{y} = +\frac{2\sigma_0}{a^2}x.$$

Отсюда имеем

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -\frac{2\sigma_0}{b^2}\dot{y} = -\frac{4\sigma_0^2}{a^2b^2}x, \\ \ddot{y} &= +\frac{2\sigma_0}{a^2}\dot{x} = -\frac{4\sigma_0^2}{a^2b^2}y, \end{aligned}$$

т. е.

$$\mathbf{w} = -\frac{4\sigma_0^2}{a^2b^2}\mathbf{r}.$$

Таким образом, в отличие от предыдущего примера, ускорение точки направлено к центру эллипса и пропорционально расстоянию от точки до этого центра.

Пример 1.5. Определение положения точки по ее скорости.

Точка движется по плоской траектории с постоянной секторной скоростью σ_0 . Величина ее линейной скорости обратно пропорциональна расстоянию ρ от точки до некоторого центра, лежащего в плоскости движения $z=0$ и выбранного за начало координат. Найти закон движения точки, ее траекторию и ускорение, если при $t=0$ заданы $\rho=\rho_0$, $v=v_0$ и угол α_0 между радиусом-вектором точки и ее скоростью ($0 < \alpha_0 < \pi/2$).

Выберем полярную ось так, чтобы в начальный момент времени точка была расположена на этой оси. Тогда условия задачи можно записать в виде

$$\rho^2\dot{\phi} = 2\sigma_0, \quad v = \frac{c}{\rho},$$

где $2\sigma_0 = \rho_0 v_0 \sin \alpha_0$, $c = \rho_0 v_0$. Пользуясь тем, что, с одной стороны,

$$v = (\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2)^{1/2} = \left(\dot{\rho}^2 + \frac{\rho_0^2 v_0^2 \sin^2 \alpha_0}{\rho^2} \right)^{1/2},$$

а с другой стороны, согласно условию, $v = \rho_0 v_0 / \rho$, найдем радиальную составляющую скорости как функцию ρ :

$$\dot{\rho} = \pm \frac{\rho_0 v_0 \cos \alpha_0}{\rho}.$$

Так как $0 < \alpha_0 < \pi/2$, то $\dot{\rho}_0 > 0$ и, следовательно, в последнем выражении нужно выбрать знак «плюс». Разделяя в этом выражении переменные ρ и t , в результате интегрирования получим

$$\rho^2 = (2\rho_0 v_0 \cos \alpha_0) t + \text{const},$$

откуда, учитывая начальные условия ($t=0$, $\rho=\rho_0$), окончательно находим

$$\rho^2 = (2\rho_0 v_0 \cos \alpha_0) t + \rho_0^2.$$

Определяя далее $\dot{\phi}$ из выражения секторной скорости, получим

$$\dot{\phi} = \frac{\rho_0 v_0 \sin \alpha_0}{\rho^2 + (2\rho_0 v_0 \cos \alpha_0) t}.$$

Отсюда интегрированием найдем $\phi(t)$:

$$\phi = \frac{\text{tg } \alpha_0}{2} \ln \left(1 + \frac{2v_0 \cos \alpha_0}{\rho_0} t \right)$$

(здесь для определения постоянной интегрирования использовано условие: при $t=0$ $\phi_0=0$). Из функций $\rho(t)$, $\phi(t)$ исключим t и получим уравнение траектории — логарифмическую спираль

$$\rho = \rho_0 \exp(\text{ctg } \alpha_0 \cdot \phi).$$

Наконец, зная уравнение орбиты $\rho(\phi)$ и используя постоянство секторной скорости, находим ускорение точки как функцию ρ (см. формулу (2) в примере 1.3)

$$\omega_\rho = -\frac{\rho_0^2 v_0^2}{\rho^3}, \quad \omega_\phi = 0.$$

§ 2. Понятия о силе и массе

Рассмотрим движение материальной точки относительно произвольной системы отсчета, предполагая, что начальные условия, т. е. радиус-вектор точки \mathbf{r}_0 и ее скорость \mathbf{v}_0 в начальный момент времени t_0 , могут быть заданы произвольно (такую точку будем называть свободной)*). Пользуясь эталонами длины и времени, можно определить положение, скорость и ускорение точки в любой момент времени. Затем, помещая вблизи точки некоторое тело, можно заметить, что точка приобретает добавочное ускорение, исчезающее по мере удаления тела на бесконечно большое расстояние от точки.

Например, рассмотрим движение материальной точки I вблизи поверхности Земли (рис. 2.1, а, на котором плоскость Oxy совпадает с земной поверхностью). Предполагая, что эта точка обладает

*) Произвольность начальных условий исключает рассмотрение таких случаев движения точки, как, например, движение по поверхностям каких-либо тел и т. п. Теория движения несвободных точек будет изложена в гл. V.

электрическим зарядом, сравним ее движение в двух случаях: а) в отсутствие каких-либо других тел, б) при наличии заряженного тела. Пусть в первом случае точка I в начальный момент времени находится в положении \mathbf{r}_{10} и имеет скорость \mathbf{v}_{10} . Определим положение точки, ее скорость и ускорение \mathbf{w}_1 в любой момент времени. Затем исследуем движение той же точки при тех же начальных условиях, поместив вблизи начального положения точки достаточно малое заряженное тело 2 (рис. 2.1, б). Измерения покажут, что по сравнению с предыдущим случаем точка приобрела дополнительное ускорение $\mathbf{w}_1^{(2)}$. Результирующее ускорение точки относительно Земли во втором

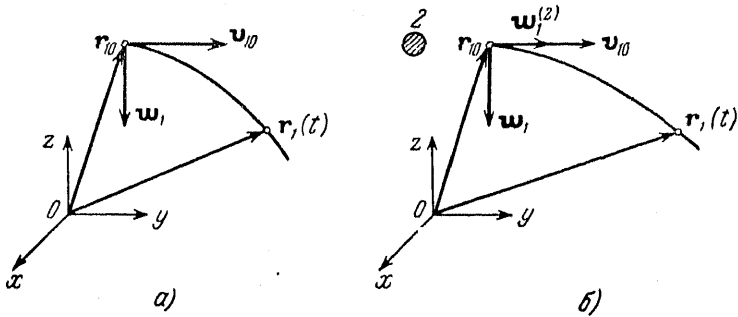


Рис. 2.1.

случае будет равно $\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_1^{(2)}$. Следовательно, другими станут и закон движения точки и ее траектория. Удаляя тело 2 на бесконечно большое расстояние от точки I , мы убедимся, что $\mathbf{w}_1^{(2)}$ исчезает.

Вообще опыт показывает, что в любой системе отсчета любое тело 2 вызывает некоторое ускорение $\mathbf{w}_1^{(2)}$ свободной материальной точки I , причем это ускорение становится исчезающе малым по мере удаления тела на бесконечно большое расстояние от точки, т. е.

$$\mathbf{w}_1^{(2)} \rightarrow 0, \quad \text{если } r_{12} \rightarrow \infty. \quad (2.1)$$

Экспериментальное изучение ускорений, вызываемых у данного тела различными другими телами, приводит к утверждению о независимости этих ускорений друг от друга. Иначе говоря, опыт показывает, что ускорение $\mathbf{w}_1^{(2,3)}$, сообщаемое данному телу 1 одновременно двумя любыми телами 2 и 3, равно векторной сумме ускорений $\mathbf{w}_1^{(2)}$ и $\mathbf{w}_1^{(3)}$, сообщаемых телу 1 телами 2 и 3 каждым в отдельности, т. е.

$$\mathbf{w}_1^{(2,3)} = \mathbf{w}_1^{(2)} + \mathbf{w}_1^{(3)}. \quad (2.2)$$

Убедиться в этом можно, в частности, продолжая только что рассмотренный эксперимент. Как мы видели, под действием заряженного

тела 2 заряд 1 приобретает ускорение $w_1^{(2)}$ (рис. 2.1, б). Если же вместо тела 2 вблизи начального положения r_{10} точки поместить достаточно малое заряженное тело 3 (рис. 2.2, а), то оно вызовет другое ускорение точки $w_1^{(3)}$. Наконец, вернув точку 1 в ее начальное положение r_{10} и поместив оба тела одновременно в прежние их положения, указанные на рис. 2.1, б и рис. 2.2, а, обнаружим, что точка приобрела ускорение $w_1^{(2,3)}$ по сравнению с тем случаем, когда оба тела отсутствуют (рис. 2.2, б). Измерив $w_1^{(2)}$, $w_1^{(3)}$ и $w_1^{(2,3)}$, можно

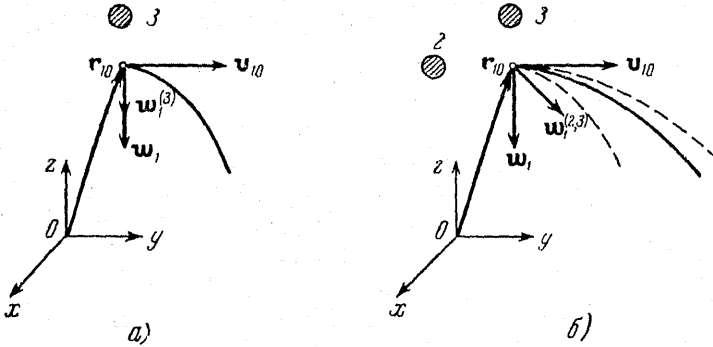


Рис. 2.2.

убедиться в справедливости (2.2). Заметим, что утверждение о независимости ускорений имеет место при любом числе воздействующих тел.

Итак, на основании опытов можно сделать вывод о том, что, во-первых, одни тела воздействуют на другие, причем это воздействие проявляется в приобретении телами ускорений, и, во-вторых, ускорения, сообщаемые разными телами данному телу, независимы. Этот вывод лежит в основе важнейшего понятия механики о силе. Под силой, с которой произвольное тело 2 действует на данную материальную точку 1, понимают такое влияние тела 2 на точку 1, в результате которого точка 1 приобретает ускорение, исчезающее при удалении тела 2 на бесконечно большое расстояние от точки 1. Заметим, что если воздействия одних тел на другие существуют объективно, то введенное в механике понятие о силах отражает эти воздействия лишь с некоторой точностью.

Поскольку сила является причиной ускорения, а ускорение обладает свойствами вектора, то постулируется, что и сила есть вектор, причем направленный так же, как и ускорение, вызываемое этой силой, т. е. постулируется, что

$$F_{21} \uparrow\uparrow w_1^{(2)}, \quad (2.3)$$

где F_{21} — сила, действующая со стороны тела 2 на точку 1, а $w_1^{(2)}$ — ускорение точки 1, обусловленное действием этой силы.

«Одна из важнейших характеристик силы — ее материальное происхождение», «...говоря о силе, мы всегда неявно предполагаем, что когда нет физических тел, то сила равна нулю» *). Это значит, что как ускорение $w_1^{(2)}$, так и сила F_{21} стремятся к нулю по мере удаления тела 2 на бесконечно большое расстояние от точки 1, т. е.

$$F_{21} \rightarrow 0, \quad \text{если } r_{21} \rightarrow \infty. \quad (2.4)$$

Так как ускорения, сообщаемые точке различными телами, обладают свойством (2.2), то в отношении сил, действующих на точку со стороны этих тел, постулируется аналогичное свойство. А именно, полагают, что сила $F_1^{(2,3)}$, с которой тела 2 и 3 действуют на данную точку 1 одновременно, равна векторной сумме сил F_{21} и F_{31} , действующих на точку 1 со стороны этих тел порознь, т. е.

$$F_1^{(2,3)} = F_{21} + F_{31}. \quad (2.5)$$

Может случиться, что одновременное действие нескольких тел на материальную точку не изменяет того ускорения точки, которое она имела в отсутствие этих тел. В таком случае сумма сил, действующих на точку со стороны этих тел, и сумма соответствующих ускорений равны нулю, т. е.

$$F_1^{(2,3)} = 0, \quad w_1^{(2,3)} = 0. \quad (2.6)$$

Основываясь на (2.2), (2.5) и (2.6), можно производить измерение сил, т. е. их сравнение с силой-эталоном. В качестве силы-эталоны можно взять, в частности, силу, с которой действует на тело прикрепленная к нему одним из концов определенная пружина, растянутая до определенной длины l_{et} . Пусть в результате действия на точку силы-эталоны и некоторого тела 2 (например, произвольной пружины 2) ускорение точки останется таким же, как и в отсутствие эталонной пружины и тела 2 (например, точка остается в покое относительно Земли). Это значит, что

$$\begin{aligned} w_1^{(et,2)} &= w_1^{(et)} + w_1^{(2)} = 0, \\ F_1^{(et,2)} &= F_{et} + F_{21} = 0, \end{aligned} \quad (2.7)$$

где F_{et} — сила-эталон, а $w_1^{(et)}$ — ускорение точки 1, вызываемое эталонной пружиной. Из (2.7) видно, что $F_{21} = -F_{et}$, т. е. сила F_{21} оказывается измеренной. Имея несколько одинаковых эталонных пружин и располагая их параллельно или под различными углами, в принципе можно измерить любую силу.

*) См. [26], вып. 1, стр. 210—211.

Пользуясь способом измерения сил (2.7), эталонами длины и времени, экспериментально устанавливают зависимость сил от различных величин. Приведем ряд исследованных таким образом сил.

Упругая сила, действующая со стороны пружины 2 на тело 1, прикрепленное к ее концу, при достаточно малых удлинениях пружины пропорциональна этому удлинению и направлена по прямой, совпадающей с осью пружины (предполагается, что второй конец пружины прикреплен к другому телу):

$$F_{21} = -\kappa(r_{21} - l) \frac{r_{21}}{r_{21}}. \quad (2.8)$$

Здесь $r_{21} = r_2 - r_1$, r_1 — радиус-вектор точки 1 и скрепленного с ней конца пружины, r_2 — радиус-вектор другого конца пружины, l — длина ненапряженной пружины, κ — характеризующая данную пружину положительная константа, называемая жесткостью. Из (2.8) следует, что действующая на точку 1 сила F_{21} сжатой пружины направлена от конца 2 пружины в сторону точки 1 (в этом случае $r_{21} < l$, т. е. удлинение $r_{21} - l$ отрицательно). Если же пружина растянута ($r_{21} > l$, удлинение положительно), то эта сила направлена от точки 1 в сторону точки 2. Итак, опыт показывает, что абсолютная величина и направление рассмотренной упругой силы зависит лишь от положения точек 1 и 2.

Сила электростатического взаимодействия заряженной точки 2 на заряженную точку 1 обратно пропорциональна квадрату расстояния между точками и направлена по прямой, соединяющей эти заряды:

$$F_{21} = \frac{e_1 e_2}{r_{12}^2} \frac{r_{21}}{r_{12}}. \quad (2.9)$$

Здесь e_1 и e_2 — электрические заряды первой и второй точек соответственно*).

Сила Лоренца F_L , действующая на точечный заряд со стороны электрического и магнитного полей, зависит как от положения заряда, так и от его скорости:

$$F_L = e_1 \mathcal{E} + \frac{e_1}{c} [v_1 \mathcal{H}]. \quad (2.10)$$

Здесь c — скорость света; $\mathcal{E}(r_1, t)$ и $\mathcal{H}(r_1, t)$ — напряженности соответственно электрического и магнитного полей в той точке пространства, где находится заряд; v_1 — скорость заряда. Напомним, что напряженность электрического поля определяется силой, действующей со стороны этого поля на единицу положительного заряда; направленные напряженности \mathcal{H} магнитного поля можно определить как такое

*). Единицу электрического заряда можно выбрать, имея эталоны силы и длины. См., например, [31], стр. 22.

направление скорости заряда, при котором сила, действующая на заряд в магнитном поле, равна нулю; величину напряженности магнитного поля можно определить как отношение модуля силы, действующей на заряд e_1 со стороны магнитного поля, к величине $(e_1/c)v_{1\perp}$, где $v_{1\perp}$ — составляющая скорости заряда, перпендикулярная направлению напряженности \mathcal{H} в данной точке пространства *).

Поскольку в классической механике не рассматриваются процессы, происходящие в полях (см. стр. 8), постольку напряженности полей \mathcal{E} и \mathcal{H} в наших задачах будут считаться заданными функциями радиуса-вектора точки и времени. Например, напряженность электрического поля плоского конденсатора постоянной емкости, к пластинам которого подводится переменное напряжение, изменяющееся со временем по гармоническому закону, вдали от краев пластин с большой степенью точности можно считать равным $\mathcal{E}_0 \cos \omega t$, где \mathcal{E}_0 — напряженность электрического поля при $t=0$, а ω — частота, с которой изменяется подводимое напряжение. Таким образом, сила, действующая на заряд e_1 со стороны этого поля, будет равна

$$F_1 = e_1 \mathcal{E}_0 \cos \omega t. \quad (2.11)$$

Сила сопротивления среды, действующая на невращающееся твердое тело при движении его в жидкости или газе, зависит от скорости тела относительно среды и направлена противоположно этой скорости. При достаточно малой скорости эта сила имеет вид

$$F_1 = -kv_1, \quad (2.12)$$

где k — положительная константа, характерная для данного тела и данной среды, а v_1 — скорость тела относительно среды.

Итак, опыт показывает, что *существует широкий класс сил, явно зависящих от положений и скоростей тел*, а также от некоторых постоянных величин и времени **).

Рассмотрим детальнее *соотношение между силой и вызываемым ею ускорением*. Исследуем, например, движение материальной точки I по горизонтальному идеально гладкому стержню (рис. 2.3, а) под действием прикрепленной к точке пружины 2, навитой на стержень и закрепленной другим концом в точке O стержня (сила, с которой идеально гладкий стержень действует на точку, перпендикулярна к стержню). Если пружина 2 действует на точку с силой (2.8), а стержень неподвижен относительно Земли, то, выбирая систему отсчета S с началом в точке O и осью Ox , направленной

*) Подробнее см. [31], стр. 21, 211—212.

***) В механике сплошной среды встречаются случаи, когда реакция жидкости на тело конечных размеров зависит от ускорения тела. Известна также зависимость силы от третьей производной координаты по времени. Такой силой является сила лучистого трения, с которой электромагнитное излучение заряда тормозит этот заряд.

по стержню, в результате измерений получим значения ускорений точки I , которые аналитически можно представить формулой

$$\mathbf{w}_1^{(2)} = -\omega_1^2 (x_1 - l) \mathbf{n}_x,$$

где x_1 — координата точки I , а ω_1 — величина, постоянная для данной точки и пружины. Поскольку сила \mathbf{F}_{21} , действующая на точку I со стороны пружины, равна $-\kappa(x_1 - l) \mathbf{n}_x$, постольку отношение $F_{21}/w_1^{(2)}$ будет постоянной величиной для данной точки и данной пружины, а именно:

$$\frac{F_{21}}{w_1^{(2)}} = \frac{\kappa}{\omega_1^2}.$$

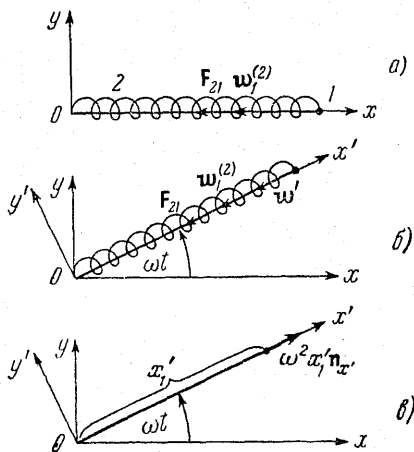


Рис. 2.3.

Ox , т. е. вращается относительно системы S (рис. 2.3, б), то измерения покажут, что ускорение \mathbf{w}' точки относительно системы S' , связанной со стержнем, в случае воздействия на точку пружины будет определяться формулой *)

$$\mathbf{w}' = \omega^2 x'_1 \mathbf{n}_x - \omega_1^2 (x'_1 - l) \mathbf{n}_x.$$

Здесь первый член справа равен ускорению точки в отсутствие пружины (рис. 2.3, в), x'_1 — координата точки в системе S' , ось Ox' которой направлена по стержню, а начало совпадает с началом системы S , причем величина ω_1 — та же постоянная, что и в экспериментах с неподвижным стержнем. Сравнивая ускорения точки на вращающемся стержне при наличии пружины и в ее отсутствие, найдем $\mathbf{w}_1^{(2)}$ — ускорение точки, вызываемое пружинной:

$$\mathbf{w}_1^{(2)} = -\omega_1^2 (x'_1 - l) \mathbf{n}_x.$$

Сопоставляя это выражение с силой, действующей со стороны пружины и равной $-\kappa(x'_1 - l) \mathbf{n}_x$, убедимся в том, что для *данной*

*) Подробное решение задачи о движении точки на вращающемся стержне приведено на стр. 259 в примере 31.2.

точки отношение силы к вызываемому ускорению в обеих системах отсчета S и S' одинаково.

На основании этих опытов, а также опытов с использованием других сил, приходим к фундаментальному утверждению классической механики: *в любой системе отсчета отношение силы, действующей на некоторую материальную точку, к ускорению точки, вызываемому этой силой, является величиной постоянной для данной материальной точки.* Эту постоянную называют инертной массой или просто массой. Таким образом, имеем

$$\frac{F_{21}}{\omega_{21}'} = m_1, \quad (2.13)$$

где m_1 — *положительная* постоянная — масса точки 1. Утверждение (2.13) означает независимость массы от того, как движется тело. Это справедливо, однако, для скоростей, малых по сравнению со скоростью света. Если же скорость тела сравнима со скоростью света, то утверждение (2.13), как показывают современные данные, оказывается неверным.

Основываясь на (2.13), можно измерять массы различных тел*). Действительно, выберем за эталон массы массу m_{et} некоторого тела и определим ее как отношение $F_{2,\text{et}}/\omega_{2,\text{et}}'$, где $F_{2,\text{et}}$ — абсолютная величина силы, действующей на тело-эталон со стороны тела 2, а $\omega_{2,\text{et}}'$ — величина вызываемого этой силой ускорения тела-эталона. Массу тела 1 можно определить, используя воздействие произвольного тела 3. Тогда отношение массы m_1 к эталону будет равно

$$\frac{m_1}{m_{\text{et}}} = \left(\frac{F_{31}}{\omega_{31}'} \right) / \left(\frac{F_{2,\text{et}}}{\omega_{2,\text{et}}'} \right). \quad (2.14)$$

Пользуясь способом измерения масс, сил и расстояний, можно экспериментально установить закон всемирного тяготения Ньютона, согласно которому *сила гравитационного притяжения двух материальных точек пропорциональна произведению масс этих точек, обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними и направлена по прямой, соединяющей точки.* Из эксперимента находится и коэффициент пропорциональности — гравитационная постоянная γ . Таким образом, сила гравитационного воздействия одной точки на другую равна

$$F_{21} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r_{21}^2} \left(\frac{r_{21}}{r_{21}} \right). \quad (2.15)$$

Подчеркнем, что *только гравитационные силы обладают замечательным свойством одинаково ускорять любые тела, помещаемые в данную точку пространства.* Действительно, из (2.15), (2.13)

*) Об измерении масс см. также стр. 32 и стр. 169.

и (2.3) видно, что ускорение, которое приобретает тело 1 в гравитационном поле тела 2, равно

$$w_1^{(2)} = -\gamma \frac{m_2}{r_{21}^2} \left(\frac{r_{21}}{r_{21}} \right) \quad (2.16)$$

и не зависит от массы m_1 . Следовательно, ускорения двух любых тел 1 и et, находящихся на одинаковых расстояниях от тела 2, равны между собой, т. е.

$$w_1^{(2)} = w_{et}^{(2)}. \quad (2.17)$$

Из (2.15) и (2.17) вытекает, что отношение сил гравитационного притяжения двух данных тел 1 и et к любому третьему телу 2 (при условии равенства расстояний $r_{21} = r_{2,et}$) равно отношению масс:

$$\frac{F_{21}}{F_{2,et}} = \frac{m_1}{m_{et}}. \quad (2.18)$$

Это свойство гравитационных сил удобно использовать для измерения масс.

Паряду с определением инертной массы в классической механике имеется определение гравитационной (или тяжелой) массы^{*}). При этом исходят из экспериментально установленного постоянства отношения $F_{21}/F_{2,et}$ для данной пары тел 1 и et, поочередно помещаемых в одну и ту же точку гравитационного поля любого тела 2. Это отношение определяют как отношение гравитационных масс m_1^{gr}/m_{et}^{gr} . Опираясь на экспериментально установленное свойство гравитационных сил (2.17) и исходя из отношения инертных масс (2.14), нетрудно убедиться, что гравитационная и инертная массы тела равны (точнее, пропорциональны), т. е.

$$\frac{m_1}{m_{et}} = \frac{m_1^{gr}}{m_{et}^{gr}}. \quad (2.19)$$

Это заключение неоднократно и с большой степенью точности подтверждалось на опыте.

§ 8. Понятие об инерциальной системе отсчета и законы механики Ньютона. Принцип относительности Галилея

Понятие об инерциальной системе отсчета связано с понятием об изолированной материальной точке, т. е. точке, которая находится на весьма больших расстояниях от всех прочих тел. Ускорения изолированной точки, вызываемые телами, будут исчезающе малыми (см. (2.1)). Вместе с тем экспериментальные исследования показывают, что относительно одних систем отсчета ускорение такой

^{*} Оно аналогично определению электрических зарядов, см. [30], стр. 8, 9 и [31], стр. 22.

точки равно нулю, а относительно других систем изолированные точки движутся ускоренно. Например, возьмем изолированную точку, покоящуюся относительно системы S и занимающую положение $x = x_0, y = z = 0$ (рис. 3.1, а). Тогда ускорение точки относительно S равно нулю. Теперь рассмотрим ту же точку в системе S' , вращающейся относительно S с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси Oz (для простоты совместим начала систем O, O' и оси $Oz, O'z'$). Ясно, что относительно S' точка будет двигаться по окружности радиуса x_0 , и поэтому ее ускорение относительно S' отлично от нуля (рис. 3.1, б).

Система отсчета, относительно которой изолированная материальная точка либо покоится, либо движется равномерно и прямолинейно из любого начального положения при любом направлении скорости, называется инерциальной системой отсчета. В инерциальной системе отсчета радиус-вектор изолированной точки есть линейная функция времени

$$\mathbf{r} = \mathbf{v}_0 t + \mathbf{r}_0 \quad (3.1)$$

при любых постоянных \mathbf{r}_0 и \mathbf{v}_0 . Система отсчета, в которой условие (3.1) для изолированной точки не выполняется, называется неинерциальной системой.

Существование инерциальных систем отсчета подтверждается экспериментом (как всегда, с известной степенью точности). Простейший опыт Галилея заключался в наблюдении над отполированным металлическим шариком, скатывающимся по наклонной гладкой доске. Наблюдением было установлено, что если угол наклона доски к горизонту стремится к нулю, то ускорение шарика также стремится к нулю. Отсюда был сделан вывод о том, что «когда тело движется по горизонтальной плоскости, не встречая никакого сопротивления, то... движение его является равномерным и продолжалось бы бесконечно, если бы плоскость простиралась в пространстве без конца»^{*)}. Последующие более точные опыты установили неинерциальность геоцентрической системы отсчета, которая фактически используется в эксперименте Галилея. В то же время наблюдения над ускорениями небесных тел показали инерциальность гелиоцентрической системы Коперника. Конечно, участие солнечной системы во вращении вокруг

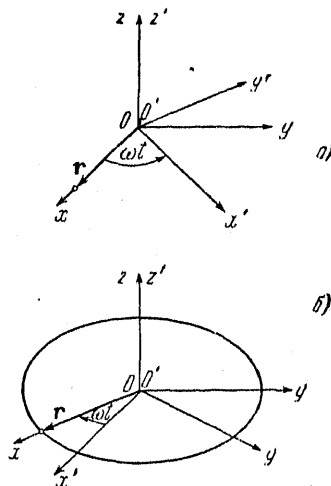


Рис. 3.1.

^{*)} См. [2], стр. 417, 418.

центра нашей Галактики должно приводить к весьма малой неинерциальности гелиоцентрической системы (по сравнению с неинерциальностью геоцентрической системы). Однако тогда за инерциальную систему можно принять систему, связанную с несколькими галактиками.

Первый закон классической механики или закон инерции Галилея—Ньютона сводится к утверждению, что *инерциальные системы отсчета существуют*, т. е. существуют системы, удовлетворяющие требованию (3.1)*. Конечно, возникает вопрос, с чем связано существование такой привилегированной системы отсчета, как инерциальная система? Однако этот вопрос до сих пор не может считаться решенным.

В основе второго закона Ньютона лежат утверждения о независимости массы от движения тела, о независимости сил и независимости ускорений, сообщаемых данному телу различными другими телами, и утверждение о существовании инерциальной системы отсчета. Рассмотрим для простоты систему из трех точек 1, 2 и 3. На основании утверждений (2.13), (2.3), (2.5) и (2.2) для первой точки можно получить соотношение между силой $F_1^{(2,3)}$, действующей на нее со стороны второй и третьей точек, и ускорением $w_1^{(2,3)}$, которое вызывает эта сила:

$$m_1 w_1^{(2,3)} = F_1^{(2,3)}, \quad (3.2)$$

где m_1 — масса точки 1,

$$w_1^{(2,3)} = w_1^{(2)} + w_1^{(3)},$$

$$F_1^{(2,3)} = F_{21} + F_{31}.$$

Однако ускорение $w_1^{(2,3)}$ точки 1, вызываемое телами 2 и 3, равно ускорению w_1 точки 1 относительно инерциальной системы отсчета, поскольку в этой системе тела 2 и 3 являются единственной причиной ускорения точки (см. (3.1)); таким образом,

$$w_1^{(2,3)} = w_1, \quad (3.3)$$

где $w_1 = \ddot{r}_1$ (см. (1.10)).

Нетрудно показать, что соотношения вида (3.2) и (3.3) будут справедливыми и при любом числе тел, действующих на данную точку. Следовательно, ускорение w_1 точки 1 относительно инерциальной

*) Приведем обычную формулировку закона: «Всякое тело продолжает удерживаться в своем состоянии покоя или равномерного и прямолинейного движения, пока и поскольку оно не понуждается приложенными силами изменять это состояние» (см. [3], стр. 39). Мы видели, однако, что существуют и такие системы отсчета, относительно которых изолированное тело (т. е. тело, «не понуждаемое приложенными силами») движется ускоренно. Следовательно, объективным содержанием приведенной формулировки закона инерции является утверждение о том, что действительно инерциальные системы существуют.

системы и сумма сил F_1 , действующих на точку со стороны всех тел, связаны уравнением

$$m_1 w_1 = F_1, \tag{3.4}$$

которое называется *вторым законом Ньютона*.

Итак, согласно второму закону Ньютона *произведение массы любой материальной точки на ее ускорение относительно инерциальной системы отсчета равно сумме всех сил, действующих на данную точку со стороны других тел*. Второй закон является одним из фундаментальных законов природы. Он лежит в основе того раздела механики, в котором рассматривается движение материальных точек в зависимости от действия сил. Этот раздел механики называется *динамикой*.

Второй закон позволяет найти положение и скорость точки в любой момент времени, если известны: масса точки m , сила $F(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ как функция положения, скорости и времени, а также положение точки \mathbf{r}_0 и ее скорость \mathbf{v}_0 в некоторый момент времени t_0 (конечно, рассматриваются положение и скорость относительно инерциальной системы). Действительно, зная \mathbf{r}_0 и \mathbf{v}_0 , можно определить силу в момент t_0 , а зная эту силу и массу, найти ускорение в тот же момент времени $\ddot{\mathbf{r}}_0 = \frac{1}{m} \mathbf{F}(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0, t_0)$ (рис. 3.2). Ускорение в свою очередь определяет приращение скорости $d\mathbf{v} = \ddot{\mathbf{r}}_0 dt$, а скорость \mathbf{v}_0 определяет приращение радиуса-вектора $d\mathbf{r} = \mathbf{v}_0 dt$. Таким образом, определяется положение и скорость точки в момент $t_0 + dt$ и тем самым определяется сила $\mathbf{F}(\mathbf{r}_0 + d\mathbf{r}, \mathbf{v}_0 + d\mathbf{v}, t_0 + dt)$, действующая на точку в момент $t_0 + dt$. Повторяя указанный процесс, можно найти положение и скорость точки в любой момент времени $t > t_0$. Сформулированная здесь задача является основной задачей динамики. Используя второй закон Ньютона, решается и обратная задача: зная массу точки и ее положение относительно инерциальной системы отсчета в любой момент времени, получить силу, действующую на точку также в любой момент времени.

Подчеркнем, что под действием данной силы данное изменение скорости у тела с большей массой происходит за более длительный промежуток времени. В связи с этим говорят, что *тела обладают инерцией, а масса тела является мерой инерции*.

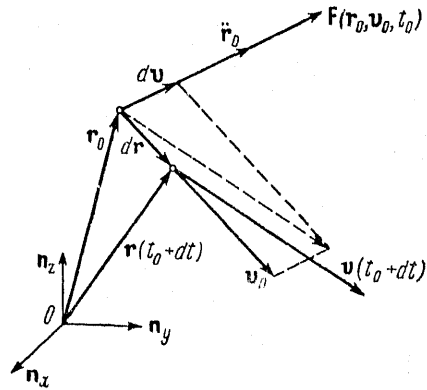


Рис. 3.2.

Второй закон дает возможность выбрать основные единицы измерения в механике. В самом деле, этот закон устанавливает взаимосвязь между массой, ускорением и силой. Но ускорение является второй производной радиуса-вектора по времени. Следовательно, закон устанавливает взаимосвязь между величинами с размерностями массы, длины, времени и силы. В принятой с 1960 г. системе СИ за основные единицы в механике выбраны единицы длины, времени и массы. За эталон массы принят килограмм — масса определенного тела — международного килограмма. Единицей силы является ньютон — сила, которая массе в 1 кг сообщает ускорение 1 м/сек^2 .

Применяя второй закон к системе материальных точек, получим уравнения движения механической системы относительно инерциальной системы отсчета:

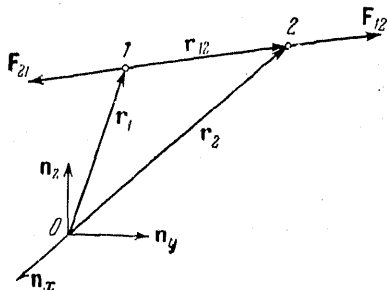


Рис. 3.3.

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i \quad (i = 1, 2, \dots, N), \quad (3.5)$$

здесь \mathbf{F}_i — сила, действующая на i -ю материальную точку; предполагается, что все эти силы являются заданными функциями $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N, v_1, v_2, \dots, v_N$ и t (см., например, (2.8) — (2.12)).

В третьем законе Ньютона утверждается, что силы, с которыми две любые материальные точки действуют друг на друга, равны по величине и направлены в противоположные стороны по прямой, соединяющей точки (см. рис. 3.3, где изображен случай сил отталкивания). Таким образом, для любых двух точек 1 и 2 имеем

$$\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}, \quad (3.6)$$

где \mathbf{F}_{21} — сила, действующая на первую точку со стороны второй, а сила \mathbf{F}_{12} действует на вторую точку со стороны первой; эти силы коллинеарны вектору \mathbf{r}_{12} (или \mathbf{r}_{21}).

Из третьего и второго законов механики вытекает, что любые две материальные точки сообщают друг другу ускорения, обратно пропорциональные их массам и направленные в противоположные стороны по прямой, соединяющей эти точки. Следовательно, величины ускорений и масс взаимодействующих точек связаны соотношением

$$\frac{w_2}{w_1} = \frac{m_1}{m_2}. \quad (3.7)$$

При установлении третьего закона Ньютон также основывался на данных эксперимента.

Принцип относительности Галилея. Возьмем систему отсчета S' , неускоренно движущуюся относительно инерциальной системы S . Это означает, что начало системы S' движется относительно S равномерно и прямолинейно, а углы между осями систем S' и S сохраняют постоянные значения. Тогда система S' также будет инерциальной. Действительно, из (1.6) вытекает, что радиус-векторы \mathbf{r} и \mathbf{r}' , характеризующие положение любой материальной точки относительно систем S и S' , связаны между собой соотношением

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_{O'} + \mathbf{r}', \quad (3.8)$$

где $\mathbf{r}_{O'} = (\mathbf{v}_{O'})_0 t + (\mathbf{r}_{O'})_0$ — радиус-вектор начала O' относительно S ; $(\mathbf{v}_{O'})_0$ и $(\mathbf{r}_{O'})_0$ — скорость и радиус-вектор начала O' в момент времени $t=0$. Дифференцируя обе части (3.8) по времени и учитывая неизменность ориентации осей S' , получим соотношение для скоростей точки

$$\mathbf{v} = (\mathbf{v}_{O'})_0 + \mathbf{v}', \quad (3.9)$$

где \mathbf{v} и \mathbf{v}' — скорости точки относительно систем S и S' соответственно. Дифференцируя по времени (3.9), найдем, что

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}'. \quad (3.10)$$

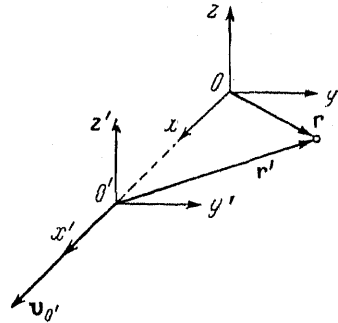


Рис. 3.4.

Таким образом, *ускорение точки в данный момент времени одинаково относительно любой из систем, неускоренно движущихся относительно друг друга. Следовательно, если в системе S ускорение изолированной точки равно нулю, то и в системе S' оно равно нулю. Итак, если система S является инерциальной системой, то любая другая система S' , неускоренно движущаяся относительно S , также инерциальна.*

Преобразование координат при переходе от одной инерциальной системы к другой инерциальной системе определяется соотношением (3.8). Это преобразование называется преобразованием Галилея. Оно заметно упрощается, если системы S и S' одинаково ориентированы, скорость начала O' направлена по одной из осей (например, по оси Ox), а в начальный момент времени точки O' и O совпадают (рис. 3.4). В этом случае преобразование Галилея имеет вид

$$x = v_0 t + x', \quad y = y', \quad z = z', \quad (3.11)$$

где $v_0 = (\dot{x}_{O'})_0$ (конечно, в этом преобразовании «участвует»

фундаментальное допущение классической механики о преобразовании времени (1.7)).

На основании наблюдений Галилеем был сформулирован классический принцип относительности, согласно которому *законы механики одинаковы в любых инерциальных системах отсчета*. Это значит, что уравнения движения относительно любых инерциальных систем S и S' совпадают друг с другом, т. е. уравнение

$$m\mathbf{w} = \mathbf{F} \quad (3.12)$$

эквивалентно уравнению

$$m'\mathbf{w}' = \mathbf{F}'. \quad (3.13)$$

Поскольку в классической механике масса данной точки постоянна ($m = m'$), а ускорение точки в данный момент времени одинаково по отношению к любым инерциальным системам ($\mathbf{w} = \mathbf{w}'$), из принципа Галилея следует, что

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}', \quad (3.14)$$

т. е. следует утверждение о неизменности сил, действующих на точку, при переходе от одной инерциальной системы к другой, также инерциальной системе. Итак, все величины, входящие в уравнение Ньютона, не изменяются при преобразовании от одной инерциальной системы к другой инерциальной системе. Иными словами, *уравнения Ньютона инвариантны относительно преобразований Галилея*.

Рассмотренные выше основные понятия и законы классической механики: понятия о материальной точке, о пространстве и времени, о силе и массе, понятие об инерциальной системе отсчета, законы Ньютона и принцип относительности Галилея — являются фундаментом классической механики. Этот фундамент был построен в результате деятельности многих поколений, был создан в результате анализа и теоретического обобщения экспериментальных данных. Проверкой правильности основ классической механики, ее соответствия природе является сопоставление выводов теории опять-таки с экспериментом. Так как теория создается человеком в определенные исторические эпохи с определенными воззрениями и техническими возможностями, то любая физическая теория является приближенной, ограниченной. В том числе приближенными, ограниченными являются основные понятия и законы классической механики.

§ 4. Решение уравнений движения и начальные условия

Движение механической системы N материальных точек подчинено уравнениям (3.5). Если известны массы всех точек и их положения в любой момент времени, то, используя (3.5), можно определить силы как функции времени. Однако несравненно более трудной задачей

является отыскание радиусов-векторов точек как функций времени, если заданы силы как функции положений точек, их скоростей и времени. В математическом отношении эта задача является задачей о нахождении общего решения системы $3N$ дифференциальных обыкновенных уравнений 2-го порядка. Это решение будет зависеть от $6N$ произвольных постоянных и может быть записано в виде

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(t, C_1, C_2, \dots, C_{6N}) \quad (i = 1, 2, \dots, N). \quad (4.1)$$

Постоянные интегрирования можно выразить через *начальные условия*. Действительно, пусть нам известно общее решение (4.1) и заданы начальные положения и скорости точек системы, т. е. заданы $\mathbf{r}_{i0} = \mathbf{r}_i(t_0)$, $\mathbf{v}_{i0} = \mathbf{v}_i(t_0)$ ($i = 1, 2, \dots, N$). Дифференцируя (4.1) по времени, получим скорости точек как функции времени и $6N$ произвольных постоянных

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_i(t, C_1, C_2, \dots, C_{6N}) \quad (i = 1, 2, \dots, N). \quad (4.2)$$

Полагая в системах (4.1) и (4.2) $t = t_0$, будем иметь

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{i0} &= \mathbf{r}_i(t_0, C_1, C_2, \dots, C_{6N}), \\ \mathbf{v}_{i0} &= \mathbf{v}_i(t_0, C_1, C_2, \dots, C_{6N}) \end{aligned} \quad (i = 1, 2, \dots, N). \quad (4.3)$$

Разрешая систему (4.3) относительно постоянных интегрирования, найдем

$$C_\alpha = C_\alpha(t_0, \mathbf{r}_{10}, \mathbf{r}_{20}, \dots, \mathbf{r}_{N0}, \mathbf{v}_{10}, \mathbf{v}_{20}, \dots, \mathbf{v}_{N0}) \quad (\alpha = 1, 2, \dots, 6N). \quad (4.4)$$

Наконец, подставляя (4.4) в (4.1), получим общее решение системы (3.5) в виде

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(t, t_0, \mathbf{r}_{10}, \mathbf{r}_{20}, \dots, \mathbf{r}_{N0}, \mathbf{v}_{10}, \mathbf{v}_{20}, \dots, \mathbf{v}_{N0}) \quad (i = 1, 2, \dots, N). \quad (4.5)$$

Таким образом, если заданы массы точек, силы, действующие на точки системы, и начальные условия, то поведение системы определяется однозначно *). В этом проявляется *причинная обусловленность* механического движения.

Рассмотрим ряд примеров на решение уравнений движения относительно инерциальной системы отсчета. При этом обратим внимание на *большое значение выбора системы координат, который должен отражать особенности заданных сил и начальных условий*. Такой выбор обеспечивает сравнительную простоту решения задачи.

*) Здесь и далее предполагается выполнимость математических условий, при которых решение системы дифференциальных уравнений единственно, а систему (4.3) можно разрешить относительно постоянных интегрирования.

Пример 4.1. Заряженная частица в переменном электрическом поле. Заряд e массы m движется между обкладками плоского конденсатора, где напряженность электрического поля равна

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos \omega t$$

(\mathcal{E}_0 и ω — постоянные величины). В момент времени $t=0$ заряд находился в положении \mathbf{r}_0 и имел скорость \mathbf{v}_0 относительно системы отсчета, связанной с пластинами конденсатора. Найти положение и скорость заряда в любой момент времени $t > 0$.

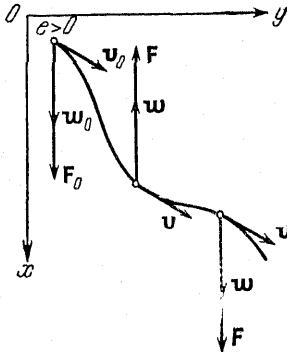


Рис. 4.1.

Из условия вытекает, что на заряд действует сила (см. (2.11))

$$\mathbf{F} = e\mathcal{E}_0 \cos \omega t,$$

а уравнением движения является уравнение

$$m\ddot{\mathbf{r}} = e\mathcal{E}_0 \cos \omega t.$$

Сила в любой момент времени коллинеарна постоянному вектору \mathcal{E}_0 . Поэтому ускорение и приращение скорости также коллинеарны \mathcal{E}_0 . Следовательно, движение заряда происходит в плоскости, задаваемой векторами \mathcal{E}_0 и \mathbf{v}_0 . В соответствии с этим выберем систему декартовых координат

(начало отсчета и орты должны быть жестко связаны с конденсатором). Одну из осей (например, ось Ox) направим вдоль вектора \mathcal{E}_0 , а плоскость $z=0$ совместим с плоскостью движения (рис. 4.1). В выбранной системе координат проекции силы имеют вид

$$F_x = e\mathcal{E}_0 \cos \omega t, \quad F_y = F_z = 0,$$

а проекции радиуса-вектора и скорости на ось Oz равны нулю.

Проектируя левую и правую части векторного уравнения движения на оси выбранной системы, получим три скалярных уравнения

$$m\ddot{x} = e\mathcal{E}_0 \cos \omega t, \quad m\ddot{y} = 0, \quad m\ddot{z} = 0$$

(подчеркнем, что проекция силы на ось Ox изменяется по гармоническому закону и в соответствии с этим изменяется абсолютная величина и знак проекции ускорения на ось Ox). В результате интегрирования уравнения найдем

$$\dot{x} = \frac{e\mathcal{E}_0}{m\omega} \sin \omega t + C_1, \quad x = -\frac{e\mathcal{E}_0}{m\omega^2} \cos \omega t + C_1 t + C_4,$$

$$\dot{y} = C_2, \quad y = C_2 t + C_5,$$

$$\dot{z} = C_3, \quad z = C_3 t + C_6.$$

Подставляя в эти функции $t=0$ и используя начальные условия, получим решение для $\mathbf{v}(t)$ и $\mathbf{r}(t)$ в виде

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{e\mathcal{E}_0}{m\omega} \sin \omega t + \dot{x}_0, & x &= \frac{e\mathcal{E}_0}{m\omega^2} (1 - \cos \omega t) + \dot{x}_0 t + x_0, \\ \dot{y} &= \dot{y}_0, & y &= \dot{y}_0 t + y_0, \\ \dot{z} &= 0, & z &= 0. \end{aligned}$$

Итак, заряд движется в плоскости, образуемой векторами \mathcal{E}_0 и \mathbf{v}_0 (т. е. в плоскости $z=0$). Движение вдоль оси Oy происходит с постоянной скоростью, так как сила действует лишь в направлении оси Ox . Движение заряда вдоль оси Ox складывается из движения по инерции с начальной скоростью \dot{x}_0 и колебания с частотой ω изменения заданной силы. Усредненная по времени за период $2\pi/\omega$ проекция скорости на ось Ox равна проекции начальной скорости на эту ось, т. е. $\bar{\dot{x}} = \dot{x}_0$. Отметим также, что изменяющиеся по гармоническому закону составляющие проекций скорости и радиуса-вектора заряда на ось Ox отстают по фазе от изменения проекции ускорения соответственно на $\pi/2$ и π .

В общем случае, когда на материальную точку действует сила, зависящая только от времени, все три скалярные уравнения движения имеют вид

$$m\ddot{x} = F_x(t).$$

Интегрируя это уравнение и учитывая начальные условия, найдем общее решение в квадратурах

$$\dot{x} = \frac{1}{m} \int_{t_0}^t F_x(t) dt + \dot{x}_0, \quad x = \frac{1}{m} \int_{t_0}^t \left[\int_{t_0}^t F_x(t) dt \right] dt + \dot{x}_0(t - t_0) + x_0.$$

Для других проекций скорости и радиуса-вектора результаты аналогичны.

Пример 4.2. Задача о пространственном осцилляторе.

На точку массы m действует сила, направленная к неподвижной точке O и пропорциональная расстоянию между этими точками (коэффициент пропорциональности κ). Найти уравнение траектории материальной точки, а также ее радиус-вектор и скорость как функции времени, если в момент времени $t=0$ она находилась в положении \mathbf{r}_0 относительно системы отсчета с началом в точке O и имела скорость \mathbf{v}_0 .

Уравнением движения в рассматриваемой системе отсчета является уравнение

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\kappa\mathbf{r}.$$

Таким образом, в любой момент времени ускорение (и приращение скорости) коллинеарно вектору \mathbf{r} , а движение точки происходит

в плоскости, определяемой векторами \mathbf{r}_0 и \mathbf{v}_0 . Действительно, если $t=0$, то приращение скорости коллинеарно вектору \mathbf{r}_0 (см. рис. 1.7), и поэтому в момент времени, бесконечно близкий к начальному моменту, точка будет находиться в указанной плоскости. Аналогичное рассмотрение последующих приращений радиуса-вектора и скорости точки приводит к выводу о ее движении в плоскости, определяемой начальными условиями. В связи с этим плоскость Oxy декартовой системы координат целесообразно совместить с плоскостью движения.

Проектируя левую и правую части уравнения движения на оси Ox и Oy , придем к системе уравнений

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad \ddot{y} + \omega^2 y = 0,$$

где $\omega^2 = \kappa/m$. Общее решение этой системы уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} x &= C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t, \\ y &= C_3 \cos \omega t + C_4 \sin \omega t. \end{aligned}$$

Дифференцируя его по времени, получим

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\omega C_1 \sin \omega t + \omega C_2 \cos \omega t, \\ \dot{y} &= -\omega C_3 \sin \omega t + \omega C_4 \cos \omega t. \end{aligned}$$

Полагая в последних четырех функциях $t=0$ и используя начальные условия, найдем

$$C_1 = x_0, \quad C_2 = \frac{\dot{x}_0}{\omega}, \quad C_3 = y_0, \quad C_4 = \frac{\dot{y}_0}{\omega}.$$

Общее решение можно записать также в виде

$$x = a_1 \cos(\omega t + \alpha_1), \quad y = a_2 \cos(\omega t + \alpha_2),$$

где $a_1, a_2, \alpha_1, \alpha_2$ — произвольные постоянные. Из полученных решений следует, что в направлении осей Ox и Oy точка совершает гармонические колебания с частотой ω , амплитудами a_1, a_2 и фазами α_1, α_2 соответственно. Амплитуды и фазы выражаются через начальные положение и скорость точки; например,

$$a_1 = \left(x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{\omega^2} \right)^{1/2}, \quad \operatorname{tg} \alpha_1 = -\frac{\dot{x}_0}{\omega x_0}.$$

Запишем $y(t)$ в следующей форме:

$$y = a_2 \cos(\omega t + \alpha_1 + \delta),$$

где разность фаз $\delta = \alpha_2 - \alpha_1$, и возведем в квадрат правые и левые части функций $x(t), y(t)$, представленных в виде, удобном для исключения времени:

$$\frac{x}{a_1} = \cos(\omega t + \alpha_1),$$

$$\frac{1}{\sin \delta} \left[\frac{y}{a_2} - \cos(\omega t + \alpha_1) \cos \delta \right] = -\sin(\omega t + \alpha_1).$$

Складывая результаты возведения в квадрат, получим уравнение траектории

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{a_2^2} - \frac{2xy}{a_1 a_2} \cos \delta = \sin^2 \delta.$$

Итак, под действием силы — хг материальная точка движется по эллипсу с центром в неподвижной точке O , к которой в любой момент времени направлена сила. Плоскость эллипса определяется начальными условиями, этими же условиями определяются величины полуосей эллипса (a_1 , a_2) и его ориентация в плоскости движения (т. е. разность фаз δ).

В общем случае, когда сила зависит только от положения точки, а каждая декартова проекция силы зависит только от соответствующей проекции радиуса-вектора, уравнения движения имеют вид

$$m\ddot{x} = F_x(x), \quad m\ddot{y} = F_y(y), \quad m\ddot{z} = F_z(z).$$

Общее решение этих уравнений может быть получено в квадратурах. Например, умножая обе части первого уравнения на dx и учитывая, что

$$\ddot{x} dx = \frac{d\dot{x}}{dt} dx = \dot{x} d\dot{x},$$

получим

$$\dot{x} d\dot{x} = \frac{1}{m} F_x(x) dx.$$

Интегрируя это уравнение, найдем $\dot{x}(x)$:

$$\dot{x} = \pm \left\{ \frac{2}{m} \int_{x_0}^x F_x(x) dx + \dot{x}_0^2 \right\}^{1/2}$$

(здесь выбирается тот знак, который имеет \dot{x} при $x = x_0$), а разделяя в последнем уравнении переменные t , x и интегрируя еще раз, получим $t(x)$:

$$t - t_0 = \pm \int_{x_0}^x \frac{dx}{\left\{ \frac{2}{m} \int_{x_0}^x F_x(x) dx + \dot{x}_0^2 \right\}^{1/2}}.$$

Пример 4.3. Движение в однородном поле тяжести при наличии силы сопротивления.

Пусть достаточно малое невращающееся тело массы m движется в однородном поле тяготения напряженности g вблизи поверхности Земли. Кроме того, среда, покоящаяся относительно Земли, действует

на тело с силой, пропорциональной его скорости относительно Земли (коэффициент пропорциональности k). Найти положение и скорость тела как функции времени.

Выберем систему отсчета, жестко связанную с Землей, и будем считать эту систему инерциальной, что с определенной степенью точности допустимо (см. пример 20.1). Сила, действующая на тело, складывается из постоянной силы притяжения mg и силы сопротивления среды $-kv$, где v — скорость тела (см. (2.12)). Следовательно, ускорение в любой момент времени лежит в плоскости, определяемой векторами g , v_0 ; в этой же плоскости будет двигаться тело (рис. 4.2). Учитывая данное обстоятельство, одну из координатных плоскостей (например, Oyz) совместим с плоскостью движения, а ось Oz направим вверх по вертикали.

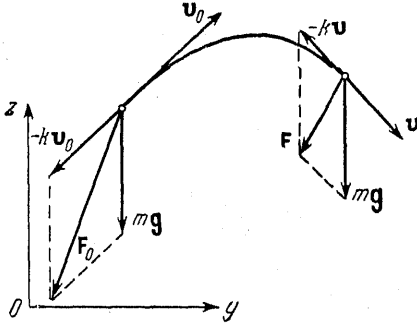


Рис. 4.2.

Уравнение движения точки имеет вид

$$m\ddot{\mathbf{r}} = m\mathbf{g} - k\dot{\mathbf{r}},$$

где \mathbf{r} — радиус-вектор, определяющий положение тела. Проектируя левую и правую

части уравнения движения на координатные оси указанной выше системы отсчета, найдем, что

$$\ddot{y} = -\frac{k}{m}\dot{y}, \quad \ddot{z} = -g\left(1 + \frac{k}{mg}\dot{z}\right).$$

Интегрируя эти уравнения и используя начальные условия, получим решение для проекций скорости

$$\dot{y} = v_0 \cos \alpha_0 e^{-\frac{k}{m}t},$$

$$\dot{z} = \frac{mg}{k} \left(1 + \frac{kv_0}{mg} \sin \alpha_0\right) e^{-\frac{k}{m}t} - \frac{mg}{k}$$

(в качестве начальных условий здесь взяты не \dot{y}_0 и \dot{z}_0 , а модуль скорости v_0 и угол α_0 между начальной скоростью и осью Oy). Интегрируя второй раз, получим общее решение задачи в виде

$$y = \frac{m}{k} v_0 \cos \alpha_0 \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right) + y_0,$$

$$z = \frac{m^2}{k^2} g \left(1 + \frac{k}{mg} v_0 \sin \alpha_0\right) \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right) - \frac{mg}{k} t + z_0.$$

Рассмотрим следующие частные случаи. Пусть $y_0 = 0$ и $\alpha_0 = +\pi/2$, т. е. начальная скорость направлена вверх. Тогда начальное ускорение $z_0 = -g\left(1 + \frac{k}{mg} z_0\right) < 0$, т. е. будет направлено вниз. С возрастанием времени (как видно из решения) ускорение, оставаясь отрицательным, стремится к нулю, так как сила сопротивления в конце концов компенсирует силу притяжения. Установившаяся скорость падения оказывается равной $-(mg/k)$. Если начальная скорость направлена вниз ($y_0 = 0$, $\alpha_0 = -\pi/2$), но $z_0 < (mg/k)$, то опять $z_0 < 0$. Если же начальная скорость направлена вниз, а $z_0 > (mg/k)$, то начальное ускорение направлено вверх. Сила сопротивления в этом случае направлена вверх и по величине больше, чем сила притяжения. В последующие моменты времени ускорение, оставаясь положительным, стремится к нулю; соответственно скорость стремится к предельной скорости падения.

Пусть теперь $y_0 \neq 0$, $z_0 > 0$ и α_0 заключено в пределах: либо $0 < \alpha_0 < \pi/2$, либо $(\pi/2) < \alpha_0 < \pi$. Тогда в начале движения (при t , очень близком к $t = 0$) $z > 0$, а для достаточно больших t $z < 0$. Следовательно, в течение некоторого времени тело будет подниматься, а затем начнет падать. Время подъема определим, полагая $z = 0$:

$$t_{z=0} = \frac{m}{k} \ln \left(1 + \frac{k}{mg} v_0 \sin \alpha_0 \right).$$

Из функций $y(t)$ и $z(t)$ легко определить координаты точки в тот момент, когда она достигает максимальной высоты. Действительно, полагая в этих функциях $t = t_{z=0}$, найдем

$$y(t_{z=0}) = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha_0}{2g} \frac{1}{1 + \frac{k}{mg} v_0 \sin \alpha_0} + y_0,$$

$$z(t_{z=0}) = \frac{m}{k} v_0 \sin \alpha_0 - \frac{m^2}{k^2} g \ln \left(1 + \frac{k}{mg} v_0 \sin \alpha_0 \right) + z_0.$$

Уравнение траектории $z(y)$ получим, исключая время из функции $z(t)$ с помощью функции $y(t)$:

$$z = \frac{mg}{k} \frac{\left(1 + \frac{k}{mg} v_0 \sin \alpha_0 \right)}{v_0 \cos \alpha_0} (y - y_0) + \frac{m^2}{k^2} g \ln \left[1 - \frac{k(y - y_0)}{mv_0 \cos \alpha_0} \right] + z_0.$$

Для наглядности рассмотрим предельные случаи, когда можно считать, что $(k/m)t \gg 1$, либо $(k/m)t \ll 1$. Если тело в начальный момент находится достаточно высоко над поверхностью Земли, то время полета (до падения на поверхность Земли) может быть достаточно велико (рис. 4.3, а); тогда в конце полета будет выполняться условие $(k/m)t \gg 1$. Устремляя $t \rightarrow +\infty$, получим предельные значения функций $y(t)$, $\dot{y}(t)$, $z(t)$:

$$y_\infty = y_0 + \frac{m}{k} v_0 \cos \alpha_0, \quad \dot{y}_\infty = 0, \quad z_\infty = -\frac{mg}{k}.$$

Эти величины дают приближенные значения дальности полета и проекций скорости в момент падения тела на поверхность Земли.

Если время полета достаточно мало, то выполняется условие $(k/m)t \ll 1$. Предполагая, что сила сопротивления среды мала по сравнению с силой притяжения тела Землей, и разлагая интересующие нас функции в ряды по малым величинам, получим приближенные решения. Пусть, например, в начальный момент времени тело находится на поверхности Земли и требуется вычислить время полета t_1 , дальность y_1 и квадрат скорости тела в момент

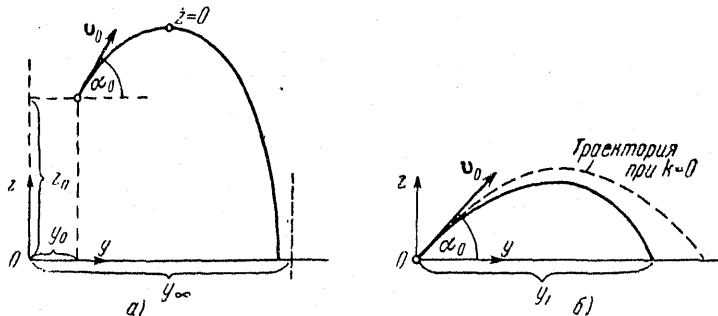


Рис. 4.3.

его падения на поверхность Земли (рис. 4.3, б). Полагая $z = z_0 = 0$ в функции $z(t)$ и разлагая ее по степеням $(k/m)t$, а также имея в виду, что $(kv_0/mg) \ll 1$, получим приближенное значение для времени полета:

$$t_1 = \frac{2v_0 \sin \alpha_0}{g} \left(1 - \frac{kv_0}{mg} \sin \alpha_0 \right).$$

Полагая $t = t_1$ в функции $y(t)$ и считая величины, пропорциональные k , малыми, найдем приближенное значение для дальности полета:

$$y_1 = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha_0}{g} \left(1 - \frac{2kv_0}{mg} \sin \alpha_0 \right).$$

Наконец, полагая $t = t_1$ в функциях $\dot{y}(t)$ и $\dot{z}(t)$, получим приближенное значение квадрата скорости тела в момент его падения на поверхность Земли

$$v_1^2 = v_0^2 \left(1 - \frac{4kv_0}{mg} \sin \alpha_0 \right).$$

Приближенное уравнение траектории найдем с помощью разложения функции $z(y)$ в ряд по величинам, содержащим k :

$$z = (y - y_0) \operatorname{tg} \alpha_0 - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha_0} (y - y_0)^2 - \frac{kg}{3mv_0^3 \cos^3 \alpha_0} (y - y_0)^3.$$

Отсюда видно, что в рассматриваемом случае траектория весьма близка к параболе. Устремляя $k \rightarrow 0$ либо в уравнениях движения, либо в решениях, получим описание движения точки в однородном поле тяготения.

В общем случае, когда сила является функцией только скорости точки, причем каждая декартова проекция силы зависит

лишь от соответствующей проекции скорости, скалярные уравнения движения имеют вид

$$m\ddot{x} = F_x(\dot{x}), \quad m\ddot{y} = F_y(\dot{y}), \quad m\ddot{z} = F_z(\dot{z}).$$

Общее решение этих уравнений может быть получено в квадратурах. Например, возьмем первое уравнение движения. Так как $\dot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt}$, то сразу видно, что переменные t и \dot{x} разделяются и соответствующий интеграл равен

$$t = t_0 + m \int_{\dot{x}_0}^{\dot{x}} \frac{d\dot{x}}{F_x(\dot{x})}.$$

Если отсюда можно выразить \dot{x} как функцию от t , то можно было бы найти в квадратуре $x(t)$, т. е.

$$x = x_0 + \int_{t_0}^t \dot{x}(t) dt.$$

Отметим еще один прием интегрирования указанного типа уравнений. Умножая обе части уравнения движения на dx и имея в виду, что $\dot{x} dx = \dot{x} d\dot{x}$, получим зависимость $x(\dot{x})$:

$$x = x_0 + m \int_{\dot{x}_0}^{\dot{x}} \frac{\dot{x} d\dot{x}}{F_x(\dot{x})}.$$

Аналогично интегрируются и остальные уравнения движения.

Пример 4.4. Движение заряженной частицы в постоянных ⁴¹ однородных электрическом и магнитном полях.

Теория движения заряда в электромагнитных полях имеет очень большое значение в современной физике: она играет важную роль в исследованиях плазмы, в ускорительной технике, в астрофизике и т. д.

Рассмотрим сначала поведение заряда в *постоянном однородном электрическом поле* напряженности \mathcal{E} . Уравнение движения и его решение в векторной форме имеют вид

$$m\ddot{\mathbf{r}} = e\mathcal{E},$$

$$\mathbf{v} = \frac{e\mathcal{E}}{m} t + \mathbf{v}_0,$$

$$\mathbf{r} = \frac{e\mathcal{E}}{2m} t^2 + \mathbf{v}_0 t + \mathbf{r}_0$$

(здесь \mathbf{r}_0 , \mathbf{v}_0 — начальные значения радиуса-вектора и скорости заряда).

Отсюда следует, что заряд движется ускоренно в направлении вектора \mathcal{E} и по инерции в направлении, перпендикулярном к \mathcal{E} , а траекторией точки является парабола. Эти основные черты рассматриваемого движения будут лучше видны, если спроектировать левую и правую части векторного решения на оси декартовой системы координат, выбранной так, чтобы ось Ox была параллельна вектору \mathcal{E} , а ось Oy была расположена в плоскости движения, определяемой векторами \mathcal{E} и \mathbf{v}_0 . Тогда получим

$$x = \frac{e\mathcal{E}}{2m} t^2 + \dot{x}_0 t + x_0, \quad y = \dot{y}_0 t + y_0, \quad z = 0.$$

Исключая из этих функций время, найдем уравнение траектории

$$x = x_0 + \frac{\dot{x}_0}{\dot{y}_0} (y - y_0) + \frac{e\mathcal{E}}{2m\dot{y}_0^2} (y - y_0)^2.$$

Измеряя элементы этой траектории, можно получить значение величин $e/m\dot{y}_0^2$ и \dot{x}_0/\dot{y}_0 .

Движение заряда в постоянном однородном магнитном поле напряженности \mathcal{H} подчиняется следующему уравнению (см. (2.10) и (3.4)):

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \frac{e}{c} [\dot{\mathbf{r}} \mathcal{H}].$$

Для решения этого уравнения выберем декартову систему координат с осью Oz , параллельной \mathcal{H} (рис. 4.4). В такой системе сила Лоренца имеет вид

$$\mathbf{F} = \frac{e}{c} \begin{vmatrix} \mathbf{n}_x & \mathbf{n}_y & \mathbf{n}_z \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ 0 & 0 & \mathcal{H} \end{vmatrix} = \frac{e\mathcal{H}}{c} (\dot{y}\mathbf{n}_x - \dot{x}\mathbf{n}_y),$$

а скалярными уравнениями движения являются уравнения

$$\ddot{x} = \omega \dot{y}, \quad \ddot{y} = -\omega \dot{x}, \quad \ddot{z} = 0,$$

где $\omega = \frac{e\mathcal{H}}{mc}$ — так называемая циклотронная частота. Интегрируя эту систему один раз и учитывая начальные условия, найдем

$$\dot{x} = \omega (y - y_0) + \dot{x}_0, \quad \dot{y} = -\omega (x - x_0) + \dot{y}_0, \quad \dot{z} = \dot{z}_0.$$

Подставляя функцию $\dot{y}(x)$ в первое из скалярных уравнений движения, получим

$$\ddot{x} + \omega^2 (x - x_0) = \omega \dot{y}_0.$$

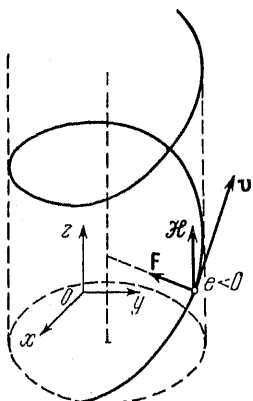


Рис. 4.4.

Это уравнение гармонических колебаний с постоянной правой частью имеет общее решение вида

$$x = x_0 + \frac{\dot{y}_0}{\omega} - a \cos(\omega t + \alpha).$$

Отсюда дифференцированием найдем выражение для проекции скорости на ось Ox :

$$\dot{x} = a\omega \sin(\omega t + \alpha).$$

Используя функции $x(t)$ и $\dot{x}(t)$, определим постоянные a и α :

$$a = \frac{1}{\omega} (\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2)^{1/2}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\dot{x}_0}{\dot{y}_0} \\ \left(\sin \alpha = \frac{\dot{x}_0}{(\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2)^{1/2}}, \quad \cos \alpha = \frac{\dot{y}_0}{(\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2)^{1/2}} \right).$$

Затем, подставляя решение $\dot{x}(t)$ в полученную выше функцию $\dot{x}(y)$, найдем $y(t)$:

$$y = y_0 - \frac{\dot{x}_0}{\omega} + a \sin(\omega t + \alpha),$$

откуда следует, что

$$\dot{y} = a\omega \cos(\omega t + \alpha).$$

Наконец, исключая время из функций $x(t)$ и $y(t)$, придем к выводу, что проекция материальной точки на плоскость, перпендикулярную \mathcal{H} , движется по окружности

$$(x - x_{O'})^2 + (y - y_{O'})^2 = a^2,$$

где $x_{O'} = x_0 + \frac{\dot{y}_0}{\omega}$, $y_{O'} = y_0 - \frac{\dot{x}_0}{\omega}$. Радиус a этой окружности определяется удельным зарядом e/m , напряженностью магнитного поля \mathcal{H} и проекцией начальной скорости на плоскость, перпендикулярную вектору напряженности \mathcal{H} (заметим, что величина a не зависит от начального положения заряда). Центр указанной окружности определяется взятыми в начальный момент времени проекциями радиуса-вектора и скорости заряда на плоскость Oxy , т. е. величинами x_0 , y_0 , \dot{x}_0 , \dot{y}_0 , а также циклотронной частотой ω . В направлении оси Oz точка движется по инерции со скоростью \dot{z}_0 . Следовательно, траекторией точки является винтовая линия с постоянным шагом $\dot{z}_0 (2\pi/\omega)$.

Из решения видно, что величина проекции скорости на плоскость Oxy постоянна; остается постоянным и модуль скорости точки. Дифференцируя $\dot{x}(t)$ и $\dot{y}(t)$ по времени, получим проекции ускорения как функции времени

$$\ddot{x} = a\omega^2 \cos(\omega t + \alpha), \quad \ddot{y} = -a\omega^2 \sin(\omega t + \alpha),$$

а выразив их через x и y , найдем

$$\ddot{x} = -\omega^2 (x - x_{O'}), \quad \ddot{y} = -\omega^2 (y - y_{O'}).$$

Из приведенных соотношений, а также из того, что проекция ускорения на ось Oz равна нулю, следует, что абсолютная величина ускорения заряда является постоянной:

$$\omega = a\omega^2 = \omega (x_0^2 + y_0^2)^{1/2},$$

а вектор ускорения направлен все время перпендикулярно к оси воображаемой цилиндрической поверхности радиуса a , на которую навивается траектория заряда.

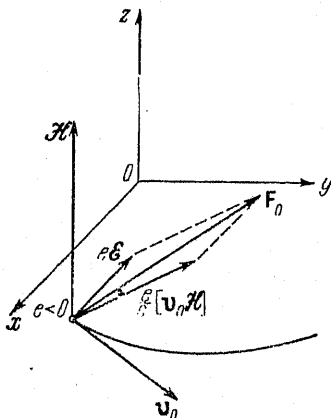


Рис. 4.5.

Отметим важное свойство фокусировки рассматриваемого магнитного поля. Оно проявляется в том, что частицы с одинаковым удельным зарядом и одинаковым начальным положением, но с различными начальными скоростями, перпендикулярными \mathcal{H} , приходят в одно и то же положение через период времени $T = 2\pi/\omega$.

Теперь рассмотрим движение заряда во взаимно перпендикулярных электрическом и магнитном полях с напряженностями \mathcal{E} и \mathcal{H} *). Если начальная скорость v_0 заряда перпендикулярна \mathcal{H} , то его движение будет плоским, поскольку приращение скорости в начальный и последующий моменты времени лежит в плоскости, определяемой векторами v_0 и $F_0 = e\mathcal{E} + \frac{e}{c}[v_0\mathcal{H}]$ (см. (2.10)). В связи с этим ось Oz направим вдоль вектора \mathcal{H} , а ось Ox вдоль \mathcal{E} (см. рис. 4.5, где $e < 0$).

Уравнение движения заряда

$$m\ddot{\mathbf{r}} = e\mathcal{E} + \frac{e}{c}[\dot{\mathbf{r}}\mathcal{H}]$$

в выбранных декартовых координатах принимает вид

$$\ddot{x} = \omega\dot{y} + \frac{e\mathcal{E}}{m}, \quad \ddot{y} = -\omega x,$$

где $\omega = \frac{e\mathcal{H}c}{mc}$. Интегрируя эту систему по аналогии с предыдущим случаем, находим

$$x = x_0 + \frac{1}{\omega} \left(\dot{y}_0 + \frac{c\mathcal{E}}{\mathcal{H}} \right) - a \cos(\omega t + \alpha),$$

$$y = y_0 - \frac{x_0}{\omega} - \frac{c\mathcal{E}}{\mathcal{H}} t + a \sin(\omega t + \alpha),$$

*) См. [14], стр. 245—248.

где

$$a = \frac{1}{\omega} \left[\dot{x}_0^2 + \left(\dot{y}_0 + \frac{c\mathcal{E}}{\mathcal{H}} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\dot{x}_0}{\dot{y}_0 + \frac{c\mathcal{E}}{\mathcal{H}}}.$$

Для проекций скорости и ускорения соответственно имеем

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \omega a \sin(\omega t + \alpha), & \ddot{x} &= \omega^2 a \cos(\omega t + \alpha), \\ \dot{y} &= -\frac{c\mathcal{E}}{\mathcal{H}} + \omega a \cos(\omega t + \alpha), & \ddot{y} &= -\omega^2 a \sin(\omega t + \alpha). \end{aligned}$$

Уравнение траектории (циклоиды) запишем в виде

$$(x - x_{O'})^2 + (y - y_{O'})^2 = a^2,$$

где

$$\begin{aligned} x_{O'} &= x_0 + \frac{1}{\omega} \left(\dot{y}_0 + \frac{c\mathcal{E}}{\mathcal{H}} \right), \\ y_{O'} &= y_0 - \frac{\dot{x}_0}{\omega} - \frac{c\mathcal{E}}{\mathcal{H}} t. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что движение заряда происходит в полосе, лежащей в плоскости Oxy , и может быть наглядно представлено как равномерное вращение заряда с постоянной угловой скоростью ω по окружности радиуса a , центр которой движется параллельно оси Oy

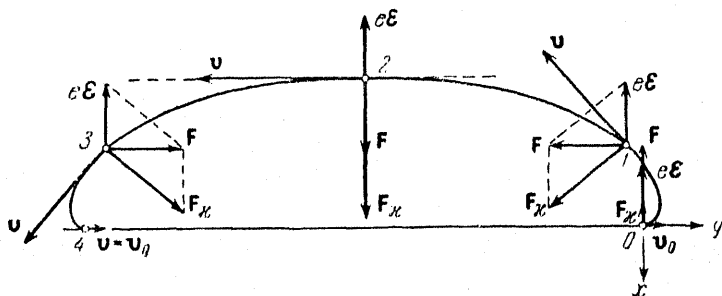


Рис. 4.6.

с постоянной скоростью $-\frac{c\mathcal{E}}{\mathcal{H}}$ (рис. 4.6). Существенно, что ω зависит от отношения $c\mathcal{H}/m$ и не зависит от начальных условий, а скорость центра указанной окружности зависит лишь от отношения напряженностей полей \mathcal{E}/\mathcal{H} и, следовательно, одинакова для частиц с различными удельными зарядами e/m и различными начальными условиями. Ширина полосы, в которой происходит движение заряда, равна $2a$. Она зависит от удельного заряда, напряженностей полей, начальной скорости и не зависит от начального положения ввиду однородности полей.

Рассмотренное движение заряда в направлении вектора $[\mathcal{E}\mathcal{H}]$ с постоянной в среднем скоростью называют дрейфом заряда. Средние значения проекций скорости и ускорения за период $T = 2\pi/\omega$ равны

$$\bar{x} = 0, \quad \bar{y} = -c \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{H}}, \quad \bar{\dot{x}} = \bar{\dot{y}} = 0.$$

Кстати отметим, что абсолютная величина ускорения отлична от нуля и равна

$$\omega = |a| \omega^2 = \frac{|e| \mathcal{H}}{mc} \left[\dot{x}_0^2 + \left(\dot{y}_0 + \frac{c\mathcal{E}}{\mathcal{H}} \right)^2 \right]^{1/2},$$

а вектор ускорения направлен все время к центру «образующей» окружности.

Изучаемые поля обладают важным свойством *фокусировки*. Дело в том, что ни частота ω , ни скорость дрейфа $-c \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{H}}$ не зависят от начальных условий. Поэтому расстояние l между двумя последовательными вершинами циклоиды, равное произведению величины скорости дрейфа на период T , также не зависит от начальных условий:

$$l = \frac{c\mathcal{E}}{\mathcal{H}} T = 2\pi c^2 \frac{m\mathcal{E}}{|e|\mathcal{H}^2}.$$

Следовательно, частицы с одинаковым удельным зарядом и одинаковым начальным положением, но с различными начальными скоростями, перпендикулярными к \mathcal{H} , будут приходить в одно и то же положение через периоды времени T .

Рассмотрим детальнее явление дрейфа заряда. С этой целью перенесем начало координат в начальное положение заряда, а начальную скорость направим перпендикулярно плоскости полей, т. е. положим, что $x_0 = y_0 = 0$ и $\dot{x}_0 = 0$. Такой выбор начальных условий по существу не вносит ограничений, поскольку, изменяя начало отсчета времени t_0 , всегда можно добиться того, чтобы $\dot{x}_0 = 0$. Подставляя выбранные начальные условия в общее решение, получим

$$x = a(1 - \cos \omega t), \quad y = -\frac{c\mathcal{E}}{\mathcal{H}} t + a \sin \omega t,$$

где

$$a = \frac{1}{\omega} \left(\dot{y}_0 + \frac{c\mathcal{E}}{\mathcal{H}} \right).$$

Возьмем для определенности отрицательный заряд $e < 0$ и положительно направленную начальную скорость $\dot{y}_0 > 0$. Учитывая, что при этом $\omega < 0$ и $a < 0$, вычислим x , y , \dot{x} , \dot{y} , \ddot{x} , \ddot{y} при значениях аргумента $\omega t = 0, -\pi/2, -\pi, -\frac{3}{2}\pi, -2\pi$ (на рис. 4.6 эти точки обозначены 0, 1, 2, 3, 4 соответственно, а в каждой из этих точек изображены скорость \mathbf{v} , сила $e\mathcal{E}$, сила $F_{\mathcal{H}} = \frac{e}{c} [\mathbf{v}\mathcal{H}]$ и сумма этих

сил F). В результате мы увидим, что на участке траектории $0-1-2$ электрическое поле разгоняет заряд от скорости, равной y_0 , до скорости максимальной величины $y_0 + 2c(\mathcal{E}/\mathcal{H})$. Одновременно магнитное поле, искривляя траекторию, поворачивает скорость настолько, что в положении 2 она становится антипараллельной начальной скорости; при этом сила $F_{\mathcal{H}}$ оказывается направленной по вектору \mathcal{E} , а по величине превосходит силу $e\mathcal{E}$ (так как скорость в положении 2 достаточно велика). В связи с этим на участке траектории $2-3-4$ появляется составляющая скорости, направленная против силы $e\mathcal{E}$:

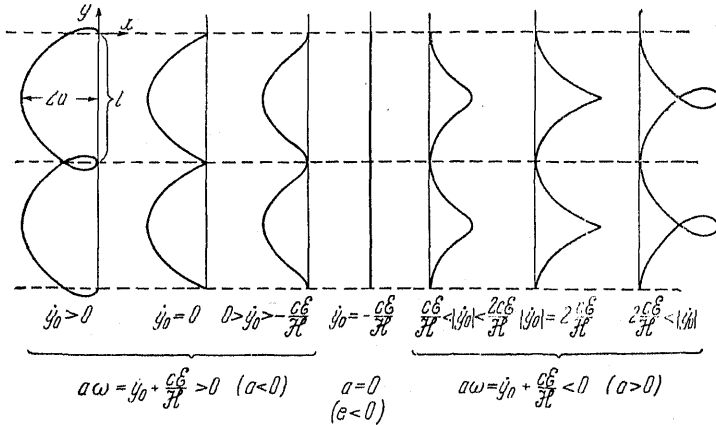


Рис. 4.7.

происходит торможение заряда электрическим полем, а магнитное поле продолжает искривлять траекторию; скорость заряда в точке 4 достигает минимальной величины y_0 и поворачивается до направления начальной скорости. Из этой картины движения следует, что на участке траектории $1-2-3$ величина средней скорости движения заряда в направлении, перпендикулярном плоскости полей, больше, чем на участках $0-1, 3-4$. В самом деле, легко подсчитать, что средние значения проекции скорости на участке $1-2-3$ равны

$$\bar{x} = 0, \quad \bar{y} = -\frac{c\mathcal{E}}{\mathcal{H}} - \frac{2}{\pi} a\omega,$$

а на участках $0-1, 3-4$

$$\bar{x} = 0, \quad \bar{y} = -\frac{c\mathcal{E}}{\mathcal{H}} + \frac{2}{\pi} a\omega.$$

Аналогично возникает дрейф частицы и при других значениях начальной скорости. (см. рис. 4.7, на котором изображены все возможные

случае траекторий отрицательного заряда, если $x_0 = y_0 = 0$ и $\dot{x}_0 = 0$).

Иследуем движение заряда в постоянных однородных электрическом и магнитном полях с произвольной ориентацией векторов \mathcal{E} , \mathcal{H} и v_0 . Направляя ось Oz вдоль \mathcal{H} , а ось Ox в одной из плоскостей, определяемых векторами \mathcal{E} и \mathcal{H} , убедимся, что движение проекции материальной точки на плоскость Oxy описывается полученными ранее уравнениями с той разницей, что роль величины \mathcal{E} играет \mathcal{E}_x — проекция \mathcal{E} на ось Ox , а движение проекции точки на ось Oz будет равноускоренным и определится проекцией напряженности электрического поля \mathcal{E}_z . Таким образом, общее решение имеет вид

$$x = x_0 + \frac{1}{\omega} \left(\dot{y}_0 + \frac{c\mathcal{E}_x}{\mathcal{H}} \right) - a \cos(\omega t + \alpha),$$

$$y = y_0 - \frac{\dot{x}_0}{\omega} - \frac{c\mathcal{E}_x}{\mathcal{H}} t + a \sin(\omega t + \alpha),$$

$$z = z_0 + \dot{z}_0 t + \frac{e\mathcal{E}_z}{2m} t^2,$$

где

$$a = \frac{1}{\omega} \left[\dot{x}_0^2 + \left(\dot{y}_0 + \frac{c\mathcal{E}_x}{\mathcal{H}} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\dot{x}_0}{\dot{y}_0 + \frac{c\mathcal{E}_x}{\mathcal{H}}}.$$

В этом случае движение заряда может быть наглядно представлено, как его равномерное вращение с угловой скоростью ω по окружности радиуса a , плоскость которой все время остается перпендикулярной напряженности \mathcal{H} , а центр которой движется с постоянной скоростью $\frac{c\mathcal{E}_x}{\mathcal{H}}$ в направлении вектора $[\mathcal{E}\mathcal{H}]$ и равноускоренно вдоль \mathcal{H} . Следовательно, траекторией заряда является некоторая винтовая кривая, выходящая около параболы с осью, параллельной напряженности магнитного поля.

ЗАКОНЫ ИЗМЕНЕНИЯ И СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА, КИНЕТИЧЕСКОГО МОМЕНТА И ЭНЕРГИИ

В первой главе было показано, что задача о движении одной точки имеет общее решение для сравнительно широкого класса сил (см. примеры 4.1, 4.2 и 4.3). Задача о движении двух точек также имеет общее решение в квадратурах при достаточно общих предположениях о силе взаимодействия между точками (см. § 12). Однако отыскание общего решения задачи трех и более точек при достаточно общих предположениях о силах взаимодействия встречает непреодолимые трудности. Известны только некоторые частные решения этой задачи или решения для очень узкого класса взаимодействий (см. пример 21.1)*). В связи с этим общие теоремы, справедливые при любом числе материальных точек, приобретают громадное значение. Такими универсальными теоремами являются законы изменения и сохранения импульса, кинетического момента и энергии. Рассмотрим эти законы для механических систем свободных точек (см. стр. 24), или, кратко говоря, для свободных систем.

§ 5. Законы изменения и сохранения импульса и момента импульса материальной точки

Из дальнейшего будет ясно, что законы сохранения импульса, кинетического момента и энергии приводят к так называемым интегралам движения. Интегралом движения *называется такая функция времени, координат и скоростей точек, которая при движении механической системы сохраняет постоянное значение, определяемое начальными условиями*. То, что такие функции существуют, можно видеть из следующего. Пусть известно общее решение уравнений движения. Тогда (4.1) и (4.2) представляют собой систему $6N$ уравнений относительно $6N$ произвольных постоянных C_α ($\alpha = 1, 2, \dots, 6N$). Определяя все C_α из этой системы, получим

$$C_\alpha = C_\alpha(t, r_1, r_2, \dots, r_N, v_1, v_2, \dots, v_N) \quad (\alpha = 1, 2, \dots, 6N). \quad (5.1)$$

Эти функции времени, координат и скоростей являются следствием уравнений движения и сохраняют постоянные значения при любых

*) В настоящее время частные решения задачи трех тел находятся с помощью методов вычислительной математики.

начальных условиях. Значения постоянных C_α фиксируются, если заданы начальные условия (см. (4.4)). Следовательно, на основании (5.1) и (4.4) можно написать

$$C_\alpha(t, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N; \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_N) = C_{\alpha 0} \quad (\alpha = 1, 2, \dots, 6N), \quad (5.2)$$

где

$$C_{\alpha 0} = C_\alpha(t_0, \mathbf{r}_{10}, \mathbf{r}_{20}, \dots, \mathbf{r}_{N0}; \mathbf{v}_{10}, \mathbf{v}_{20}, \dots, \mathbf{v}_{N0}).$$

Функции (5.2) являются интегралами движения.

Интегралы движения, содержащие скорости точек, называются первыми интегралами. Вторыми интегралами называются такие функции времени, координат точек и произвольных констант, которые при движении системы сохраняют постоянные значения. Например, из общего решения (4.1) можно найти следующие вторые интегралы:

$$C_\beta(t, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N; C_{3N+1}, \dots, C_{6N}) = C_{\beta 0} \quad (\beta = 1, 2, \dots, 3N). \quad (5.3)$$

Итак, (4.1) и (4.2) определяют $6N$ первых независимых интегралов, а решение (4.1) определяет $3N$ вторых интегралов. При тех же математических требованиях верно и обратное*). Таким образом, система $6N$ первых независимых интегралов (или $3N$ вторых) эквивалентна общему решению уравнений движения. Соответственно знание s независимых первых интегралов дает возможность понизить порядок системы уравнений движения на s .

Рассмотрим связь законов сохранения со свойствами сил на примере одной точки, движущейся относительно определенной инерциальной системы отсчета.

Закон изменения импульса материальной точки совпадает со вторым законом Ньютона. Действительно, импульсом точки \mathbf{p} называется произведение массы точки m на ее скорость \mathbf{v} (часто эту величину называют количеством движения). Поскольку масса точки постоянна, то из уравнения (3.4) получаем закон изменения

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}. \quad (5.4)$$

На основании (5.4) можно утверждать: *если проекция силы на некоторую неподвижную ось в любой момент времени равна нулю, то проекция импульса на ту же ось сохраняется*; например, если $F_z = 0$, то

$$p_z = p_{z0}. \quad (5.5)$$

Если проекции силы на две фиксированные оси равны нулю, то получим два интеграла. Например, пусть на точку действует сила

*) См. В. А. Ильин, Э. Г. Позняк, Основы математического анализа, «Наука», 1965, гл. 15, § 3, теорема 15.2 и п. 3.

тяжести mg . Так как вектор \mathbf{g} постоянен, то проекции силы на оси, перпендикулярные этому вектору, равны нулю в любой момент времени. Следовательно, проекции импульса (и скорости) на оси, перпендикулярные \mathbf{g} , сохраняются, т. е. $\dot{x} = \dot{x}_0$, $\dot{y} = \dot{y}_0$ (ось Oz направлена вдоль вектора \mathbf{g}). Наконец, если сумма сил, действующих на точку, равна нулю ($\mathbf{F} = 0$), то

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_0, \quad (5.6)$$

т. е. имеет место закон сохранения импульса точки.

Следует подчеркнуть: если проекция силы на подвижную ось равна нулю, то отсюда не вытекает сохранение проекции импульса на эту ось. Пусть, например, проекция силы на координатную ось (p) равна нулю. Спроектировав на эту ось обе части уравнения (3.4) (или (5.4)), найдем, что

$$m\dot{\omega}_p = F_p.$$

Левая часть этого уравнения, согласно (1.20), равна

$$\dot{p}_p - m\rho\dot{\varphi}^2,$$

где $p_p = m\dot{r}$ и является проекцией импульса точки на ось (p). Таким образом, если $F_p = 0$, то это еще не означает, что p_p сохраняется.

Закон изменения момента импульса точки является следствием второго закона Ньютона. Действительно, умножая (5.4) векторно слева на радиус-вектор точки \mathbf{r} , получим

$$[\mathbf{r}\dot{\mathbf{p}}] = [\mathbf{r}\mathbf{F}].$$

Правая часть этого уравнения называется моментом силы \mathbf{L} . Левую часть (используя определение импульса и очевидное равенство $[\mathbf{v}\mathbf{v}] = 0$) можно представить в виде

$$[\mathbf{r}\dot{\mathbf{p}}] = \frac{d\mathbf{M}}{dt},$$

где $\mathbf{M} = [\mathbf{r}\mathbf{p}]$ — момент импульса точки. В результате найдем, что производная момента импульса материальной точки по времени равна моменту силы, действующей на эту точку,

$$\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{L}. \quad (5.7)$$

Отсюда следует: если проекция момента силы на некоторую неподвижную ось в любой момент времени равна нулю, то проекция момента импульса точки на ту же ось сохраняется; например, если $L_z = 0$, то

$$M_z = M_{z0}. \quad (5.8)$$

Подчеркнем, что момент силы (или его проекция) может равняться нулю не только в том случае, когда сила равняется нулю. Пусть,

например, задана сила, направление которой постоянно. Направляя координатную ось Oz коллинеарно силе, на основании (5.8) найдем (рис. 5.1, а)

$$\begin{aligned} F_x = F_y = 0, \quad F_z \neq 0; \\ L_x \neq 0, \quad L_y \neq 0, \quad L_z = xF_y - yF_x = 0; \\ M_z = m(xy' - yx') = M_{z0}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Таким образом, проекция момента импульса точки на направление силы сохраняется, что дает один первый интеграл движения. Теперь рассмотрим силу (рис. 5.1, б), линия действия которой все время

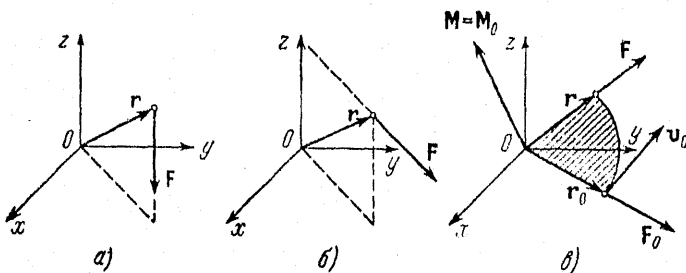


Рис. 5.1.

пересекает неподвижную ось под прямым углом (линией действия силы называется прямая, на которой расположен этот вектор). Выбирая неподвижную ось за ось Oz , на основании (5.8) получим

$$\begin{aligned} F_\rho \neq 0, \quad F_\varphi = F_z = 0; \\ L_\rho = -zF_\varphi = 0, \quad L_\varphi \neq 0, \quad L_z = \rho F_\varphi = 0; \\ M_z = m\rho^2\dot{\varphi} = M_{z0}. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Следовательно, проекция момента импульса точки на неподвижную ось сохраняется и дает также один первый интеграл*). Подчеркнем, что из равенства L_ρ нулю не следует постоянство M_ρ , так как орт \mathbf{n}_ρ сам зависит от времени.

Очень распространенным является случай центральной силы, т. е. силы, линия действия которой все время проходит через некоторую неподвижную точку — центр силы. Выбирая эту точку за начало координат (рис. 5.1, в), найдем

$$\begin{aligned} \mathbf{F} = F\mathbf{n}_r, \quad \mathbf{L} = 0, \\ \mathbf{M} = m[\mathbf{r}\mathbf{v}] = \mathbf{M}_0. \end{aligned} \quad (5.11)$$

*) Случай (5.9) и (5.10) являются частными случаями более общего, когда линия действия силы все время пересекает неподвижную прямую под любым углом.

Таким образом, момент импульса точки относительно центра силы сохраняется. Однако между тремя проекциями момента импульса имеется очевидная зависимость:

$$Mv = m [rv] v = 0, \quad (5.12)$$

поэтому из полученных трех первых интегралов независимы лишь два.

Под действием центральной силы точка всегда движется по плоской траектории. Это видно как из уравнения движения (см., в частности, пример 4.2 на стр. 41), так и из второго интеграла:

$$m [rv] r = M_0 r = 0. \quad (5.13)$$

Плоскость траектории проходит через центр силы и перпендикулярна постоянному моменту импульса точки; положение этой плоскости определяется начальными условиями, так как

$$M_0 = m [r_0 v_0].$$

Во всех отмеченных случаях для выявления сохраняющихся величин важен такой выбор системы координат, который учитывает особенности сил. Только в случае изолированной точки несущественно, где поместить начало координат и как направить оси, поскольку силы, действующие на точку, отсутствуют ($F=0$); в этом случае

$$M = M_0, \quad (5.14)$$

т. е. имеет место закон сохранения момента импульса точки.

Для более наглядного представления о сохранении момента импульса выразим уравнение (5.7) через секторную скорость σ (см. (1.11) и рис. 1.3, б). Тогда получим

$$2m\dot{\sigma} = L, \quad (5.15)$$

откуда вытекает, что равенство $M_z = M_{z_0}$ можно записать в виде

$$\sigma_z = \sigma_{z_0}. \quad (5.16)$$

Это значит, что проекция радиуса-вектора точки на плоскость, перпендикулярную оси Oz , описывает одинаковые площади за любые одинаковые интервалы времени (рис. 5.2). По этой причине интеграл (5.16) часто называется интегралом площади.

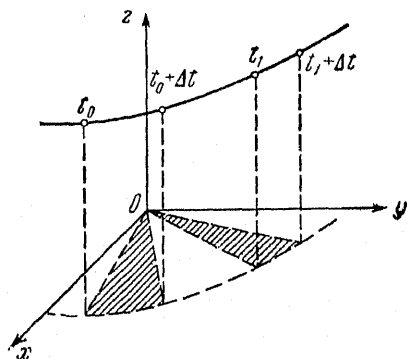


Рис. 5.2.

§ 6. Законы изменения и сохранения энергии материальной точки

Закон изменения кинетической энергии точки получим, умножая обе части уравнения движения (3.4) скалярно на перемещение точки $d\mathbf{r}$:

$$m\dot{\mathbf{v}} d\mathbf{r} = \mathbf{F} d\mathbf{r}.$$

Правая часть этого уравнения называется элементарной работой силы \mathbf{F} на перемещении $d\mathbf{r}$, а левая часть равна дифференциалу от кинетической энергии. В последнем можно убедиться, используя определение скорости (1.9) и известное утверждение о том, что скалярное произведение вектора на его приращение равно произведению модуля вектора на приращение этого модуля*):

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} d\mathbf{r} = m\mathbf{v} d\mathbf{v} = m v dv = dT,$$

где $T = mv^2/2$ — кинетическая энергия точки. В результате получаем, что *дифференциал кинетической энергии точки равен элементарной работе действующей на точку силы*:

$$dT = dA. \quad (6.1)$$

Разделив (6.1) на dt и определив мощность силы как отношение $\frac{dA}{dt}$, получим другую форму закона изменения кинетической энергии, а именно: *производная кинетической энергии точки по времени равна мощности силы, действующей на точку*:

$$\dot{T} = \frac{dA}{dt}. \quad (6.2)$$

Следует иметь в виду, что элементарная работа dA не всегда является полным дифференциалом, а мощность $\frac{dA}{dt}$ — полной производной скалярной функции по времени.

Потенциальные силы. Как предполагалось выше (см. стр. 36), сила является заданной функцией положения, скорости точки и времени. Поэтому, не зная закона движения точки, т. е. не зная функции $\mathbf{r}(t)$, нельзя вычислить работу на конечном перемещении точки. Для вычисления конечного изменения кинетической энергии

*) Действительно, по определению скалярного произведения для любого вектора \mathbf{a} имеем

$$\mathbf{a} d\mathbf{a} = a |d\mathbf{a}| \cos(\mathbf{a}, d\mathbf{a}).$$

Но приращение модуля вектора равно

$$da = |d\mathbf{a}| \cos(\mathbf{a}, d\mathbf{a}),$$

следовательно,

$$\mathbf{a} d\mathbf{a} = a da.$$

в общем случае нужно знать решение уравнений движения. Однако для весьма широкого класса сил можно, не зная решения уравнений движения, найти изменение кинетической энергии. Такими силами являются потенциальные силы.

Понятие о потенциальных силах тесно связано с понятием о силовом поле (см. стр. 7), которое рассмотрим на примере электростатического поля. Известно, что сила, с которой неподвижный заряд 2 действует на заряд 1, может быть записана в виде

$$F_{21} = e_1 \mathcal{E}_2,$$

где $\mathcal{E}_2 = e_2 \frac{\mathbf{r}}{r^3}$ (здесь начало координат совмещено со вторым зарядом, см. (2.9)). В этом выражении вектор \mathcal{E}_2 не зависит от величины заряда e_1 . Поэтому становится возможным следующее представление о силе: заряд 2 — источник силы — порождает силовое поле, которое в каждой точке пространства имеет определенную напряженность \mathcal{E}_2 независимо от того, присутствует ли в этой точке пространства другой заряд — объект воздействия — или нет; если такой заряд имеется, то на него действует поле с силой, равной произведению этого заряда на напряженность поля в месте нахождения этого заряда. Таким образом, *силовое поле можно задать с помощью напряженности поля или силы как функций точки пространства.*

Силовое поле называется потенциальным, если его напряженность удовлетворяет требованию, которое для рассматриваемого примера имеет вид

$$\text{rot } \mathcal{E}_2(\mathbf{r}) = 0$$

(дифференциальная операция «ротор» производится по координатам точки пространства). Соответственно *силу называют потенциальной, если она зависит только от координат и удовлетворяет требованию*

$$\text{rot } \mathbf{F}(\mathbf{r}) = 0. \quad (6.3)$$

Учитывая, что векторная функция, удовлетворяющая требованию (6.3), всегда может быть выражена через градиент некоторой скалярной функции U от положения точки, потенциальную силу можно представить в виде

$$\mathbf{F} = - \text{grad } U(\mathbf{r}). \quad (6.4)$$

Элементарная работа потенциальной силы будет полным дифференциалом *):

$$dA = - \nabla U d\mathbf{r} = - dU. \quad (6.5)$$

*) Здесь и далее градиент записывается с помощью векторного дифференциального оператора «набла», который в декартовых координатах имеет вид

$$\nabla = \mathbf{n}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{n}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{n}_z \frac{\partial}{\partial z}.$$

Отсюда вытекает, что работа на конечном перемещении точки из положения \mathbf{r}_0 в положение \mathbf{r}_1 равна определенному интегралу:

$$A = - \int_{(\mathbf{r}_0)}^{(\mathbf{r}_1)} dU = U(\mathbf{r}_0) - U(\mathbf{r}_1) \quad (6.6)$$

(здесь и далее предполагается, что U — однозначная функция). Итак, работа потенциальной силы равна разности значений функции U в начальном и конечном положениях материальной точки и не зависит от формы траектории, по которой движется точка. Скалярную функцию U называют потенциальной энергией точки, т. е. энергией, зависящей от расположения точки в потенциальном силовом поле. Из (6.5) и (6.4) видно, что потенциальную энергию можно найти по заданной потенциальной силе с помощью неопределенного интеграла:

$$U = - \int \mathbf{F} d\mathbf{r} + C \quad (6.7)$$

(здесь C — постоянная, определяющая «нулевой уровень» потенциальной энергии; выбор такого уровня произволен и не влияет на значение силы и работы этой силы).

Приведем ряд примеров. Пусть сила перпендикулярна к неподвижной плоскости и является функцией расстояния от этой плоскости. Такая сила потенциальна, поскольку она удовлетворяет условию (6.3). Если координатную ось Oz направить вдоль силы, т. е. перпендикулярно к указанной плоскости, то найдем

$$\mathbf{F} = F(z) \mathbf{n}_z, \quad \mathbf{F} d\mathbf{r} = F(z) dz, \quad U = - \int F(z) dz + C. \quad (6.8)$$

В частности, известно, что напряженность \mathcal{E} поля равномерно заряженной бесконечной плоскости постоянна по величине и направлена перпендикулярно этой плоскости *). Совмещая координатную плоскость Oxy с заряженной плоскостью, получим следующие выражения для силы и элементарной работы:

$$\mathbf{F} = e\mathcal{E} \mathbf{n}_z, \quad dA = e\mathcal{E} dz. \quad (6.9)$$

Для потенциальной энергии заряда и работы силы электростатического поля на конечном перемещении заряда соответственно находим

$$U = - e\mathcal{E} z + C, \quad A = - \int_{z_0}^{z_1} dU = e\mathcal{E} (z_1 - z_0). \quad (6.10)$$

Отсюда видно, что работа силы по перемещению точки с плоскости $z = z_0$ на плоскость $z = z_1$ не зависит от формы траектории (каждая

*) См. [31], гл. I, § 4.

из указанных плоскостей представляет собой эквипотенциальную поверхность, т. е. поверхность, в каждой точке которой потенциальная энергия имеет одно и то же значение).

Рассмотрим силу, величина которой зависит от расстояния до неподвижной прямой, а линия действия которой проходит через эту прямую перпендикулярно к ней. Поле такой силы потенциально, поскольку условие (6.3) выполняется. Если ось Oz совместить с осью симметрии поля, то в цилиндрических координатах будем иметь

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= F(\rho) \mathbf{n}_\rho, & dA &= F(\rho) d\rho, \\ U &= - \int F(\rho) d\rho + C, & A &= \int_{\rho_0}^{\rho_1} F(\rho) d\rho. \end{aligned} \quad (6.11)$$

В качестве частного примера можно взять электростатическое поле равномерно заряженной бесконечной прямой. Как известно, сила, действующая на заряд e со стороны такого поля, равна *)

$$\mathbf{F} = e \frac{2x}{\rho} \mathbf{n}_\rho \quad (6.12)$$

где x — заряд, приходящийся на единицу длины. Подставляя (6.12) в (6.11), получим

$$dA = \frac{2ex}{\rho} d\rho, \quad U = -2ex \ln \rho + C, \quad A = 2ex \ln \left(\frac{\rho_1}{\rho_0} \right). \quad (6.13)$$

В данном примере эквипотенциальными поверхностями являются коаксиальные цилиндры с осью, совпадающей с заряженной прямой, а работа, совершаемая над зарядом при его движении по любому пути между двумя такими поверхностями, будет одной и той же.

Наконец, приведем случай *центральной силы, являющейся функцией расстояния от центра силы*. Совместя начало координат с центром силы и используя сферические координаты, запишем силу в виде

$$\mathbf{F} = F(r) \mathbf{n}_r \quad (6.14)$$

Непосредственной проверкой убедимся в потенциальности силы (6.14); при этом интересующие нас выражения будут определяться следующими формулами:

$$dA = F(r) dr, \quad U = - \int F(r) dr + C, \quad A = \int_{r_0}^{r_1} F(r) dr. \quad (6.15)$$

Например, если

$$\mathbf{F} = \frac{e_1 e_2}{r^2} \mathbf{n}_r,$$

*) См. [31], гл. 1, § 4.

то (6.15) принимает вид

$$dA = \frac{e_1 e_2}{r^2} dr, \quad U = \frac{e_1 e_2}{r} + C, \quad A = e_1 e_2 \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_1} \right). \quad (6.16)$$

В этом примере поверхностями равного потенциала являются сферы с центром, совпадающим с неподвижным зарядом (см. стр. 61).

Во всех рассмотренных случаях сила являлась стационарной, т. е. явно от времени не зависела. Это означает, что при фиксированном положении точки ее потенциальная энергия не изменяется со временем, т. е. частная производная $\frac{\partial U}{\partial t} = 0$. Однако если точка перемещается, то ее потенциальная энергия будет изменяться. Такое изменение характеризуется полной производной*)

$$\frac{dU(\mathbf{r})}{dt} = \nabla U \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

(здесь \mathbf{r} является радиусом-вектором материальной точки). В приведенных примерах (см. (6.10), (6.13), (6.16)) полная производная $U \neq 0$.

Сила, явно зависящая не только от положения, но и от времени, также может удовлетворять условию потенциальности (6.3) (в этом случае сила называется нестационарной потенциальной силой). Тогда выражение (6.4) также имеет место, а потенциальная энергия определяется по заданной силе интегралом (6.7), причем интегрирование производится при фиксированном времени. Что касается соотношения (6.5), то оно не имеет места. Действительно, если U явно зависит от \mathbf{r} и t , то

$$dU = \nabla U d\mathbf{r} + \frac{\partial U}{\partial t} dt \quad (6.17)$$

и, следовательно,

$$dA = -\nabla U d\mathbf{r} = -dU + \frac{\partial U}{\partial t} dt. \quad (6.18)$$

Так как свойство (6.6) в этом случае не выполняется, то для определения работы, совершенной на конечном пути, нужно знать закон движения точки, т. е. функцию $\mathbf{r}(t)$.

Рассмотрим в качестве примера заряд e в переменном электрическом поле напряженности $\mathcal{E}_0 \cos \omega t$ (см. (2.11)). Направляя ось Ox вдоль вектора \mathcal{E}_0 , согласно (6.7) получим

$$U = -e\mathcal{E}_0 x \cos \omega t + C. \quad (6.19)$$

*) В более подробной записи полная производная в декартовых координатах имеет вид

$$\frac{dU(\mathbf{r})}{dt} = \frac{\partial U}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{dz}{dt}.$$

Следовательно, в этом примере как полная, так и частная производные потенциальной энергии по времени отличны от нуля.

Гироскопической силой F^g называется сила, линейно зависящая от скорости точки и направленная всегда перпендикулярно этой скорости; проекции гироскопической силы на координатные оси являются однородными линейными формами относительно проекций скорости точки с коэффициентами, составляющими антисимметричную матрицу; работа гироскопических сил всегда равна нулю.

Возьмем, например, часть силы Лоренца (2.10), зависящую от напряженности магнитного поля:

$$\mathbf{F} = \frac{e}{c} [\mathbf{v}\mathcal{H}]. \quad (6.20)$$

Проекции этой силы на декартовы оси равны

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{e}{c} (\quad + \mathcal{H}_z \dot{y} - \mathcal{H}_y \dot{z}), \\ F_y &= \frac{e}{c} (- \mathcal{H}_z \dot{x} \quad + \mathcal{H}_x \dot{z}), \\ F_z &= \frac{e}{c} (+ \mathcal{H}_y \dot{x} - \mathcal{H}_x \dot{y} \quad) , \end{aligned}$$

откуда видно, что матрица, составленная из коэффициентов при проекциях скорости, антисимметрична:

$$\left\| \begin{array}{ccc} 0 & + \mathcal{H}_z & - \mathcal{H}_y \\ - \mathcal{H}_z & 0 & + \mathcal{H}_x \\ + \mathcal{H}_y & - \mathcal{H}_x & 0 \end{array} \right\|. \quad (6.21)$$

Также легко убедиться, что мощность силы (6.20) всегда равна нулю:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{e}{c} [\mathbf{v}\mathcal{H}] \mathbf{v} = 0. \quad (6.22)$$

Диссипативной силой F^d называется сила, направленная всегда противоположно скорости тела относительно среды, вызывающей торможение этого тела. Такая сила имеет вид

$$\mathbf{F}^d = -k\mathbf{v}, \quad (6.23)$$

где k — положительная скалярная функция, которая может зависеть от положения и скорости тела. Диссипативная сила задается диагональной матрицей коэффициентов при проекциях скорости на координатные оси

$$\left\| \begin{array}{ccc} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{array} \right\|.$$

Мощность диссипативных сил при перемещениях тела относительно среды, вызывающей торможение тела, отрицательна:

$$\frac{dA}{dt} = -kv^2 < 0. \quad (6.24)$$

Например, сила сопротивления (2.12) является диссипативной силой. При достаточно больших относительных скоростях сила сопротивления пропорциональна квадрату скорости и имеет вид (6.23), где $k = k_1 v$ (k_1 — положительная постоянная). Сила трения скольжения, возникающая при движении тела по поверхности другого твердого тела, прямо пропорциональна R_{\perp} — величине нормальной реакции твердого тела на движущееся тело. Таким образом, в этом случае $k = k_2 \frac{R_{\perp}}{v}$ (k_2 — положительная постоянная, а R_{\perp} может зависеть от положения тела).

Теперь предположим, что на точку действуют потенциальная, гироскопическая и диссипативные силы, сумма которых равна

$$\mathbf{F} = -\nabla U + \mathbf{F}_g + \mathbf{F}^d. \quad (6.25)$$

Мощность силы \mathbf{F} получим, учитывая (6.18) и (6.22):

$$\frac{dA}{dt} = -\dot{U} + \frac{\partial U}{\partial t} + \mathbf{F}^d \mathbf{v}. \quad (6.26)$$

Используя (6.26) и определяя полную механическую энергию E точки как сумму ее кинетической и потенциальной энергий:

$$E = T + U, \quad (6.27)$$

с помощью (6.2) найдем закон изменения полной энергии точки при наличии потенциальных, гироскопических и диссипативных сил:

$$\dot{E} = \frac{\partial U}{\partial t} + \mathbf{F}^d \mathbf{v}. \quad (6.28)$$

Итак, изменение полной энергии точки обусловлено явной зависимостью потенциальных сил от времени, а также наличием диссипативных сил; гироскопические силы не изменяют энергии.

Например, изменение полной энергии заряда в перемещенном электрическом поле (2.11) подчиняется уравнению (см. (6.19) и (6.28))

$$\dot{E} = e \mathcal{E}_0 \omega x \sin \omega t.$$

Если на точку действует потенциальная сила тяжести и диссипативная сила сопротивления, т. е. сила $\mathbf{F} = m\mathbf{g} - k\mathbf{v}$ (см. пример 4.3 на стр. 44), то потенциальная энергия точки равна $U = mgz + C$ (ось Oz направлена против силы тяжести), а закон изменения энергии (6.28) примет вид

$$\dot{E} = -kv^2 \quad (k > 0).$$

Следовательно, полная энергия точки убывает, что, конечно, не означает исчезновения энергии; механическая энергия E убывает, превращаясь в определенное количество теплоты, но эту вторую часть реального процесса уравнение (6.28) не отражает.

В общем случае полная энергия точки может возрастать, убывать или сохранять постоянное значение; в частности, энергия будет сохраняться, если ее прибыль и убыль компенсируют друг друга. Однако возможны случаи, когда процессы поступления энергии в систему и убыли энергии отсутствуют. Действительно, *если среди сил, действующих на точку, нет диссипативных сил, а потенциальные силы стационарны, то полная энергия точки будет сохраняться*, т. е. если $F^d = 0$ и $\frac{\partial U}{\partial t} = 0$, то

$$E = \frac{mv^2}{2} + U(r) = E_0. \quad (6.29)$$

Закон (6.29) сохранения полной энергии точки дает один первый интеграл — интеграл энергии, *который позволяет, не отыскивая решения уравнений движения, определять величину скорости как функцию положения точки*.

Например, в задаче о пространственном осцилляторе потенциальная энергия равна

$$U = \frac{\kappa}{2} r^2 \quad (6.30)$$

(см. пример 4.2). Поскольку U явно от времени не зависит, а диссипативные силы отсутствуют, то полная энергия осциллятора будет сохраняться, т. е.

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{\kappa}{2} r^2 = \frac{mv_0^2}{2} + \frac{\kappa}{2} r_0^2.$$

Отсюда можно определить величину скорости как функцию расстояния от центра силы:

$$v = \left[v_0^2 + \frac{\kappa}{m} (r_0^2 - r^2) \right]^{1/2}.$$

В примере 4.4 рассматривалось движение заряда в постоянном однородном магнитном поле, т. е. движение под действием только гироскопической силы (см. стр. 48). Закон (6.29) в этом случае приводит к интегралу

$$E = T = \frac{mv^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2}, \quad (6.31)$$

из которого следует сохранение абсолютной величины скорости заряда.

При движении заряда в постоянных однородных взаимно перпендикулярных электрическом и магнитном полях на заряд действуют

потенциальная сила $e\mathcal{E}$ и гироскопическая $F_{\mathcal{H}}$ (см. пример 4.4 на стр. 50). Направляя ось Ox вдоль вектора \mathcal{E} , найдем выражение потенциальной энергии

$$U = -e\mathcal{E}x + C$$

и получим интеграл энергии

$$\frac{mv^2}{2} - e\mathcal{E}x = \frac{mv_0^2}{2} - e\mathcal{E}x_0.$$

Так как сила $F_{\mathcal{H}}$, искривляя траекторию, ограничивает движение заряда в направлении оси Ox , то и кинетическая энергия изменяется в определенных пределах.

Пример 6.1. Движение через потенциальный барьер.

Точка массы m движется из полупространства, где потенциальная энергия равна постоянной величине U , в полупространство, где потенциальная энергия равна постоянной $U' \neq U$. Эти полупространства разделены плоскостью. Найти скорость точки после того как она перейдет плоскость раздела (начальная скорость точки известна).

Изменение потенциальной энергии происходит только на плоскости раздела в направлении, перпендикулярном этой плоскости. Поэтому сила, действующая на точку, отлична от нуля только на плоскости и перпендикулярна к ней. В связи с этим координатную плоскость Oxz совместим с плоскостью потенциального барьера, а ось Ox направим перпендикулярно к нему. Так как проекции силы на оси Oy и Oz равны нулю, то из закона сохранения (5.5) следует, что

$$v'_y = v_y, \quad v'_z = v_z$$

(в этом примере «нештрихованные» величины относятся к полупространству, где потенциальная энергия равна U , а «штрихованные» — к полупространству, где потенциальная энергия равна U' , причем все «нештрихованные» величины считаются заданными). Из закона сохранения энергии (6.29) вытекает, что

$$\frac{m(v')^2}{2} + U' = \frac{mv^2}{2} + U.$$

Полученные соотношения дают возможность найти направляющие косинусы и абсолютную величину скорости после прохождения плоскости потенциального барьера как функции тех же величин до прохождения барьера:

$$\begin{aligned} \cos \alpha' &= \frac{v}{v'} \left[\cos^2 \alpha + \frac{2}{mv^2} (U - U') \right]^{1/2}, \\ \cos \beta' &= \frac{v}{v'} \cos \beta, \quad \cos \gamma' = \frac{v}{v'} \cos \gamma, \end{aligned}$$

где

$$v' = v \left[1 + \frac{2}{mv^2} (U - U') \right]^{1/2};$$

α , β , γ и α' , β' , γ' — углы между координатными осями и скоростью точки до и после прохождения потенциального барьера соответственно. Заметим, что приведенное решение справедливо, если

$$\cos^2 \alpha > \frac{2}{mv^2} (U' - U);$$

в противном случае имеет место отражение частицы от потенциального барьера.

Пример 6.2. Заряд в неоднородном магнитном поле.

В постоянном аксиально-симметричном магнитном поле пролетает частица с зарядом e , причем ее траектория, расположенная в плоскости, перпендикулярной оси симметрии поля, известна. Напряженность магнитного поля \mathcal{H} задана как функция расстояния ρ от оси симметрии и направлена вдоль этой оси. Определить модуль импульса частицы.

Совмещая ось Oz с осью симметрии поля (рис. 6.1), получим следующие выражения для проекций силы Лоренца:

$$F_x = \frac{e}{c} y \mathcal{H}'(\rho),$$

$$F_y = -\frac{e}{c} x \mathcal{H}'(\rho), \quad F_z = 0.$$

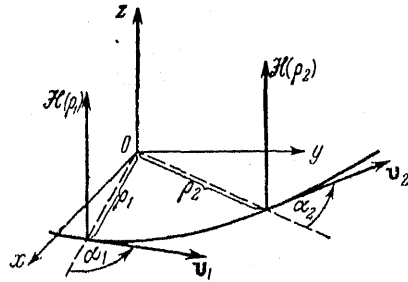


Рис. 6.1.

Отсюда видно, что z -я составляющая импульса сохраняется, т. е., согласно условию, остается равной нулю. Совмещая плоскость Oxy с плоскостью движения заряда, т. е. полагая $z=0$ и $\dot{z}=0$, найдем, что $M_x = M_y = 0$ и $L_x = L_y = 0$, в то время как M_z и L_z отличны от нуля. Проектируя обе части уравнения (5.7) на ось Oz и переходя к цилиндрическим координатам, получим

$$\frac{d}{dt} (m\rho^2 \dot{\phi}) = L_z,$$

где

$$L_z = -\frac{e}{c} \mathcal{H}'(\rho) (x\dot{x} + y\dot{y}) = -\frac{e}{c} \mathcal{H}'(\rho) \rho \dot{\rho}.$$

Как видно, L_z является интегрируемым выражением, поэтому уравнение для проекции момента на ось Oz

$$\frac{d}{dt} (m\rho^2 \dot{\phi}) = -\frac{e}{c} \mathcal{H}'(\rho) \rho \frac{d\rho}{dt}$$

приводит к первому интегралу. Выражая далее M_x в виде

$$m r^2 \dot{\phi} = m v r \sin \alpha = p r \sin \alpha,$$

где α — угол между \mathbf{p} и \mathbf{v} (см. (1.17)), и учитывая сохранение величины импульса заряда (см. (6.31)), запишем закон изменения M_x в виде

$$p d(r \sin \alpha) = -\frac{e}{c} \mathcal{H}(\rho) \rho d\rho.$$

Поскольку траектория предполагается известной, то в любых двух положениях 1 и 2 заряда можно определить ρ_1 , α_1 и ρ_2 , α_2 , а интегрируя последнее уравнение от положения 1 до положения 2, найти величину импульса

$$p = \frac{e}{c} \frac{\int_{\rho_1}^{\rho_2} \mathcal{H}(\rho) \rho d\rho}{\rho_1 \sin \alpha_1 - \rho_2 \sin \alpha_2}.$$

§ 7. Движение в центрально-симметричном поле

Рассмотрим движение материальной точки массы m под действием центральной силы, произвольно зависящей только от расстояния между точкой и центром силы. Такая сила потенциальна (см. (6.14) и (6.15)) и стационарна (см. стр. 64). Помещая начало системы отсчета в центр силы и используя законы сохранения момента импульса и энергии (см. (5.11) и (6.29)), получим четыре первых интеграла движения

$$m[\mathbf{r}\mathbf{v}] = \mathbf{M}_0, \quad \frac{mv^2}{2} + U(r) = E_0, \quad (7.1)$$

из которых три независимы (здесь и далее потенциальная энергия $U(r)$ считается заданной). Наряду с первыми интегралами в данной задаче можно найти три вторых независимых интеграла. Один из таких интегралов представляет собой уравнение (5.13) плоскости, в которой происходит движение точки. Два других интеграла вытекают из (7.1). Действительно, направляя ось Oz по вектору \mathbf{M}_0 и вводя на плоскости Oxy полярные координаты, получим

$$m r^2 \dot{\phi} = M_0, \quad \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) + U(r) = E_0. \quad (7.2)$$

Исключая $\dot{\phi}$ из интеграла энергии с помощью интеграла площадей, придем к уравнению, допускающему разделение переменных r и t :

$$\dot{r}^2 = \frac{2}{m} [E_0 - U_e(r)], \quad (7.3)$$

где функция $U_{\text{eff}}(r)$, часто называемая «эффективной» потенциальной энергией, равна

$$U_{\text{eff}} = U(r) + \frac{M_0^2}{2mr^2} \quad (7.4)$$

(отметим, что уравнение (7.3) эквивалентно уравнению для прямолинейного движения точки с потенциальной энергией, равной U_{eff}). Разделяя переменные в уравнении (7.3), найдем еще один второй интеграл

$$t = \pm \int \frac{dr}{\left\{ \frac{2}{m} [E_0 - U_{\text{eff}}] \right\}^{1/2}} + \text{const.} \quad (7.5)$$

Из интеграла (7.5) в принципе можно определить функцию $r(t)$ и подставить ее в интеграл момента. Тогда получим

$$\phi = \frac{M_0}{mr^2(t)}. \quad (7.6)$$

Отсюда найдем последний второй интеграл

$$\varphi = \frac{M_0}{m} \int \frac{dt}{r^2(t)} + \text{const.} \quad (7.7)$$

Интеграл момента позволяет найти уравнение траектории, если с его помощью в интеграле энергии исключить dt , а затем вычислить квадратуру:

$$\varphi = \pm \int \frac{\frac{M_0}{mr^2} dr}{\left\{ \frac{2}{m} [E_0 - U_{\text{eff}}] \right\}^{1/2}} + \text{const.} \quad (7.8)$$

Выбор знака в интегралах (7.5) и (7.8) диктуется начальными условиями; например, знак перед интегралом (7.5) определяется знаком производной \dot{r} , взятой в начальный момент времени.

Итак, три вторых интеграла (5.13), (7.5) и (7.7) определяют общее решение поставленной задачи (один из интегралов (7.5) или (7.7) может быть заменен интегралом (7.8)). Это решение содержит шесть постоянных: E_0 , M_{x_0} , M_{y_0} , M_{z_0} , r_0 , φ_0 . Выбор постоянных не является единственным: можно, например, ввести \dot{r}_0 , $\dot{\phi}_0$, r_0 , φ_0 и два угла, определяющие положение плоскости движения. Однако выбор постоянных интегрирования, содержащих энергию и момент, имеет определенное преимущество, в частности, при переходе к соответствующим квантовым задачам.

Замечательным является то, что полученное общее решение справедливо для любой центральной силы, зависящей только от расстояния до центра силы. Движение точки в поле таких сил

обладает общими свойствами, а именно: движение происходит в неподвижной плоскости, проходящей через центр силы; радиус-вектор точки описывает равные площади за равные промежутки времени; угол φ изменяется со временем всегда монотонно; траектория точки симметрична относительно так называемых апсид, т. е. прямых, проходящих через центр силы и точки траектории, в которых величина радиуса-вектора принимает экстремальные значения (эти точки называются точками поворота). Последнее утверждение означает, что материальная точка, находящаяся в начальный момент времени в точке поворота и обладающая в одном случае начальной скоростью \mathbf{v}_0 , а в другом случае $-\mathbf{v}_0$, будет двигаться по симметричным кривым. Действительно, в точках поворота \dot{r} обращается в нуль, а в окрестности этих точек изменяет знак; вместе с \dot{r} изменяет знак выражение

$$\left\{ \frac{2}{m} [E_0 - U_{\text{eff}}] \right\}^{1/2},$$

которое определяет знак подынтегральных функций в (7.5) и (7.8). Следовательно, отсчитывая φ от некоторой апсиды, мы увидим, что участки траектории, находящиеся по разные стороны от апсиды, будут отличаться знаком φ (при одинаковых значениях r). Это свойство симметрии позволяет построить всю траекторию, зная лишь участок траектории между двумя апсидами. Таковы общие черты движения точки в центрально-симметричном поле.

Если функция $U(r)$ задана, то, вычисляя интегралы (7.5) и (7.7) (или (7.8)), можно получить общее решение для соответствующего вида взаимодействия. Однако до нахождения общего решения полезно провести его качественный анализ. Построив график $U_{\text{eff}}(r)$, можно определить область изменения координаты r движущейся точки. Действительно, поскольку в классической механике r , v и t вещественны, то \dot{r}^2 должна быть положительно определенной величиной. Таким образом, из уравнения (7.3) вытекает неравенство

$$E_0 \geq U_{\text{eff}}(r), \quad (7.9)$$

определяющее область изменения r , и уравнение

$$E_0 = U_{\text{eff}}(r), \quad (7.10)$$

определяющее границы указанной области. Рассмотрим простейший пример, когда точка движется по инерции относительно системы координат с началом, не лежащим на траектории точки. В этом случае

$$U_{\text{eff}} = \frac{M_0^2}{2mr^2} \quad (M_0 \neq 0, E_0 = T_0),$$

а область изменения r определяется неравенством

$$r \geq r_{\text{min}} = \frac{M_0}{\sqrt{2mT_0}}.$$

Траекторией точки может быть любая прямая, касающаяся окружности радиуса $r = r_{\min}$ (см. рис. 7.1, где плоскость Oxy является плоскостью движения точки).

Если точка движется в потенциальном поле (6.30), то

$$U_{\text{eff}} = \frac{\alpha r^2}{2} + \frac{M_0^2}{2mr^2}.$$

В этом случае уравнение (7.10) дает две точки поворота, определяемые равенствами

$$r_{1,2}^3 = \frac{1}{\alpha} \left[E_0 \mp \left(E_0^2 - \frac{\alpha}{m} M_0^2 \right)^{1/2} \right],$$

а неравенство (7.9) определяет область $r_1 \leq r \leq r_2$

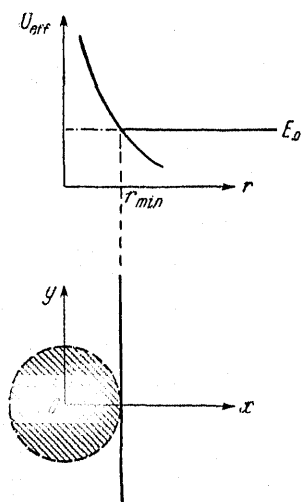


Рис. 7.1.

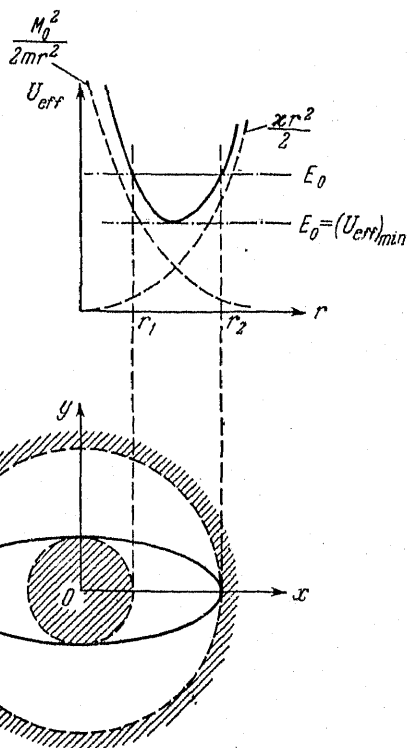


Рис. 7.2.

(рис. 7.2). Если $E_0 = (U_{\text{eff}})_{\min} = (\alpha/m)^{1/2} M_0$, то точка будет двигаться по окружности радиуса $r = r_1 = r_2 = (E_0/\alpha)^{1/2}$. Траектория точки в общем случае, когда $E_0 > (U_{\text{eff}})_{\min}$, находится с помощью интеграла (7.8). Ею является, как показано в примере 4.2, эллипс, центр которого находится в центре силы и который дважды касается окружностей с радиусами r_1 и r_2 соответственно.

Анализ графика $U_{оп}$ позволяет найти условие падения частицы на центр силового поля. Пусть, например,

$$U = -\frac{a}{r^n} \quad (a > 0)$$

(такая степенная функция используется при рассмотрении межмолекулярного взаимодействия). Из графика $U_{оп}$ (рис. 7.8) видно: если $(U_{оп})_{max} < E_0$ то движение происходит в неограниченной области и, в частности, возможно падение точки на центр. Если $0 < E_0 \leq (U_{оп})_{max}$, то движение происходит либо в области $r \geq r_0$, либо в области

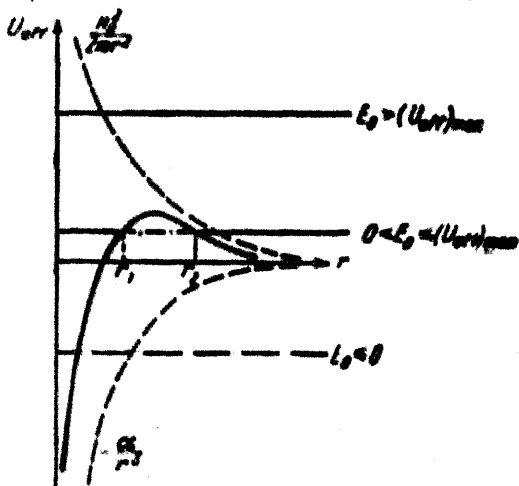


Рис. 7.8.

$r < r_1$, в которой точка достигнет центра; при $E_0 \leq 0$ также имеет место падение на центр.

В общем случае условие падения на центр можно получить с помощью неравенства (7.9), записанного в виде

$$r^n E_0 \geq r^n U(r) + \frac{M_1^2}{2m}.$$

Устремляя здесь r к нулю, найдем условие падения на центр силового поля

$$0 \geq r^n U(r)|_{r \rightarrow 0} + \frac{M_1^2}{2m}. \quad (7.11)$$

Для степенного потенциала $U(r) = -a/r^n$ это условие выполняется при

$$\begin{aligned} n = 2, & \text{ если } a \geq \frac{M_1^2}{2m}, \\ n > 2, & \text{ если } a > 0; \end{aligned} \quad (7.12)$$

иначе говоря, потенциальная энергия должна достаточно быстро стремиться к $-\infty$ при $r \rightarrow 0$.

В заключение приведем очевидное условие замкнутости траектории (см. (7.8)):

$$\Delta\varphi = 2 \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{\frac{M_0}{mr^2} dr}{\left\{ \frac{2}{m} [E_0 - U_{\text{eff}}] \right\}^{1/2}} = 2\pi \frac{k}{n}, \quad (7.13)$$

где k и n — целые числа, а $r_{\min} > 0$ и $r_{\max} < \infty$ — значения координаты r в точках поворота. Соотношение (7.13) при любых начальных условиях выполняется только для двух полей:

$$U \sim \frac{1}{r}, \quad U \sim r^2.$$

§ 8. Движение под действием силы, обратно пропорциональной квадрату расстояния до центра силы. Законы Кеплера

Исследуем движение точки в центрально-симметричном поле вида

$$U = -\frac{\alpha}{r}, \quad (8.1)$$

где $\alpha = \gamma m_1 m_2$ (для гравитационного поля) или $\alpha = -e_1 e_2$ (для электростатического поля) (см. (2.15), (2.9) и (6.16)). Анализируя график U_{eff} (рис. 8.1) и принимая во внимание неравенство (7.9), убедимся, что в случае притяжения ($\alpha > 0$) и положительности полной энергии ($E_0 > 0$) $r \geq r_{\min}$; в случае $\alpha > 0$ и $E_0 = 0$ движение точки также будет происходить в неограниченной области (т. е. будет инфинитным); в случае $\alpha > 0$ и отрицательной энергии ($E_0 < 0$) движение происходит в ограниченной области $r_{\min} \leq r \leq r_{\max}$ (т. е. движение финитно); если $\alpha > 0$ и $E_0 = (U_{\text{eff}})_{\min}$, то точка движется по окружности; наконец, в случае отталкивания ($\alpha < 0$) всегда $r \geq r_{\min}$, а полная энергия положительна ($E_0 > 0$).

Во всех указанных случаях траектория, или, как часто говорят, орбита точки, определяется одной формулой. Действительно, подставляя (8.1) в (7.8), получим

$$\mp (\varphi - c) = - \int \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{\left[\frac{2mE_0}{M_0^2} \pm \frac{2m|\alpha|}{M_0^2} \left(\frac{1}{r}\right) - \left(\frac{1}{r}\right)^2 \right]^{1/2}}$$

(здесь знак « \mp » под радикалом соответствует случаю $\alpha > 0$, а знак

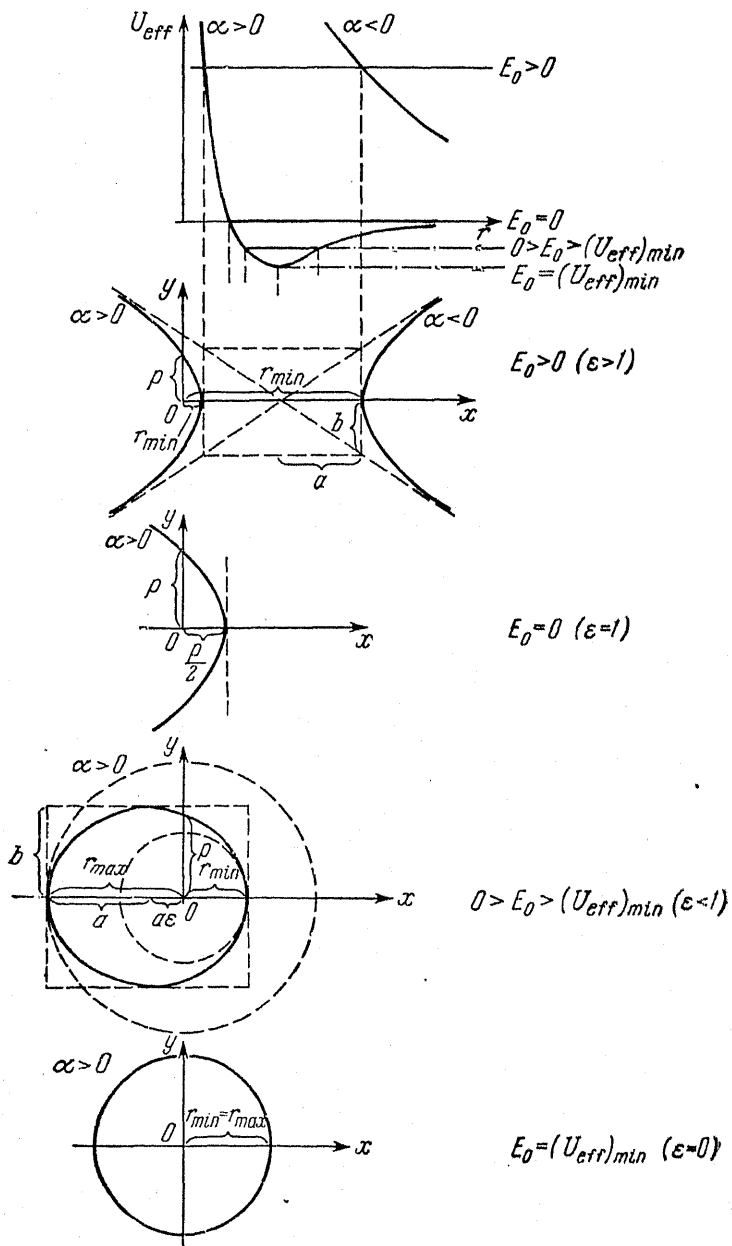


Рис. 8.1.

«—» случаю $\alpha < 0$). Вводя вместо постоянных E_0 и M_0 положительные (по определению) постоянные

$$p = \frac{M_0^2}{m|\alpha|}, \quad \varepsilon = \left[1 + \frac{2E_0 M_0^2}{m\alpha^2} \right]^{1/2}, \quad (8.2)$$

запишем последний интеграл в виде

$$\mp (\varphi - c) = - \int^r \frac{d\left(\frac{1}{r} \mp \frac{1}{p}\right)}{\left[\frac{\varepsilon^2}{p^2} - \left(\frac{1}{r} \mp \frac{1}{p}\right)^2\right]^{1/2}}.$$

Затем в результате интегрирования получим

$$\mp (\varphi - c) = \arccos \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{p}{r} \mp 1 \right).$$

Опуская знак «—» перед углом $(\varphi - c)$ ввиду четности косинуса, найдем *уравнение орбиты* в виде

$$r = \frac{p}{\pm 1 + \varepsilon \cos(\varphi - c)}, \quad (8.3)$$

где знак «+» соответствует случаю притяжения ($\alpha > 0$), а знак «—» случаю отталкивания ($\alpha < 0$).

Уравнение (8.3) является уравнением кривой второго порядка, в фокусе которой находится начало координат; постоянная p называется параметром орбиты, а постоянная ε — ее эксцентриситетом. Значение c зависит от выбора направления полярной оси в плоскости орбиты. Если полярную ось направить на ближайшую к центру силы точку траектории (см. выбор осей на рис. 8.1), то $c = 0$.

Из аналитической геометрии известно, что траектории вида (8.3) представляют собой гиперболу (при $\varepsilon > 1$), параболу (при $\varepsilon = 1$), эллипс ($\varepsilon < 1$) или окружность ($\varepsilon = 0$). Принимая во внимание (8.2), получим, что в заданном потенциальном поле $U = -\alpha/r$ в случае притяжения ($\alpha > 0$) траекторией точки будет

$$\begin{aligned} & \text{гипербола, если } E_0 > 0, \\ & \text{парабола, если } E_0 = 0, \\ & \text{эллипс, если } 0 > E_0 > (U_{\text{eff}})_{\text{min}}, \\ & \text{окружность, если } E_0 = (U_{\text{eff}})_{\text{min}}; \end{aligned} \quad (8.4)$$

в случае отталкивания ($\alpha < 0$) точка может двигаться только по гиперболе ($E_0 > 0$).

Рассмотрим подробнее движение по эллиптической орбите, когда $\alpha > 0$, а $0 > E_0 > (U_{\text{eff}})_{\text{min}}$, т. е. $\varepsilon < 1$ (рис. (8.1)). Из уравнения (8.3) следует, что

$$r_{\text{min}} = \frac{p}{1 + \varepsilon}, \quad r_{\text{max}} = \frac{p}{1 - \varepsilon}. \quad (8.5)$$

С помощью известных из аналитической геометрии формул для полуосей эллипса

$$a = \frac{\rho}{1 - \varepsilon^2}, \quad b = \frac{\rho}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \quad (8.6)$$

и формул (8.2) a и b можно выразить через постоянные E_0 и M_0 :

$$a = \frac{\alpha}{2|E_0|}, \quad b = \frac{M_0}{\sqrt{2m|E_0|}}. \quad (8.7)$$

Отсюда видно, что *большая полуось эллипса зависит от полной энергии и не зависит от значения момента.*

В частном случае круговой орбиты ($E_0 = (U_{\text{eff}})_{\text{min}}, \varepsilon = 0$) имеем

$$r = 0, \quad r = r_0 = a = b. \quad (8.8)$$

Очевидно, что при движении по окружности постоянна не только полная энергия, но и потенциальная и кинетическая энергия точки.

Закон движения точки по эллиптической траектории получим из интеграла (7.5). Учитывая, что $E_0 = -|E_0|$ и $\alpha > 0$, а также используя формулы (8.7), запишем (7.5) в виде

$$\mp(t - c') = \sqrt{\frac{m}{2|E_0|}} \int \frac{r dr}{(-r^2 + 2ar - b^2)^{1/2}}.$$

С помощью (8.7) убедимся, что $b^2 = a^2(1 - \varepsilon^2)$, и сведем интеграл к следующему:

$$\mp(t - c') = \sqrt{\frac{ma}{\alpha}} \int \frac{r dr}{[a^2\varepsilon^2 - (r - a)^2]^{1/2}}.$$

Сделав подстановку

$$r = a(1 - \varepsilon \cos \xi),$$

найдем

$$\mp(t - c') = \sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}} (\xi - \varepsilon \sin \xi).$$

Выбирая параметр ξ так, чтобы с его увеличением время возрастало и принимая начальные условия

$$r_0 = a(1 - \varepsilon) = r_{\text{min}}, \quad t_0 = 0 \quad \text{при} \quad \xi = 0, \quad (8.9)$$

получим закон движения точки по эллиптической орбите в параметрическом виде

$$r = a(1 - \varepsilon \cos \xi), \quad t = \frac{T}{2\pi} (\xi - \varepsilon \sin \xi), \quad (8.10)$$

где $T = 2\pi \sqrt{ma^3/\alpha}$ — период полного оборота точки по эллипсу. Значение этого периода легко получить с помощью интеграла площадей, записав его в виде (см. (5.8))

$$2m\sigma_z = 2m \frac{dS}{dt} = M_0, \quad (8.11)$$

где dS — площадь, очерчиваемая радиусом-вектором точки за время dt . Интегрируя это выражение по полному периоду и учитывая, что площадь эллипса равна πab , найдем

$$2\pi ab = M_0 T.$$

Отсюда, используя (8.7), получим

$$T^2 \approx \frac{\pi^2}{2} \frac{ma^2}{|E_0|^3} = 4\pi^2 \frac{ma^3}{a}. \quad (8.12)$$

Таким образом, период обращения по эллипсу зависит только от полной энергии (или от величины большой полуоси) и не зависит от момента (и от величины малой полуоси).

Уравнение орбиты (8.3), закон площадей (8.11) и соотношение периода и большой полуоси (8.12) являются математическим выражением трех законов Кеплера, установленных им эмпирически примерно в 1609—1619 гг. в результате обработки наблюдений над движением планет. В этих законах утверждалось, что каждая планета движется по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце (первый закон); секторная скорость каждой планеты относительно Солнца постоянна (второй закон); отношение квадратов периодов обращения планет к кубам больших полуосей их орбит постоянно и для всех планет одинаково (третий закон). Заметим, что применительно к движению планет первый и третий законы Кеплера верны приближенно (см. § 12, стр. 108—109). Тем не менее их открытие имело очень большое значение. В частности, на их основе Ньютоном был установлен закон всемирного тяготения: допуская, что движение тел в поле тяготения Земли также подчинено законам Кеплера, можно было на основании первого и второго законов утверждать, что величина ускорения тел вблизи поверхности Земли равна (см. пример 1.3)

$$g = \frac{C}{R^2},$$

где R — радиус Земли. Кроме того, из третьего закона Кеплера (см. (8.12)) следовало, что квадрат периода обращения Луны вокруг Земли прямо пропорционален кубу радиуса a лунной (приблизительно круговой) орбиты, т. е.

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{C} a^3.$$

Допуская, что постоянные C в последних двух выражениях имеют одинаковые значения, можно было найти следующую формулу для ускорения g :

$$g = \frac{4\pi^2}{R^2} \frac{a^3}{T^2}. \quad (8.13)$$

Таким образом, ускорение тел вблизи поверхности Земли можно было вычислить как по данным наблюдений за Луной, так и по данным эксперимента, проведенного около земной поверхности. Совпадение этих двух результатов являлось одним из доказательств справедливости закона всемирного тяготения (2.15).

На основе закона всемирного тяготения (2.15) и уравнения движения (3.4) была создана количественная теория движения небесных тел относительно гелиоцентрической системы отсчета. Совпадение наблюдений и выводов этой теории доказало инерциальность гелиоцентрической системы Коперника — Бруно и ее преимущество над геоцентрической системой Птолемея, что явилось крупным шагом в победе материалистического воззрения на вопросы мироздания.

В случае $\alpha > 0$ и $E_0 = 0$ ($\epsilon = 1$) точка движется по параболе (см. рис. 8.1). Минимальное расстояние, на котором она проходит вблизи центра силы, равно

$$r_{\min} = \frac{p}{2}. \quad (8.14)$$

В этом положении скорость точки максимальна, а по мере удаления точки от центра силы ее скорость будет стремиться к нулю, поскольку при $r \rightarrow \infty$ потенциальная энергия становится исчезающе малой и по условию $E_0 = T + U = 0$.

Закон движения точки по параболе легко получить в параметрическом виде из (7.5):

$$\begin{aligned} r &= \frac{p}{2} (1 + \xi^2), \\ t &= \sqrt{\frac{mp^3}{\alpha}} \frac{\xi}{2} \left(1 + \frac{\xi^2}{3} \right) \end{aligned} \quad (8.15)$$

(здесь начальное условие выбрано аналогично (8.9)).

В случае движения по гиперболе под воздействием притягивающего центра имеем $\alpha > 0$, $E_0 > 0$ ($\epsilon > 1$). Орбитой при этом будет левая ветвь гиперболы (см. рис. 8.1) с минимальным расстоянием до центра силы, равным

$$r_{\min} = \frac{p}{1 + \epsilon}. \quad (8.16)$$

Учитывая, что полуоси гиперболы связаны с параметром p и эксцентриситетом ϵ гиперболы соотношениями

$$a = \frac{p}{\epsilon^2 - 1}, \quad b = \frac{p}{\sqrt{\epsilon^2 - 1}}, \quad (8.17)$$

с помощью (8.2) находим

$$a = \frac{\alpha}{2E_0}, \quad b = \frac{M_0}{\sqrt{2mE_0}}. \quad (8.18)$$

Закон движения точки по гиперболе в случае $\alpha > 0$ получим (аналогично (8.10)) в виде

$$r = a (\epsilon \operatorname{ch} \xi - 1), \quad t = \sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}} (\epsilon \operatorname{sh} \xi - \xi) \quad (8.19)$$

(здесь начальные условия также аналогичны (8.9)).

Наконец, приведем формулы для случая движения точки по гиперболе под действием отталкивающего центра ($\alpha < 0$):

$$r_{\min} = \frac{p}{\varepsilon - 1}, \quad a = \frac{|\alpha|}{2E_0}, \quad b = \frac{M_0}{\sqrt{2mE_0}},$$

$$r = a(\varepsilon \operatorname{ch} \xi + 1), \quad t = \sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}}(\varepsilon \operatorname{sh} \xi + \xi), \quad (8.20)$$

орбитой при этом будет правая ветвь гиперболы (см. рис. 8.1).

Пример 8.1. Изменение орбиты космического корабля.

Пусть в момент прекращения работы двигателя космический корабль массы m находился на расстоянии r_0 от центра Земли и имел скорость v_0 , направленную под углом γ_0 к радиусу-вектору корабля r_0 (рис. 8.2). Определить элементы орбиты корабля в плоскости его движения, пренебрегая сопротивлением атмосферы, если напряженность поля тяготения на поверхности Земли равна g , а радиус Земли равен R . Насколько нужно изменить кинетическую энергию корабля, чтобы он перешел на орбиту, касающуюся поверхности Земли?

Учитывая лишь силу притяжения корабля Землей и пренебрегая воздействием всех прочих тел, мы можем воспользоваться общим решением задачи о движении точки в центральном поле.

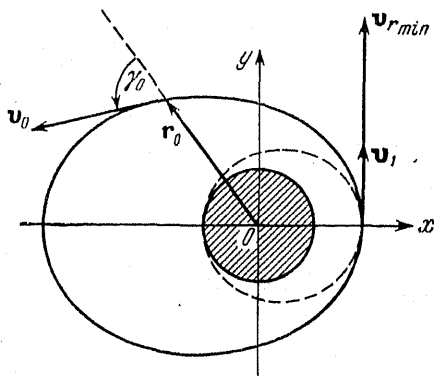


Рис. 8.2.

Поместим начало системы координат в центр Земли, так как он является центром силы притяжения. Плоскость Oxy совместим с плоскостью орбиты, сохраняющей свою ориентацию относительно гелиоцентрической системы отсчета, а ось Ox направим на ближайшую к центру Земли точку орбиты — перигей. Выбранную систему можно считать инерциальной для достаточно больших интервалов времени. Выразим постоянные α , E_0 и M_0 , входящие в общее решение задачи о движении точки в центральном поле, через постоянные, заданные в условии примера. Полагая, в частности, в (2.15), что $r_{21} = R$, а массы m_1 и m_2 соответственно равны массе корабля m и массе Земли m_3 , найдем

$$\alpha = \gamma m m_3 = mgR^2.$$

Тогда потенциальная энергия корабля-спутника (см. (8.1)) принимает вид

$$U = -\frac{mgR^2}{r}. \quad (1)$$

Полная энергия и момент импульса спутника в начальный момент времени равны

$$E_0 = \frac{m}{2} \left(v_0^2 - \frac{2gR^2}{r_0} \right), \quad M_0 = mr_0 v_0 \sin \gamma_0. \quad (2)$$

С помощью этих выражений на основе (8.4) можно убедиться, что траекторией рассматриваемого тела будет

$$\begin{aligned} & \text{гипербола, если } v_0^2 > v_2^2(R/r_0), \\ & \text{парабола, если } v_0^2 = v_2^2(R/r_0), \\ & \text{эллипс, если } v_0^2 < v_2^2(R/r_0), \\ & \text{окружность, если } v_0^2 = v_1^2(R/r_0) \text{ и } \gamma_0 = \pi/2, \end{aligned} \quad (3)$$

где $v_1 = \sqrt{gR}$ — первая космическая скорость, а $v_2 = \sqrt{2gR}$ — вторая космическая скорость.

Параметр и эксцентриситет орбиты, выраженные через начальные условия, находим, используя (8.2) и формулы (3) настоящего примера:

$$p = \frac{r_0^3}{gR^2} v_0^2 \sin^2 \gamma_0, \quad \epsilon = \left[1 + \left(v_0^2 - \frac{2gR^2}{r_0} \right) \frac{r_0^3 v_0^2 \sin^2 \gamma_0}{g^3 R^4} \right]^{1/2}. \quad (4)$$

С помощью (8.6) и (8.17) получим выражения полуосей, справедливые как в случае эллипса, так и в случае гиперболы:

$$a = \frac{gR^2}{\left| \frac{2gR^2}{r_0} - v_0^2 \right|}, \quad b = \frac{r_0 v_0 \sin \gamma_0}{\left| \frac{2gR^2}{r_0} - v_0^2 \right|^{1/2}}. \quad (5)$$

Наконец, согласно (8.12), период полного оборота спутника по эллипсу равняется

$$T = \frac{2\pi gR^2}{\left(\frac{2gR^2}{r_0} - v_0^2 \right)^{3/2}}. \quad (6)$$

Если орбита спутника известна, то его положение в любой момент времени определяется законом (8.10). Величину скорости как функцию r легко найти из интеграла энергии

$$v^2 = v_0^2 + 2gR^2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right). \quad (7)$$

Направление же скорости можно определить, отыскивая с помощью интегралов момента и энергии величины \dot{r} и $r\dot{\phi}$ как функции r :

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \left[v_0^2 + 2gR^2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) - \frac{r_0^2 v_0^2 \sin^2 \gamma_0}{r^2} \right]^{1/2}, \\ r\dot{\phi} &= \frac{r_0 v_0 \sin \gamma_0}{r}, \end{aligned} \quad (8)$$

поскольку отношение этих функций дает $\operatorname{tg} \gamma_0$ как функцию r .

Теперь найдем изменение кинетической энергии, при котором космический корабль перейдет на орбиту приземления, отмеченную на рис. 8.2 штриховой линией. Пусть изменение кинетической энергии происходит в перигее в результате достаточно кратковременной работы двигателя, а изменением массы корабля можно пренебречь. Так как в перигее радиальная составляющая скорости корабля равна нулю, а расстояние до центра силы минимально, то из формулы (8) найдем

$$v|_{r_{\min}} = r\dot{\phi}|_{r_{\min}} = \frac{r_0 v_0 \sin \gamma_0}{r_{\min}}. \quad (9)$$

Эту скорость нужно изменить так, чтобы корабль стал двигаться по эллипсу, касающемуся поверхности Земли. Большая полуось a_1 новой орбиты при этом будет равна

$$a_1 = \frac{r_{\min} + R}{2}. \quad (10)$$

Учитывая, что a_1 определяет полную энергию E_1

$$|E_1| = \frac{mgR^2}{r_{\min} + R}, \quad (11)$$

которой корабль должен обладать при движении по заданной орбите приземления (см. первое из соотношений (8.7)), и пользуясь сохранением полной энергии корабля, движущегося по новой орбите, получаем значение кинетической энергии корабля на орбите приземления в точке $r = r_{\min}$

$$\frac{mv_1^2}{2} = mgR^2 \left(\frac{1}{r_{\min}} - \frac{1}{r_{\min} + R} \right). \quad (12)$$

Наконец, из формул (9) и (12) находим требуемое изменение кинетической энергии

$$\Delta T = \frac{m}{2} \left\{ \frac{r_0^2}{r_{\min}^2} v_0^2 \sin^2 \gamma_0 - 2gR^2 \left(\frac{1}{r_{\min}} - \frac{1}{r_{\min} + R} \right) \right\}, \quad (13)$$

где $r_{\min} = \frac{p}{1 + \varepsilon}$, а p и ε определены формулами (4) настоящего примера.

Пример 8.2. Движение по баллистической траектории.

Пусть достаточно малое тело массы m запускается с поверхности Земли со скоростью $v_0 < v_2$ ($v_2 = \sqrt{2gR}$). Пренебрегая сопротивлением атмосферы, определить максимальную высоту, дальность и время полета тела (под дальностью будем понимать длину дуги большого круга, которая по поверхности Земли соединяет точки вылета и падения — см. рис. 8.3).

Этот пример является частным случаем примера 8.1, поэтому выбор системы координат и предыдущие результаты остаются в силе. В частности, в рассматриваемом примере тело будет двигаться по отрезку эллиптической орбиты, пересекающей поверхность Земли в точках вылета и падения.

Максимальная высота подъема тела над поверхностью Земли равна

$$h_{\max} = r_{\max} - R, \quad (1)$$

где r_{\max} определяется одной из формул (8.5), а значения параметра и эксцентриситета орбиты находятся с помощью формулы (4) примера 8.1:

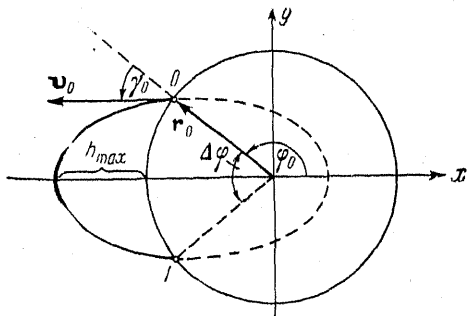


Рис. 8.3.

$$p = \frac{v_0^2}{g} \sin^2 \gamma_0,$$

$\varepsilon =$

$$= \left[1 + (v_0^2 - 2gR) \frac{v_0^2}{g^2 R^2} \sin^2 \gamma_0 \right]^{1/2}. \quad (2)$$

Используя эти соотношения, получим, что

$$h_{\max} = R \frac{v_0^2 - gR(1 - \varepsilon)}{2gR - v_0^2}. \quad (3)$$

Угол φ_0 между осью Ox и направлением на точку вылета находится из уравнения орбиты (8.3), в котором r полагается равным R :

$$\varphi_0 = \arccos \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{p}{R} - 1 \right). \quad (4)$$

Зная φ_0 , получим угол между направлениями на точки вылета и падения

$$\Delta\varphi = 2(\pi - \varphi_0),$$

с помощью которого определим дальность полета

$$l = R\Delta\varphi = 2\pi R \left[1 - \frac{1}{\pi} \arccos \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{p}{R} - 1 \right) \right]. \quad (5)$$

Время полета получим, используя решение (8.10). Учитывая, что в этом решении приняты начальные условия (8.9), момент t_0 начала движения тела с поверхности Земли и соответствующее ему значение параметра ξ_0 определим условно:

$$R = a(1 - \varepsilon \cos \xi_0), \quad t_0 = \frac{T}{2\pi} (\xi_0 - \varepsilon \sin \xi_0), \quad (6)$$

где $T = \frac{2\pi gR^2}{(2gR - v_0^2)^{3/2}}$ (см. формулу (6) примера 8.1). Момент прохождения апогея, т. е. наиболее удаленной от центра Земли точки эллиптической орбиты, будет равен $(T/2) - t_0$. Учитывая, что время полета точки от места запуска до апогея равно времени полета от апогея до места падения, для полного времени полета находим

$$\Delta t = 2 \left(\frac{T}{2} - t_0 \right) = T \left[1 - \frac{1}{\pi} (\xi_0 - \varepsilon \sin \xi_0) \right], \quad (7)$$

где

$$\xi_0 = \arccos \frac{1}{\varepsilon} \left(1 - \frac{R}{a} \right), \quad a = \frac{gR^2}{2gR - v_0^2}$$

(см. формулу (5) примера 8.1).

§ 9. Движение центра масс; законы изменения и сохранения импульса системы.

Как будет ясно из дальнейшего, закон изменения импульса механической системы тесно связан с понятием о центре масс. Центром масс или центром инерции *механической системы* называется воображаемая точка, которая как бы обладает массой, равной массе всей системы, и положение которой определяется радиусом-вектором

$$\mathbf{r}_m = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i}{m}, \quad (9.1)$$

где m_i и \mathbf{r}_i — масса и радиус-вектор i -й точки системы, $m = \sum_{i=1}^N m_i$ — масса всей системы, а N — число материальных точек системы. Скорость центра масс \mathbf{v}_m можно получить, продифференцировав левую и правую части (9.1) по времени:

$$\mathbf{v}_m = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i}{m}. \quad (9.2)$$

Аналогично найдем ускорение \mathbf{w}_m центра масс:

$$\mathbf{w}_m = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{w}_i}{m}. \quad (9.3)$$

Из определений (9.1), (9.2) и (9.3) вытекают некоторые свойства центра масс, его скорости и ускорения. Например, скорость и ускорение, приобретаемые центром масс в результате движения *i*-й точки (см. рис. 9.1, на котором изображена система двух точек), будут

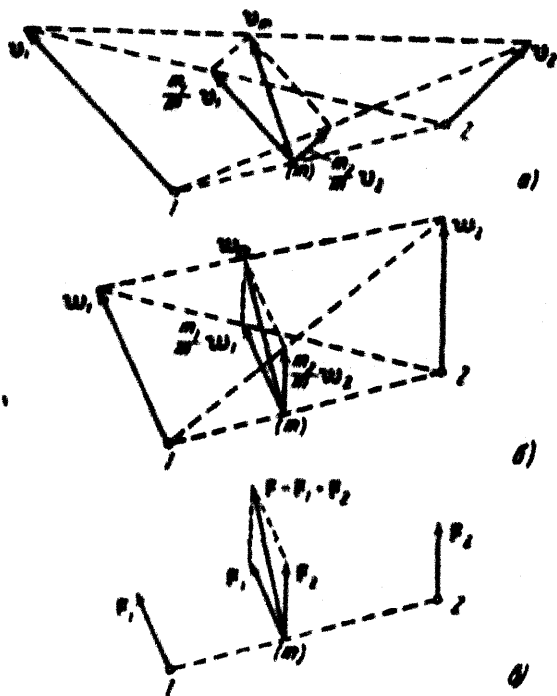


Рис. 9.1.

равны $\frac{m_1}{m} v_1$ и $\frac{m_2}{m} w_2$ соответственно. Таким образом, скорость и ускорение центра масс, связанные с движением только *i*-й точки, параллельны соответствующей скорости v_i и ускорению w_i этой точки и в m/m_i раз меньше их по величине.

Импульсом механической системы *P* называется сумма импульсов точек системы

$$P = \sum_{i=1}^N p_i \tag{9.4}$$

где $p_i = m_i v_i$ — импульс *i*-й точки. Согласно (9.2) импульс системы равен массе всей системы, умноженной на скорость центра масс, т. е.

$$P = m v_m \tag{9.5}$$

а согласно (9.3) производная импульса по времени равна массе системы, умноженной на ускорение центра масс:

$$\dot{P} = mw_m. \quad (9.6)$$

Заметим, что определение импульса системы в виде (9.5) аналогично определению импульса одной материальной точки.

Уравнение движения центра масс можно получить с помощью уравнений движения материальных точек (8.5), так как движение центра масс — этой воображаемой точки — обусловлено движением отдельных реальных точек механической системы. Из (9.3) следует, что

$$mw_m = \sum_{i=1}^N m_i w_i \quad (9.7)$$

однако в инерциальной системе отсчета произведение массы какой-либо точки на ее ускорение, согласно второму закону Ньютона, должно быть равно силе, приложенной к этой точке, т. е.

$$m_i w_i = F_i. \quad (9.8)$$

Следовательно, произведение массы всей системы на ускорение центра масс ввиду (9.7) должно быть равно сумме всех сил, действующих на отдельные точки системы (см. рис. 9.1, а), т. е.

$$mw_m = F, \quad (9.9)$$

где $F = \sum_{i=1}^N F_i$, а F_i — сила, действующая на i -ю точку.

Силы, действующие на точки системы, есть как внутренние, так и внешние силы. Под внутренними силами понимают силы, действующие между точками данной механической системы, а под внешними — силы, действующие на точки данной системы со стороны тел, не входящих в эту систему. Деление сил на внутренние и внешние зависит от того, какую систему мы считаем данной, движение какой системы изучается. Если система выбрана, то силу, действующую на ее i -ю точку, всегда можно записать в виде

$$F_i = F_i^n + F_i^e, \quad (9.10)$$

где $F_i^n = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N F_{ji}$ — сумма внутренних сил, действующих на i -ю точку,

F_{ji} — сила, действующая на i -ю точку со стороны j -й точки системы, а F_i^e — суммарная внешняя сила, действующая на i -ю точку. Складывая все силы, действующие на точки системы, т. е. суммируя (9.10), находим

$$F = \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^N F_{ji} + \sum_{i=1}^N F_i^e. \quad (9.11)$$

Однако сумма всех внутренних сил равна нулю, поскольку силы взаимодействия каждой пары точек равны по величине и противоположны по направлению. Действительно, представляя сумму всех внутренних сил F^{in} в виде

$$F^{\text{in}} = \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ i < j}}^N (F_{ji} + F_{ij}) \quad (9.12)$$

и применяя третий закон Ньютона (3.6) к каждой паре точек системы, найдем

$$F^{\text{in}} = 0. \quad (9.13)$$

Таким образом, из уравнения (9.9) получаем уравнение движения центра масс относительно инерциальной системы отсчета

$$m\dot{w}_m = F^e, \quad (9.14)$$

где $F^e = \sum_{i=1}^N F_i^e$ — сумма всех внешних сил, действующих на точки системы. Уравнение (9.14) ввиду соотношения (9.6) приводит к закону изменения импульса

$$\dot{P} = F^e. \quad (9.15)$$

На основании (9.15) в полной аналогии со случаем одной материальной точки (см. (5.5)) можно утверждать, что если проекция суммы внешних сил на некоторую неподвижную ось в любой момент времени равна нулю, то проекция импульса системы или проекция скорости центра масс системы на ту же ось сохраняется. Например, если

$$F_z^e = \sum_{i=1}^N F_{iz}^e = 0,$$

то

$$P_z = \sum_{i=1}^N m_i \dot{z}_i = P_{z0}, \quad (9.16)$$

или

$$\dot{z}_m = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^N m_i \dot{z}_i = \dot{z}_{m0}.$$

Следовательно, в направлении оси Oz центр масс системы движется равномерно,

$$z_m = \dot{z}_{m0}t + z_{m0}. \quad (9.17)$$

Теперь рассмотрим замкнутую, или изолированную, систему, т. е. систему, взаимодействием которой с прочими, не

входящими в нее телами можно пренебречь*). Для такой системы все внешние силы равны нулю:

$$F_i^e = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N),$$

и поэтому

$$P = \sum_{i=1}^N m_i v_i = P_0 \quad (9.18)$$

или

$$v_m = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^N m_i v_i = v_{m0},$$

т. е. имеет место закон сохранения импульса замкнутой системы.

Центр масс замкнутой системы движется равномерно и прямолинейно, а ее внутренние силы не могут изменить скорости центра масс (или импульса системы). Например, солнечная система с определенной степенью точности может рассматриваться как замкнутая, и поэтому силы взаимодействия между ее телами не влияют на равномерное и прямолинейное движение центра масс системы, хотя все тела, входящие в солнечную систему, движутся ускоренно.

В случае незамкнутой системы внутренние силы, вообще говоря, влияют на изменение импульса и ускорение центра масс системы, если сумма внешних сил зависит от положения или скоростей точек системы. Действительно, изменение импульса системы определяется вектором F^e — суммой всех внешних сил, действующих на систему (см. (9.15)), причем вектор F^e считается известной функцией радиусов-векторов точек и их скоростей. Однако радиусы-векторы и скорости точек изменяются под воздействием как внешних, так и внутренних сил согласно уравнениям движения

$$m_i \ddot{r}_i = F_i^{\text{in}} + F_i^e \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

(см. (3.5) и (9.10)). Вместе с тем изменяются аргументы вектора F^e и, как следствие этого, изменяется и сам вектор F^e . Влияние внутренних сил на ускорение центра масс подробно проиллюстрировано на примере 9.2.

Подчеркнем, что закон сохранения импульса справедлив и для таких замкнутых систем, поведение которых не подчинено уравнениям Ньютона. Например, при исследовании движения системы заряженных частиц, среди внутренних сил которой есть электромагнитные силы, было обнаружено излучение электромагнитных волн. Это

*) В физике термин «замкнутая система» является весьма распространенным.

излучение, как оказалось, обладает импульсом, в связи с чем импульс собственно зарядов не сохраняется. Однако суммарный импульс зарядов и электромагнитного поля остается неизменным, т. е. имеет место закон сохранения импульса замкнутой системы, под которой в данном случае следует понимать совокупность зарядов и поля излучения.

Пример 9.1. Движение центра масс в однородном поле.

В однородном постоянном электрическом поле с напряженностью \mathcal{E} движутся две заряженные точки. Их массы и заряды соответственно равны m_1, m_2 и e_1, e_2 . Найти положение центра масс как функции времени, если начальные значения r_{m0} и v_{m0} известны.

Направляя ось Ox вдоль вектора \mathcal{E} и учитывая, что внутренние силы электростатического взаимодействия подчинены закону (3.6), получим уравнение (9.15) в проекциях на декартовы оси

$$m \ddot{x}_m = e_1 \mathcal{E} + e_2 \mathcal{E}, \quad y_m = 0, \quad z_m = 0.$$

Интегрируя эту систему, найдем

$$x_m = \frac{e_1 + e_2}{m_1 + m_2} \mathcal{E} \frac{t^2}{2} + \dot{x}_{m0} t + x_{m0},$$

$$y_m = y_{m0} t + y_{m0}, \quad z_m = z_{m0} t + z_{m0}.$$

Сопоставляя это решение с решением задачи о движении одного заряда (см. пример 4.4 на стр. 48), мы видим, что вообразимая точка — центр масс двух зарядов — движется как материальная точка с массой $m_1 + m_2$ и зарядом $e_1 + e_2$. Что касается движения каждого из зарядов, то без решения системы уравнений (3.5) найти закон такого движения нельзя.

Пример 9.2. Движение центра масс в неоднородном поле.

Две точки с массами m_1 и m_2 движутся в силовом поле

$$F^c = \chi r$$

(здесь $\chi > 0$, а r — радиус-вектор точки пространства в инерциальной системе отсчета с началом в центре силы). Найти положение центра масс системы как функцию времени в двух случаях: а) пренебрегая взаимодействием точек друг с другом; б) предполагая, что внутренними силами являются силы притяжения, прямо пропорциональные расстоянию между точками с коэффициентом пропорциональности χ .

В обоих случаях движение центра масс будет определяться одним и тем же уравнением (9.14)

$$m \ddot{r}_m = F_1^c + F_2^c = \chi (r_1 + r_2), \quad (1)$$

где $m = m_1 + m_2$. Однако уравнения движения точек системы будут различными. В случае (а)

$$m_1 \ddot{r}_1 = \chi r_1, \quad m_2 \ddot{r}_2 = \chi r_2, \quad (2)$$

а в случае (б)

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = \mathbf{F}_{21} + \chi \mathbf{r}_1, \quad m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{F}_{12} + \chi \mathbf{r}_2, \quad (3)$$

где $\mathbf{F}_{21} = -\chi(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = -\mathbf{F}_{12}$.

Перепишем системы (2) и (3) в удобном для интегрирования виде:

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 = k_1^2 \mathbf{r}_1, \quad \ddot{\mathbf{r}}_2 = k_2^2 \mathbf{r}_2; \quad (4)$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 = k_1^2 \mathbf{r}_2, \quad \ddot{\mathbf{r}}_2 = k_2^2 \mathbf{r}_1, \quad (5)$$

где $k_1^2 = \frac{\chi}{m_1}$, $k_2^2 = \frac{\chi}{m_2}$. Решение этих систем в декартовых координатах не представляет затруднений. Найдем, например, решение системы уравнений, описывающих движение точек в направлении оси Ox :

$$\ddot{x}_1 = k_1^2 x_1, \quad \ddot{x}_2 = k_2^2 x_2; \quad (6)$$

$$\ddot{x}_1 = k_1^2 x_2, \quad \ddot{x}_2 = k_2^2 x_1. \quad (7)$$

Решение системы (6) имеет вид

$$x_1 = \varphi_1(t), \quad x_2 = \varphi_2(t), \quad (8)$$

где

$$\varphi_1(t) = A_1 e^{k_1 t} + A_2 e^{-k_1 t}, \quad \varphi_2(t) = B_1 e^{k_2 t} + B_2 e^{-k_2 t},$$

а A_1 и A_2 , B_1 и B_2 — произвольные постоянные, определяемые начальными условиями. Учитывая (8), из уравнения (1) найдем проекцию ускорения центра масс невзаимодействующих точек как функцию времени

$$\ddot{x}_m(t) = \frac{\chi}{m} [\varphi_1(t) + \varphi_2(t)], \quad (9)$$

а из определения центра масс и решения (8) легко получим

$$x_m(t) = \frac{1}{m} [m_1 \varphi_1(t) + m_2 \varphi_2(t)]. \quad (10)$$

Умножая правую и левую части второго из уравнений (7) на отношение k_1/k_2 и затем один раз складывая, а второй раз вычитая результат умножения из первого уравнения системы (7), приходим к уравнениям

$$\ddot{\psi} = k_1 k_2 \psi, \quad \ddot{\theta} = -k_1 k_2 \theta, \quad (11)$$

где $\psi = x_1 + \frac{k_1}{k_2} x_2$, $\theta = x_1 - \frac{k_1}{k_2} x_2$.

Решением системы (11) являются функции

$$\begin{aligned} \psi(t) &= C_1 e^{\sqrt{k_1 k_2} \cdot t} + C_2 e^{-\sqrt{k_1 k_2} \cdot t}, \\ \theta(t) &= a \cos(\sqrt{k_1 k_2} \cdot t + \alpha). \end{aligned} \quad (12)$$

Отсюда, используя соотношения между x_1 , x_2 и ψ , θ , находим

$$x_1(t) = \frac{1}{2} [\psi(t) + \theta(t)], \quad x_2(t) = \frac{k_2}{2k_1} [\psi(t) - \theta(t)]. \quad (13)$$

Это решение дает возможность определить проекцию ускорения центра масс и проекцию центра масс на ось Ox в случае взаимодействующих точек:

$$\ddot{x}_m(t) = \frac{2}{2m} \left[\left(1 + \sqrt{\frac{m_1}{m_2}} \right) \ddot{\psi}(t) + \left(1 - \sqrt{\frac{m_1}{m_2}} \right) \ddot{\theta}(t) \right], \quad (14)$$

$$x_m(t) = \frac{1}{2m} [(m_1 + \sqrt{m_1 m_2}) \psi(t) - (m_1 - \sqrt{m_1 m_2}) \theta(t)]. \quad (15)$$

Решение для других проекций ускорения центра масс аналогично полученному.

Из формул (9) и (14) видно, что в отсутствие внешних сил скорость центра масс становится постоянной и внутренние силы не могут ее изменить. Однако если внешняя неоднородная сила отлична от нуля, то внутренние силы влияют на движение центра масс (сравните (10) и (15)).

Пример 9.3. Движение тела переменной массы; задача Цюлковского.

В современной технике большое практическое значение имеет задача о движении тела переменной массы. Пусть изменение массы тела происходит за счет непрерывного отделения от тела некоторых его частей, причем за бесконечно малый элемент времени отделяется частица бесконечно малой массы. Однако скорость отделившейся частицы отличается от скорости тела на конечную величину. Найдем уравнение движения тела (в предположении, что тело и отделяющиеся частицы можно считать материальными точками).

Отделение частиц от тела происходит за счет внутренних сил системы тело — частица. Следовательно, изменение импульса рассматриваемой системы подчинено закону (9.15). Подсчитаем это изменение. В момент времени t (до отделения частицы от тела) импульс системы был равен

$$\mathbf{P}(t) = m\mathbf{v},$$

где m — масса тела в момент t , \mathbf{v} — скорость тела в тот же момент времени относительно некоторой инерциальной системы отсчета. В момент времени $t + dt$ (после отделения частицы) импульс системы равен сумме импульса тела и импульса частицы, т. е.

$$\mathbf{P}(t + dt) = (m - |dm|)(\mathbf{v} + d\mathbf{v}) + |dm| \mathbf{v}_1,$$

где $d\mathbf{v}$ — изменение скорости тела за время dt , dm — уменьшение массы тела, соответственно $|dm|$ — масса отделившейся частицы, \mathbf{v}_1 — скорость этой частицы относительно инерциальной системы отсчета.

Следовательно, изменение импульса системы с точностью до бесконечно малых второго порядка равно

$$d\mathbf{P} = m d\mathbf{v} + |dm|(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}).$$

Подставляя это выражение в (9.15), получим уравнение движения точки с переменной массой, т. е. уравнение Мещерского

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}^e + \frac{dm}{dt} \mathbf{u}, \quad (1)$$

где $\mathbf{u} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}$ — скорость отделяющихся частиц относительно тела, \mathbf{F}^e — внешняя сила, действующая на тело, а $\frac{dm}{dt} < 0$. Нетрудно убедиться, что в случае присоединяющихся к телу частиц ($\frac{dm}{dt} > 0$) справедливо то же уравнение (1).

В качестве примера на решение уравнения (1) рассмотрим задачу Циплковского. Пусть ракета движется в отсутствие внешнего поля, скорость \mathbf{u} отделяющихся частиц сгорающего топлива постоянна и направлена противоположно \mathbf{v}_0 — скорости тела в начальный момент времени. Найти скорость, которую приобретет тело за счет конечного изменения своей массы.

Умножая правую и левую части уравнения (1) на dt и проектируя их на ось, направленную по вектору \mathbf{v}_0 , получим

$$m dv = -u dm,$$

откуда в результате интегрирования находим

$$v = v_0 + u \ln \frac{m_0}{m}. \quad (2)$$

Таким образом, скорость, приобретаемая телом, зависит только от величины относительной скорости отделяющихся частиц и от изменения массы тела и не зависит от того, по какому закону изменялась масса тела.

§ 10. Законы изменения и сохранения кинетического момента системы

Умножая каждое из уравнений движения (3.5) векторно слева на \mathbf{r}_i — радиус-вектор соответствующей точки и учитывая (9.10), получим уравнение, определяющее изменение момента импульса i -й точки,

$$\dot{\mathbf{M}}_i = \mathbf{L}_i^{\text{in}} + \mathbf{L}_i^e, \quad (10.1)$$

где $\mathbf{L}_i^{\text{in}} = [\mathbf{r}_i \mathbf{F}_i^{\text{in}}]$ — момент внутренней силы, действующей на i -ю точку, $\mathbf{L}_i^e = [\mathbf{r}_i \mathbf{F}_i^e]$ — момент внешней силы, действующей на i -ю точку.

Суммируя (10.1) по всем точкам, находим

$$\dot{M} = \sum_{i=1}^N L_i^{\text{вн}} + \sum_{i=1}^N L_i^{\text{вн}}, \quad (10.2)$$

где $M = \sum_{i=1}^N M_i$ — кинетический момент системы, равный сумме моментов импульсов всех точек системы. Учтем далее, что силы взаимодействия между каждой парой точек, согласно третьему закону Ньютона, равны по величине, противоположны по направлению и расположены на прямой, соединяющей взаимодействующие точки. С этой целью выписем момент внутренних сил в виде суммы моментов сил по всем парам взаимодействующих точек:

$$\sum_{i=1}^N [r_i, \sum_{j \neq i}^N F_{ji}] = \sum_{i, j < j}^N \{ [r_i, F_{ji}] + [r_j, F_{ij}] \}. \quad (10.3)$$

Каждый член последней суммы в силу (3.6) равен нулю в любой системе отсчета (см. рис. 3.3), т. е.

$$[r_i, F_{ji}] + [r_j, F_{ij}] = [(r_i - r_j), F_{ji}] = 0, \quad (10.4)$$

так как вектор F_{ji} коллинеарен вектору $r_{ji} = r_i - r_j$.

Учитывая (10.4) и (10.3), из (10.2) найдем, что производная кинетического момента системы по времени равна сумме моментов внешних сил, действующих на точки системы (закон изменения кинетического момента системы):

$$\dot{M} = L^{\text{вн}}, \quad (10.5)$$

где

$$L^{\text{вн}} = \sum_{i=1}^N L_i^{\text{вн}}.$$

Из (10.5) вытекает (сравните с (8.8)): если проекция суммы моментов внешних сил на некоторую неподвижную ось для любого момента времени равна нулю, то проекция кинетического момента системы на ту же ось сохраняется; например, если

$$L_z^{\text{вн}} = \sum_{i=1}^N [r_i, F_i^{\text{вн}}]_z = 0,$$

то

$$M_z = \sum_{i=1}^N m_i [r_i, v_i]_z = M_{z0} \quad (10.6)$$

Учитывая определение секторной скорости (1.11), интеграл (10.6) можно представить в виде интеграла площадей

$$2 \sum_{i=1}^N m_i \sigma_{ix} = M_{x_0}, \quad (10.7)$$

из которого следует сохранение суммы произведений масс точек на площади, описываемые за любые одинаковые интервалы времени проекциями радиусов-векторов этих точек на плоскость Oxy . (См. рис. 10.1, на котором изображены проекции площадей, описываемых радиусами-векторами двух точек за интервал времени Δt ; если для системы двух точек $L_x^c = 0$, то сумма произведений масс точек на соответствующие площади сохранится и для любого другого интервала времени, равно-го Δt .)

В случае замкнутой системы все силы $F_i^c = 0$, и поэтому

$$L_x^c = \sum_{i=1}^N [r_i F_i^c] = 0,$$

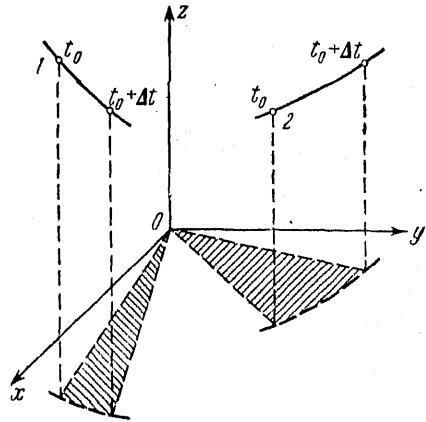


Рис. 10.1.

т. е. будет иметь место (см. (10.5)) закон сохранения кинетического момента замкнутой системы:

$$M = \sum_{i=1}^N m_i [r_i v_i] = M_0. \quad (10.8)$$

Таким образом, момент замкнутой системы не может изменяться под действием внутренних сил, поскольку они подчинены третьему закону Ньютона. Однако ориентация такой системы под действием внутренних сил может изменяться. Действительно, под воздействием внутренних сил всегда может произойти перемещение некоторых точек системы и изменение их скоростей. При этом другие точки системы также переместятся и изменят скорости, т. е. произойдет переориентация системы. Вместе с тем момент всей системы останется неизменным.

В случае незамкнутых систем внутренние силы, вообще говоря, могут влиять на изменение кинетического момента, если сумма моментов внешних сил зависит от положений и скоростей точек

системам (причина этого уже была выяснена при рассмотрении закона изменения импульса на стр. 89).

Пример 10.1. Изменение моментов импульсов точек замкнутой системы.

Рассмотрим две замкнутые системы, каждая из которых состоит из N взаимодействующих точек. Внутренними силами первой системы являются силы притяжения, прямо пропорциональные расстоянию между взаимодействующими точками и произведению масс этих точек (коэффициент пропорциональности κ). Точки второй системы взаимодействуют по закону всемирного тяготения. Сравним изменения моментов импульсов точек обеих систем.

Так как обе системы замкнутые, то их кинетические моменты сохраняются относительно любой инерциальной системы отсчета. Выбирая инерциальные системы с началами в центрах масс рассматриваемых механических систем, для каждой из них получим

$$\sum_{i=1}^N M_i = M \quad (1)$$

Изменение момента импульса i -й точки определяется моментом внутренних сил согласно уравнению (10.1)

$$\dot{M}_i = L_i^{\text{in}} = \left[r_i, \sum_{j=1}^N F_{ji} \right] \quad (2)$$

где F_{ji} — сила, с которой j -я точка действует на i -ю точку. Для первой системы

$$F_{ji} = -\kappa \frac{m_j m_i}{r_{ji}^2} r_{ji} \quad (3)$$

где $r_{ji} = r_i - r_j$ — вектор, направленный от j -й точки к i -й точке, m_j и m_i — массы этих точек; для второй системы, согласно (2.15), имеем

$$F_{ji} = -\gamma \frac{m_j m_i}{r_{ji}^2} r_{ji} \quad (4)$$

Используя (3), найдем момент сил, действующих на i -ю точку первой системы:

$$L_i^{\text{in}} = \kappa m_i \left[r_i, \sum_{j \neq i}^N m_j r_j \right]$$

Учитывая, что начало отсчета помещено в центр масс, т. е. $r_{\text{cm}} = 0$, согласно (9.1) получаем

$$\sum_{j \neq i}^N m_j r_j = -m_i r_i$$

и, таким образом, найдем, что для точек первой системы

$$L_i^{\text{in}} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N). \quad (5)$$

Следовательно, сохраняется не только кинетический момент всей системы, но и момент импульса каждой точки:

$$M_i = m_i [r_i v_i] = M_{i0} \quad (i = 1, 2, \dots, N). \quad (6)$$

Отсюда вытекает, что точки первой системы при любых начальных условиях движутся каждая в своей плоскости постоянной ориентации.

В системе гравитирующих точек момент сил, действующих на i -ю точку, отличен от нуля:

$$L_i^{\text{in}} = \gamma m_i \left[r_i \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{m_j}{r_{ji}^3} r_j \right) \right] \neq 0. \quad (7)$$

Следовательно, моменты импульсов точек не сохраняются, а при произвольных начальных условиях изменяются как по величине, так и по направлению. Последнее означает, что движение гравитирующих масс, вообще говоря, не плоское. Например, момент каждой планеты солнечной системы изменяется. Но поскольку масса Солнца значительно больше массы любой планеты, то воздействие планет друг на друга весьма мало по сравнению с воздействием Солнца на планеты. Поэтому в любой момент времени картину движения можно представить так: каждая планета движется по определенному эллипсу только под воздействием Солнца, а влияние всех прочих планет сводится к медленному изменению характеристик этого эллипса. Величины параметров, эксцентриситетов и наклонов орбит различных планет взаимосвязаны между собой, и эту взаимосвязь дает закон сохранения кинетического момента всей системы.

§ 11. Законы изменения и сохранения энергии системы

Умножим i -е уравнение системы (3.5) скалярно на перемещение $d\mathbf{r}_i$ соответствующей точки и учтем разделение сил на внутреннее и внешние (см. (9.10)). Тогда аналогично тому, как было получено (6.1), получим выражение для изменения кинетической энергии i -й точки

$$dT_i = dA_i^{\text{in}} + dA_i^{\text{e}}, \quad (11.1)$$

где T_i — кинетическая энергия i -й точки, dA_i^{in} и dA_i^{e} — работы внутренней и внешней сил на элементарном перемещении i -й точки соответственно. Суммируя (11.1) по всем точкам, находим

$$dT = dA^{\text{in}} + dA^{\text{e}}, \quad (11.2)$$

где $T = \sum_{i=1}^N T_i$ — кинетическая энергия системы, равная

сумме кинетических энергий точек, $dA^{in} = \sum_{i=1}^N F_i^{in} dr_i$ — элементарная

работа всех внутренних сил, $dA^e = \sum_{i=1}^N F_i^e dr_i$ — элементарная работа

всех внешних сил. Итак, *дифференциал кинетической энергии системы равен элементарной работе всех внутренних и внешних сил, действующих на точки системы.*

Подчеркнем, что в отличие от изменений импульса и кинетического момента *изменение кинетической энергии зависит как от внешних сил, так и от внутренних сил.* Чтобы убедиться в этом, представим работу внутренних сил в виде (см. (9.10) и (3.6))

$$dA^{in} = \sum_{\substack{i, j=1 \\ j < i}}^N \{F_{ji} dr_i + F_{ij} dr_j\} = \sum_{\substack{i, j=1 \\ j < i}}^N F_{ji} (dr_i - dr_j). \quad (11.3)$$

Поскольку перемещения различных точек под воздействием даже одинаковых сил, вообще говоря, различны, т. е.

$$dr_i \neq dr_j \quad (i, j = 1, 2, \dots, N, i \neq j),$$

то

$$dA^{in} \neq 0. \quad (11.4)$$

Теперь рассмотрим закон изменения кинетической энергии (11.2) в предположении, что среди внешних сил имеются потенциальные, гироскопические и диссипативные силы, а среди внутренних — потенциальные и диссипативные:

$$F_i^e = F_i^{e,p} + F_i^{e,g} + F_i^{e,d}, \quad F_i^{in} = F_i^{in,p} + F_i^{in,d} \quad (11.5)$$

(здесь индексами p, g, d обозначены соответственно потенциальные, гироскопические и диссипативные силы). Учитывая, что гироскопические силы не совершают работы (см. (6.22)), т. е.

$$F_i^{e,g} dr_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N), \quad (11.6)$$

получим следующие выражения для работ dA^e и dA^{in} :

$$\begin{aligned} dA^e &= \sum_{i=1}^N F_i^{e,p} dr_i + \sum_{i=1}^N F_i^{e,d} dr_i, \\ dA^{in} &= \sum_{i=1}^N F_i^{in,p} dr_i + \sum_{i=1}^N F_i^{in,d} dr_i. \end{aligned} \quad (11.7)$$

Так как потенциальные силы удовлетворяют условию (6.3), то

$$F_i^{e,p} = -\nabla_i U_i^e, \quad U_i^e = -\int F_i^{e,p} dr_i + C \quad (i = 1, 2, \dots, N), \quad (11.8)$$

где $U_i^e(\mathbf{r}_i, t)$ — потенциальная энергия i -й точки во внешнем потенциальном поле, а символом ∇_i обозначен оператор «набла» (см. стр. 61), где дифференцирование производится по координатам i -й точки. Используя (11.8), найдем выражение для работы внешних потенциальных сил (см. (6.18)):

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{e, p} d\mathbf{r}_i = -dU^e + \frac{\partial U^e}{\partial t} dt, \quad (11.9)$$

где $U^e = \sum_{i=1}^N U_i^e$ — потенциальная энергия системы во внешних полях.

Предполагая, что потенциальная энергия взаимодействия любой пары точек системы задается функцией

$$U_{ij} = U_{ij}(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|), \quad (11.10)$$

для потенциальных сил взаимодействия точек находим

$$\mathbf{F}_{ji}^p = -\nabla_i U_{ij}, \quad \mathbf{F}_{ij}^p = -\nabla_j U_{ij} \quad (11.11)$$

Нетрудно убедиться, что эти силы удовлетворяют закону действия и противодействия (3.6), а их элементарная работа равна

$$\mathbf{F}_{ji}^p d\mathbf{r}_i + \mathbf{F}_{ij}^p d\mathbf{r}_j = -dU_{ij}. \quad (11.12)$$

Суммируя (11.12) по всем парам точек системы, получим работу всех внутренних потенциальных сил в виде

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{\text{in}, p} d\mathbf{r}_i = \sum_{\substack{i, j=1 \\ i < j}}^N \{\mathbf{F}_{ji}^p d\mathbf{r}_i + \mathbf{F}_{ij}^p d\mathbf{r}_j\} = -dU^{\text{in}}, \quad (11.13)$$

где $U^{\text{in}} = \sum_{\substack{i, j=1 \\ i < j}}^N U_{ij}$ — внутренняя потенциальная энергия системы.

Потенциальную энергию U системы определяют как сумму ее потенциальной энергии во внешних полях и внутренней потенциальной энергии:

$$U = U^e + U^{\text{in}}. \quad (11.14)$$

При допущениях (11.8) и (11.10) потенциальная энергия системы имеет вид

$$U = \sum_{i=1}^N U_i^e(\mathbf{r}_i, t) + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i, j=1 \\ i \neq j}}^N U_{ij}(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|). \quad (11.15)$$

Полная механическая энергия E системы (или, кратко, энергия системы) *определяется как сумма кинетической и потенциальной энергий системы*

$$E = T + U. \quad (11.16)$$

Основываясь на законе изменения кинетической энергии (11.2) и используя (11.7), (11.9), (11.13) и (11.16), получим

$$dE = \frac{\partial U^e}{\partial t} dt + \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^d \cdot d\mathbf{r}_i, \quad (11.17)$$

где $\mathbf{F}_i^d = \mathbf{F}_i^{in, d} + \mathbf{F}_i^{e, d}$ — сумма внутренних и внешних диссипативных сил, действующих на i -ю точку. Разделив левую и правую части (11.17) на элемент времени dt , найдем, что *полная производная механической энергии системы по времени равна сумме частной производной потенциальной энергии системы во внешних полях по времени и мощности диссипативных внутренних и внешних сил, действующих на точки системы:*

$$\dot{E} = \frac{\partial U^e}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^d \cdot \mathbf{v}_i. \quad (11.18)$$

С помощью этого закона изменения механической энергии системы относительно инерциальной системы отсчета получим закон сохранения механической энергии системы. Действительно, *если потенциальная энергия системы во внешних полях явно от времени не зависит, а диссипативные силы (внешние и внутренние) отсутствуют, т. е. если*

$$\frac{\partial U^e}{\partial t} = 0 \quad \text{и} \quad \mathbf{F}_i^d = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N), \quad (11.19)$$

то механическая энергия системы сохраняется:

$$E = \sum_{i=1}^N \frac{m_i v_i^2}{2} + \sum_{i=1}^N U_i^e + \sum_{\substack{i, j=1 \\ i < j}}^N U_{ij} = E_0. \quad (11.20)$$

Такую систему называют консервативной.

Энергия может сохраняться также и в том случае, когда убыль энергии за счет диссипативных сил компенсируется поступлением энергии в систему. Тогда имеем

$$\frac{\partial U^e}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^d \cdot \mathbf{v}_i = 0, \quad E = E_0, \quad (11.21)$$

причем

$$\frac{dU^*}{dt} > 0, \quad \text{а} \quad \sum_{i=1}^N F_i^d v_i < 0$$

см. (6.24).

Механическая энергия замкнутой системы сохраняется, если внутренние диссипативные силы отсутствуют:

$$E = T + U^* = E_0 \quad (11.22)$$

Если же внутренние диссипативные силы отличны от нуля, то механическая энергия замкнутой системы убывает, т. е.

$$\dot{E} = \sum_{i=1}^N F_i^d v_i < 0, \quad (11.23)$$

где $E = T + U^*$. Однако это не означает исчезновения энергии: наличие диссипативных сил приводит к превращению механической энергии в определенное количество теплоты. В связи с этим подчеркнем, что закон сохранения механической энергии является частным случаем всеобщего закона сохранения и превращения энергии всех форм движения материи, согласно которому все формы движения «при известных обстоятельствах переходят друг в друга», «и притом так, что определенное количество энергии в одной форме всегда соответствует определенное количество энергии в какой-либо другой форме» (Эйнштейн). Например, механическая энергия движущихся зарядов, взаимодействующих электромагнитными волнами, превращается в энергию этих волн. Закон сохранения энергии, учитывающий взаимодействие с полем излучения, формулируется в электродинамике в виде закона сохранения энергии, учитывающего передачу энергии между телом и полем. Полученный выше закон сохранения механической энергии представляет собой лишь закон превращения кинетической энергии в потенциальную и обратно.

В заключение сделаем ряд общих замечаний о законах изменения и сохранения импульса, кинетического момента и энергии.

Законы изменения

$$\dot{P} = F^e, \quad \dot{M} = L^e, \quad \dot{E} = \frac{dU^*}{dt} + \sum_{i=1}^N F_i^d v_i \quad (11.24)$$

представляют собой семь скалярных уравнений, которые при определенных свойствах сил приводят к законам сохранения.

В случае замкнутой системы и отсутствие внутренних диссипативных сил число интегралов движения, вытекающих из законов сохранения, максимально, а именно, в этом случае имеем семь первых

и три вторых скалярных интеграла

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \mathbf{P}_0 \quad (\mathbf{v}_m = \mathbf{v}_{m0}), \quad \mathbf{M} = \mathbf{M}_0, \quad E = E_0, \\ \mathbf{r}_m &= \mathbf{v}_{m0}(t - t_0) + \mathbf{r}_{m0}. \end{aligned} \quad (11.25)$$

т. е. *десять классических интегралов механики.*

Законы сохранения могут иметь место для систем с любым числом точек, в связи с чем они являются важнейшим орудием исследований. Например, изучение свойств газа, состоящего из очень большого числа молекул, основано на законах сохранения.

В настоящей главе законы сохранения были получены как следствие уравнений движения Ньютона. Поэтому они связаны со свойствами пространства и времени, которые постулируются в классической механике. Эту связь лучше рассмотреть на примере замкнутой системы*). Оказывается, что *сохранение импульса связано с однородностью пространства*, в силу которой механические свойства замкнутой системы не меняются при любом параллельном переносе системы как целого. *Сохранение момента связано с изотропией пространства*, в силу которой механические свойства замкнутой системы не изменяются при любом повороте системы как целого. *А сохранение механической энергии связано с однородностью времени*, в силу которой механические свойства замкнутой системы не меняются при любом «переносе» системы во времени.

Наконец, подчеркнем, что законы сохранения справедливы и в таких замкнутых системах, когда движение объекта не описывается уравнениями Ньютона. Следовательно, значение законов сохранения импульса, момента и энергии выходит далеко за рамки классической механики.

Пример 11.1. Зависимость скоростей планет от их расстояний до Солнца и их расстояний между собой.

Рассмотрим солнечную систему как систему, состоящую из N материальных точек (планет) и Солнца — одной точки весьма большой массы по сравнению с массами прочих точек. Поскольку эту систему можно считать замкнутой, постольку ее центр масс движется равномерно и прямолинейно. Если пренебречь процессами излучения и диссипации, то механическую энергию системы можно считать постоянной. Найдем интеграл энергии относительно инерциальной системы отсчета с началом в центре масс солнечной системы. Для этого вычислим потенциальную энергию взаимодействия любой пары точек (см. (11.12)):

$$U_{ij} = - \int (\mathbf{F}_{ji} d\mathbf{r}_i + \mathbf{F}_{ij} d\mathbf{r}_j).$$

Используя третий закон и закон всемирного тяготения (2.15),

*) См. приложение 51.1, а также [21], §§ 6—9.

получим, что

$$U_{ij} = - \int \mathbf{F}_{ji} (d\mathbf{r}_i - d\mathbf{r}_j) = - \int \mathbf{F}_{ji} d\mathbf{r}_{ji} = - \gamma \frac{m_i m_j}{r_{ij}}. \quad (1)$$

Таким образом, интеграл энергии (11.20) можно записать в виде

$$\sum_{i=1}^N \frac{m_i v_i^2}{2} + \frac{M_S v_S^2}{2} - \sum_{i=1}^N \gamma \frac{m_i M_S}{r_{iS}} - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^N \gamma \frac{m_i m_j}{r_{ij}} = E_0, \quad (2)$$

где m_i и \mathbf{v}_i — масса и скорость i -й планеты, M_S и \mathbf{v}_S — масса и скорость Солнца. Учитывая, что в системе центра масс $\mathbf{v}_m = 0$, установив связь между скоростью Солнца и скоростями планет (см. (9.2)):

$$\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i + M_S \mathbf{v}_S = 0. \quad (3)$$

Исключая с помощью (3) из интеграла (2) скорость \mathbf{v}_S , получим соотношение между скоростями планет \mathbf{v}_i , их взаимными расстояниями r_{ji} и расстояниями до Солнца r_{iS} ($i, j = 1, 2, \dots, N, i \neq j$):

$$\sum_{i=1}^N \frac{m_i v_i^2}{2} + \frac{1}{2M_S} \left(\sum_{i=1}^N m_i v_i \right)^2 - \sum_{i=1}^N \gamma \frac{m_i M_S}{r_{iS}} - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^N \gamma \frac{m_i m_j}{r_{ij}} = E_0. \quad (4)$$

Таким образом, изменение расстояний от планет до Солнца и расстояний между планетами приводит к изменению скоростей планет.

Заметим, что в интеграле (4) вторая и четвертая суммы малы по сравнению с первой и третьей суммами соответственно. Это связано с тем, что $M_S \gg m_i$ ($i = 1, 2, \dots, N$). Пренебрежение указанными малыми членами равносильно пренебрежению воздействием планет на движение Солнца и друг на друга, т. е. равносильно допущению о том, что каждая планета движется только под воздействием Солнца. При таком допущении вместо интеграла (4) будут иметь место интегралы энергий для каждой планеты в центрально-симметричном поле Солнца (см. (7.1) и (8.1)):

$$\frac{m_i v_i^2}{2} - \gamma \frac{m_i M_S}{r_{iS}} = E_{i0} \quad (i = 1, 2, \dots, N). \quad (5)$$

**ЗАДАЧА ДВУХ ТЕЛ И КЛАССИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ
РАССЕЯНИЯ ЧАСТИЦ**

Под задачей двух тел обычно понимают задачу о движении двух взаимодействующих точек в отсутствие внешних сил. Значение этой задачи весьма велико: ее решение лежит в основе небесной механики и теории свободного движения спутников, в основе теории столкновения и рассеяния частиц; ее решение используется в статистической механике, когда задачу о движении многих частиц фактически сводят к статистической задаче двух точек, и т. д.

§ 12. Задача двух тел

Исследуем движение двух точек с массами m_1 и m_2 , если потенциальная энергия их взаимодействия U зависит только от расстояния между точками (см. (11.10)), а внешние силы отсутствуют.

Уравнения движения точек относительно инерциальной системы S являются уравнения (3.5)

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 &= \mathbf{F}_{21}(|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|), \\ m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 &= \mathbf{F}_{12}(|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|), \end{aligned} \quad (12.1)$$

где $\mathbf{F}_{21} = -\nabla_1 U(|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|)$, а $\mathbf{F}_{12} = -\nabla_2 U(|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|)$.

Один из векторных интегралов уравнений (12.1) очевиден: ввиду отсутствия внешних сил центр масс системы движется относительно S равномерно и прямолинейно (см. (9.18)). Таким образом, скорость центра масс и его радиус-вектор равны

$$\mathbf{v}_m = \mathbf{v}_{m0}, \quad \mathbf{r}_m = \mathbf{v}_{m0}t + \mathbf{r}_{m0}, \quad (12.2)$$

где $\mathbf{v}_{m0} = \frac{1}{m}(m_1 \mathbf{v}_{10} + m_2 \mathbf{v}_{20})$, $\mathbf{r}_{m0} = \frac{1}{m}(m_1 \mathbf{r}_{10} + m_2 \mathbf{r}_{20})$, а \mathbf{r}_{10} , \mathbf{r}_{20} , \mathbf{v}_{10} , \mathbf{v}_{20} — начальные положения и скорости соответствующих точек.

Рассмотрим далее движение точек относительно поступательно движущейся системы центра масс S_m (рис. 12.1). Так называют систему отсчета, начало которой находится в центре масс механической системы, а оси не изменяют своей ориентации относительно системы S (т. е. углы между осями систем S_m и S неизменны). В данном случае система S_m инерциальна, поскольку центр масс движется равномерно и прямолинейно относительно системы S .

Следовательно, положения, скорости и ускорения точек относительно S и S_m связаны между собой соотношениями (см. (3.8), (3.9) и (3.10)):

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_m + \mathbf{r}'_i \quad \mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{m0} + \mathbf{v}'_i \quad \mathbf{w}_i = \mathbf{w}'_i \quad (i=1, 2), \quad (12.3)$$

где «нештрихованные» векторы относятся к системе S , а «штрихованные» — к системе S_m . Учитывая, что из принципа относительности (см. стр. 38) вытекает инвариантность уравнений движения при переходе от системы S к S_m , из (12.1) получим

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\mathbf{r}}'_1 &= \mathbf{F}_{21}(|\mathbf{r}'_2 - \mathbf{r}'_1|), \\ m_2 \ddot{\mathbf{r}}'_2 &= \mathbf{F}_{12}(|\mathbf{r}'_2 - \mathbf{r}'_1|). \end{aligned} \quad (12.4)$$

Однако положения точек 1 и 2 в системе S_m не являются независимыми. Действительно, из определения центра масс (9.1) и определения системы S_m имеем

$$m_1 \mathbf{r}'_1 + m_2 \mathbf{r}'_2 = 0. \quad (12.5)$$

Поэтому радиус-вектор $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, характеризующий относительное расположение точек, выражается через \mathbf{r}'_1 и \mathbf{r}'_2 :

$$\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}'_2 - \mathbf{r}'_1 = \frac{m}{m_1} \mathbf{r}'_2 = -\frac{m}{m_2} \mathbf{r}'_1, \quad (12.6)$$

а радиусы-векторы \mathbf{r}'_1 и \mathbf{r}'_2 связаны с вектором \mathbf{r} соотношениями

$$\mathbf{r}'_1 = -\frac{m_2}{m} \mathbf{r}, \quad \mathbf{r}'_2 = \frac{m_1}{m} \mathbf{r}. \quad (12.7)$$

Дифференцируя (12.5) — (12.7) по времени, получаем аналогичные соотношения для скоростей точек:

$$m_1 \mathbf{v}'_1 + m_2 \mathbf{v}'_2 = 0, \quad (12.8)$$

$$\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}'_2 - \mathbf{v}'_1 = \frac{m}{m_1} \mathbf{v}'_2 = -\frac{m}{m_2} \mathbf{v}'_1, \quad (12.9)$$

$$\mathbf{v}'_1 = -\frac{m_2}{m} \mathbf{v}, \quad \mathbf{v}'_2 = \frac{m_1}{m} \mathbf{v},$$

где $\mathbf{v} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$.

Соотношения (12.6) или (12.7) дают возможность разделить переменные в уравнениях (12.4). Действительно, подставляя (12.6) в (12.4), найдем

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}'_1 = \mathbf{F}_{21}\left(\left|-\frac{m}{m_2} \mathbf{r}'_1\right|\right), \quad m_2 \ddot{\mathbf{r}}'_2 = \mathbf{F}_{12}\left(\left|\frac{m}{m_1} \mathbf{r}'_2\right|\right). \quad (12.10)$$

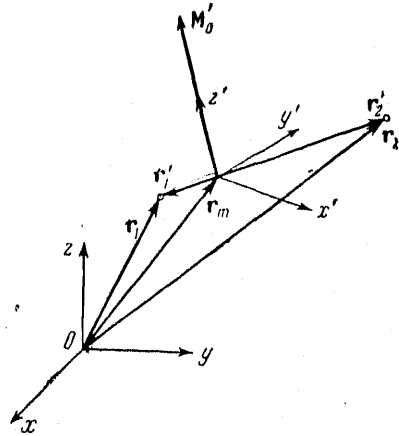


Рис. 12.1.

Отсюда, переходя к переменной \mathbf{r} , сведем оба уравнения к одному и тому же уравнению

$$\mu \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}_{12}(|\mathbf{r}|), \quad (12.11)$$

где $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ — «приведенная» масса. Это уравнение представляет собой *уравнение движения одной точки в заданном поле с центром силы, как бы помещенным в центр масс системы двух точек*. Таким образом, задача двух тел сводится к эквивалентной задаче о движении μ -точки — воображаемой точки с массой μ и радиусом-вектором \mathbf{r} — в центрально-симметричном поле с неподвижным центром, т. е. к задаче, разобранный в § 7.

Поскольку на μ -точку «действует» центральная стационарная потенциальная сила, то имеет место сохранение момента импульса и энергии относительно S_m , т. е.

$$\mu [\mathbf{r}\mathbf{v}] = \mathbf{M}'_0, \quad \frac{\mu v^2}{2} + U(|\mathbf{r}|) = E'_0. \quad (12.12)$$

Выведем эти интегралы, исходя непосредственно из законов сохранения (10.8) и (11.22). Согласно этим законам кинетический момент и энергия системы двух точек относительно S_m сохраняются:

$$\mathbf{M}' = \mathbf{M}'_1 + \mathbf{M}'_2 = \mathbf{M}'_0, \quad E' = T'_1 + T'_2 + U = E'_0. \quad (12.13)$$

Выразим момент импульса и кинетическую энергию точки I в переменных \mathbf{r} , \mathbf{v} (см. (12.7) и (12.9)):

$$\begin{aligned} \mathbf{M}'_1 &= m_1 [\mathbf{r}'_1 \mathbf{v}'_1] = m_1 \left(\frac{m_2}{m}\right)^2 [\mathbf{r}\mathbf{v}], \\ T'_1 &= \frac{m_1 (v'_1)^2}{2} = \frac{m_1}{2} \left(\frac{m_2}{m}\right)^2 v^2. \end{aligned} \quad (12.14)$$

Аналогично для второй точки получим

$$\mathbf{M}'_2 = m_2 \left(\frac{m_1}{m}\right)^2 [\mathbf{r}\mathbf{v}], \quad T'_2 = \frac{m_2}{2} \left(\frac{m_1}{m}\right)^2 v^2, \quad (12.15)$$

а учитывая (12.14) и (12.15), найдем выражения кинетического момента и кинетической энергии системы в переменных \mathbf{r} и \mathbf{v} :

$$\mathbf{M}' = \mu [\mathbf{r}\mathbf{v}], \quad T' = \frac{\mu v^2}{2}. \quad (12.16)$$

Следовательно, (12.12) и (12.13) представляют собой одни и те же законы сохранения.

Сопоставляя (12.12) с интегралами (7.1), мы видим, что решение задачи двух тел относительно S_m можно найти сразу, если в соответствующих формулах произвести замену

$$m \rightarrow \mu, \quad M_0 \rightarrow M'_0, \quad E_0 \rightarrow E'_0. \quad (12.17)$$

Прозводя эту замену в формулах (5.13), (7.5) и (7.8), находим общее решение уравнения (12.11) в виде

$$M_0' r = 0, \quad t = \pm \int \frac{dr}{\left[\frac{2}{\mu} (E_0' - U_{\text{eff}}) \right]^{1/2}} + \text{const}, \quad (12.18)$$

$$\varphi = \pm \int \frac{\frac{M_0'}{\mu r^2} dr}{\left[\frac{2}{\mu} (E_0' - U_{\text{eff}}) \right]^{1/2}} + \text{const},$$

где $U_{\text{eff}} = U(r) + \frac{(M_0')^2}{2\mu r^2}$.

Смысл первого из интегралов (12.18) очевиден: он определяет плоскость движения μ -точки. Эта плоскость проходит через центр масс перпендикулярно к M_0' , т. е. совпадает с плоскостью $O'x'y'$ на рис. 12.1. Второй и третий интегралы определяют движение μ -точки на указанной плоскости в полярных координатах. Таким образом, с помощью интегралов (12.18) можно определить функцию $r(t)$ и тем самым с помощью (12.7) найти положения точек 1 и 2 относительно S_m . Затем, используя (12.2) и (12.3), можно найти законы движения точек относительно системы S в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1(t) &= \mathbf{r}_m(t) - \frac{m_2}{m} \mathbf{r}(t), \\ \mathbf{r}_2(t) &= \mathbf{r}_m(t) + \frac{m_1}{m} \mathbf{r}(t). \end{aligned} \quad (12.19)$$

Аналогично для скоростей точек относительно S получим решение в виде (см. (12.9) и (12.3))

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1(t) &= \mathbf{v}_{m0} - \frac{m_2}{m} \mathbf{v}(t), \\ \mathbf{v}_2(t) &= \mathbf{v}_{m0} + \frac{m_1}{m} \mathbf{v}(t), \end{aligned} \quad (12.20)$$

где $\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}$.

Итак, *общее решение задачи двух точек, потенциальная энергия взаимодействия которых зависит только от расстояния между ними, в отсутствие внешних сил определяется формулами (12.18), (12.2) и (12.19). Из этих формул следует, что относительно инерциальной системы отсчета центр масс точек движется равномерно и прямолинейно, а обе точки относительно системы центра масс совершают движение в плоскости, проходящей через центр масс и сохраняющей свою ориентацию относительно инерциальной системы отсчета; траектории обеих точек относительно системы центра масс подобны, а центр подобия находится в центре масс, причем отношение подобия равно отношению масс точек.*

Проиллюстрируем задачу двух тел на примере системы с потенциальной энергией взаимодействия (см. (8.1))

$$U = -\frac{\alpha}{r},$$

где α равняется либо $\gamma m_1 m_2$ (гравитационное взаимодействие), либо $-e_1 e_2$ (электростатическое взаимодействие). В этом случае общее решение аналогично решению, приведенному в § 8. Например, производя в формуле (8.3) замену (12.17), получим уравнение орбиты μ -точки

$$r = \frac{p}{\pm 1 + \varepsilon \cos \varphi}, \quad (12.21)$$

где $p = \frac{(M_0')^2}{\mu |\alpha|}$ — параметр орбиты, $\varepsilon = \left[1 + \frac{2E_0' (M_0')^2}{\mu \alpha^2} \right]^{1/2}$ — эксцентриситет орбиты, значение $+1$ в знаменателе формулы соответствует случаю $\alpha > 0$, а значение -1 — случаю $\alpha < 0$.

Закон движения μ -точки по эллиптической орбите найдем из формулы (8.10):

$$r = a(1 - \varepsilon \cos \xi), \quad t = \frac{T}{2\pi} (\xi - \varepsilon \sin \xi), \quad (12.22)$$

где $a = \frac{p}{1 - \varepsilon^2}$ — большая полуось эллипса, по которому движется μ -точка, $T^2 = 4\pi^2 (\mu a^3 / \alpha)$ — квадрат периода обращения по эллипсу, а p и ε определены в (12.21). Аналогично из соответствующих соотношений § 8 находятся прочие необходимые функции и величины.

Чтобы представить себе движение реальных точек 1 и 2 относительно S_{mb} рассмотрим их движение по эллиптическим орбитам при различных соотношениях масс и заданных p и ε . Например, пусть $m_2 \ll m_1$, тогда выражения радиусов-векторов точек через радиус-вектор μ -точки можно записать в виде (см. (12.7))

$$\mathbf{r}'_1 \approx -\frac{m_2}{m_1} \mathbf{r}, \quad \mathbf{r}'_2 \approx \left(1 - \frac{m_2}{m_1} \right) \mathbf{r}; \quad (12.23)$$

если же $m_2 = m_1$, то

$$\mathbf{r}'_1 = -\frac{\mathbf{r}}{2}, \quad \mathbf{r}'_2 = \frac{\mathbf{r}}{2}. \quad (12.24)$$

Таким образом, если μ -точка движется по эллипсу, то и реальные точки описывают эллиптические орбиты (рис. 12.2). Рассмотренные случаи дают представление о движении систем: планета — Солнце и двойные звезды соответственно.

Полезно найти соотношения между периодом обращения точек по эллиптическим орбитам и их большими полуосями. Например, в случае гравитационного притяжения для μ -точки получаем

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{\gamma} \frac{a^3}{m_1 + m_2}. \quad (12.25)$$

Периоды обращения точек 1 и 2, очевидно, равны периоду T . С другой стороны, большие полуоси орбит этих точек выражаются через a , поскольку из (12.7) вытекает, что

$$r'_1 = \frac{m_2}{m} r, \quad r'_2 = \frac{m_1}{m} r,$$

и, следовательно,

$$a_1 = \frac{m_2}{m} a, \quad a_2 = \frac{m_1}{m} a, \quad (12.26)$$

где a_1 и a_2 — большие полуоси эллиптических орбит точек 1 и 2

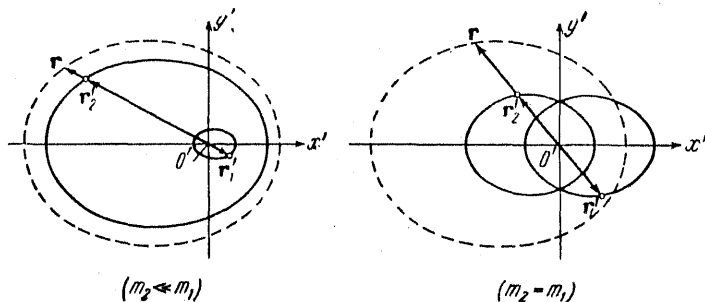


Рис. 12.2.

соответственно. Таким образом, найдем отношения квадрата периода T к кубам больших полуосей a_1 и a_2 :

$$\frac{T^2}{a_1^3} = \frac{4\pi^2}{\gamma} \frac{m^2}{m_1^3}, \quad \frac{T^2}{a_2^3} = \frac{4\pi^2}{\gamma} \frac{m^2}{m_2^3}, \quad (12.27)$$

где $m = m_1 + m_2$. Отсюда видно, что эти отношения зависят от масс точек, в связи с чем становится понятной приближенность третьего закона Кеплера, приведенного на стр. 79. Действительно, поскольку масса любой планеты весьма мала по сравнению с массой Солнца, то отношение T^2/a_2^3 для любых двух планет одинаково с большой точностью.

§ 13. Упругое рассеяние и захват частиц

Если в начальный момент времени две частицы находятся достаточно далеко друг от друга, а их начальные скорости направлены так, что с течением времени происходит сближение частиц, в результате взаимодействия они могут снова удалиться на достаточно большое расстояние друг от друга, причем их скорости как по величине, так и по направлению изменятся. В этом случае говорят, что произошло рассеяние частиц. Если в результате взаимодействия при $t \rightarrow +\infty$ расстояние между частицами стремится к нулю или

остается ограниченным, то говорят, что имеет место захват частиц. Рассеяние и захват частиц зависят от характера взаимодействия между частицами, в связи с чем изучение таких процессов играет большую роль в физике.

Рассмотрим такую задачу о рассеянии двух частиц, в которой считаются известными массы частиц и потенциальная энергия их взаимодействия как функция расстояния r между ними, а внешними силами пренебрегают. До рассеяния, т. е. при $t \rightarrow -\infty$, частицы

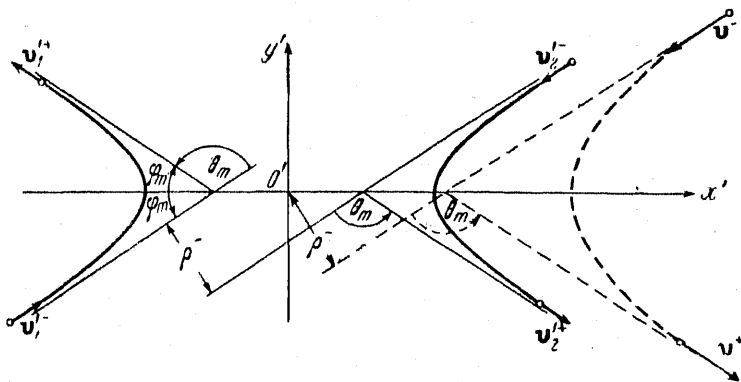


Рис. 13.1.

считаются бесконечно удаленными друг от друга; они обладают скоростями, соответственно равными

$$\mathbf{v}_1^- = \mathbf{v}_1(t) |_{t \rightarrow -\infty}, \quad \mathbf{v}_2^- = \mathbf{v}_2(t) |_{t \rightarrow -\infty}, \quad (13.1)$$

где $\mathbf{v}_1(t)$ и $\mathbf{v}_2(t)$ — скорости обеих точек в момент времени t . Практически состояние «до рассеяния» характеризуется таким конечным расстоянием между частицами, на котором энергией их взаимодействия можно пренебречь. Скорости, рассматриваемые в (13.1), являются скоростями частиц относительно некоторой инерциальной системы отсчета, которую в теории рассеяния обычно называют лабораторной системой или l -системой. В задаче считается известной ориентация плоскости движения частиц относительно системы S_m , которую в теории рассеяния часто называют ζ -системой. Также считается известным прицельное расстояние ρ^- , т. е. расстояние между асимптотами траекторий частиц относительно S_m , по которым частицы движутся до рассеяния; прицельное расстояние можно также определить как минимальное расстояние, на котором частицы пролетели бы друг от друга в отсутствие взаимодействия (см. рис. 13.1, где в качестве траектории μ -точки изображена ветвь гиперболы, соответ-

ствующая случаю отгалкивания — сравните с рис. 8.1, а траектории действительных точек изображены для $m_1 = m_2$).

Если скорости частиц до рассеяния заданы, то ориентация плоскости движения относительно S_m определяется одним скалярным параметром. Действительно, по этим скоростям можно определить их разность: вектор

$$\mathbf{v}^- = \mathbf{v}_2^- - \mathbf{v}_1^-, \quad (13.2)$$

который лежит в плоскости движения частиц относительно S_m (см. (12.9)). Поэтому ориентацию этой плоскости всегда можно задать единичным вектором $\mathbf{n}_{z'}$, перпендикулярным к плоскости и, следовательно, перпендикулярным к \mathbf{v}^- (рис. 13.2). Но направление $\mathbf{n}_{z'}$, если \mathbf{v}^- задан, определяется одним скалярным параметром, например углом ε между $\mathbf{n}_{z'}$ и единичным вектором \mathbf{n}_{xy} , лежащим в плоскости $O'xy$ и перпендикулярным к \mathbf{v}^- .

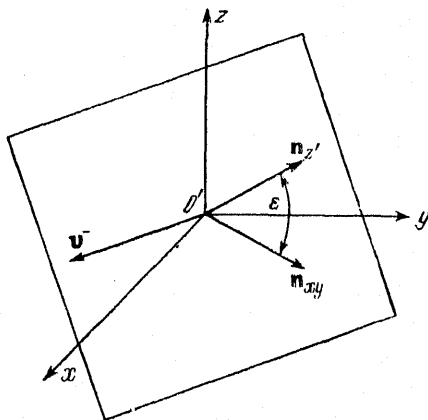


Рис. 13.2.

Итак, в задаче о рассеянии двух частиц будем считать известными массы этих частиц m_1 и m_2 , потенциальную энергию их взаимодействия $U(r)$, скорости до рассеяния \mathbf{v}_1^- и \mathbf{v}_2^- относительно лабораторной системы отсчета, угол ε , определяющий

ориентацию плоскости движения относительно системы центра масс, а также прицельное расстояние ρ^- , которое характеризует относительное расположение точек до рассеяния в системе центра масс. По этим данным требуется определить \mathbf{v}_1^+ и \mathbf{v}_2^+ — скорости обеих частиц после рассеяния, т. е. скорости частиц при $t \rightarrow +\infty$:

$$\mathbf{v}_1^+ = \mathbf{v}_1(t) |_{t \rightarrow +\infty}, \quad \mathbf{v}_2^+ = \mathbf{v}_2(t) |_{t \rightarrow +\infty}. \quad (13.3)$$

Устремляя t к $+\infty$ в соотношениях (12.9) и (12.20), справедливых для любого момента времени, и используя сохранение скорости центра масс частиц (см. (12.2)), получим

$$\mathbf{v}_1^+ = -\frac{m_2}{m} \mathbf{v}^+, \quad \mathbf{v}_2^+ = \frac{m_1}{m} \mathbf{v}^+, \quad (13.4)$$

$$\mathbf{v}_1^+ = \mathbf{v}_m^- - \frac{m_2}{m} \mathbf{v}^+, \quad \mathbf{v}_2^+ = \mathbf{v}_m^- + \frac{m_1}{m} \mathbf{v}^+, \quad (13.5)$$

где \mathbf{v}_1^+ , \mathbf{v}_2^+ — скорости точек после рассеяния относительно системы S_m , $\mathbf{v}_m = \frac{1}{m}(m_1\mathbf{v}_1^+ + m_2\mathbf{v}_2^+)$ — скорость центра масс. Как видно, в (13.4) и (13.5) входит один неизвестный вектор \mathbf{v}^+ — разность скоростей точек после рассеяния. Величину этого вектора можно найти, используя закон сохранения энергии относительно системы S_m . Действительно, (11.22) с учетом второй из формул (12.16) приводит к интегралу

$$\frac{\mu(v^+)^2}{2} + U^+ = \frac{\mu(v^-)^2}{2} + U^-, \quad (13.6)$$

где U^- , U^+ — значения потенциальной энергии взаимодействия частиц до и после рассеяния. Эти значения равны между собой, т. е.

$$U^+ = U^-, \quad (13.7)$$

поскольку как до рассеяния, так и после него частицы находятся на бесконечно большом расстоянии друг от друга. Таким образом, из (13.6) и (13.7) вытекает, что величина разности скоростей частиц после рассеяния и до него одна и та же:

$$v^+ = v^-. \quad (13.8)$$

По существу этот вывод основан на предположении о том, что внутренняя энергия частиц в процессе рассеяния остается неизменной (такое рассеяние называется упругим). Учитывая (13.8), неизвестный вектор \mathbf{v}^+ можно представить в виде

$$\mathbf{v}^+ = v^- \mathbf{n}_{0m}, \quad (13.9)$$

где $v^- = |\mathbf{v}_2^- - \mathbf{v}_1^-|$, т. е. является известной величиной, а \mathbf{n}_{0m} — единичный вектор, направленный по вектору \mathbf{v}^+ или по вектору \mathbf{v}_2^{+} , что видно из (13.4). Орт \mathbf{n}_{0m} легко определять, используя решение задачи двух тел. Действительно, вычисляя последний из интегралов (12.18) в пределах от r_{\min} до ∞ , получим φ_m — угол между асимптотой траектории и апсидой (см., например, рис. 13.1):

$$\varphi_m = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{\frac{M'_0}{\mu r^2} dr}{\left[\frac{2}{\mu} (E'_0 - U_{\text{eff}}) \right]^{1/2}}, \quad (13.10)$$

где r_{\min} определяется из уравнения $E'_0 = U_{\text{eff}}$. Интеграл (13.10) определяет угол φ_m как функцию E'_0 , M'_0 и приведенной массы μ (при заданной потенциальной энергии $U(r)$). В свою очередь постоянные E'_0 и M'_0 могут быть выражены через величины, которые считаются известными в сформулированной выше задаче о рассеянии, т. е. через v^- — величину разности скоростей точек до рассеяния и ρ^- — прицельное расстояние. Например, используя последнюю из формул (12.16)

и полагая потенциальную энергию на бесконечности равной нулю, получим

$$E_0' = \frac{\mu (\vartheta^-)^2}{2}. \quad (13.11)$$

Величину кинетического момента относительно системы центра масс можно записать в виде (см. (12.16))

$$M_0' = \mu r v \sin(\mathbf{r}, \mathbf{v})|_{t \rightarrow -\infty},$$

откуда, учитывая, что

$$r \sin(\mathbf{r}, \mathbf{v})|_{t \rightarrow -\infty} = \rho^- \quad (13.12)$$

(см. рис. 13.1), найдем

$$M_0' = \mu \rho^- v^-. \quad (13.13)$$

Соотношения (13.11), (13.13) и решение (13.10) дают возможность найти угол φ_m как функцию заданных величин и тем самым определить углы отклонения скоростей первой и второй частиц в системе центра масс. Эти углы равны между собой, так как в указанной системе импульс двух частиц всегда равен нулю, и, следовательно, скорости обеих частиц в любой момент времени направлены в противоположные стороны. Таким образом, угол между векторами $\mathbf{v}_1^{+'}$ и $\mathbf{v}_1^{-'}$ равен углу между $\mathbf{v}_2^{+'}$ и $\mathbf{v}_2^{-'}$. Назовем этот угол углом рассеяния в системе центра масс и обозначим его θ_m . Между углами φ_m и θ_m существует соотношение, которое для центрально-симметричного взаимодействия принимает весьма простой вид. Действительно, в этом случае движение частиц относительно их центра масс происходит в плоскости, а траектории частиц симметричны относительно апсид (см. стр. 72), в связи с чем

$$\theta_m = \pi - 2\varphi_m. \quad (13.14)$$

Соотношения (13.4) и (13.5) с учетом (13.9)—(13.14) приводят к решению задачи о рассеянии двух частиц. Запишем это решение в виде

$$\mathbf{v}_1^{+'} = -\frac{m_2}{m} v^- \mathbf{n}_{0m}, \quad \mathbf{v}_2^{+'} = \frac{m_1}{m} v^- \mathbf{n}_{0m}, \quad (13.15)$$

$$\mathbf{v}_1^{-'} = \mathbf{v}_m^- - \frac{m_2}{m} v^- \mathbf{n}_{0m}, \quad \mathbf{v}_2^{-'} = \mathbf{v}_m^- + \frac{m_1}{m} v^- \mathbf{n}_{0m}, \quad (13.16)$$

где $\mathbf{v}_m^- = \frac{1}{m} (m_1 \mathbf{v}_1^- + m_2 \mathbf{v}_2^-)$, $v^- = |\mathbf{v}_2^- - \mathbf{v}_1^-|$, а единичный вектор \mathbf{n}_{0m} определен углами ϵ и θ_m ; один из этих углов, ϵ , задает ориентацию плоскости движения относительно системы центра масс при заданных векторах \mathbf{v}_2^- , \mathbf{v}_1^- , а угол θ_m является углом рассеяния частиц в системе

центра масс; зависимость угла θ_m от величин ρ^- , v^- и характера взаимодействия определяется интегралом

$$\theta_m = \pi - 2 \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{\rho^-}{r^2} \frac{dr}{\left[1 - \frac{2U(r)}{\mu (v^-)^2} - \frac{(\rho^-)^2}{r^2}\right]^{1/2}}, \quad (13.17)$$

где r_{\min} является корнем уравнения

$$1 - \frac{2U(r)}{\mu (v^-)^2} - \frac{(\rho^-)^2}{r^2} = 0. \quad (13.18)$$

Итак, формулы (13.16) и (13.17) представляют собой решение задачи об упругом рассеянии двух частиц. Эта задача является частным случаем задачи двух тел, когда интересуются лишь скоростями частиц, причем скоростями не в любой момент времени, а после рассеяния. Поэтому в задаче о рассеянии требуется меньшая информация относительно начальных условий по сравнению с задачей двух тел. Подчеркнем еще одну особенность задачи о рассеянии. Так как решение в виде (13.16) получено на основе лишь законов сохранения, то скорости после рассеяния v_1^+ , v_2^+ являются одними и теми же функциями скоростей до рассеяния v_1^- , v_2^- и углов ϵ , θ_m при любом центральном взаимодействии частиц. С другой стороны, v_1^+ и v_2^+ как функции скоростей v_1^- , v_2^- , угла ϵ и первоначального расстояния ρ^- будут различными для разных взаимодействий, так как зависимость θ_m от ρ^- и v^- определяется видом потенциальной энергии.

Только в одном случае угол отклонения в системе центра масс имеет определенное значение при любой потенциальной энергии взаимодействия. Это случай лобового удара, когда

$$\rho^- = 0 \quad (\varphi_m = 0, \quad \theta_m = \pi) \quad (13.19)$$

и, следовательно, вектор \mathbf{n}_{0m} направлен противоположно вектору \mathbf{v}^- :

$$\mathbf{n}_{0m} = -\frac{\mathbf{v}^-}{v}. \quad (13.20)$$

Подставляя (13.20) в (13.16), получим решение задачи о рассеянии для случая лобового удара

$$\begin{aligned} v_1^+ &= \frac{m_1 - m_2}{m} v_1^- + \frac{2m_2}{m} v_2^-, \\ v_2^+ &= \frac{2m_1}{m} v_1^- + \frac{m_2 - m_1}{m} v_2^-. \end{aligned} \quad (13.21)$$

Расчет общего случая, когда $\rho^- \neq 0$, становится более наглядным, если использовать графическое изображение решения (13.16), т. е. использовать так называемую диаграмму скоростей. Прежде всего построим эту диаграмму в системе S_m . Скорости после рассея-

ния известны из решения (13.15), а скорости до рассеяния получим, устремив в (12.9) $t \rightarrow -\infty$. Тогда найдем, что

$$\mathbf{v}_1^- = -\frac{m_2}{m} \mathbf{v}^-, \quad \mathbf{v}_2^- = \frac{m_1}{m} \mathbf{v}^- \quad (13.22)$$

Используя (13.22) и (13.15), получим диаграмму скоростей в системе

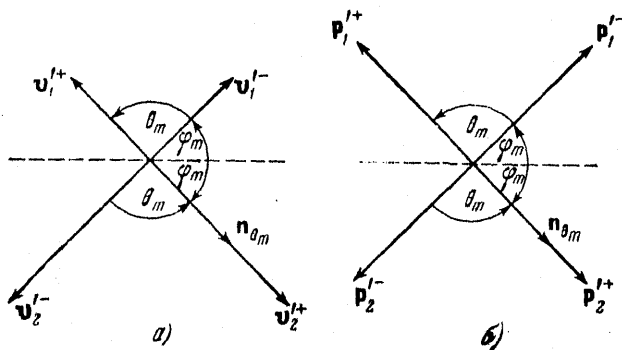


Рис. 13.3.

S_m (рис. 13.3, а). В этой системе особенно просто выглядит диаграмма импульсов. Умножая скорости точек (см. (13.15) и (13.22)) на соответствующие массы, получим выражения для импульсов точек относительно S_m

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_1^- &= -\mu \mathbf{v}^-, & \mathbf{p}_2^- &= \mu \mathbf{v}^-, \\ \mathbf{p}_1^+ &= -\mu \mathbf{v}^+, & \mathbf{p}_2^+ &= \mu \mathbf{v}^+. \end{aligned} \quad (13.23)$$

Наконец, используя (13.23), получим диаграмму, изображенную на рис. 13.3, б. Из диаграммы видно, что упругое рассеяние двух частиц относительно системы их центра масс сводится к повороту скоростей и импульсов частиц на один и тот же угол рассеяния θ_m ; при этом величины скоростей (и импульсов) сохраняются.

Диаграмма скоростей относительно лабораторной системы отсчета соответствует решению (13.16) (рис. 13.4). Заметим, что в общем случае плоскость, образуемая на диаграмме скоростей векторами \mathbf{v}_1^- и \mathbf{v}_2^- , не совпадает с плоскостью, образуемой векторами \mathbf{v}_1^+ и \mathbf{v}_2^+ . Однако эти плоскости пересекаются и конец вектора скорости центра масс лежит на этой линии пересечения. Плоскость, в которой лежат скорости точек, определенные относительно системы S_m , не совпадает,

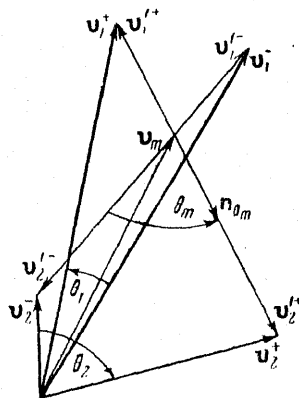


Рис. 13.4.

вообще говоря, ни с плоскостью векторов $\mathbf{v}_1^-, \mathbf{v}_2^-$, ни с плоскостью векторов $\mathbf{v}_1^+, \mathbf{v}_2^+$.

В заключение этого параграфа рассмотрим захват частиц, точнее, рассмотрим падение частиц друг на друга, когда $r \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$. Исследование этого случая можно провести с помощью условий (7.9) и (7.11). Действительно, заменяя в этих формулах m на приведенную массу μ и учитывая (13.11) и (13.13), получим неравенство, определяющее область изменения r в задаче двух тел:

$$\frac{\mu(v^-)^2}{2} \geq U(r) + \frac{\mu(v^-)^2}{2} \cdot \frac{(\rho^-)^2}{r^2}, \quad (13.24)$$

а также условие падения частиц *)

$$0 \geq r^2 U(r)|_{r \rightarrow 0} + \frac{\mu(v^-)^2}{2} (\rho^-)^2. \quad (13.25)$$

Из (13.25) видно, что для сил отталкивания условие падения не удовлетворяется ни при каких ρ^- . В случае преобладания при $r \rightarrow 0$ быстро убывающих сил притяжения падение становится возможным хотя бы для некоторых прицельных расстояний. Если известны потенциальная энергия взаимодействия частиц, их массы и скорости до захвата (т. е. при $t \rightarrow -\infty$), то можно, воспользовавшись соотношениями (13.24) и (13.25), определить, при каких прицельных расстояниях произойдет захват.

Пример 13.1. Рассеяние двух частиц, одна из которых до рассеяния покоится **).

Частица с массой m_1 до рассеяния покоится, т. е. $\mathbf{v}_1^- = 0$, а вторая частица массы m_2 движется со скоростью \mathbf{v}_2^- относительно лабораторной системы отсчета. Определить абсолютные величины и направления скоростей обеих частиц после рассеяния относительно L -системы как функции θ_m — угла рассеяния в системе центра масс.

Из условия видно, что скорость центра масс и разность скоростей частиц до рассеяния соответственно равны

$$\mathbf{v}_m^- = \frac{m_2}{m} \mathbf{v}_2^-, \quad \mathbf{v}^- = \mathbf{v}_2^-. \quad (1)$$

Отсюда с помощью (13.22) получим скорости точек до рассеяния в системе S_m

$$\mathbf{v}_1'^- = -\frac{m_2}{m} \mathbf{v}_2^- = -\mathbf{v}_m^-, \quad \mathbf{v}_2'^- = \frac{m_1}{m} \mathbf{v}_2^-, \quad (2)$$

*) См. [21], § 14.

**) См. [21], § 17.

а используя (13.15) и (13.16), найдем скорости частиц после рассеяния

$$\begin{aligned} v_1^* &= -\frac{m_2}{m} v_1 n_{cm}, & v_2^* &= \frac{m_1}{m} v_1 n_{cm}, \\ v_1^* &= \frac{m_2}{m} v_1^* - \frac{m_2}{m} v_1 n_{cm}, & v_2^* &= \frac{m_1}{m} v_1^* + \frac{m_1}{m} v_1 n_{cm}. \end{aligned} \quad (3)$$

В рассматриваемом примере движение является плоским как относительно системы S_m , так и относительно L -системы, причем плоскости движения в обеих системах совпадают друг с другом. Благодаря этому одну из координатных плоскостей L -системы можно совместить с плоскостью движения. Тогда вектор n_{cm} , лежащий в этой плоскости, будет определяться одним параметром, а именно углом рассеяния θ_m . Заметим также, что в системе S_m величина скорости первой точки после рассеяния равна величине скорости центра масс, а отношение v_1^*/v_2^* всегда равно обратному отношению масс точек.

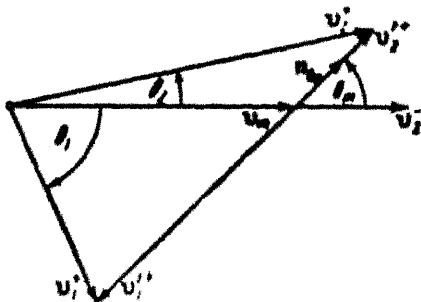


Рис. 13.5.

Диаграмма скоростей для данного примера приведена на рис. 13.6. Если b_1 и b_2 — радиусы-векторы первой и второй частиц относительно центра масс, то v_{cm} — величина скорости v_{cm}^* второй частицы в L -системе. Если v_1^* — величина скорости v_1^* второй частицы в L -системе, то v_2^* — величина скорости v_2^* первой частицы в L -системе. Решив диаграмму, решим (3) и найдем

$$\begin{aligned} v_1^* &= \frac{2v_{cm}}{1 + \frac{m_1}{m_2}} \sin \frac{\theta_m}{2}, \\ \theta_1 &= \frac{\pi - \theta_m}{2}, \\ v_2^* &= \frac{v_{cm}}{m} [m_1^2 + m_2^2 + 2m_1 m_2 \cos \theta_m]^{1/2}, \\ \operatorname{tg} \theta_2 &= \frac{\sin \theta_m}{\frac{m_2}{m_1} + \cos \theta_m}. \end{aligned} \quad (4)$$

Рассмотрим решение (4) при различных соотношениях между массами частиц, считая для определенности, что между частицами действуют силы отталкивания. Тогда θ_m может изменяться от 0 до π ; причем $\theta_m = 0$ соответствует бесконечно далекому пролету частиц, а $\theta_m = \pi$ соответствует лобовому удару.

Пусть, например, $m_1 > m_2$, т. е. масса частицы, покоящейся до рассеяния, больше массы налетающей частицы (рис. 13.6, а). В этом

случае с изменением θ_m от 0 до π угол θ_2 изменяется также от 0 до π , т. е. налетающая частица может быть рассеяна по любому направлению. Соответственно частица, покоящаяся до рассеяния, может быть рассеяна под углом от $\pi/2$ до 0. Угол разлета $\theta_1 + \theta_2$ для любых θ_m будет больше $\pi/2$, а в случае лобового удара скорости частиц после

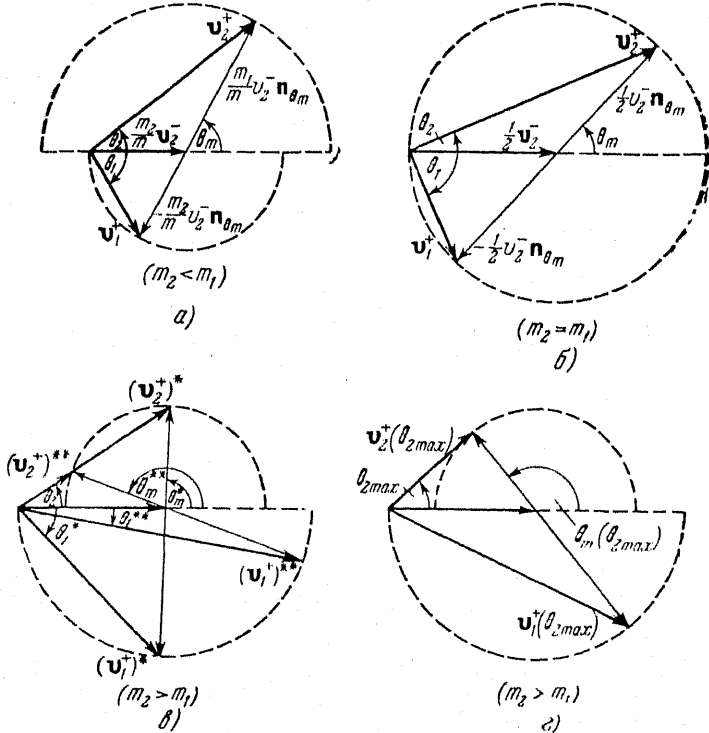


Рис. 13.6.

рассеяния v_1^+ и v_2^+ взаимно противоположны. Весьма простой вид принимает решение (4), если $m_1 \gg m_2$:

$$v_1^+ = 0, \quad v_2^+ = v_2^-, \quad \theta_2 = \theta_m. \quad (5)$$

В случае равенства масс налетающей и покоящейся частиц из решения (4) получим (рис. 13.6, б)

$$\begin{aligned} v_1^+ &= v_2^- \sin \frac{\theta_m}{2}, & \theta_1 &= \frac{\pi - \theta_m}{2}, \\ v_2^+ &= v_2^- \cos \frac{\theta_m}{2}, & \theta_2 &= \frac{\theta_m}{2}. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь угол разлета $\theta_1 + \theta_2$ для любого θ_m равен $\pi/2$, а в случае лобового удара происходит «обмен» скоростей.

Пусть теперь $m_2 > m_1$, т. е. масса падающей частицы больше, чем масса покоящейся до рассеяния частицы (рис. 13.6, в). Из диаграммы скоростей видно, что угол разлета $\theta_1 + \theta_2$ для любого θ_m меньше чем $\pi/2$, а в результате лобового удара скорости частиц v_1^+ и v_2^+ направлены одинаково. Наиболее интересной особенностью рассматриваемого случая является то, что *данному углу θ_m соответствуют определенные значения v_2^+ и θ_2 , а данному углу θ_2 соответствуют два значения θ_m и v_2^+* . Иначе говоря, функции $v_2^+(\theta_m)$ и $\theta_2(\theta_m)$ являются однозначными функциями, а функции $\theta_m(\theta_2)$ и $v_2^+(\theta_2)$ — двузначными. Это необходимо иметь в виду, так как экспериментально измеряется именно угол θ_2 и, следовательно, этому углу соответствуют два возможных значения θ_m и v_2^+ . С этой особенностью связано и то, что угол отклонения θ_2 падающей частицы изменяется в пределах от 0 до некоторого максимального значения $\theta_{2\max}$ (рис. 13.6, г), определяемого формулой

$$\sin \theta_{2\max} = \frac{m_1}{m_2}. \quad (7)$$

Пользуясь последней из формул (4), найдем, что

$$\cos^2 \theta_m + 2 \frac{m_2}{m_1} \sin^2 \theta_2 \cos \theta_m + \left(\frac{m_2}{m_1} \sin \theta_2 \right)^2 - \cos^2 \theta_2 = 0. \quad (8)$$

В решении этого уравнения следует выбрать знак перед радикалом, для чего рассмотрим предельные случаи далекого пролета и лобового удара. Например, если $m_2 < m_1$, то из диаграммы, представленной на рис. 13.6, а, в предделе получим

$$\theta_2 \rightarrow 0, \text{ если } \theta_m \rightarrow 0; \quad \theta_2 \rightarrow \pi, \text{ если } \theta_m \rightarrow \pi. \quad (9)$$

К этим предельным значениям приводит решение уравнения (8) с положительным знаком перед радикалом:

$$\cos \theta_m = + \cos \theta_2 \sqrt{1 - \left(\frac{m_2}{m_1} \sin \theta_2 \right)^2} - \frac{m_2}{m_1} \sin^2 \theta_2. \quad (10)$$

Если $m_2 > m_1$, то из диаграммы, представленной на рис. 13.6, в, можно увидеть, что

$$\theta_2 \rightarrow 0 \text{ при } \theta_m \rightarrow 0 \text{ и } \theta_m \rightarrow \pi, \quad (11)$$

т. е. решение уравнения (8) будет содержать оба знака:

$$\cos \theta_m = \pm \cos \theta_2 \sqrt{1 - \left(\frac{m_2}{m_1} \sin \theta_2 \right)^2} - \frac{m_2}{m_1} \sin^2 \theta_2. \quad (12)$$

Первая ветвь этой функции, соответствующая положительному знаку перед радикалом, дает значения θ_m , лежащие в пределах от 0 до

$\theta_m(\theta_{2\max})$ (при этом θ_2 изменяется в пределах от 0 до $\theta_{2\max}$). Вторая ветвь соответствует значениям θ_m , лежащим в пределах от $\theta_m(\theta_{2\max})$ до π (при этом θ_2 изменяется в пределах от $\theta_{2\max}$ до 0).

Пример 13.2. Рассеяние двух частиц, скорости которых до рассеяния равны по величине и противоположны по направлению.

Пусть скорости обеих частиц до рассеяния относительно \mathcal{L} -системы равны

$$\mathbf{v}_1^- \neq 0, \quad \mathbf{v}_2^- = -\mathbf{v}_1^-.$$

Определить абсолютные величины и направления скоростей частиц в лабораторной системе как функции угла θ_m .

Согласно условию задачи скорость центра масс частиц, разность их скоростей и скорости частиц относительно системы S_m до рассеяния равны (см. (13.22))

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_m^- &= \frac{m_1 - m_2}{m} \mathbf{v}_1^-, & \mathbf{v}^- &= -2\mathbf{v}_1^-, \\ \mathbf{v}_1'^- &= 2 \frac{m_2}{m} \mathbf{v}_1^-, & \mathbf{v}_2'^- &= -2 \frac{m_1}{m} \mathbf{v}_1^-. \end{aligned} \quad (1)$$

Отсюда с помощью (13.16) находим

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1^+ &= \frac{m_1 - m_2}{m} \mathbf{v}_1^- - 2 \frac{m_2}{m} \mathbf{v}_1^- \mathbf{n}_{0m}, \\ \mathbf{v}_2^+ &= \frac{m_1 - m_2}{m} \mathbf{v}_1^- + 2 \frac{m_1}{m} \mathbf{v}_1^- \mathbf{n}_{0m}. \end{aligned} \quad (2)$$

Поскольку скорости $\mathbf{v}_1'^-$ и $\mathbf{v}_2'^-$ согласно (1) коллинеарны скорости центра масс, постольку движение является плоским не только в системе центра масс, но и в \mathcal{L} -системе. Это дает возможность построить плоскую диаграмму скоростей (рис. 13.7). При построении диаграммы мы учли, что между величинами скоростей $\mathbf{v}_2'^+$ и $\mathbf{v}_1'^+$ имеет место соотношение

$$\frac{v_2'^+}{v_1'^+} = \frac{m_1}{m_2}$$

и что $v_m^- < v_1^-$ (см. (1)).

Из решения (2) и диаграммы скоростей получим интересные нас функции:

$$\begin{aligned} v_1^+ &= \frac{v_1^-}{m} [4m_2^2 + (m_1 - m_2)^2 - 4m_2(m_2 - m_1) \cos \theta_m]^{1/2}, \\ v_2^+ &= \frac{v_1^-}{m} [4m_1^2 + (m_1 - m_2)^2 - 4m_1(m_1 - m_2) \cos \theta_m]^{1/2}, \\ \operatorname{tg} \theta_1 &= \frac{\sin \theta_m}{\frac{m_1 - m_2}{2m_2} + \cos \theta_m}, & \operatorname{tg} \theta_2 &= \frac{\sin \theta_m}{\frac{m_2 - m_1}{2m_1} + \cos \theta_m}. \end{aligned} \quad (3)$$

Проанализируем это решение. Пусть, например, $m_1 > 3m_2$; тогда из

(1) и (2) следует

$$v_2^+ > v_1^- > v_m^- > v_1^{+\prime} \quad (4)$$

Таким образом, скорость центра масс по величине больше, чем скорость первой частицы в системе S_m , но меньше скорости второй частицы в той же системе. Поэтому функция $\theta_m(\theta_1)$ будет двузначной, функция $\theta_m(\theta_2)$ — однозначной, а θ_1 будет изменяться в пределах

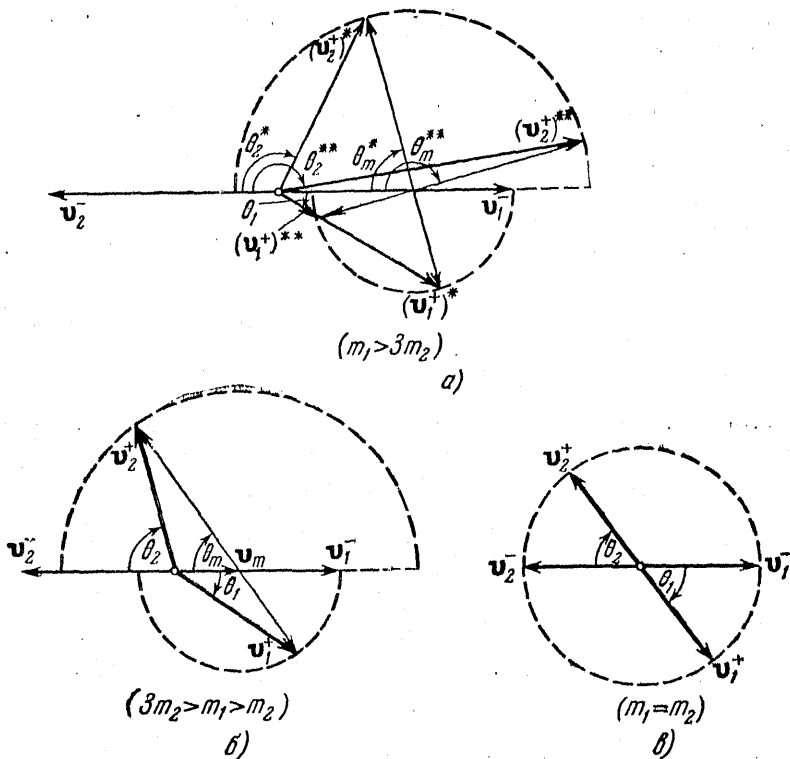


Рис. 13.7.

от 0 до $\theta_{1\max}$ (рис. 13.7, а). Угол максимального отклонения первой частицы определяется формулой

$$\sin \theta_{1\max} = \frac{2m_2}{m_1 - m_2}. \quad (5)$$

В предельных случаях далекого пролета и лобового удара, согласно диаграмме, представленной на рис. 13.7, а,

$$\begin{aligned} \text{если } \theta_m \rightarrow 0, & \text{ то } \theta_1 \rightarrow 0 \text{ и } \theta_2 \rightarrow 0; \\ \text{если } \theta_m \rightarrow \pi, & \text{ то } \theta_1 \rightarrow 0, \text{ а } \theta_2 \rightarrow \pi. \end{aligned} \quad (6)$$

Используя эти предельные значения, а также третью и четвертую функции из формул (3), получим следующие выражения:

$$\cos \theta_m = \pm \cos \theta_1 \left[1 - \left(\frac{m_1 - m_2}{2m_2} \right)^2 \sin^2 \theta_1 \right]^{1/2} - \left(\frac{m_1 - m_2}{2m_2} \right) \sin^2 \theta_1, \quad (7)$$

$$\cos \theta_m = \cos \theta_2 \left[1 - \left(\frac{m_1 - m_2}{2m_1} \right)^2 \sin^2 \theta_2 \right]^{1/2} + \frac{m_1 - m_2}{2m_1} \sin^2 \theta_2. \quad (8)$$

В случае $m_1 = 3m_2$ общее решение (3) приводит к более простым формулам для первой частицы

$$v_1^+ = v_1^- \cos \frac{\theta_m}{2}, \quad \theta_1 = \frac{\theta_m}{2}. \quad (9)$$

Если же $3m_2 > m_1 > m_2$ (рис. 13.7, б), то

$$v_2^+ > v_1^- > v_1^+ > v_m^-. \quad (10)$$

Поэтому как θ_1 , так и θ_2 изменяются от 0 до π , причем в предельных случаях будем иметь

$$\begin{aligned} \theta_m \rightarrow 0, \quad \theta_1 \rightarrow 0, \quad \theta_2 \rightarrow 0; \\ \theta_m \rightarrow \pi, \quad \theta_1 \rightarrow \pi, \quad \theta_2 \rightarrow \pi. \end{aligned} \quad (11)$$

В соответствии с этим из решения (3) аналогично предыдущему получим однозначную функцию $\theta_m(\theta_1)$, которую запишем в виде

$$\cos \theta_m = \cos \theta_1 \left[1 - \left(\frac{m_1 - m_2}{2m_2} \right)^2 \sin^2 \theta_1 \right]^{1/2} - \frac{m_1 - m_2}{2m_2} \sin^2 \theta_1 \quad (12)$$

(меняя здесь индексы 1 и 2 местами, найдем функцию $\cos \theta_m(\theta_2)$).

Наконец, если $m_1 = m_2$, то скорость центра масс равна нулю и, следовательно, с помощью формулы (2) найдем (рис. 13.7, в)

$$\begin{aligned} v_1^+ = v_1^- = -v_1^- n_{\theta_m}, \\ v_2^+ = v_2^- = +v_1^- n_{\theta_m}. \end{aligned} \quad (13)$$

Соответственно из формулы (3) получим

$$v_1^+ = v_2^+ = v_1^-, \quad \theta_1 = \theta_2 = \theta_m. \quad (14)$$

В этом случае решение принимает очень простой вид, так как л-система и система центра масс совпадают.

Пример 13.3. Рассеяние двух частиц с электростатическим взаимодействием.

Предполагая, что одна из частиц до рассеяния покоится ($v_1^- = 0$), а вторая налетает на нее с заданной скоростью v_2^- относительно л-системы, а также считая известными прицельное расстояние ρ и ориентацию плоскости, в которой движутся частицы, определить

абсолютные величины и направления скоростей обеих частиц как функции v_2^- и ρ^- .

Заметим, что часть этой задачи уже решена в примере 13.1. Действительно, формулы (4) этого примера дают интересные нас величины как функции v_2^- и θ_m — угла рассеяния в ζ -системе:

$$\begin{aligned} v_1^+ &= v_1^+(v_2^-, \theta_m), & \theta_1 &= \theta_1(\theta_m), \\ v_2^+ &= v_2^+(v_2^-, \theta_m), & \theta_2 &= \theta_2(\theta_m). \end{aligned} \quad (1)$$

Таким образом, чтобы решить поставленную в настоящем примере задачу, нужно найти угол θ_m как функцию скорости v_2^- и прицельного расстояния ρ^- . Эта зависимость определяется интегралом (13.17)

$$\theta_m = \pi - 2 \int_0^{\xi_{\max}} \frac{d\xi}{\left(1 + \frac{2\alpha}{\mu\rho^-(v^-)^2} \xi - \xi^2\right)^{1/2}},$$

в котором потенциальная энергия подставлена в виде (8.1), α — постоянная, характеризующая взаимодействие, $v^- = |\mathbf{v}_2^- - \mathbf{v}_1^-|$ — величина относительной скорости частиц до рассеяния, а ξ_{\max} определяется из уравнения

$$\xi^2 - \frac{2\alpha}{\mu\rho^-(v^-)^2} \xi - 1 = 0$$

(см. (13.18)). Вычисляя этот интеграл, для угла отклонения в ζ -системе получаем выражение

$$\theta_m = -2 \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{\mu\rho^-(v^-)^2}. \quad (2)$$

В случае сил притяжения ($\alpha > 0$) угол отклонения $\theta_m < 0$, а для сил отталкивания ($\alpha < 0$) этот угол положителен и функция (2) принимает вид

$$\theta_m = 2 \operatorname{arctg} \frac{|\alpha|}{\mu\rho^-(v^-)^2}. \quad (3)$$

В соответствии с условием данного примера в формулах (2) и (3) нужно положить $v^- = v_2^-$.

Совокупность формул (4) примера 13.1 и формул (2), (3) настоящего примера дает решение поставленной задачи. Запишем его в общем виде:

$$\begin{aligned} v_1^+ &= v_1^+[v_2^-, \theta_m(\rho^-, v_2^-)], & \theta_1 &= \theta_1[\theta_m(\rho^-, v_2^-)], \\ v_2^+ &= v_2^+[v_2^-, \theta_m(\rho^-, v_2^-)], & \theta_2 &= \theta_2[\theta_m(\rho^-, v_2^-)]. \end{aligned} \quad (4)$$

Ввиду громоздкости решения приведем более простые частные случаи. Пусть, например, $m_1 > m_2$; тогда, используя формулу (5) примера 13.1 и формулы (2) и (3) настоящего примера, находим

$$\begin{aligned} v_1^* &= 0, & v_2^* &= v_1, \\ \theta_1 &= -2 \operatorname{arctg} \left(\frac{a}{m_2 \rho^2 (v_1)^2} \right). \end{aligned} \quad (3)$$

Если же массы налетающей и покоящейся до рассеяния частицы равны, то, учитывая формулу (5) примера 13.1, получаем

$$\begin{aligned} v_1^* &= \frac{v_1}{\left\{ 1 + \left| \frac{a}{m_2 \rho^2 (v_1)^2} \right| \right\}^{1/2}}, & \theta_1 &= \frac{\pi}{2} - \theta_2, \\ v_2^* &= \frac{v_1}{\left\{ 1 + \left| \frac{a}{m_2 \rho^2 (v_1)^2} \right| \right\}^{1/2}}, & \theta_2 &= -\operatorname{arctg} \left(\frac{a}{m_2 \rho^2 (v_1)^2} \right). \end{aligned} \quad (4)$$

Рассмотрим в заключение случай, когда скорости частиц до рассеяния равны по величине и противоположны по направлению, т. е.

$$v_2 = -v_1 \quad (v = 2v_1) \quad (7)$$

Тогда v_1^* , θ_1 , v_2^* , θ_2 как функции v_1 , ρ будут заданы совокупностью формул (3) примера 13.2 и формул (2), (3) и (7) настоящего примера. Ввиду громоздкости общего решения приведем частные случаи. Например, если $m_1 = 3m_2$, то, используя формулу (9) примера 13.2, получим для первой частицы

$$v_1^* = \frac{v_1}{\left\{ 1 + \left| \frac{a}{m_2 \rho^2 (v_1)^2} \right| \right\}^{1/2}}, \quad \theta_1 = -\operatorname{arctg} \left| \frac{a}{m_2 \rho^2 (v_1)^2} \right|. \quad (8)$$

Если же массы налетающих друг на друга частиц равны ($m_1 = m_2$), то, используя формулы (14) примера 13.2, аналогично найдем

$$v_1^* = v_2^* = v_1, \quad \theta_1 = \theta_2 = -2 \operatorname{arctg} \left| \frac{a}{2m_2 \rho^2 (v_1)^2} \right|. \quad (9)$$

Пример 13.4. Рассеяние двух однородных абсолютно упругих шариков.

Потенциальная энергия взаимодействия двух частиц с массами m_1 и m_2 имеет вид

$$U(r) = \begin{cases} 0, & \text{если } r \geq a, \\ \infty, & \text{если } r \leq a, \end{cases} \quad (1)$$

где $a = a_1 + a_2$ — сумма радиусов первой и второй частиц-шариков. Предполагая, что в одном случае вторая частица налетает

на первую, покоящуюся до рассеяния, а во втором — обе частицы движутся навстречу друг другу с одинаковой скоростью, определить абсолютные величины и направления скоростей обеих частиц после рассеяния как функции их скоростей до рассеяния и прицельного расстояния.

Пользуясь (13.17) и (13.18), можно определить угол отклонения θ_m . Однако ввиду обращения U в бесконечность θ_m удобнее определить с помощью графика «эффективной» потенциальной энергии и траекторий частиц в ζ -системе. Действительно, подставляя значения E'_0 и M'_0 из (13.11) и (13.13) в выражение U_{eff} , получим

$$U_{\text{eff}} = U(r) + E'_0 \left(\frac{\rho^-}{r} \right)^2 \quad \left(E'_0 = \frac{\mu (\sigma^-)^2}{2} \right). \quad (2)$$

Формулы (1) и (2) дают возможность построить график $U_{\text{eff}}(r)$ (рис. 13.8, а), из которого видно, что

$$\begin{aligned} r_{\min} &= a, & \text{если } E'_0 &\geq E'_0 \left(\frac{\rho^-}{a} \right)^2 & \quad (\text{т. е. } \rho^- \leq a); \\ r_{\min} &= \rho^-, & \text{если } E'_0 &\leq E'_0 \left(\frac{\rho^-}{a} \right)^2 & \quad (\text{т. е. } \rho^- \geq a). \end{aligned} \quad (3)$$

В первом случае происходит столкновение шариков, во втором — нет. Для обоих случаев траектории геометрических центров шариков относительно ζ -системы изображены на рис. 13.8, б и 13.8, в (эти рисунки соответствуют соотношениям $m_1 > m_2$ и $a_1 > a_2$; их полезно сравнить с рис. 8.1 и 13.1). Из рис. 13.8, б и 13.8, в нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} \sin \varphi_m &= \frac{\rho^-}{a} & (\rho^- \leq a), \\ \varphi_m &= \frac{\pi}{2} & (\rho^- \geq a). \end{aligned} \quad (4)$$

Отсюда, учитывая соотношение (13.14), найдем

$$\theta_m = \begin{cases} 2 \arccos \left(\frac{\rho^-}{a} \right) & (\rho^- \leq a), \\ 0 & (\rho^- \geq a). \end{cases} \quad (5)$$

Следовательно, угол θ_m не зависит от разности скоростей и от масс частиц. Он зависит лишь от отношения константы взаимодействия a и прицельного расстояния ρ^- , что связано с особенностью взаимодействия абсолютно упругих шариков. Заметим, что (5) можно получить интегрированием (13.17), определяя r_{\min} из формулы (3); при этом следует учесть, что потенциальная энергия U в пределах интегрирования от r_{\min} до ∞ равна нулю.

Если скорости обеих частиц до рассеяния относительно l -системы задать так же, как в примерах 13.1 и 13.2, то решение задачи

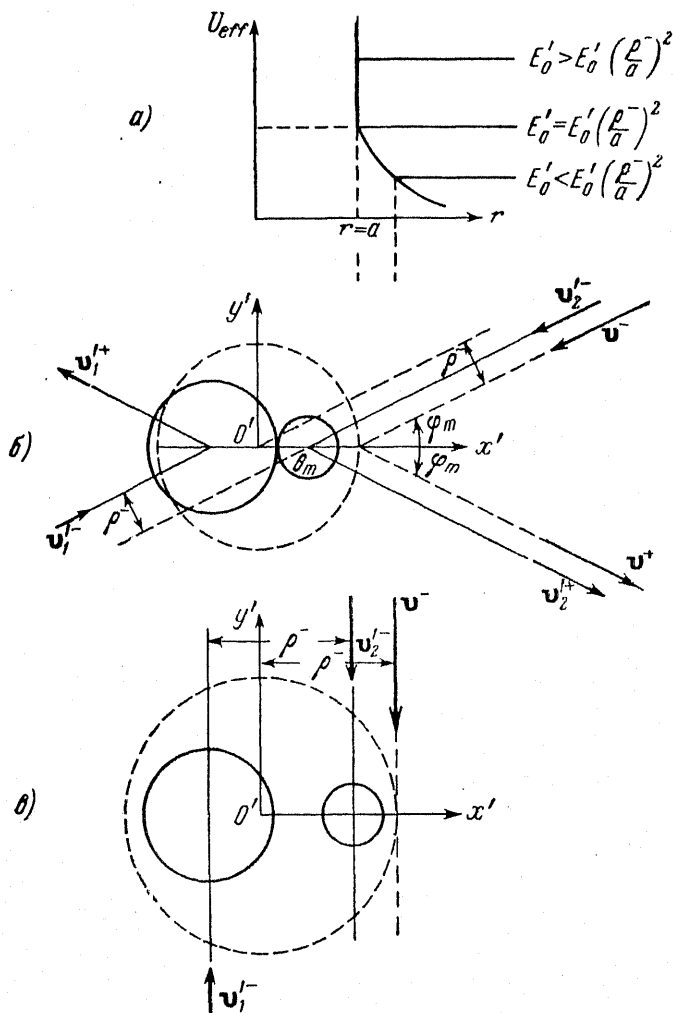


Рис. 13.8.

о рассеянии частиц-«шариков» в первом случае определится совокупностью формул (4) примера 13.1 и формулы (5) настоящего примера, а во втором случае — совокупностью формул (3) примера 13.2 и той же формулы (5).

Приведем решение в простейших случаях. Пусть

$$v_1^- = 0, \quad v_2^- \neq 0;$$

Тогда, используя формулы (5), (6) примера 13.1 и считая $\rho^- \leq a$, найдем

$$\begin{aligned} v_1^+ &= 0, & \theta_1 &= 2 \arccos\left(\frac{\rho^-}{a}\right) & (m_1 > m_2); \\ v_2^+ &= v_2^-, \end{aligned} \quad (6)$$

$$v_1^+ = v_2^- \sqrt{1 - \left(\frac{\rho^-}{a}\right)^2}, \quad \theta_1 = \frac{\pi}{2} - \arccos\left(\frac{\rho^-}{a}\right), \quad (m_1 = m_2). \quad (7)$$

$$v_2^+ = v_2^- \left(\frac{\rho^-}{a}\right), \quad \theta_2 = \arccos\left(\frac{\rho^-}{a}\right)$$

Решение в случае $v_2^- = -v_1^-$ найдем, используя, например, формулы (9) примера 13.2. Тогда для первой частицы получим

$$\begin{aligned} v_1^+ &= v_1^- \left(\frac{\rho^-}{a}\right), & \theta_1 &= \arccos\left(\frac{\rho^-}{a}\right) \\ & (m_1 = 3m_2, \quad \rho^- \leq a). \end{aligned} \quad (8)$$

Если же $m_1 = m_2$, то из формул (14) примера 13.2 находим

$$\begin{aligned} v_1^+ &= v_2^+ = v_1^-, \\ \theta_1 &= \theta_2 = 2 \arccos\left(\frac{\rho^-}{a}\right) \quad (\rho^- \leq a). \end{aligned} \quad (9)$$

§ 14. Поперечные сечения рассеяния и сечение захвата

В предыдущем параграфе было изучено рассеяние двух частиц; однако на практике чаще приходится иметь дело не с одним актом рассеяния, а со множеством таких актов. Например, в известных опытах Резерфорда пучок α -частиц рассеивался на ядрах атомов металлической пленки.

Изучим более общий случай рассеяния, а именно рассеяние одного пучка частиц на другом пучке.

Пусть один из пучков, *достаточно разреженный и однородный по сечению, состоит из одинаковых частиц* с массами m_1 ; все эти частицы до рассеяния имеют *одинаковые скорости*, равные v_1^- . Второй пучок состоит из других одинаковых частиц с массами m_2 и скоростями до рассеяния v_2^- (в остальном второй пучок удовлетворяет тем же требованиям, что и первый). Процесс рассеяния одного пучка на другом ввиду их разреженности можно свести к рассеянию каждой частицы одного пучка на некоторой частице другого пучка, причем рассеяние каждой частицы по той же причине можно считать однократным. Следовательно, в задаче о рассеянии таких пучков нужно учитывать взаимодействие каждой частицы одного

пучка с некоторой частицей другого пучка, в то время как взаимодействием частиц данного пучка между собой можно пренебречь. Тогда акты рассеяния разных пар частиц будут независимы друг от друга, причем рассеяние каждой пары характеризуется своим прицельным расстоянием ρ^- и происходит в определенной плоскости относительно системы центра масс пары, т. е. характеризуется своим углом ϵ (см. рис. 14.1, на котором изображены траектории μ -точки для двух различных пар сталкивающихся частиц с одинаковыми ϵ и различными ρ^-).

Центры масс всех пар взаимодействующих частиц покоятся относительно друг друга, поскольку эти центры движутся относительно

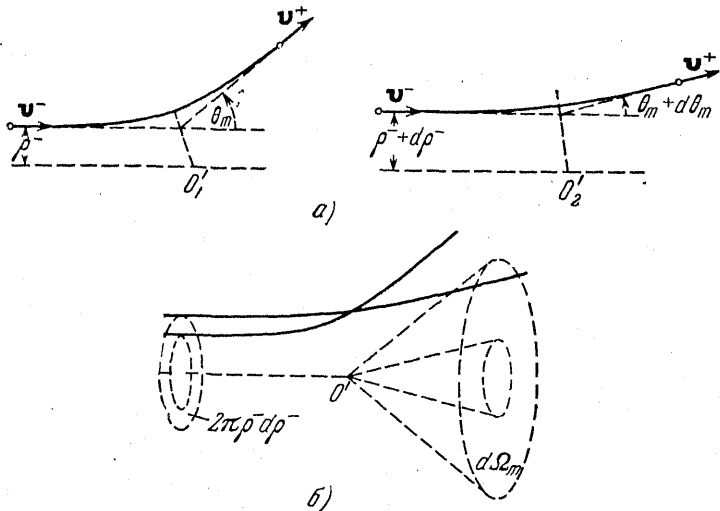


Рис. 14.1.

l -системы с одинаковой скоростью, равной $\mathbf{v}_m = \frac{1}{m} (m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2)$. Поэтому угол рассеяния θ_m для каждой данной пары взаимодействующих частиц будет одним и тем же относительно системы отсчета с началом в центре масс любой пары взаимодействующих частиц. Выберем одну из таких систем отсчета и будем называть ее условно системой центра масс или ζ -системой. В этой системе отсчета рассмотрим те μ -точки, прицельные расстояния которых лежат внутри интервала $\rho^-, \rho^- + d\rho^-$, а значение угла ϵ изменяется в пределах от 0 до 2π . В силу *центральной симметрии* взаимодействия между частицами эти μ -точки рассеются на углы от θ_m до $\theta_m + d\theta_m$ каждая в своей плоскости. Следовательно, на достаточном удалении от начала ζ -системы выбранные μ -точки попадут в телесный угол $d\Omega_m$ (рис. 14.1, б). Этот телесный угол ограничен поверхностями конусов

с вершинами в начале ζ -системы и углами растворов, равными соответственно $2\theta_m$ и $2(\theta_m + d\theta_m)$; ось конусов параллельна вектору \mathbf{v}^- , т. е. параллельна скорости μ -точек до рассеяния. Частицы второго пучка, соответствующие рассмотренным μ -точкам, после рассеяния также попадут в телесный угол $d\Omega_m$, поскольку они движутся по траекториям, подобным траекториям μ -точек. Что касается частиц первого пучка, соответствующих рассмотренным μ -точкам, то они рассеются в телесный угол той же величины, но с раствором конусов, направленным противоположно вектору \mathbf{v}^- .

Важной характеристикой процесса рассеяния является дифференциальное эффективное поперечное сечение рассеяния. Например, для частиц первого пучка эта величина определяется как *отношение числа dj_1^+ его частиц, рассеиваемых в телесный угол $d\Omega_m$ за единицу времени, к числу j_1^- частиц того же пучка, пролетающих за единицу времени через единичную площадку поперечного сечения пучка до рассеяния*. Таким образом, дифференциальное сечение рассеяния частиц первого пучка по определению равно

$$d\sigma_1 = \frac{dj_1^+}{j_1^-}. \quad (14.1)$$

Кроме дифференциального сечения, часто рассматривают *полное эффективное сечение рассеяния*. Оно равно *отношению общего числа Δj_1^+ частиц данного пучка, рассеиваемых за единицу времени под всеми углами $\theta_m \neq 0$, к плотности j_1^- потока этого пучка до рассеяния*. Итак, по определению полное сечение рассеяния частиц первого пучка равно

$$\sigma_1 = \frac{\Delta j_1^+}{j_1^-}. \quad (14.2)$$

Поскольку до рассеяния пучки *однородны по сечению*, постольку можно предположить, что поток числа частиц с прицельными расстояниями, лежащими в интервале от ρ^- до $\rho^- + d\rho^-$, равен плотности потока частиц до рассеяния, умноженной на *площадь кольца* с радиусами, равными ρ^- и $\rho^- + d\rho^-$. Тогда число частиц, рассеиваемых в телесный угол $d\Omega_m$ за единицу времени, равно (для первого пучка)

$$dj_1^+ = j_1^- \cdot 2\pi\rho^- d\rho^-. \quad (14.3)$$

Отсюда получим *дифференциальное сечение рассеяния в системе центра масс как функцию прицельного расстояния*:

$$d\sigma = 2\pi\rho^- d\rho^- \quad (14.4)$$

(здесь индекс у $d\sigma$ опущен, так как в ζ -системе две взаимодействующие частицы отклоняются на один и тот же угол θ_m , поэтому сечение рассеяния выражается через прицельное расстояние одинаково как для частиц первого пучка, так и для частиц второго пучка).

Формула (14.4) дает возможность найти простое и наглядное выражение для полного сечения рассеяния в том случае, когда на некотором расстоянии $r = r_{\max}$ между частицами можно пренебречь потенциальной энергией их взаимодействия. Тогда, очевидно, полное сечение будет равно площади круга радиуса r_{\max} , т. е.

$$\sigma = \pi (r_{\max})^2. \quad (14.5)$$

На основании (14.4) легко также получить сечение рассеяния как функцию угла θ_m и величины относительной скорости частиц v^- . Действительно, в задаче об упругом рассеянии двух частиц (см. (13.17)) мы видели, что угол θ_m является функцией ρ^- , v^- и масс частиц, причем вид этой функции зависит от характера взаимодействия между частицами. Разрешая функцию (13.17) относительно ρ^- , найдем прицельное расстояние в зависимости от θ_m и v^-

$$\rho^- = \rho^-(\theta_m, v^-), \quad (14.6)$$

а затем, используя (14.4), получим дифференциальное сечение рассеяния *обоих пучков как функцию угла рассеяния в системе центра масс:*

$$d\sigma = 2\pi\rho^- \left| \frac{d\rho^-}{d\theta_m} \right| d\theta_m. \quad (14.7)$$

Знак модуля в (14.7) связан с тем, что производная $\frac{d\rho^-}{d\theta_m}$ может быть отрицательной, а сечение рассеяния по определению является *положительной величиной*. Вместо выражения (14.7) часто используют дифференциальное сечение в виде

$$d\sigma = \frac{\rho^-}{\sin \theta_m} \left| \frac{d\rho^-}{d\theta_m} \right| d\Omega_m, \quad (14.8)$$

где $d\Omega_m = 2\pi \sin \theta_m d\theta_m$.

Экспериментальные исследования процессов рассеяния сводятся к измерению потока частиц до рассеяния и количества частиц, рассеиваемых под различными углами. Тем самым находят сечения рассеяния в лабораторной системе. Теоретически эти величины можно получить, вычисляя $d\sigma(\theta_m)$ в ζ -системе, а затем определяя функции $\theta_m(\theta_1)$ и $\theta_m(\theta_2)$ из диаграммы скоростей, основанной на решении (13.16). (θ_1 и θ_2 — углы рассеяния частиц первого и второго сорта в λ -системе). *Дифференциальные сечения рассеяния частиц первого и второго сортов в лабораторной системе можно получить как результат подстановок*

$$d\sigma_1 = d\sigma(\theta_m)|_{\theta_m(\theta_1)}, \quad d\sigma_2 = d\sigma(\theta_m)|_{\theta_m(\theta_2)}. \quad (14.9)$$

Формулы (14.9) справедливы, если функции $\theta_m(\theta_1)$ и $\theta_m(\theta_2)$ однозначны; однако примеры 13.1 и 13.2 показывают, что это требование не всегда

выполняется. Пусть, например, функция $\theta_m(\theta_2)$ будет двузначной, т. е.

$$\theta_m(\theta_2) = \begin{cases} \theta_m^*(\theta_2), \\ \theta_m^{**}(\theta_2), \end{cases} \quad (14.10)$$

где функции θ_m^* и θ_m^{**} однозначны. Из (14.10) следует, что в l -системе под углом θ_2 рассеиваются все частицы, которые в ζ -системе рассеиваются либо под углом θ_m^* , либо под углом θ_m^{**} . Поэтому в случае двузначной функции $\theta_m(\theta_2)$ для нахождения $d\sigma_2$ следует брать сумму сечений, соответствующих двум ветвям функции. Таким образом, учитывая (14.10), вместо второй из формул (14.9) получим

$$d\sigma_2 = d\sigma(\theta_m)|_{\theta_m^*(\theta_2)} + d\sigma(\theta_m)|_{\theta_m^{**}(\theta_2)}. \quad (14.11)$$

Заметим, что сумма сечений, подобная (14.11), является суммой модулей соответствующих функций, поскольку сечения рассеяния по определению положительны.

Полное сечение захвата σ_s определяется аналогично (14.2) как *отношение числа всех частиц данного пучка, захваченных за единицу времени, к плотности потока этого пучка до рассеяния*. Если из условий (13.24) и (13.25) вытекает, что прицельные расстояния, при которых происходит захват, удовлетворяют неравенствам

$$0 \leq \rho^- \leq \rho_s^-, \quad (14.12)$$

то, исходя из дифференциального выражения (14.4) и условия (14.12), получим полное сечение захвата в виде

$$\sigma_s = \pi (\rho_s^-)^2. \quad (14.13)$$

Пример 14.1. Дифференциальные сечения рассеяния частиц с электростатическим взаимодействием; формула Резерфорда.

Даны два пучка частиц: первый пучок состоит из частиц с массой m_1 и зарядом e_1 ; скорость этих частиц до рассеяния относительно l -системы равна v_1^- . Аналогичные величины для частиц второго пучка равны m_2 , e_2 , v_2^- . Оба пучка достаточно разрежены и до рассеяния однородны по сечению. Определить дифференциальные сечения рассеяния частиц обоих сортов в l -системе.

Пользуясь формулой (2) примера 13.3, найдем зависимость прицельного расстояния от угла отклонения в ζ -системе:

$$\rho^- = \frac{-\alpha}{\mu (v^-)^2} \operatorname{ctg} \left(\frac{\theta_m}{2} \right), \quad (1)$$

где $\alpha = -e_1 e_2$, причем если $\alpha > 0$, то $\theta_m < 0$, если же $\alpha < 0$, то $\theta_m > 0$. Подстановка этой функции в (14.8) приводит к следующему

выражению для сечения рассеяния в ζ -системе:

$$d\sigma = \left(\frac{\alpha}{2\mu (v^-)^2} \right)^2 \frac{d\Omega_m}{\sin^4 \frac{\theta_m}{2}}, \quad (2)$$

где

$$d\Omega_m = 2\pi \sin \theta_m d\theta_m.$$

Для отыскания сечения рассеяния в l -системе нужно знать $\theta_m(\theta_1)$ и $\theta_m(\theta_2)$. Найдем эти функции для двух сравнительно простых случаев. Пусть, например, частицы первого пучка до рассеяния покоятся, а частицы второго движутся со скоростью v_2^- . Тогда вторая из формул (4) примера 13.1 дает соотношение

$$\theta_m = \pi - 2\theta_1, \quad (3)$$

где θ_1 изменяется в пределах от 0 до $\pi/2$.

Подставляя (3) в (2), получим дифференциальное сечение рассеяния частиц, которые до рассеяния покоились:

$$d\sigma_1 = \left(\frac{\alpha}{\mu (v_2^-)^2} \right)^2 \frac{d\Omega_1}{\cos^4 \theta_1} \quad \left(0 \leq \theta_1 \leq \frac{\pi}{2} \right), \quad (4)$$

где $d\Omega_1 = 2\pi \sin \theta_1 d\theta_1$.

Используя формулы (5) и (6) примера 13.1, из формулы (2) данного примера получим дифференциальные сечения рассеяния частиц второго пучка:

$$d\sigma_2 = \left(\frac{\alpha}{2m_2 (v_2^-)^2} \right)^2 \frac{d\Omega_2}{\sin^4 \frac{\theta_2}{2}} \quad (m_2 \ll m_1; 0 \leq \theta_2 \leq \pi), \quad (5)$$

$$d\sigma_2 = \left(\frac{2\alpha}{m_2 (v_2^-)^2} \right)^2 \frac{\cos \theta_2 d\Omega_2}{\sin^4 \theta_2} \quad (m_2 = m_1; 0 \leq \theta_2 \leq \frac{\pi}{2}), \quad (6)$$

где $d\Omega_2 = 2\pi \sin \theta_2 d\theta_2$. Формула (5) называется формулой Резерфорда. Вывод этой формулы и ее сопоставление с экспериментом по рассеянию быстрых α -частиц на ядрах тяжелых элементов явились в свое время ключом к открытию структуры атома.

Теперь найдем сечение рассеяния частиц второго пучка, если $m_2 > m_1$. В этом случае $\theta_m(\theta_2)$ является двузначной функцией (см. пример 13.1). Представляя сечение (2) в форме

$$d\sigma = 2\pi \left(\frac{\alpha}{\mu (v^-)^2} \right)^2 \frac{|d \cos \theta_m|}{(1 - \cos \theta_m)^2}, \quad (7)$$

в соответствии с (14.11) получим, что

$$d\sigma_2 = 2\pi \left(\frac{\alpha}{\mu (v^-)^2} \right)^2 \left\{ \frac{|d \cos \theta_m^*|}{(1 - \cos \theta_m^*)^2} + \frac{|d \cos \theta_m^{**}|}{(1 - \cos \theta_m^{**})^2} \right\}, \quad (8)$$

где $\cos \theta_m^*$ и $\cos \theta_m^{**}$ определяются формулой (12) примера 13.1. Из формулы (12) найдем

$$\begin{aligned} d \cos \theta_m^* &= -(\tau + \eta) \sin \theta_2 d\theta_2, \\ d \cos \theta_m^{**} &= -(\tau - \eta) \sin \theta_2 d\theta_2, \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$\tau = \frac{2m_2}{m_1} \cos \theta_2, \quad \eta = \frac{1 + \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2 \cos 2\theta_2}{\left[1 - \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2 \sin^2 \theta_2\right]^{1/2}}.$$

Воспользовавшись формулой (7) примера 13.1, найдем пределы изменения угла θ_2

$$0 \leq \theta_2 \leq \theta_{2 \max} < \frac{\pi}{2} \quad (m_2 > m_1), \quad (10)$$

определяющего знаки τ и η и их отношение. Из (10) следует, что

$$2 \frac{m_2}{m_1} \geq 2 \frac{m_2}{m_1} \cos \theta_2 \geq 2 \sqrt{\left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2 - 1} > 0, \quad (11)$$

$$1 + \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2 \geq 1 + \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2 \cos 2\theta_2 \geq \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2 - 1 > 0. \quad (12)$$

Легко также убедиться, что отношение τ/η изменяется от величины, меньшей чем $+1$, до 0, а производная этого отношения меньше нуля (она равна нулю только при $\theta_2 = 0$).

Учитывая сказанное, из формул (9) получим

$$\begin{aligned} |d \cos \theta_m^*| &= \left\{ \frac{1 + \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2 \cos 2\theta_2}{\sqrt{1 - \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2 \sin^2 \theta_2}} + 2 \frac{m_2}{m_1} \cos \theta_2 \right\} \sin \theta_2 d\theta_2, \\ |d \cos \theta_m^{**}| &= \left\{ \frac{1 + \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2 \cos 2\theta_2}{\sqrt{1 - \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2 \sin^2 \theta_2}} - 2 \frac{m_2}{m_1} \cos \theta_2 \right\} \sin \theta_2 d\theta_2, \end{aligned} \quad (13)$$

а подставляя (13) в (8), найдем

$$\begin{aligned} d\sigma_2 &= \left(\frac{\alpha}{\mu(\sigma_2^*)}\right)^2 \frac{d\Omega_2}{(\zeta_1 \zeta_2)^2} \times \\ &\times \left\{ \frac{1 + \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2 \cos 2\theta_2}{\sqrt{1 - \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2 \sin^2 \theta_2}} (\zeta_2^2 + \zeta_1^2) + 2 \frac{m_2}{m_1} \cos \theta_2 (\zeta_2^2 - \zeta_1^2) \right\}, \end{aligned} \quad (14)$$

где

$$\zeta_1 = 1 - \cos \theta_m^*,$$

$$\zeta_2 = 1 - \cos \theta_m^{**}.$$

Далее, используя формулы (12) примера 13.1, получим

$$\zeta_1 \zeta_2 = \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)^2 \sin^2 \theta_2, \quad (15)$$

$$\zeta_2^2 + \zeta_1^2 = 2 \left\{ \left(1 + \frac{m_2}{m_1} \sin^2 \theta_2\right)^2 + \cos^2 \theta_2 \left[1 - \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2 \sin^2 \theta_2\right] \right\}, \quad (16)$$

$$\zeta_2^2 - \zeta_1^2 = 4 \cos \theta_2 \sqrt{1 - \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2 \sin^2 \theta_2} \left(1 + \frac{m_2}{m_1} \sin^2 \theta_2\right). \quad (17)$$

Наконец, подставляя (15)—(17) в выражение (14), после ряда преобразований найдем дифференциальное сечение рассеяния частиц, налетающих на покоящиеся до рассеяния частицы (при условии $m_2 > m_1$):

$$d\sigma_2 = 2 \left(\frac{\alpha}{m_2 (v_2)^2}\right)^2 \frac{1 + \cos^2 \theta_2 - \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2 \sin^2 \theta_2}{\sqrt{1 - \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2 \sin^2 \theta_2}} \frac{d\Omega_2}{\sin^4 \theta_2}. \quad (18)$$

Теперь возьмем другие начальные условия для скоростей. Пусть частицы обоих пучков движутся навстречу друг другу с одинаковыми скоростями. Тогда функции $\theta_m(\theta_1)$ и $\theta_m(\theta_2)$ определяются третьей и четвертой формулами решения (3) примера 13.2. Например, если $m_1 > 3m_2$, то $\cos \theta_m(\theta_1)$ и $\cos \theta_m(\theta_2)$ заданы формулами (7) и (8) примера 13.2, причем $\cos \theta_m(\theta_1)$ в этом случае является двузначной функцией, аналогичной функции (12) примера 13.1. Поэтому, используя формулы, аналогичные формулам (7)—(18) настоящего примера, сразу найдем дифференциальное сечение рассеяния частиц первого пучка:

$$d\sigma_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{m_1 (v_1)^2}\right)^2 \frac{1 + \cos^2 \theta_1 - \left(\frac{m_1 - m_2}{2m_2}\right)^2 \sin^2 \theta_1}{\sqrt{1 - \left(\frac{m_1 - m_2}{2m_2}\right)^2 \sin^2 \theta_1}} \frac{d\Omega_1}{\sin^4 \theta_1} \quad (m_1 > 3m_2). \quad (19)$$

Если же $m_1 = m_2$, то из формулы (14) примера 13.2 и формулы (2) настоящего примера следует:

$$d\sigma_1 = \left(\frac{\alpha}{4m_1 (v_1)^2}\right)^2 \frac{d\Omega_1}{\sin^4 \frac{\theta_1}{2}} = d\sigma_2. \quad (20)$$

Прочие случаи опустим ввиду громоздкости соответствующих выражений.

Как видно, все полученные дифференциальные сечения справедливы как для сил отталкивания ($\alpha < 0$), так и для сил притяжения ($\alpha > 0$). Нетрудно также убедиться в том, что *полное сечение рассеяния для заряженных частиц равно $+\infty$* . Это связано с бесконечно большим «эффективным радиусом» кулоновских сил; при $\rho^- \rightarrow \infty$ угол отклонения θ_m весьма «медленно» стремится к нулю.

Пример 14.2. Дифференциальное сечение рассеяния однородных абсолютно упругих шариков.

Даны два пучка частиц, которые можно представить себе как абсолютно упругие шарики. Первый пучок состоит из частиц массы m_1 и радиуса a_1 , скорость этих частиц до рассеяния относительно λ -системы равна v_1 ; те же величины для частиц второго пучка соответственно равны m_2 , a_2 , v_2 . Определить сечения рассеяния частиц в λ -системе.

С помощью формулы (5) примера 13.4 найдем прицельное расстояние как функцию угла рассеяния в ζ -системе:

$$\rho^- = a \cos \frac{\theta_m}{2} \quad (a = a_1 + a_2), \quad (1)$$

а затем из (14.7) получим

$$d\sigma = \frac{a^2}{4} d\Omega_m. \quad (2)$$

Следовательно, рассеяние частиц «шариков» в системе центра масс изотропно. Интегрируя (2) по всем углам, найдем, что полное сечение рассеяния равно $\sigma = \pi a^2$ (см. (14.5)).

Вычислим дифференциальное сечение рассеяния в λ -системе. Например, если частицы первого пучка до рассеяния покоятся, а частицы второго движутся со скоростью v_2 , то из формулы (2) настоящего примера и формулы (4) примера (13.1) найдем

$$d\sigma_2 = a^2 \cos \theta_1 d\Omega_1 \quad (3)$$

(при любом соотношении масс частиц). Для вычисления $d\sigma_2$ представим (2) в виде

$$d\sigma_2 = \frac{\pi a^2}{2} |d \cos \theta_m(\theta_2)|, \quad \text{если } m_2 < m_1, \quad (4)$$

и в виде

$$d\sigma_2 = \frac{\pi a^2}{2} \{ |d \cos \theta_m^*(\theta_2)| + |d \cos \theta_m^{**}(\theta_2)| \}, \quad \text{если } m_2 > m_1 \quad (5)$$

см. (14.11) и формулы (10), (12) примера 13.1. Тогда, используя анализ функции $d \cos \theta_m(\theta_2)$, проведенный в примере 14.1, из (4) и (5) найдем

$$d\sigma_2 = \frac{a^2}{4} \left\{ \frac{1 + \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2 \cos 2\theta_2}{\sqrt{1 - \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2 \sin^2 \theta_2}} + 2 \frac{m_2}{m_1} \cos \theta_2 \right\} d\Omega_2 \quad (m_2 < m_1), \quad (6)$$

$$d\sigma_2 = \frac{a^2}{2} \frac{1 + \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2 \cos 2\theta_2}{\sqrt{1 - \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2 \sin^2 \theta_2}} d\Omega_2 \quad (m_2 > m_1). \quad (7)$$

Если же частицы первого и второго пучков движутся до рассеяния с одинаковыми скоростями навстречу друг другу, то следует взять функции, полученные в примере 13.2. Используя двузначную функцию (7) и однозначную функцию (12) примера 13.2, а также используя формулы, аналогичные формулам (4) и (5) данного примера и формулам (10)—(12) примера 14.1, найдем дифференциальные сечения рассеяния частиц первого пучка:

$$d\sigma_1 = \frac{a^2}{2} \frac{1 + \left(\frac{m_1 - m_2}{2m_2}\right)^2 \cos 2\theta_1}{\sqrt{1 - \left(\frac{m_1 - m_2}{2m_2}\right)^2 \sin^2 \theta_1}} d\Omega_1 \quad (m_1 > 3m_2), \quad (8)$$

$$d\sigma_1 = \frac{a^2}{4} \left\{ \frac{1 + \left(\frac{m_1 - m_2}{2m_2}\right)^2 \cos 2\theta_1}{\sqrt{1 - \left(\frac{m_1 - m_2}{2m_2}\right)^2 \sin^2 \theta_1}} + \frac{m_1 - m_2}{m_2} \cos \theta_1 \right\} d\Omega_1 \quad (3m_2 > m_1 > m_2). \quad (9)$$

Из последнего выражения заменой индексов можно получить сечение рассеяния частиц второго пучка при условии $m_1 > m_2$ (см. формулы (8) и (12) примера 13.2).

Наконец, используя формулы (2) данного примера и формулу (14) примера 13.2, найдем, что в простейшем случае, когда $m_1 = m_2$,

$$d\sigma_1 = \frac{a^2}{4} d\Omega_1 = d\sigma_2. \quad (10)$$

Пример 14.3. Сечения рассеяния и захвата частиц, энергия взаимодействия которых равна $U = -\alpha/r^2$.

Пусть частицы одного из пучков имеют массы m_1 и скорости до рассеяния \mathbf{v}_1^- , а другой пучок состоит из частиц с массами m_2 и скоростями \mathbf{v}_2^- до рассеяния. Определить дифференциальное сечение рассеяния частиц как функцию угла рассеяния в ζ -системе, а также полное сечение захвата.

Используя условие примера, запишем неравенство (13.24) в виде

$$\frac{\mu (\sigma^-)^2}{2} \geq \frac{1}{r^2} \left[\frac{\mu}{2} (\sigma^- \rho^-)^2 - \alpha \right], \quad (1)$$

где $\sigma^- = |\mathbf{v}_2^- - \mathbf{v}_1^-|$. Отсюда вытекает, что в случае сил отталкивания частиц ($\alpha < 0$) их рассеяние происходит при любом прицельном расстоянии ρ^- , а в случае притяжения ($\alpha > 0$) частицы рассеиваются, если

$$(\rho^-)^2 > \frac{2\alpha}{\mu (\sigma^-)^2}. \quad (2)$$

Из условия падения (13.25) следует неравенство

$$0 \geq -\alpha + \frac{\mu}{2} (\sigma^- \rho^-)^2, \quad (3)$$

которое выполняется только в случае притяжения для достаточно малых прицельных расстояний:

$$(\rho^-)^2 \leq \frac{2a}{\mu(v^-)^2} \quad (4)$$

(см. рис. 14.2, на котором изображена функция $U_{\text{eff}}(r)$ и различные траектории μ -точки в ζ -системе).

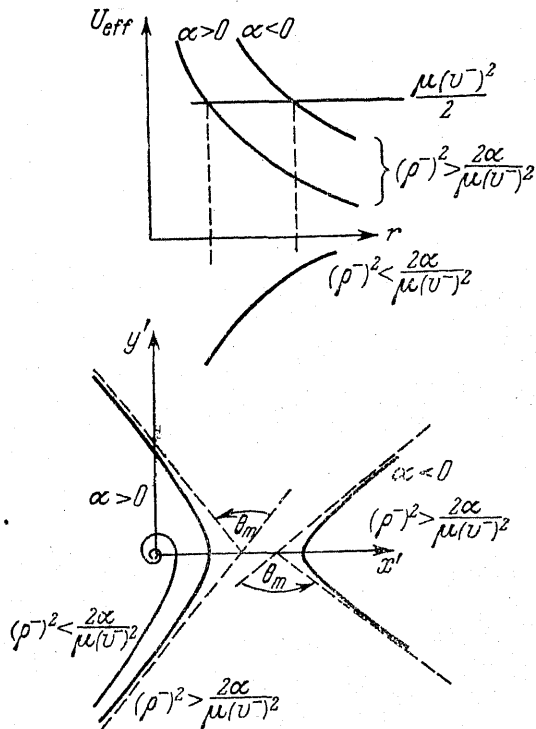


Рис. 14.2.

Используя (13.17) и (13.18), определим θ_m — угол отклонения в ζ -системе:

$$\theta_m = \pi - 2 \int_0^{\xi_{\max}} \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \left(1 - \frac{2a}{\mu(\rho^- v^-)^2}\right) \xi^2}}, \quad (5)$$

где

$$\xi_{\max} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2a}{\mu(\rho^- v^-)^2}}}.$$

В результате интегрирования находим

$$\theta_m = \pi \left\{ 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2\alpha}{\mu(\vartheta^-)^2}}} \right\}. \quad (6)$$

Отсюда видно, что если между частицами действуют силы отталкивания ($\alpha < 0$), то θ_m изменяется в пределах

$$0 \leq \theta_m \leq \pi, \quad (7)$$

а если действуют силы притяжения ($\alpha > 0$) и прицельное расстояние удовлетворяет условию (2), то θ_m может принимать любые отрицательные значения

$$-\infty < \theta_m \leq 0. \quad (8)$$

Разрешая функцию (6) относительно ρ^- , найдем

$$(\rho^-)^2 = \frac{2\alpha}{\mu(\vartheta^-)^2} \frac{(\pi - \theta_m)^2}{\theta_m(\theta_m - 2\pi)}, \quad (9)$$

а используя (9) и (14.4), получим дифференциальное сечение рассеяния в ϑ -системе

$$d\sigma = 4\pi^3 \frac{|\alpha|}{\mu(\vartheta^-)^2} \frac{(\pi - \theta_m)}{\theta_m^2(2\pi - \theta_m)^2} d\theta_m. \quad (10)$$

Наконец, с помощью формул (4), (14.12) и (14.13) найдем полное сечение захвата

$$\sigma_s = \pi \frac{2\alpha}{\mu(\vartheta^-)^2}. \quad (11)$$

§ 15. Распад частиц

Рассмотрим распад частицы массы m , движущейся со скоростью \mathbf{v}_0 относительно лабораторной системы отсчета. Пусть в некоторый момент времени эта «первичная» частица распадается на две частицы с массами m_1 и m_2 , причем распад происходит без воздействия внешних сил, т. е. самопроизвольно. Определим скорости обеих «вторичных» частиц или, как говорят, распадных частиц. Согласно закону сохранения импульса (9.18) центр масс этих частиц движется со скоростью первичной частицы, т. е.

$$\mathbf{v}_m = \mathbf{v}_0. \quad (15.1)$$

Поскольку до распада вторичные частицы составляли одно целое, то можно считать, что величина их относительной скорости «до распада» равна нулю ($\vartheta^- = 0$). В состоянии после распада, т. е. после удаления вторичных частиц на весьма большое расстояние друг от друга, энергию их взаимодействия также можно считать рав-

ной нулю ($U^+ = 0$). Учитывая сказанное, с помощью закона сохранения энергии в системе центра масс вторичных частиц (см. (13.6)) найдем абсолютную величину относительной скорости этих частиц «после распада»:

$$v^+ = \sqrt{\frac{2U^-}{\mu}}; \quad (15.2)$$

здесь μ — приведенная масса вторичных частиц, а U^- — энергия их взаимодействия «до распада», которую для краткости будем называть энергией распада. Наконец, используя (12.20), (15.1) и (15.2), получим скорости вторичных частиц относительно λ -системы:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1^+ &= \mathbf{v}_0 - \frac{m_2}{m} v^+ \mathbf{n}_{0m}, \\ \mathbf{v}_2^+ &= \mathbf{v}_0 + \frac{m_1}{m} v^+ \mathbf{n}_{0m}. \end{aligned} \quad (15.3)$$

Здесь $m = m_1 + m_2$ (ср. с (13.5) и (13.9)), \mathbf{v}_0 , v^+ , m_1 и m_2 считаются заданными величинами, а единичный вектор \mathbf{n}_{0m} направлен вдоль скорости второй распадной частицы относительно ζ -системы, т. е. вдоль вектора \mathbf{v}_2^+ . Если ориентация плоскости движения распадных частиц задана, то вектор \mathbf{n}_{0m} определяется одним углом. В качестве такового выберем θ_m — угол вылета второй распадной частицы в ζ -системе. Этот угол будем отсчитывать от направления скорости \mathbf{v}_0 .

Диаграмма скоростей, соответствующая решению (15.3), представлена на рис. 15.1. По этой диаграмме нетрудно определить величины скоростей распадных частиц и θ_1 , θ_2 — углы вылета частиц в лабораторной системе, отсчитываемые от направления скорости \mathbf{v}_0 :

$$\begin{aligned} v_1^+ &= \left[v_0^2 + \left(\frac{m_2}{m} v^+ \right)^2 - 2v_0 \left(\frac{m_2}{m} v^+ \right) \cos \theta_m \right]^{1/2}, \\ \operatorname{tg} \theta_1 &= \frac{\sin \theta_m}{\frac{mv_0}{m_2 v^+} - \cos \theta_m}, \\ v_2^+ &= \left[v_0^2 + \left(\frac{m_1}{m} v^+ \right)^2 + 2v_0 \left(\frac{m_1}{m} v^+ \right) \cos \theta_m \right]^{1/2}, \\ \operatorname{tg} \theta_2 &= \frac{\sin \theta_m}{\frac{mv_0}{m_1 v^+} + \cos \theta_m}. \end{aligned} \quad (15.4)$$

Из диаграммы скоростей также видно, что если выполнены условия

$$\frac{m_1}{m} v^+ > v_0, \quad \frac{m_2}{m} v^+ > v_0, \quad (15.5)$$

то угол θ_m как функция θ_1 или θ_2 определяется однозначно, а углы θ_1 и θ_2 изменяются в пределах от 0 до π (рис. 15.1, а). Используя

соотношения, аналогичные формулам (8)—(10) примера 13.1, и учитывая (15.5), из (15.4) найдем

$$\cos \theta_m = \frac{mv_0}{m_2 v^+} \sin^2 \theta_1 - \cos \theta_1 \sqrt{1 - \left(\frac{mv_0}{m_2 v^+}\right)^2 \sin^2 \theta_1} \quad (15.6)$$

$$(0 \leq \theta_1 \leq \pi),$$

$$\cos \theta_m = -\frac{mv_0}{m_1 v^+} \sin^2 \theta_2 + \cos \theta_2 \sqrt{1 - \left(\frac{mv_0}{m_1 v^+}\right)^2 \sin^2 \theta_2} \quad (15.7)$$

$$(0 \leq \theta_2 \leq \pi).$$

Если же, например,

$$\frac{m_1}{m} v^+ > v_0 > \frac{m_2}{m} v^+, \quad (15.8)$$

то угол θ_1 будет ограничен значением, меньшим π , а функция $\theta_m(\theta_1)$

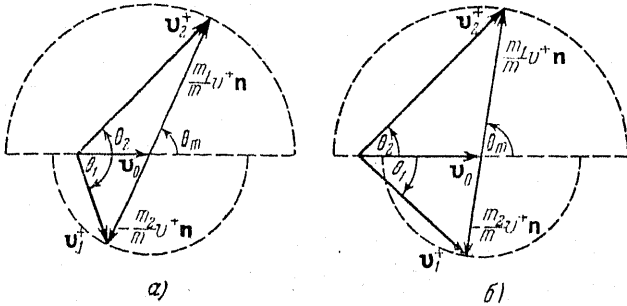


Рис. 15.1.

становится двузначной (рис. 15.1, б). В этом случае, используя формулы, аналогичные формулам (7), (11) и (12) примера 13.1, из (15.4) получим

$$\cos \theta_m = \frac{mv_0}{m_2 v^+} \sin^2 \theta_1 \pm \cos \theta_1 \sqrt{1 - \left(\frac{mv_0}{m_2 v^+}\right)^2 \sin^2 \theta_1} \quad (15.9)$$

$$\left(0 \leq \theta_1 \leq \theta_{1 \max}; \quad \sin \theta_{1 \max} = \frac{m_2 v^+}{mv_0}\right).$$

Если же

$$v_0 > \frac{m_1}{m} v^+ \quad \text{и} \quad v_0 > \frac{m_2}{m} v^+, \quad (15.10)$$

то и $\theta_m(\theta_1)$ и $\theta_m(\theta_2)$ будут двузначными; функция $\cos \theta_m(\theta_1)$ задается формулой (15.9), а функция $\cos \theta_m(\theta_2)$ находится из решения (15.4)

$$\cos \theta_m = -\frac{mv_0}{m_1 v^+} \sin^2 \theta_2 \pm \cos \theta_2 \sqrt{1 - \left(\frac{mv_0}{m_1 v^+}\right)^2 \sin^2 \theta_2} \quad (15.11)$$

$$\left(0 \leq \theta_2 \leq \theta_{2 \max}; \quad \sin \theta_{2 \max} = \frac{m_1 v^+}{mv_0}\right).$$

Двузначность в формулах (15.9) и (15.11) имеет ту же природу, что и двузначность функций $\theta_m(\theta_1)$, $\theta_m(\theta_2)$ в теории рассеяния. Если в ζ -системе вторая распадная частица в одном случае вылетает под углом θ_m^* к v_0 , а в другом случае под углом θ_m^{**} , то в λ -системе она вылетит в обоих случаях под одним и тем же углом θ_2 .

Теперь рассмотрим распад многих одинаковых частиц массы m , движущихся относительно λ -системы со скоростью v_0 . Предположим, что за единицу времени распадается N таких частиц, причем каждая первичная частица распадается на две частицы с массами m_1 , m_2 и энергией распада U^- . Кроме того, предположим, что в ζ -системе (так условно назовем систему центра масс какой-либо пары вторичных частиц) вылет частиц под любым углом равновероятен. Тогда число dN_1 вторичных частиц массы m_1 , попадающих за единицу времени в телесный угол $d\Omega_m$ с вершиной в начале ζ -системы и с осью, коллинеарной v_0 , равняется

$$dN_1 = N \frac{d\Omega_m}{4\pi}, \quad (15.12)$$

где $d\Omega_m = 2\pi \sin \theta_m d\theta_m$.

Таким образом, отношение числа dN_1 к N , характеризующее распределение по углам вторичных частиц с массой m_1 , равно

$$dn = \frac{1}{2} \sin \theta_m d\theta_m. \quad (15.13)$$

Распределение по углам вторых распадных частиц имеет такой же вид. Следовательно, подставляя в (15.13) функции $\theta_m(\theta_1)$ или $\theta_m(\theta_2)$, получим распределение вторичных частиц по направлениям в лабораторной системе. Если эти функции оказываются двузначными, то вместо (15.13) следует взять сумму модулей $|d \cos \theta_m|$ по обеим ветвям функции (аналогично (14.11)). Учитывая сказанное, из (15.13), (15.6) и (15.9) найдем распределение частиц с массами m_1 по углам вылета в λ -системе, т. е. найдем

$$dn_1 = \left\{ \frac{1 + \left(\frac{mv_0}{m_2 v^+}\right)^2 \cos 2\theta_1}{\sqrt{1 - \left(\frac{mv_0}{m_2 v^+}\right)^2 \sin^2 \theta_1}} + 2 \frac{mv_0}{m_2 v^+} \cos \theta_1 \right\} \frac{d\Omega_1}{4\pi} \quad (15.14)$$

$$(m_2 v^+ > mv_0, \quad 0 \leq \theta_1 \leq \pi),$$

$$dn_1 = \frac{1 + \left(\frac{mv_0}{m_2 v^+}\right)^2 \cos 2\theta_1}{\sqrt{1 - \left(\frac{mv_0}{m_2 v^+}\right)^2 \sin^2 \theta_1}} \frac{d\Omega_1}{2\pi} \quad (15.15)$$

$$(m_2 v^+ < mv_0, \quad 0 \leq \theta_1 \leq \theta_{1 \max}).$$

Что касается распределения частиц с массами m_2 , то его можно получить из (15.14) и (15.15) заменой индексов.

ДВИЖЕНИЕ ОТНОСИТЕЛЬНО НЕИНЕРЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ ОТСЧЕТА

Как отмечалось ранее, уравнения Ньютона справедливы только в инерциальных системах отсчета. Однако на практике часто встречаются и неинерциальные системы. Поэтому необходимо найти уравнения движения относительно таких систем. При этом естественно исходить из уравнений Ньютона, которые, как известно, содержат массы и ускорения материальных точек, а также силы, действующие на них со стороны других тел. Массы точек и время инвариантны относительно любых систем отсчета, а силы являются функциями положений и скоростей точек. Таким образом, чтобы вывести интересующие нас уравнения движения, нужно прежде всего выяснить, как преобразуются положения, скорости и ускорения при переходе от инерциальной системы к неинерциальной системе отсчета. В свою очередь для решения этого вопроса следует с кинематической точки зрения проанализировать движение одной произвольной системы отсчета относительно другой произвольной системы отсчета. Кстати напомним, что в классической механике системы отсчета мыслятся связанными с твердыми телами, поэтому кинематика движения одной системы отсчета относительно другой эквивалентна кинематике твердого тела.

§ 16. Положение системы отсчета (твердого тела)

Рассмотрим положение некоторой системы отсчета S' с началом в O' и осями $\mathbf{n}_{x'}$, $\mathbf{n}_{y'}$, $\mathbf{n}_{z'}$ относительно системы S с началом в O и осями \mathbf{n}_x , \mathbf{n}_y , \mathbf{n}_z (рис. 16.1). Положение начала O' относительно системы S определяется вектором $\mathbf{r}_{O'}$, который на основании (1.1) можно задать в виде разложения по осям системы S :

Положение начала O' относительно системы S определяется вектором $\mathbf{r}_{O'}$, который на основании (1.1) можно задать в виде разложения по осям системы S :

$$\mathbf{r}_{O'} = x_{O'} \mathbf{n}_x + y_{O'} \mathbf{n}_y + z_{O'} \mathbf{n}_z. \quad (16.1)$$

Ориентацию системы S' относительно системы S можно задать с помощью косинусов углов между осями обеих

систем отсчета. Обозначим косинус угла между осью $\mathbf{n}_{i'}$ и осью \mathbf{n}_j через $a_{i'j}$ (например, $a_{x'x}$ — это косинус угла между осями $\mathbf{n}_{x'}$ и \mathbf{n}_x).

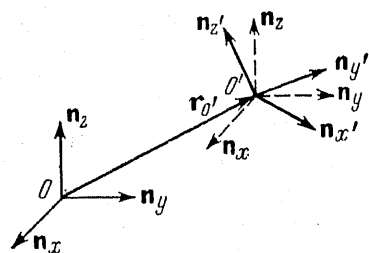


Рис. 16.1.

Тогда, согласно (1.1), орты системы S' также могут быть заданы в виде разложений по ортам системы S :

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_{x'} &= a_{x'x} \mathbf{n}_x + a_{x'y} \mathbf{n}_y + a_{x'z} \mathbf{n}_z, \\ \mathbf{n}_{y'} &= a_{y'x} \mathbf{n}_x + a_{y'y} \mathbf{n}_y + a_{y'z} \mathbf{n}_z, \\ \mathbf{n}_{z'} &= a_{z'x} \mathbf{n}_x + a_{z'y} \mathbf{n}_y + a_{z'z} \mathbf{n}_z. \end{aligned} \quad (16.2)$$

Коэффициенты этого преобразования удобно записать в виде матрицы

$$A = \begin{vmatrix} a_{x'x} & a_{x'y} & a_{x'z} \\ a_{y'x} & a_{y'y} & a_{y'z} \\ a_{z'x} & a_{z'y} & a_{z'z} \end{vmatrix}. \quad (16.3)$$

Преобразование (16.2) иногда кратко называют преобразованием A .

Среди девяти направляющих косинусов a_{ij} только три независимых. Действительно, \mathbf{n}_x , \mathbf{n}_y , \mathbf{n}_z являются единичными и ортогональными между собой векторами:

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_x \mathbf{n}_x &= 1, & \mathbf{n}_y \mathbf{n}_y &= 1, & \mathbf{n}_z \mathbf{n}_z &= 1, \\ \mathbf{n}_x \mathbf{n}_y &= 0, & \mathbf{n}_x \mathbf{n}_z &= 0, & \mathbf{n}_y \mathbf{n}_z &= 0. \end{aligned} \quad (16.4)$$

Орты $\mathbf{n}_{x'}$, $\mathbf{n}_{y'}$, $\mathbf{n}_{z'}$ подчиняются аналогичным условиям:

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_{x'} \mathbf{n}_{x'} &= 1, & \mathbf{n}_{y'} \mathbf{n}_{y'} &= 1, & \mathbf{n}_{z'} \mathbf{n}_{z'} &= 1, \\ \mathbf{n}_{x'} \mathbf{n}_{y'} &= 0, & \mathbf{n}_{x'} \mathbf{n}_{z'} &= 0, & \mathbf{n}_{y'} \mathbf{n}_{z'} &= 0. \end{aligned} \quad (16.5)$$

Подставляя в (16.5) выражения (16.2) и учитывая (16.4), получим

$$\begin{aligned} a_{x'x}^2 + a_{x'y}^2 + a_{x'z}^2 &= 1, & a_{x'x} a_{y'x} + a_{x'y} a_{y'y} + a_{x'z} a_{y'z} &= 0, \\ a_{y'x}^2 + a_{y'y}^2 + a_{y'z}^2 &= 1, & a_{x'x} a_{z'x} + a_{x'y} a_{z'y} + a_{x'z} a_{z'z} &= 0, \\ a_{z'x}^2 + a_{z'y}^2 + a_{z'z}^2 &= 1, & a_{y'x} a_{z'x} + a_{y'y} a_{z'y} + a_{y'z} a_{z'z} &= 0. \end{aligned}$$

Эти шесть условий, налагаемые на направляющие косинусы, называются условиями ортогональности, а преобразование A , подчиненное этим условиям, — ортогональным преобразованием. Условия ортогональности можно записать в компактной форме:

$$\sum_j a_{i'j} a_{k'j} = \delta_{i'k'}, \quad (16.6)$$

здесь индексы i' , k' и j принимают все возможные обозначения координатных осей, а символ Кронекера $\delta_{i'k'}$ по определению равен

$$\delta_{i'k'} = \begin{cases} 1 & \text{при } i' = k', \\ 0 & \text{при } i' \neq k'. \end{cases} \quad (16.7)$$

Таким образом, из девяти коэффициентов a_{ij} независимыми остаются только три.

Часто вместо трех независимых направляющих косинусов используют три угла Эйлера, которые вводятся следующим образом. Построим наряду с системой S' систему $S_{O'}$, начало которой совпадает с началом O' , а направление осей совпадает с направлением осей системы S (рис. 16.1 и 16.2). Тогда ориентация системы S' относительно системы $S_{O'}$ совпадает с ориентацией S' относительно S . Пересечение плоскостей $O'x'u$ и $O'x'u'$ определяет прямую $O'\xi$, которая называется линией узлов. Положительное направление на этой линии задается единичным вектором

$$\mathbf{n}_\xi = [\mathbf{n}_z \mathbf{n}_{z'}]. \quad (16.8)$$

Углами Эйлера называют углы

$$\begin{aligned} \varphi &= \angle(\mathbf{n}_x, \mathbf{n}_\xi), & \theta &= \angle(\mathbf{n}_z, \mathbf{n}_{z'}), & \psi &= \angle(\mathbf{n}_\xi, \mathbf{n}_{x'}) \\ (0 \leq \varphi \leq 2\pi, & & 0 \leq \theta \leq \pi, & & 0 \leq \psi \leq 2\pi). \end{aligned} \quad (16.9)$$

Положительное направление отсчета углов φ , θ и ψ определяется обычным для правых систем образом с помощью ортов \mathbf{n}_z , \mathbf{n}_ξ и $\mathbf{n}_{z'}$ соответственно. Например, положительным направлением отсчета угла φ считается направление отсчета против часовой стрелки, если смотреть с конца орта \mathbf{n}_z на его основание.

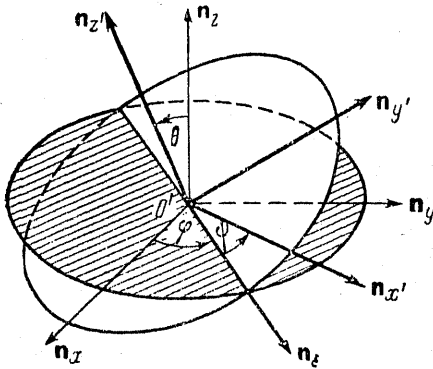


Рис. 16.2.

Итак, положение одной произвольной системы отсчета S' относительно другой произвольной системы отсчета S определяется в общем случае шестью независимыми величинами: тремя проекциями радиуса-вектора начала системы S' и тремя углами Эйлера; углы Эйлера определяют ориентацию системы S' относительно системы S . Этот вывод полностью относится к определению положения твердого тела, в чем легко убедиться, жестко скрепляя «штрихованную» систему отсчета с данным твердым телом.

Рассмотрим подробнее простейший случай, когда ориентация системы определяется одним углом. Пусть, например, \mathbf{n}_z параллелен $\mathbf{n}_{z'}$, т. е. пусть угол $\theta = 0$. Тогда плоскость $O'x'u'$ совпадает с плоскостью $O'x'u$ и линию узлов можно провести по любой прямой, проходящей через O' в плоскости $O'x'u$. Например, совмещая линию узлов с осью $O'x'$ (т. е. полагая $\psi = 0$), убеждаемся, что ориентация

системы определяется одним углом. Пусть, например, \mathbf{n}_z параллелен $\mathbf{n}_{z'}$, т. е. пусть угол $\theta = 0$. Тогда плоскость $O'x'u'$ совпадает с плоскостью $O'x'u$ и линию узлов можно провести по любой прямой, проходящей через O' в плоскости $O'x'u$. Например, совмещая линию узлов с осью $O'x'$ (т. е. полагая $\psi = 0$), убеждаемся, что ориентация

системы действительно определяется одним углом φ . В этом случае

$$\begin{aligned} a_{x'x} &= a_{y'y} = \cos \varphi, & a_{x'y} &= -a_{y'x} = \sin \varphi, \\ a_{z'z} &= 1, & a_{x'z} &= a_{y'z} = a_{z'x} = a_{z'y} = 0, \end{aligned}$$

а формулы преобразования (16.2) сводятся к формулам

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_{x'} &= \mathbf{n}_x \cos \varphi + \mathbf{n}_y \sin \varphi, \\ \mathbf{n}_{y'} &= -\mathbf{n}_x \sin \varphi + \mathbf{n}_y \cos \varphi, \\ \mathbf{n}_{z'} &= \mathbf{n}_z. \end{aligned} \quad (16.10)$$

Матрица такого простейшего ортогонального преобразования имеет вид

$$A = \begin{vmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad (16.11)$$

а ее элементы подчинены (см. (16.6)) условиям

$$a_{x'x}^2 + a_{x'y}^2 = 1, \quad a_{y'x}^2 + a_{y'y}^2 = 1, \quad a_{x'x}a_{y'x} + a_{x'y}a_{y'y} = 0. \quad (16.12)$$

В общем случае преобразование A определяется тремя углами Эйлера. Выражение коэффициентов a_{ij} через углы Эйлера нетрудно получить, если заметить, что преобразование от системы $S_{O'}$ к системе S' может быть выполнено тремя последовательными ортогональными преобразованиями типа (16.10), совершаемыми в определенном порядке, причем соответствующие этим преобразованиям повороты определяются углами Эйлера.

Действительно, перейдем от системы $S_{O'}$ к первой промежуточной системе $O'\xi\eta z$, у которой ось $O'\xi$ совпадает с линией узлов системы S' , а ось $O'z$ совпадает с такой же осью системы $S_{O'}$ (см. рис. 16.3, а). Система $O'\xi\eta z$ может быть получена из системы $S_{O'}$ поворотом последней на угол φ вокруг оси $O'z$ в положительном направлении. Согласно (16.10) преобразование от $S_{O'}$ к $O'\xi\eta z$ и его матрица D определяются формулами

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_\xi &= \mathbf{n}_x \cos \varphi + \mathbf{n}_y \sin \varphi, \\ \mathbf{n}_\eta &= -\mathbf{n}_x \sin \varphi + \mathbf{n}_y \cos \varphi, \\ \mathbf{n}_z &= \mathbf{n}_z, \end{aligned} \quad D = \begin{vmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Теперь перейдем от системы $O'\xi\eta z$ ко второй промежуточной системе $O'\xi\eta'z'$, у которой ось $O'z'$ совпадает с той же осью системы S' , а ось $O'\xi$ совпадает с той же осью первой промежуточной системы $O'\xi\eta z$ (рис. 16.3, б). Вторая промежуточная система $O'\xi\eta'z'$ может быть получена из первой системы $O'\xi\eta z$ поворотом на угол θ вокруг оси $O'\xi$ (в положительном направлении). Преобразование от первой ко второй промежуточной системе, согласно (16.10), имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_\xi &= \mathbf{n}_\xi, \\ \mathbf{n}_{\eta'} &= \mathbf{n}_\eta \cos \theta + \mathbf{n}_z \sin \theta, \\ \mathbf{n}_{z'} &= -\mathbf{n}_\eta \sin \theta + \mathbf{n}_z \cos \theta, \end{aligned}$$

а матрица C этого преобразования равна

$$C = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix}.$$

Наконец, перейдем к системе S' . Она может быть получена поворотом

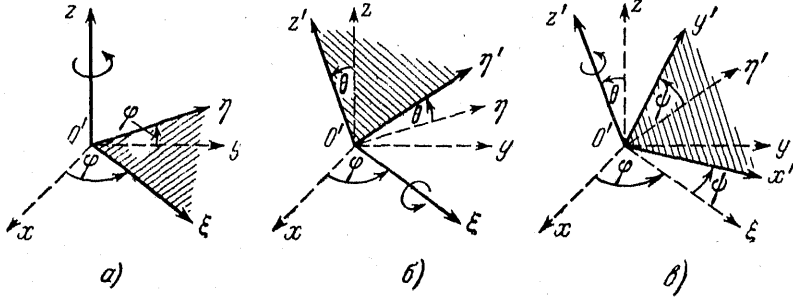


Рис. 16.3.

второй промежуточной системы $O'\xi\eta'z'$ на угол ψ вокруг оси $O'z'$ в положительном направлении (рис. 16.3, в). Орты системы S' будут связаны с ортами предыдущей системы соотношениями

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_{x'} &= \mathbf{n}_\xi \cos \psi + \mathbf{n}_\eta \sin \psi, \\ \mathbf{n}_{y'} &= -\mathbf{n}_\xi \sin \psi + \mathbf{n}_\eta \cos \psi, \\ \mathbf{n}_{z'} &= \mathbf{n}_{z'}, \end{aligned}$$

а матрица этого преобразования будет равна

$$B = \begin{vmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Все приведенные формулы дают возможность выразить $\mathbf{n}_{x'}$, $\mathbf{n}_{y'}$, $\mathbf{n}_{z'}$ через \mathbf{n}_x , \mathbf{n}_y , \mathbf{n}_z и углы Эйлера и тем самым определить матрицу (16.3) через независимые величины. Эта матрица может быть также получена перемножением матриц B , C , D в порядке, соответствующем последовательности поворотов на углы φ , θ , ψ :

$$A = BCD. \quad (16.13)$$

Запишем в окончательном виде матрицу преобразования от системы S_0 к системе S' :

$$\Rightarrow A = \begin{vmatrix} \cos \psi \cos \varphi - \cos \theta \sin \varphi \sin \psi & \cos \psi \sin \varphi + \cos \theta \cos \varphi \sin \psi & \sin \psi \sin \theta \\ -\sin \psi \cos \varphi - \cos \theta \sin \varphi \cos \psi & -\sin \psi \sin \varphi + \cos \theta \cos \varphi \cos \psi & \cos \psi \sin \theta \\ \sin \theta \sin \varphi & -\sin \theta \cos \varphi & \cos \theta \end{vmatrix}. \quad (16.14)$$

Обратное преобразование от системы S' к системе S_0 выражается формулами

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_x &= a_{xx'} \mathbf{n}_{x'} + a_{xy'} \mathbf{n}_{y'} + a_{xz'} \mathbf{n}_{z'}, \\ \mathbf{n}_y &= a_{yx'} \mathbf{n}_{x'} + a_{yy'} \mathbf{n}_{y'} + a_{yz'} \mathbf{n}_{z'}, \\ \mathbf{n}_z &= a_{zx'} \mathbf{n}_{x'} + a_{zy'} \mathbf{n}_{y'} + a_{zz'} \mathbf{n}_{z'}. \end{aligned} \quad (16.15)$$

Матрицу этого преобразования, обратную по отношению к A , обозначают символом A^{-1} . Матрица A^{-1} получается из матрицы A заменой строк на столбцы, т. е. является транспонированной по отношению к A . Транспонированную матрицу обозначают символом \tilde{A} . Таким образом, для ортогональной матрицы A имеем $A^{-1} = \tilde{A}$. Отсюда вытекает, что *детерминант, составленный из элементов ортогональной матрицы, равен ± 1* . Действительно, последовательное применение прямого и обратного преобразований всегда эквивалентно тождественному преобразованию, т. е. $AA^{-1} = I$, где I — единичная матрица, равная

$$I = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

С другой стороны, для ортогонального преобразования $A^{-1} = \tilde{A}$, и поэтому $A\tilde{A} = I$, откуда следует, что произведение детерминантов рассматриваемых матриц должно удовлетворять условию $\det A \cdot \det \tilde{A} = 1$. Поскольку величина детерминанта не изменяется при замене его строк на столбцы, т. е. $\det A = \det \tilde{A}$, из последних двух соотношений получим, что $(\det A)^2 = 1$ или $\det A = \pm 1$.

Ортогональное преобразование с матрицей, равной

$$-I = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix},$$

меняет знак каждой проекции вектора на обратный и превращает правые системы координат в левые. Такое преобразование называется *инверсией координатных осей*. Вообще любая матрица, детерминант которой равен -1 , содержит в себе инверсию, так как эту матрицу можно представить в виде произведения матрицы с детерминантом, равным $+1$, на матрицу $-I$. Заметим, что инверсию нельзя осуществить поворотом системы отсчета, жестко связанной с твердым телом. Поэтому *реальным перемещениям твердых тел соответствуют только те ортогональные преобразования, детерминант которых равен $+1$* .

§ 17. Поступательное движение и изменение ориентации системы отсчета (твердого тела)

Из предыдущего видно, что положение «штрихованной» системы относительно «нештрихованной» будет определено в любой момент времени, если $\mathbf{r}_{O'}$, φ , θ , ψ заданы как функции времени. Рассмотрим два вида движения системы: поступательное движение и изменение ориентации. *В случае поступательного движения ориентация системы S' относительно системы S остается неизменной*. Это означает, что остаются неизменными направления ортов $\mathbf{n}_{x'}$, $\mathbf{n}_{y'}$, $\mathbf{n}_{z'}$, т. е. сохраняют постоянное значение косинусы $a_{i'j}$ (или углы Эйлера) и, следовательно,

$$\dot{\mathbf{n}}_{x'} = \dot{\mathbf{n}}_{y'} = \dot{\mathbf{n}}_{z'} = 0. \quad (17.1)$$

Таким образом, поступательное движение системы S' определяется движением ее начала O' , т. е. функцией $\mathbf{r}_{O'}(t)$, а все точки твердого

тела, скрепленного с системой S' , движутся с одинаковыми скоростями и ускорениями по траекториям, которые могут быть получены друг из друга параллельным смещением. Действительно, радиусы-векторы \mathbf{r} и \mathbf{r}' любой точки твердого тела относительно систем S и S' связаны соотношением (1.6), причем абсолютная величина вектора \mathbf{r}' постоянна при произвольных перемещениях твердого тела, а его направление относительно системы S неизменно только при поступательном движении тела (см. рис. 17.1, на котором изображены два

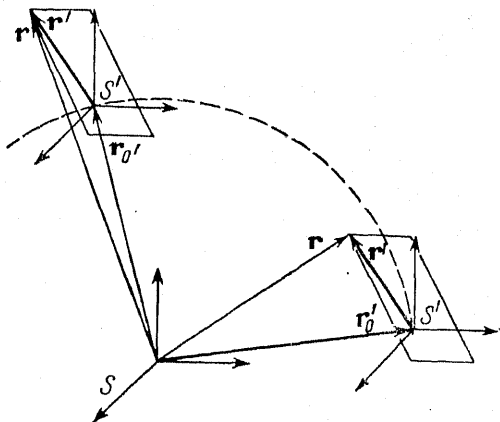


Рис. 17.1.

положения твердого тела при поступательном движении). Дифференцируя (1.6) по времени и учитывая постоянство \mathbf{r}' , получим

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0, \quad \mathbf{w} = \mathbf{w}_0. \quad (17.2)$$

Другим частным случаем движения системы отсчета (твердого тела) является *изменение ориентации при неизменном положении начала системы S'* . В этом случае \mathbf{r}_0' — постоянный вектор, а орты «штрихованной» системы (косинусы $a_{i'j}$ и углы Эйлера) являются функциями времени. Анализ этого вида движения основывается на простой, но важной теореме Эйлера, в которой утверждается: *если относительно некоторой системы отсчета S твердое тело имеет одну неподвижную точку, то перемещение твердого тела из любого положения в любое другое положение может быть совершено одним поворотом на определенный угол вокруг определенной оси, проходящей через неподвижную точку тела.*

Доказательство этой теоремы основано на неизменности расстояний между всеми точками твердого тела. Пусть система S' жестко соединена с твердым телом, а ее начало O' находится в неподвижной точке этого тела. Очертим вокруг точки O' жестко соединенную

с твердым телом сферу единичного радиуса, отметив на ней концы ортов $\mathbf{n}_x, \mathbf{n}_z$ и соединив эти концы дугой $x'z'$ большого круга. Положение этой дуги определяет положение твердого тела (или системы S'). Следовательно, произвольные положения 1 и 2 тела можно задать двумя положениями $x'_1z'_1$ и $x'_2z'_2$ дуги $x'z'$ (рис. 17.2, а и б). Чтобы доказать теорему Эйлера, нужно убедиться в том, что дуга

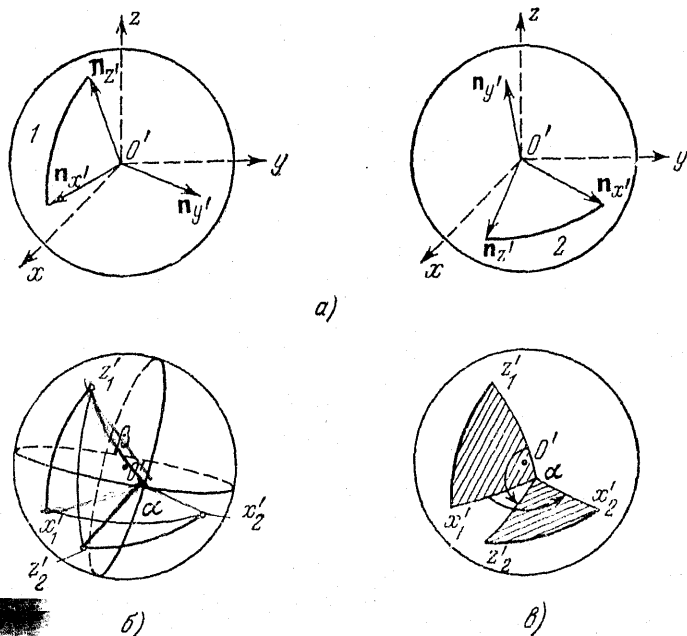


Рис. 17.2.

$x'_1z'_1$ может быть совмещена с дугой $x'_2z'_2$ одним поворотом, указать способ нахождения оси и угла поворота. Соединим точки x'_1, x'_2 и точки z'_1, z'_2 дугами больших кругов (рис. 17.2, б), а через середины дуг $x'_1x'_2$ и $z'_1z'_2$ проведем перпендикулярные к ним дуги больших кругов до пересечения их друг с другом в точках α и β . Стороны $x'_1z'_1$ и $x'_2z'_2$ сферических треугольников $\triangle(x'_1z'_1\alpha)$ и $\triangle(x'_2z'_2\alpha)$ (рис. 17.2, в) равны, так как это одна и та же дуга в различных положениях, а стороны $x'_1\alpha$ и $x'_2\alpha$ равны по построению точки α , лежащей на дуге, проведенной через середину основания $x'_1x'_2$ треугольника $\triangle(x'_1x'_2\alpha)$. Равны друг другу также стороны $z'_1\alpha$ и $z'_2\alpha$. Таким образом, сферические треугольники $\triangle(x'_1z'_1\alpha)$ и $\triangle(x'_2z'_2\alpha)$ равны и, следовательно, равны углы $\angle x'_1\alpha z'_1$ и $\angle x'_2\alpha z'_2$. Отсюда вытекает, что угол между дугами $z'_1\alpha$ и $z'_2\alpha$ равен углу между дугами $x'_1\alpha$ и

$x_2\alpha$. Итак, если твердое тело (систему S') повернуть из положения 1 вокруг оси $O'\alpha$ на определенный угол $\angle x_1\alpha x_2$ (или равный ему $\angle z_1\alpha z_2$), то твердое тело (система отсчета) переместится в положение 2. Поскольку положения 1 и 2 выбраны произвольно, постольку теорема Эйлера доказана.

Подчеркнем, что теорема Эйлера справедлива для поворотов как на конечные, так и на бесконечно малые углы. Однако сами эти повороты отличаются друг от друга: *результат двух поворотов*

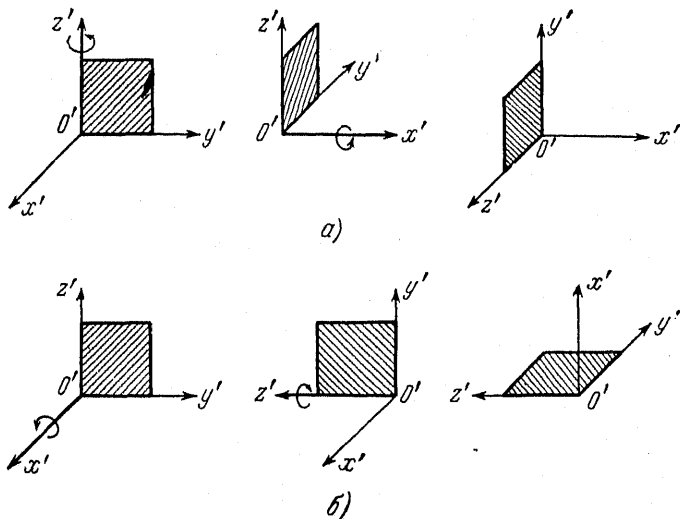


Рис. 17.3.

на конечные углы, вообще говоря, зависит от последовательности этих поворотов, в то время как результат двух любых бесконечно малых поворотов с точностью до бесконечно малых величин высшего порядка не зависит от их последовательности. Проиллюстрируем это на примере поворотов твердой квадратной пластинки (рис. 17.3). Сначала повернем ее вокруг оси $O'z'$ на $\pi/2$, а затем вокруг оси $O'x'$ также на $\pi/2$. В результате получим ряд положений, изображенных на рис. 17.3, а. После этого изменим последовательность поворотов: повернем пластинку сначала вокруг оси $O'x'$ на $\pi/2$, а затем вокруг $O'z'$ на $\pi/2$ (рис. 17.3, б). Как видно, результат одних и тех же поворотов на конечные углы является различным в зависимости от последовательности поворотов*).

*) В связи с этим говорят: операция поворота на конечный угол не коммутативна. Этому соответствует некоммутативность умножения матриц конечных поворотов. Например, на стр. 146 преобразование A от

Теперь проанализируем бесконечно малый поворот. Пусть твердое тело (система S') обладает одной неподвижной точкой O' , и пусть положение этого тела в момент времени t определяется углами Эйлера φ, θ, ψ , а положение того же тела в момент времени $t + dt$ — углами $\varphi + d\varphi, \theta + d\theta, \psi + d\psi$. Это означает, что орты $\mathbf{n}_x, \mathbf{n}_y, \mathbf{n}_z$, т. е. орты системы S' , занимающие в момент t соответствующие положения, в момент $t + dt$ получают определенные приращения $d\mathbf{n}_x, d\mathbf{n}_y, d\mathbf{n}_z$ (рис. 17.4). Согласно теореме Эйлера перемещение тела (системы S') из первого положения во второе можно совершить одним поворотом на определенный угол $d\chi$ вокруг определенной оси, проходящей через O' . Рассматриваемый бесконечно малый поворот в отличие от конечного поворота можно задать вектором

$$d\chi = d\chi \cdot \mathbf{n}_\chi; \quad (17.3)$$

модуль этого вектора равен углу поворота $d\chi$; прямая, на которой расположен вектор, является осью вращения, а направление вектора $d\chi$ и соответствующего единичного вектора \mathbf{n}_χ выбраны так, чтобы поворот казался совершаемым против часовой стрелки, если смотреть с конца вектора $d\chi$ на неподвижную точку O'). В общем случае как величина, так и направление вектора $d\chi$ могут изменяться со временем. Поэтому ось бесконечно малого поворота, определяемую вектором $d\chi$, называют мгновенной осью вращения.

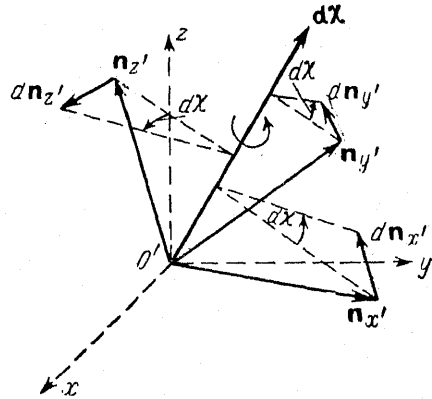


Рис. 17.4.

системы S_0 к системе S' было получено как результат трех ортогональных преобразований B, C и D , примененных в определенном порядке. Соответственно A равнялось некоммутативному произведению BCD .

*) При ортогональных преобразованиях с детерминантом $+1$, т. е. преобразованиях, соответствующих вращению системы координат, проекции $d\chi$ преобразуются как проекции обычного (полярного) вектора. При инверсии координат, т. е. при ортогональном преобразовании с детерминантом -1 , проекции $d\chi$ не изменяют знаки на противоположные (а проекции обычных векторов изменяют). Это связано с правилом выбора положительного направления \mathbf{n}_χ . Векторы, которые при ортогональных преобразованиях ведут себя подобно $d\chi$, называются псевдовекторами (или аксиальными векторами). Однако при вращениях систем координат преобразование псевдовектора совпадает с преобразованием вектора, а так как в дальнейшем рассматриваются только указанные вращения, то можно не делать различия между вектором и псевдовектором.

Нетрудно найти приращение любого жестко связанного с системой S' вектора, которое он получает в результате поворота системы S' на угол $d\chi$ вокруг \mathbf{n}_χ . Например, учитывая, что приращение орта $\mathbf{n}_{x'}$ перпендикулярно к плоскости, образуемой $d\chi$ и $\mathbf{n}_{x'}$, а величина приращения $d\mathbf{n}_{x'}$ равна $d\chi \cdot \sin(\mathbf{n}_\chi, \mathbf{n}_{x'})$ (см. рис. 17.4), приращение $d\mathbf{n}_{x'}$ можно представить в виде

$$d\mathbf{n}_{x'} = [d\chi \mathbf{n}_{x'}]. \quad (17.4)$$

Аналогично для приращений $d\mathbf{n}_{y'}$ и $d\mathbf{n}_{z'}$, полученных в результате того же поворота, имеем

$$d\mathbf{n}_{y'} = [d\chi \mathbf{n}_{y'}], \quad d\mathbf{n}_{z'} = [d\chi \mathbf{n}_{z'}]. \quad (17.5)$$

Для любого вектора \mathbf{r}' , жестко скрепленного с системой S' , найдем

$$d\mathbf{r}' = [d\chi \mathbf{r}']. \quad (17.6)$$

Формула (17.6) позволяет непосредственно убедиться в том, что результат двух бесконечно малых поворотов не зависит от их последовательности. В самом деле, совершая два поворота радиус-вектора \mathbf{r}' какой-либо точки твердого тела в разной последовательности, для вектора конечного положения выбранной точки получим выражения

$$\mathbf{r}' + [(d\chi_1 + d\chi_2) \mathbf{r}'] + [d\chi_2 [d\chi_1 \mathbf{r}']]$$

или

$$\mathbf{r}' + [(d\chi_2 + d\chi_1) \mathbf{r}'] + [d\chi_1 [d\chi_2 \mathbf{r}']],$$

где $d\chi_1$ и $d\chi_2$ — векторы рассматриваемых поворотов. Таким образом, два последних выражения совпадают с точностью до бесконечно малых высшего порядка по величинам $d\chi_1$ и $d\chi_2$. В связи с этим еще раз подчеркнем, что для конечного поворота нельзя написать определение, аналогичное (17.3), так как конечный поворот некоммутативен, а сложение векторов должно быть коммутативной операцией. Поэтому вектор бесконечно малого поворота был обозначен $d\chi$, а не $d\chi$ (вектора χ не существует!).

Угловую скорость вращения или скорость изменения ориентации системы S' относительно системы S определим как вектор $\boldsymbol{\omega}$, равный отношению вектора $d\chi$ к приращению времени:

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{d\chi}{dt}. \quad (17.7)$$

Если система S' (твердое тело) вращается с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$, то концы базисных векторов $\mathbf{n}_{x'}$, $\mathbf{n}_{y'}$, $\mathbf{n}_{z'}$ движутся относительно системы S с линейными скоростями, соответственно равными (см. (17.4) и (17.5))

$$\dot{\mathbf{n}}_{x'} = [\boldsymbol{\omega} \mathbf{n}_{x'}], \quad \dot{\mathbf{n}}_{y'} = [\boldsymbol{\omega} \mathbf{n}_{y'}], \quad \dot{\mathbf{n}}_{z'} = [\boldsymbol{\omega} \mathbf{n}_{z'}]. \quad (17.8)$$

Угловая скорость ω связана со значениями углов Эйлера и их производными по времени. Установим эту связь, учитывая прежде всего, что в результате поворота, который изображается вектором $d\chi$, углы Эйлера получают приращения $d\varphi$, $d\theta$ и $d\psi$, а указанное изменение ориентации может быть получено также тремя поворотами, осуществленными в любой последовательности, а именно: поворотами вокруг \mathbf{n}_z на $d\varphi$, вокруг \mathbf{n}_ξ на $d\theta$ и вокруг $\mathbf{n}_{x'}$ на $d\psi$. Следовательно, вектор поворота $d\chi$ равняется сумме трех векторов

$$d\chi = n_z d\varphi + n_\xi d\theta + n_{x'} d\psi, \quad (17.9)$$

а угловая скорость может быть задана в виде

$$\omega = \dot{\varphi} n_z + \dot{\theta} n_\xi + \dot{\psi} n_{x'}. \quad (17.10)$$

Найдем разложение ω по ортам системы S' . Для этого умножим (17.10) скалярно на $\mathbf{n}_{x'}$, $\mathbf{n}_{y'}$ и $\mathbf{n}_{z'}$ соответственно и выразим необходимые скалярные произведения ортов через углы Эйлера. Например, проектируя орт \mathbf{n}_z на плоскость $O'x'y'$, получим отрезок, перпендикулярный к линии узлов и равный по величине $\sin \theta$ (см. рис. 16.2 и 17.5). Проектируя далее этот отрезок на ось $O'x'$ и ось $O'y'$ соответственно, найдем*)

$$\mathbf{n}_z \mathbf{n}_{x'} = \sin \theta \sin \psi, \quad \mathbf{n}_z \mathbf{n}_{y'} = \sin \theta \cos \psi.$$

Кроме того, из определений (16.9) и (16.8) вытекает, что

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_z \mathbf{n}_{z'} &= \cos \theta, & \mathbf{n}_\xi \mathbf{n}_{z'} &= 0, \\ \mathbf{n}_\xi \mathbf{n}_{x'} &= \cos \psi, & \mathbf{n}_\xi \mathbf{n}_{y'} &= -\sin \psi \end{aligned}$$

(см. рис. 16.2). Используя условия ортогональности (16.5) и полученные выражения, находим проекции угловой скорости на оси системы S' :

$$\begin{aligned} \omega_{x'} &= \dot{\varphi} \sin \psi \sin \theta + \dot{\theta} \cos \psi, \\ \omega_{y'} &= \dot{\varphi} \cos \psi \sin \theta - \dot{\theta} \sin \psi, \\ \omega_{z'} &= \dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}. \end{aligned} \quad (17.11)$$

Аналогично, умножая (17.10) скалярно на \mathbf{n}_x , \mathbf{n}_y , \mathbf{n}_z соответственно и учитывая (16.4), получим разложение ω по осям системы S

$$\begin{aligned} \omega_x &= \dot{\theta} \cos \varphi + \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi, \\ \omega_y &= \dot{\theta} \sin \varphi - \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi, \\ \omega_z &= \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta. \end{aligned} \quad (17.12)$$

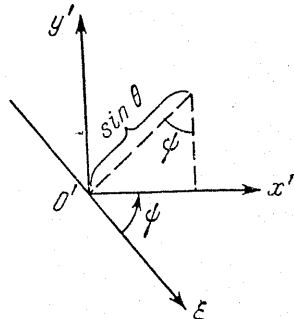


Рис. 17.5.

*) См. также матрицу (16.14).

Формулы (17.11) и (17.12) называются кинематическими формулами Эйлера; они устанавливают связь угловой скорости со значениями углов Эйлера и их производными по времени.

В заключение отметим, что угловая скорость, так же как и вектор $d\chi$ (см. стр. 151), в общем случае изменяется и по величине, и по направлению. Приведем выражения модуля угловой скорости

$$\omega = (\dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 + 2\dot{\varphi}\dot{\psi} \cos \theta)^{1/2} \quad (17.13)$$

и одного из направляющих косинусов мгновенной оси вращения

$$a_{x'\omega} = \frac{\dot{\varphi} \sin \psi \sin \theta + \dot{\theta} \cos \psi}{(\dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 + 2\dot{\varphi}\dot{\psi} \cos \theta)^{1/2}}. \quad (17.14)$$

Пример 17.1. Регулярная прецессия твердого тела.

Углы Эйлера, определяющие положение твердого тела (системы S') относительно системы S , заданы как функции времени:

$$\varphi = \dot{\varphi}_0 t, \quad \theta = \theta_0, \quad \psi = \dot{\psi}_0 t.$$

Определить законы движения оси $O'z'$ и мгновенной оси вращения твердого тела.

Используя условие и формулы (17.13), (17.12) и (17.11), получим

$$\omega^2 = \dot{\varphi}_0^2 + \dot{\psi}_0^2 + 2\dot{\varphi}_0\dot{\psi}_0 \cos \theta_0 = \omega_0^2,$$

$$\omega_x = \dot{\varphi}_0 \sin \theta_0 \sin \dot{\varphi}_0 t, \quad \omega_{x'} = \dot{\varphi}_0 \sin \theta_0 \sin \dot{\psi}_0 t,$$

$$\omega_y = -\dot{\varphi}_0 \sin \theta_0 \cos \dot{\varphi}_0 t, \quad \omega_{y'} = \dot{\varphi}_0 \sin \theta_0 \cos \dot{\psi}_0 t,$$

$$\omega_z = \dot{\varphi}_0 + \dot{\psi}_0 \cos \theta_0, \quad \omega_{z'} = \dot{\varphi}_0 \cos \theta_0 + \dot{\psi}_0.$$

Отсюда видно, что в рассматриваемом примере величина угловой скорости и ее проекции на оси $O'z'$, $O'z'$ сохраняются и, следовательно, углы между ω и этими осями постоянны. Кроме того, нетрудно видеть, что мгновенная ось вращения все время находится в плоскости $O'z'z'$ или, иначе говоря, ω и линия узлов все время перпендикулярны друг другу. Действительно, из определений (16.8) и (16.9) следует, что

$$\omega_{\varepsilon} = n_{x'} \cos \psi - n_{y'} \sin \psi$$

(см. также рис. 16.2). Используя это разложение и разложение ω по осям системы S' , убедимся, что скалярное произведение ωn_{ε} равно нулю.

Таким образом, система S' изменяет свою ориентацию относительно S с постоянной (по величине) угловой скоростью (рис. 17.6). Мгновенная ось вращения системы S' сама вращается вокруг оси $O'z'$

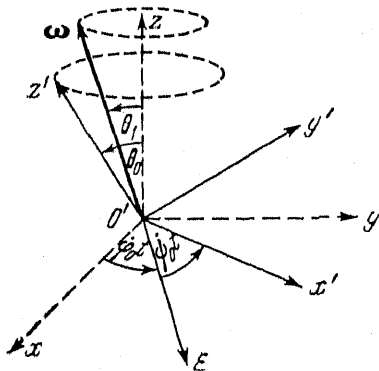


Рис. 17.6.

с угловой скоростью $\dot{\phi}_0$, будучи наклоненной под постоянным углом θ_1 к этой оси; косинус угла θ_1 равен (ср. с (17.14)):

$$\cos \theta_1 = \frac{\dot{\phi}_0 + \dot{\psi}_0 \cos \theta_0}{(\dot{\phi}_0^2 + \dot{\psi}_0^2 + 2\dot{\phi}_0\dot{\psi}_0 \cos \theta_0)^{1/2}}.$$

Ось $O'z'$ также вращается с угловой скоростью $\dot{\phi}_0$ вокруг оси $O'z$, так как она в любой момент времени находится в одной плоскости с вектором ω и осью $O'z$. Описанное движение твердого тела (или системы отсчета, жестко связанной с ним) называется регулярной прецессией, а угловая скорость $\dot{\phi}_0$ — скоростью прецессии.

§ 18. Общий случай движения системы отсчета (твердого тела)

В случае произвольного движения твердого тела и жестко связанной с ним системы отсчета как радиус-вектор ее начала $r_{O'}$, так и ее орты (косинусы a_{ij} и углы Эйлера) являются функциями времени. Покажем, что любое перемещение твердого тела и жестко связанной с ним системы S' всегда можно представить как совокупность поступательного перемещения и изменения ориентации с осью поворота, проходящей через начало системы S' .

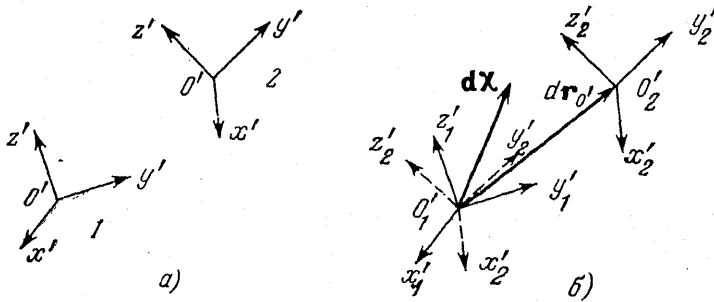


Рис. 18.1.

Действительно, рассмотрим положения 1 и 2 системы S' в моменты времени t и $t + dt$ соответственно (см. рис. 16.1 и 18.1, а). Перемещение системы из положения 1 в положение 2 мысленно можно произвести двояким образом. Например, можно «сначала» совершить такой поворот $d\chi$ вокруг оси, проходящей через O'_1 , в результате которого орты S' будут ориентированы так же, как и в положении 2 (такой поворот по теореме Эйлера всегда возможен); «затем» эту сориентированную систему следует перенести поступательно до совмещения с положением 2 (это перемещение характеризуется $dr_{O'}$ — перемещением начала системы S' — см. рис. 18.1, б). Изменяя последовательность этих операций, можно «сначала» поступательно перенести

систему до совмещения O' с O'_2 , а «затем» совершить тот же поворот $d\chi$ вокруг оси, параллельной оси поворота в первом случае, но проходящей через O'_2 (слова «сначала» и «затем» не имеют здесь временного смысла).

Учтем далее, что при поступательном движении приращения $dn_x = dn_y = dn_z = 0$ (см. (17.1)). Поэтому из вышесказанного следует, что в общем случае изменение ортов системы S' относительно системы S связано с вектором поворота $d\chi$ так же, как в том случае, когда начало O' остается неподвижным относительно системы S ; а отсюда вытекает, что выражения (17.8) для производных от единичных векторов и разложения угловой скорости (17.10), (17.11) и (17.12) имеют место и в общем случае.

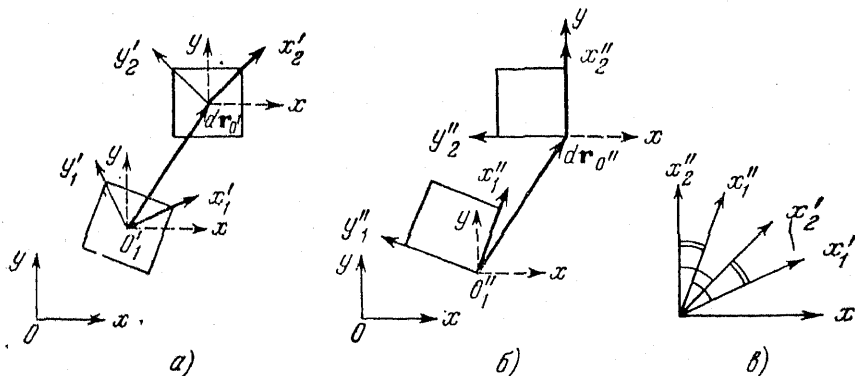


Рис. 18.2.

Указанное выше разложение движения тела на поступательное и вращательное можно осуществить бесконечным числом способов: любую точку твердого тела можно взять за начало O' , а ортам системы S' можно задать любую ориентацию, лишь бы все эти «интригованные» системы были жестко связаны с данным твердым телом. Однако у разных точек твердого тела различные положения и, вообще говоря, различные перемещения по отношению к определенной системе S . Следовательно, функция $r_{O'}(t)$, характеризующая поступательное движение твердого тела, зависит от выбора начала системы S' ; что касается вектора поворота $d\chi(t)$ и угловой скорости $\omega(t)$, то эти функции для данного твердого тела в его движении относительно данной системы отсчета S не зависят от выбора системы S' , жестко связанной с телом, причем ось поворота всегда будет проходить через выбранное начало «интригованной» системы, т. е.

$$r_{O'}(t) \neq r_{O''}(t), \quad \omega_{O'}(t) = \omega_{O''}(t). \quad (18.1)$$

Убедимся в справедливости (18.1) на примере квадратной пластинки, перемещающейся параллельно своей плоскости из положения 1 в положение 2 (см. рис. 18.2, на котором плоскость пластинки совпадает с плоскостью Oxy). Это перемещение можно разложить на отличающиеся друг от друга поступательные перемещения и, как убедимся, на одно и то же вращение вокруг параллельных осей, проходящих через различные точки. В самом деле, введем системы S' и S'' , жестко связанные с пластинкой. Ориентация системы S'' относительно S' неизменна. Следовательно, угол между осями $O'x'$ и $O''x''$ при любом положении пластинки остается постоянным и, таким образом, $\angle x'_1 x'_1 = \angle x'_2 x'_2$ (рис. 18.2, в). Отсюда вытекает, что угол поворота $\angle x'_1 x'_2$ равен углу поворота $\angle x''_1 x''_2$. Что касается осей поворота, то они совпадают с осями $O'z'$ и $O''z''$, т. е. параллельны между собой и проходят через O' и O'' соответственно. Итак, в частном случае свойство (18.1) действительно имеет место. Нетрудно провести и аналитическое доказательство (18.1) в общем случае, основываясь на том, что все «штрихованные» системы, жестко связанные с данным твердым телом, сохраняют ориентацию по отношению друг к другу.

§ 19. Положение, скорость и ускорение материальной точки относительно разных систем отсчета

Выводы первых трех параграфов настоящей главы позволяют ответить на вопрос: как связаны между собой положения, скорости и ускорения материальной точки, рассматриваемые относительно различных произвольных систем отсчета. В свою очередь ответ на этот вопрос необходим для вывода уравнений движения относительно инерциальной системы.

Пусть \mathbf{r} является радиусом-вектором материальной точки относительно системы S , а \mathbf{r}' — радиусом-вектором той же точки относительно системы S' . Зададим \mathbf{r} в виде разложения (1.1) по осям системы S . Вектор \mathbf{r}_O также разложим по осям этой системы:

$$\mathbf{r}_O = x_O \mathbf{n}_x + y_O \mathbf{n}_y + z_O \mathbf{n}_z \tag{19.1}$$

а \mathbf{r}' — по осям системы S' :

$$\mathbf{r}' = x' \mathbf{n}_{x'} + y' \mathbf{n}_{y'} + z' \mathbf{n}_{z'} \tag{19.2}$$

В классической механике между векторами \mathbf{r} и \mathbf{r}' имеет место соотношение (1.6), которое с учетом (1.1), (19.1) и (19.2) можно записать в виде

$$(x - x_O) \mathbf{n}_x + (y - y_O) \mathbf{n}_y + (z - z_O) \mathbf{n}_z = x' \mathbf{n}_{x'} + y' \mathbf{n}_{y'} + z' \mathbf{n}_{z'} \tag{19.3}$$

Подставляя в (19.3) выражения $\mathbf{n}_{x'}$, $\mathbf{n}_{y'}$ и $\mathbf{n}_{z'}$ через \mathbf{n}_x , \mathbf{n}_y , \mathbf{n}_z , т. е. подставляя (16.2), получим

$$\begin{aligned}x' &= a_{x'x}(x - x_0) + a_{x'y}(y - y_0) + a_{x'z}(z - z_0), \\y' &= a_{y'x}(x - x_0) + a_{y'y}(y - y_0) + a_{y'z}(z - z_0), \\z' &= a_{z'x}(x - x_0) + a_{z'y}(y - y_0) + a_{z'z}(z - z_0).\end{aligned}\quad (19.4)$$

Отсюда видно, что «штрихованные» проекции вектора \mathbf{r}' связаны с «нештрихованными» проекциями равного ему вектора $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$ преобразованием A (см. (16.3))^{*}.

Теперь рассмотрим движение материальной точки. В общем случае точка движется как относительно системы S , так и относительно системы S' , причем сами системы S и S' также могут двигаться относительно друг друга. Для определенности будем рассматривать движение относительно S . Тогда орты системы S следует считать постоянными, т. е. не зависящими от времени, а радиус-вектор \mathbf{r}_0 и орты $\mathbf{n}_{x'}$, $\mathbf{n}_{y'}$, $\mathbf{n}_{z'}$ следует считать функциями времени. В связи с отмеченным обстоятельством ту систему, относительно которой рассматривается движение, часто называют «неподвижной», а движущуюся относительно нее систему — «подвижной» (условность этой терминологии очевидна).

Получим соотношение между скоростью точки, с которой она движется относительно системы S , и скоростью той же точки, с которой она движется относительно системы S' .

Как известно (см. (1.9) и (1.12)), скорость точки относительно S равна производной по времени от радиуса-вектора точки при постоянных ортах этой системы. Если же продифференцировать по времени \mathbf{r}' при постоянных «штрихованных» ортах, то получим скорость той же точки, но относительно системы S' :

$$\mathbf{v}' = \frac{d\mathbf{r}'}{dt} = \dot{x}'\mathbf{n}_{x'} + \dot{y}'\mathbf{n}_{y'} + \dot{z}'\mathbf{n}_{z'}, \quad (19.5)$$

где

$$\dot{x}' = \frac{dx'}{dt}, \quad \dot{y}' = \frac{dy'}{dt}, \quad \dot{z}' = \frac{dz'}{dt}.$$

Используемые в (19.5) и (1.12) символы $\frac{d'}{dt}$ и $\frac{d}{dt}$ означают производные по времени при постоянных «штрихованных» и «нештрихованных» ортах соответственно.

^{*}) Подставляя в (19.3) выражения \mathbf{n}_x , \mathbf{n}_y , \mathbf{n}_z через $\mathbf{n}_{x'}$, $\mathbf{n}_{y'}$, $\mathbf{n}_{z'}$, т. е. подставляя (16.15), получим выражение «нештрихованных» проекций $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$ через «штрихованные» проекции \mathbf{r}' . Это обратное по отношению к (19.4) преобразование определяется «обратной» матрицей A^{-1} .

Дифференцируя соотношение (1.6) по времени при постоянных ортах $\mathbf{n}_x, \mathbf{n}_y, \mathbf{n}_z$, найдем

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_{O'}}{dt} + \frac{d\mathbf{r}'}{dt}. \quad (19.6)$$

Согласно (1.9) $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ является скоростью точки относительно S , а $\frac{d\mathbf{r}_{O'}}{dt}$ — скоростью начала системы S' относительно S . Производная же $\frac{d\mathbf{r}'}{dt}$ не является скоростью точки относительно системы S' , так как ее следует брать, учитывая зависимость $\mathbf{n}_{x'}, \mathbf{n}_{y'}, \mathbf{n}_{z'}$ от времени, т. е. учитывая вращение S' относительно S :

$$\frac{d\mathbf{r}'}{dt} = x'\dot{\mathbf{n}}_{x'} + y'\dot{\mathbf{n}}_{y'} + z'\dot{\mathbf{n}}_{z'} + \dot{x}'\mathbf{n}_{x'} + \dot{y}'\mathbf{n}_{y'} + \dot{z}'\mathbf{n}_{z'}. \quad (19.7)$$

Первые три члена правой части (19.7) связаны с изменением ориентации системы S' относительно S . Используя (17.8), их сумму можно представить в виде

$$[\boldsymbol{\omega}(x'\mathbf{n}_{x'} + y'\mathbf{n}_{y'} + z'\mathbf{n}_{z'})] = [\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}']. \quad (19.8)$$

Сумма вторых трех членов правой части (19.7), согласно (19.5), равна скорости точки относительно S' . Таким образом, «нештрихованная» производная от \mathbf{r}' по времени равна

$$\frac{d\mathbf{r}'}{dt} = [\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}'] + \frac{d'\mathbf{r}'}{dt}. \quad (19.9)$$

Подставляя (19.9) в (19.6), получим интересное нас соотношение между \mathbf{v} — скоростью материальной точки относительно системы S и \mathbf{v}' — скоростью той же точки относительно системы S' :

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{O'} + [\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}'] + \mathbf{v}'. \quad (19.10)$$

Здесь $\mathbf{v}_{O'}$ и $\boldsymbol{\omega}$ — скорость начала и угловая скорость системы S' относительно системы S соответственно, а \mathbf{r}' — радиус-вектор материальной точки относительно системы S' . Сумму $\mathbf{v}_{O'} + [\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}']$ называют переносной скоростью \mathbf{v}^h точки. Она представляет собой скорость точки, жестко связанной с системой S' и совпадающей в данный момент времени с рассматриваемой материальной точкой. В самом деле, для такой закрепленной с S' точки скорость $\mathbf{v}' = 0$, а скорость относительно S равна

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{O'} + [\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}']. \quad (19.11)$$

В связи с этим соотношение (19.10) можно представить в виде

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^h + \mathbf{v}'. \quad (19.12)$$

Если точка жесткокреплена с системой S' , движущейся поступательно, то $\mathbf{v}' = 0$, $\boldsymbol{\omega} = 0$ и, следовательно, (19.10) перейдет в первое из соотношений (17.2). Если точка жесткокреплена с системой S' , начало которой покоится относительно системы S , то, полагая $\mathbf{v}' = 0$ и $\mathbf{v}_O' = 0$, из (19.10) получим

$$\mathbf{v} = [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}'] \quad (19.13)$$

(ср. с (17.6)).

Найдем соотношение между ускорениями точки относительно систем S и S' . Ускорение \mathbf{w} точки относительно системы S получим, дифференцируя по времени скорость точки при постоянных «нестрихованных» ортах (см. (1.10) и (1.13)). Если же продифференцировать (19.5) по времени при постоянных «штрихованных» ортах, то получим ускорение той же точки, но относительно системы S' :

$$\mathbf{w}' = \frac{d'\mathbf{v}'}{dt} = \ddot{x}'\mathbf{n}_{x'} + \ddot{y}'\mathbf{n}_{y'} + \ddot{z}'\mathbf{n}_{z'}, \quad (19.14)$$

где

$$\ddot{x}' = \frac{d^2x'}{dt^2}, \quad \ddot{y}' = \frac{d^2y'}{dt^2}, \quad \ddot{z}' = \frac{d^2z'}{dt^2}.$$

Связь ускорений \mathbf{w} и \mathbf{w}' найдем, продифференцировав (19.10) при постоянных ортах \mathbf{n}_x , \mathbf{n}_y , \mathbf{n}_z :

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\mathbf{v}_O'}{dt} + \left[\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \mathbf{r}' \right] + [\boldsymbol{\omega} \frac{d\mathbf{r}'}{dt}] + \frac{d\mathbf{v}'}{dt}. \quad (19.15)$$

Здесь, согласно (1.10), $\frac{d\mathbf{v}}{dt}$ и $\frac{d\mathbf{v}_O'}{dt}$ есть ускорения точки и начала O' относительно системы S .

Теперь заметим, что для любого вектора \mathbf{a}' , заданного в виде разложения по ортам системы S' , вращающейся относительно системы S , имеет место следующее соотношение между «штрихованной» и «нестрихованной» производными:

$$\frac{d\mathbf{a}'}{dt} = [\boldsymbol{\omega} \mathbf{a}'] + \frac{d'\mathbf{a}'}{dt} \quad (19.16)$$

(вывод этого соотношения аналогичен выводу (19.9), так как в (19.9) не предполагалось, что \mathbf{r}' является именно радиусом-вектором точки *).

*) Из (19.16) следует, что различие «штрихованной» и «нестрихованной» производных исчезает только при поступательном движении «штрихованной» системы. Действительно, если $\boldsymbol{\omega} = 0$, то

$$\frac{d\mathbf{a}'}{dt} = \frac{d'\mathbf{a}'}{dt}.$$

Отметим еще одно следствие, вытекающее из (19.16): проекция производной вектора на подвижное направление не равна производной от проекции вектора на то же направление, например

$$\left(\frac{d\mathbf{a}'}{dt} \right)_{x'} = [\boldsymbol{\omega} \mathbf{a}']_{x'} + \frac{da'_{x'}}{dt} \neq \frac{da'_{x'}}{dt}.$$

Полагая в (19.16) вектор \mathbf{a}' равным $\boldsymbol{\omega}$ и \mathbf{v}' , получим

$$\begin{aligned}\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} &= \frac{d'\boldsymbol{\omega}}{dt'}, \\ \frac{d\mathbf{v}'}{dt} &= [\boldsymbol{\omega}\mathbf{v}'] + \frac{d'\mathbf{v}'}{dt'}.\end{aligned}\quad (19.17)$$

Наконец, подставляя (19.17) и (19.9) в (19.15) и используя (1.13) (19.14) и (19.5), найдем искомое соотношение между \mathbf{w} и \mathbf{w}' — ускорениями точки относительно систем отсчета S и S' соответственно:

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_{O'} + [\dot{\boldsymbol{\omega}}\mathbf{r}'] + [\boldsymbol{\omega}[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}']] + 2[\boldsymbol{\omega}\mathbf{v}'] + \mathbf{w}'; \quad (19.18)$$

здесь $\mathbf{w}_{O'}$, $\boldsymbol{\omega}$ и $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ — ускорение начала O' , угловая скорость и угловое ускорение системы S' относительно системы S соответственно; \mathbf{r}' и \mathbf{v}' — радиус-вектор и скорость материальной точки относительно системы S' . Сумму первых трех членов правой части (19.18) называют переносным ускорением \mathbf{w}^h точки. Оно представляет собой ускорение точки, жестко связанной с системой S' и совпадающей в данный момент времени с рассматриваемой материальной точкой. Действительно, для такой связанной с S' точки $\mathbf{v}' = 0$ и $\mathbf{w}' = 0$, т. е. ее ускорение относительно S равно

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_{O'} + [\dot{\boldsymbol{\omega}}\mathbf{r}'] + [\boldsymbol{\omega}[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}']]. \quad (19.19)$$

Часть $[\dot{\boldsymbol{\omega}}\mathbf{r}']$ переносного ускорения отлична от нуля лишь при неравномерном вращении; другая же часть $[\boldsymbol{\omega}[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}']]$ переносного ускорения всегда направлена перпендикулярно к мгновенной оси вращения и по величине равна $\omega^2\rho$, где ρ — расстояние от оси вращения до точки.

Итак, переносное ускорение связано с ускоренным движением системы S' относительно системы S , а ускорение \mathbf{w}' связано с движением точки относительно S' . Что касается ускорения $2[\boldsymbol{\omega}\mathbf{v}']$, то оно появляется в результате как изменения ориентации S' относительно S , так и движения точки относительно S' . Это ускорение называется кориолисовым (или поворотным) ускорением и обозначается \mathbf{w}^c . Оно исчезает в трех случаях: 1) при жестком скреплении точки с системой S' ($\mathbf{v}' = 0$); 2) при поступательном движении S' ($\boldsymbol{\omega} = 0$) и 3) при движении точки параллельно угловой скорости ($\boldsymbol{\omega} \parallel \mathbf{v}'$).

В заключение, используя введенные обозначения, представим соотношение (19.18) в виде

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}^h + \mathbf{w}^c + \mathbf{w}', \quad (19.20)$$

где

$$\mathbf{w}^h = \mathbf{w}_{O'} + [\dot{\boldsymbol{\omega}}\mathbf{r}'] + [\boldsymbol{\omega}[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}']], \quad \mathbf{w}^c = 2[\boldsymbol{\omega}\mathbf{v}'].$$

Пример 19.1. Положение, скорость и ускорение точки относительно движущейся системы отсчета.

Относительно системы S материальная точка движется в плоскости Oxy по окружности радиуса a_2 с угловой скоростью ω_1 . Определить закон движения точки относительно системы S' , если начало O' этой системы равномерно движется по окружности радиуса a_1 с постоянной угловой скоростью ω относительно системы S (плоскость

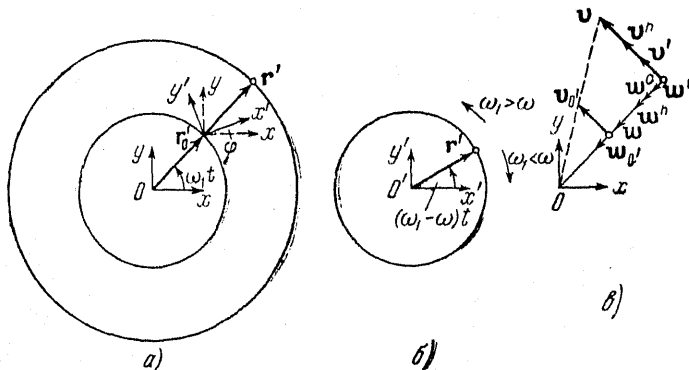


Рис. 19.1.

окружности совпадает с плоскостью Oxy , оси Oz и $O'z'$ параллельны), а угол φ между осями $O'x'$ и Ox равняется ωt , где ω постоянно; см. рис. 19.1, а.

Согласно условию движение системы S' относительно S описывается функциями (см. (17.10))

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{O'} &= a_1 (\mathbf{n}_x \cos \omega_1 t + \mathbf{n}_y \sin \omega_1 t), \\ \omega &= \omega \mathbf{n}_z, \quad \varphi = \omega t, \quad \theta = 0, \quad \psi = 0, \end{aligned}$$

а законом движения точки относительно S является

$$\mathbf{r} = a_2 (\mathbf{n}_x \cos \omega_1 t + \mathbf{n}_y \sin \omega_1 t).$$

Используя (1.6), получим разложение вектора \mathbf{r}' по ортам системы S :

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{r}_{O'} = (a_2 - a_1) (\mathbf{n}_x \cos \omega_1 t + \mathbf{n}_y \sin \omega_1 t).$$

Отсюда с помощью преобразования (см. (16.15))

$$\mathbf{n}_x = \mathbf{n}_{x'} \cos \omega t - \mathbf{n}_{y'} \sin \omega t, \quad \mathbf{n}_y = \mathbf{n}_{x'} \sin \omega t + \mathbf{n}_{y'} \cos \omega t$$

найдем разложение вектора \mathbf{r}' по ортам системы S' :

$$\mathbf{r}' = x' \mathbf{n}_{x'} + y' \mathbf{n}_{y'},$$

где

$$x' = (a_2 - a_1) \cos (\omega_1 - \omega) t, \quad y' = (a_2 - a_1) \sin (\omega_1 - \omega) t.$$

Из этих формул видно, что относительно S' точка движется по окружности радиуса $a_2 - a_1$ с постоянной угловой скоростью $\omega_1 - \omega$ (рис. 19.1, б). Дифференцируя \mathbf{r}' по времени при постоянных ортах $\mathbf{n}_{x'}$ и $\mathbf{n}_{y'}$, получим скорость \mathbf{v}' точки и ее ускорение \mathbf{w}' относительно S' :

$$\mathbf{v}' = (a_2 - a_1)(\omega_1 - \omega) [-\mathbf{n}_{x'} \sin(\omega_1 - \omega)t + \mathbf{n}_{y'} \cos(\omega_1 - \omega)t],$$

$$\mathbf{w}' = -(\omega_1 - \omega)^2 \mathbf{r}'.$$

Для сопоставления приведем формулы для скорости \mathbf{v} точки и ее ускорения \mathbf{w} относительно S :

$$\mathbf{v} = a_2 \omega_1 [-\mathbf{n}_x \sin \omega_1 t + \mathbf{n}_y \cos \omega_1 t],$$

$$\mathbf{w} = -\omega_1^2 \mathbf{r}.$$

Нетрудно убедиться, что в рассматриваемом примере скорости точки относительно S и S' и ее переносная скорость направлены по линии, перпендикулярной радиусу-вектору точки \mathbf{r} , а ускорения точки относительно S и S' , ее переносное и кориолисово ускорения направлены вдоль радиуса-вектора (рис. 19.1, в).

Пример 19.2. Движение точки относительно систем, совершающих относительно друг друга регулярную прецессию.

Материальная точка движется относительно системы S' по окружности радиуса a с угловой скоростью $\dot{\phi}_0$ по часовой стрелке в плоскости $O'x'y'$ (рис. 19.2). Найти закон движения точки относительно системы S и найти переносные скорость и ускорение, а также кориолисово ускорение точки, если известно, что закон движения системы S' относительно системы S задан функциями

$$\phi = \dot{\phi}_0 t, \quad \theta = \theta_0, \quad \psi = \dot{\phi}_0 t,$$

а начала этих систем совпадают (см. пример 17.1).

Согласно условию

$$\mathbf{r}' = a [\mathbf{n}_{x'} \cos \dot{\phi}_0 t - \mathbf{n}_{y'} \sin \dot{\phi}_0 t],$$

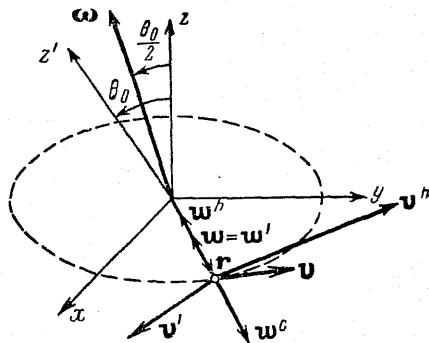


Рис. 19.2.

откуда с помощью преобразования (16.2) и матрицы (16.14) получим разложение вектора \mathbf{r} , равного вектору \mathbf{r}' , по ортам системы S :

$$\mathbf{r} = a [\mathbf{n}_x \cos \dot{\phi}_0 t + \mathbf{n}_y \sin \dot{\phi}_0 t].$$

Эта формула описывает движение точки в плоскости Oxy по окружности радиуса a с угловой скоростью $\dot{\phi}_0$ против часовой стрелки.

Точка все время находится на линии узлов, вращающейся с угловой скоростью $\dot{\varphi}_0$ в плоскости Oxy и с угловой скоростью $-\dot{\varphi}_0$ в плоскости $Ox'y'$. В этом можно убедиться, замечая, что орт \mathbf{n}_z , определяющий линию узлов, равен (см. (16.8) и рис. 16.2)

$$\mathbf{n}_z = \mathbf{n}_x \cos \varphi + \mathbf{n}_y \sin \varphi = \mathbf{n}_{x'} \cos \psi - \mathbf{n}_{y'} \sin \psi,$$

а по условию задачи $\varphi = \psi = \dot{\varphi}_0 t$.

Дифференцируя \mathbf{r} по времени сначала при постоянных ортах системы S , а затем при постоянных ортах системы S' , найдем

$$\mathbf{v} = a\dot{\varphi}_0 [-\mathbf{n}_x \sin \dot{\varphi}_0 t + \mathbf{n}_y \cos \dot{\varphi}_0 t],$$

$$\mathbf{w} = -\dot{\varphi}_0^2 \mathbf{r},$$

$$\mathbf{v}' = -a\dot{\varphi}_0 [\mathbf{n}_{x'} \sin \dot{\varphi}_0 t + \mathbf{n}_{y'} \cos \dot{\varphi}_0 t],$$

$$\mathbf{w}' = -\dot{\varphi}_0^2 \mathbf{r}'.$$

С помощью преобразования (16.2) и матрицы (16.14) последние две функции можно представить в форме

$$\mathbf{v}' = a\dot{\varphi}_0 [\mathbf{n}_x \cos \theta_0 \sin \dot{\varphi}_0 t - \mathbf{n}_y \cos \theta_0 \cos \dot{\varphi}_0 t - \mathbf{n}_z \sin \theta_0],$$

$$\mathbf{w}' = -\dot{\varphi}_0^2 \mathbf{r}.$$

Таким образом, мы видим, что скорости \mathbf{v} и \mathbf{v}' по величине равны, а угол между ними равен $\pi - \theta_0$; что касается ускорений точки \mathbf{w} и \mathbf{w}' , то они равны между собой, несмотря на ускоренное движение систем отсчета относительно друг друга ($\omega \neq 0$).

Проекции угловой скорости ω и ее производной $\dot{\omega}$ на орты системы S получим, воспользовавшись формулами (17.12):

$$\omega_x = \dot{\varphi}_0 \sin \theta_0 \sin \dot{\varphi}_0 t, \quad \dot{\omega}_x = \dot{\varphi}_0^2 \sin \theta_0 \cos \dot{\varphi}_0 t,$$

$$\omega_y = -\dot{\varphi}_0 \sin \theta_0 \cos \dot{\varphi}_0 t, \quad \dot{\omega}_y = \dot{\varphi}_0^2 \sin \theta_0 \sin \dot{\varphi}_0 t,$$

$$\omega_z = \dot{\varphi}_0 (1 + \cos \theta_0), \quad \dot{\omega}_z = 0.$$

Отсюда видно, что по направлению ω не совпадает ни с Oz , ни с Oz' , а $\dot{\omega}$ коллинеарно \mathbf{r}' . Используя разложения ω и \mathbf{r} по ортам системы S , найдем переносную скорость точки

$$\mathbf{v}^h = a\dot{\varphi}_0 \left[-\mathbf{n}_x 2 \cos^2 \frac{\theta_0}{2} \sin \dot{\varphi}_0 t + \mathbf{n}_y 2 \cos^2 \frac{\theta_0}{2} \cos \dot{\varphi}_0 t + \mathbf{n}_z \sin \theta_0 \right].$$

Аналогично для переносного ускорения получим

$$\mathbf{w}^h = -4a\dot{\varphi}_0^2 \cos^2 \frac{\theta_0}{2} (\mathbf{n}_x \cos \dot{\varphi}_0 t + \mathbf{n}_y \sin \dot{\varphi}_0 t).$$

Кориолисово ускорение \mathbf{w}^c в любой момент времени равно $-\mathbf{w}^h$, что вытекает из (19.18), поскольку $\mathbf{w} = \mathbf{w}'$.

§ 20. Уравнение движения материальной точки относительно неинерциальной системы отсчета; силы инерции

Пусть некоторая система отсчета S является инерциальной системой, а некоторая другая система S' движется относительно S произвольным, но известным образом. Получим уравнение движения точки относительно системы S' .

Относительно инерциальной системы S движение точки подчинено уравнению (3.4)

$$m\mathbf{w} = \mathbf{F}.$$

Здесь \mathbf{w} — ускорение точки относительно S , а \mathbf{F} является силой, действующей на точку со стороны других тел. Подставляя сюда вместо \mathbf{w} его выражение (19.20), преобразуем (3.4) к виду

$$m\mathbf{w}^h + m\mathbf{w}^c + m\mathbf{w}' = \mathbf{F}.$$

Переносим $m\mathbf{w}^c$ и $m\mathbf{w}^h$ направо и вводя обозначения

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^h &= -m\mathbf{w}^h = -m\{\mathbf{w}_{O'} + [\dot{\boldsymbol{\omega}}\mathbf{r}'] + [\boldsymbol{\omega}[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}']]\}, \\ \mathcal{F}^c &= -m\mathbf{w}^c = -2m[\boldsymbol{\omega}\mathbf{v}'], \end{aligned}$$

получим

$$m\mathbf{w}' = \mathbf{F} + \mathcal{F}^h + \mathcal{F}^c. \quad (20.1)$$

Векторы \mathcal{F}^h и \mathcal{F}^c называются переносной и кориолисовой силами инерции соответственно, а часть переносной силы, равная $-m[\boldsymbol{\omega}[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}']]$, называется центробежной силой инерции (о свойствах этого вектора см. стр. 161).

Уравнение (20.1) является уравнением движения материальной точки относительно неинерциальной системы отсчета S' . В самом деле, будем считать силу \mathbf{F} известной функцией радиуса-вектора и скорости точки относительно системы S' , а движение S' относительно S заданным. Следовательно, известны радиус-вектор $\mathbf{r}_{O'}$ начала системы S и ее угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$, а $\mathbf{w}_{O'}$ — ускорение начала O' — и угловое ускорение $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ могут быть определены как функции времени дифференцированием. В этом случае вся правая часть уравнения (20.1) является заданной функцией \mathbf{r}' , \mathbf{v}' и t . Далее, предположим, что система S' движется ускоренно по отношению к инерциальной системе, т. е. выполняется хотя бы одно из условий

$$\mathbf{w}_{O'} \neq 0, \quad \boldsymbol{\omega} \neq 0. \quad (20.2)$$

Тогда какая-либо из сил инерции \mathcal{F}^h или \mathcal{F}^c или обе они вместе будут отличны от нуля и, следовательно, будет отлично от нуля ускорение изолированной точки относительно S' (см. определение неинерциальной системы на стр. 33). Таким образом, уравнение (20.1)

действительно является уравнением движения материальной точки относительно неинерциальной системы отсчета.

Ускорение материальной точки относительно неинерциальной системы отсчета возникает под действием силы F со стороны определенного тела (или тел), а также в результате *ускоренного движения системы S' по отношению к инерциальной системе S* . Ускорение материальной точки, связанное с ускорением неинерциальной системы отсчета по отношению к инерциальной системе, можно трактовать как результат действия сил инерции. Для этих сил нельзя указать источник в виде определенного тела, действующего на данную материальную точку. Поэтому данная сила инерции не имеет соответствующей ей противодействующей силы, иначе говоря, силы инерции, в отличие от сил взаимодействия, не подчинены третьему закону Ньютона.

Из рассмотрения уравнений движения (3.4) и (20.1) и принципа относительности (3.12) видно, что *инерциальные системы являются преимущественными по сравнению с неинерциальными системами*. В самом деле, силы инерции определены, если известны векторы $w_{O'}$ и ω , характеризующие движение неинерциальной системы *относительно инерциальной*. Кроме того, уравнение движения точки под действием сил со стороны определенных тел справедливо в *любой инерциальной* системе отсчета, т. е. уравнения движения относительно инерциальной системы в указанном смысле имеют абсолютный характер. С другой стороны, уравнение движения точки под действием сил со стороны определенных тел, вообще говоря, различны в разных неинерциальных системах отсчета (поскольку для этих систем различны ускорение начала $w_{O'}$ и угловая скорость ω).

Пример 20.1. Уравнение движения точки относительно Земли.

Найти уравнение движения точки около поверхности Земли относительно Земли.

Пренебрегая воздействием планет солнечной системы на движение Солнца (см. пример 11.1), примем в качестве инерциальной системы отсчета систему S с началом O в центре инерции Солнца и осями, направленными на «неподвижные» звезды. Относительно этой системы центр инерции Земли движется по эллипсу под действием силы притяжения со стороны Солнца. Кроме того, Земля изменяет свою ориентацию относительно S с угловой скоростью ω , которую можно считать практически постоянной и равной по величине $2\pi/(24 \cdot 3600) \approx 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ сек}^{-1}$.

Введем жестко связанную с Землей систему S' с началом O' в центре инерции Земли. Уравнение движения точки относительно этой системы имеет вид

$$m\mathbf{w}' = F - m\mathbf{w}_{O'} - m[\boldsymbol{\omega}[\boldsymbol{\omega}'r']] - 2m[\boldsymbol{\omega}'v'].$$

Теперь учтем, что на точку действуют силы притяжения со стороны Земли и Солнца, а также другие силы, например сила сопротивления атмосферы Земли. Обозначим указанные силы через $F_{O'}$, F_O и Φ . Тогда

$$F = F_{O'} + F_O + \Phi,$$

где силы притяжения Земли и Солнца, согласно (2.15), равны

$$F_{O'} = -\gamma \frac{mm_{O'}}{(r')^2} r', \quad F_O = -\gamma \frac{mm_O}{r^2} r$$

(здесь $m_{O'}$ — масса Земли, m_O — масса Солнца, r' и r — радиусы-векторы точки относительно S' и S). Учитывая, что ускорение центра инерции Земли относительно S равно

$$w_{O'} = -\gamma \frac{m_O}{r_{OO'}^2} r_{OO'}$$

(здесь $r_{OO'}$ — вектор, начало и конец которого находятся в точках O и O' соответственно), запишем уравнение движения относительно S' в виде

$$mw' = F_{O'} - \gamma \frac{mm_O}{r^2} r + \gamma \frac{mm_O}{r_{OO'}^2} r_{OO'} - m[\omega[\omega r']] - 2m[\omega v'] + \Phi.$$

Ограничиваясь рассмотрением движения точки около поверхности Земли, мы можем считать, что r' порядка R , где R — радиус Земли. Тогда величина r' будет подчинена условию $r' \ll r_{OO'}$, поскольку радиусы-векторы r и r' связаны соотношением $r = r_{OO'} + r'$, а $R \ll r_{OO'}$. При таком ограничении часть переносной силы инерции — $mw_{O'}$ и сила притяжения Солнца F_O компенсируют друг друга, и уравнение движения точки около поверхности Земли примет вид

$$mw' = F_{O'} - m[\omega[\omega r']] - 2m[\omega v'] + \Phi \quad (1)$$

(заметим, что пренебрежение разницей между силой инерции — $mw_{O'}$ и силой притяжения F_O исключает объяснение приливных явлений, вызываемых Солнцем на поверхности Земли).

Легко оценить влияние сил инерции, если сопоставить центробежное и кориолисово ускорения с ускорением силы тяготения на поверхности Земли, по величине равным

$$\frac{F_{O'}}{m} \Big|_{r'=R} = \gamma \frac{m_{O'}}{R^2} \approx 9,8 \frac{m}{сек^2}.$$

Отношения максимальной величины центробежного и кориолисова ускорения к ускорению силы тяготения будут равны

$$\frac{\omega^2 R^2}{\gamma m_{O'}} \approx 0,003; \quad \frac{2\omega R^2}{\gamma m_{O'}} v' \approx 1,5 \cdot 10^{-6} v' \quad (R \approx 6,4 \cdot 10^6 \text{ м})$$

(в последнем выражении v' следует подставлять в $м/сек$).

Отсюда видно, что влияние кориолисовой силы по сравнению с центробежной мало, если скорость $v' \ll \frac{\omega R}{2} \approx 2,3 \cdot 10^3$ м/сек. В свою очередь центробежная сила мала по сравнению с силой тяготения. Однако несмотря на малую величину сил инерции относительно геоцентрической системы отсчета, эти силы в ряде задач необходимо учитывать.

Например, рассмотрим движение точки около поверхности Земли в некоторой малой области по сравнению с радиусом Земли R . Для изучения такого движения удобно ввести систему отсчета S'' с началом O'' на поверхности Земли. Эта система так же жестко связана с Землей, как и система S' . Радиусы-векторы, скорости и ускорения точки относительно систем S' и S'' весьма просто выражаются друг через друга, поскольку система S'' не движется относительно S' . Действительно, применяя соотношения (1.6), (19.10) и (19.18) к этим системам, найдем

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r}_{O'O''} + \mathbf{r}'', \quad \mathbf{v}' = \mathbf{v}'', \quad \mathbf{w}' = \mathbf{w}'',$$

где $\mathbf{r}_{O'O''} = R\mathbf{n}_R$, а \mathbf{n}_R — единичный вектор, направленный от центра Земли к началу O'' . Используя эти соотношения и условие малости области движения ($r'' \ll R$), приведем уравнение движения точки к виду

$$m\mathbf{w}'' = \mathbf{F}_{O'} - mR[\boldsymbol{\omega}[\boldsymbol{\omega}\mathbf{n}_R]] - 2m[\boldsymbol{\omega}\mathbf{v}''] + \Phi,$$

где

$$\mathbf{F}_{O'} = -\gamma \frac{mm_{O'}}{R^2} \mathbf{n}_R.$$

Два первых члена в правой части этого уравнения пропорциональны массе точки и не зависят от положения и скорости точки в системе S'' . Обозначим сумму этих членов вектором \mathcal{P} :

$$\mathcal{P} = m\mathbf{g}, \quad (2)$$

где

$$\mathbf{g} = -\gamma \frac{m_{O'}}{R^2} \mathbf{n}_R + \omega^2 R \cos \theta \cdot \mathbf{n}_p,$$

\mathbf{n}_p — единичный вектор, перпендикулярный к оси вращения Земли и направленный от этой оси; θ — геоцентрическая широта, т. е. угол между экваториальной плоскостью и направлением от центра Земли на O'' — начало системы S'' (рис. 20.1). Используя обозначения (2), придем к уравнению движения точки около поверхности Земли

$$m\mathbf{w}'' = m\mathbf{g} - 2m[\boldsymbol{\omega}\mathbf{v}''] + \Phi, \quad (3)$$

справедливого в достаточно малой области на заданной широте.

Отсюда видно, что сила, измеряемая при взвешивании тела, равна сумме силы притяжения Земли и центробежной силы инерции. Действительно, пусть взвешивание происходит с помощью динамометра. Тогда Φ является упругой силой, действующей на взвешиваемое тело со стороны пружины динамометра. Изменяя длину пружины и положение прикрепленного к ней тела, можно достичь состояния покоя этого тела относительно Земли, т. е. состояния, в котором $v''=0$ и $w''=0$. С другой стороны, сила Φ , с которой пружина покоящегося динамометра действует на тело, по величине равна весу тела, т. е. силе, с которой покоящееся тело действует на пружину динамометра. Следовательно, если и весы, и взвешиваемое тело покоятся относительно Земли, то вес тела равняется \mathcal{P} — сумме силы тяжести и центробежной силы инерции.

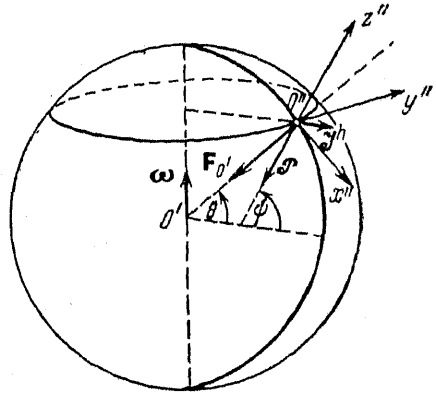


Рис. 20.1.

Кстати заметим, что линия действия \mathcal{P} называется вертикалью, а угол между вертикалью и плоскостью экватора — географической широтой ϕ .

Как мы видели, для достаточно малых скоростей можно пренебречь силой Кориолиса по сравнению с центробежной силой. Если же, кроме того, пренебречь и сопротивлением атмосферы, то ускорение любого свободно падающего тела относительно Земли будет одинаково на данной широте и равно вектору g . Следовательно, ускорение свободно падающего тела, как и вес тела (см. (2)), зависит от географической широты ϕ . Однако отношение веса к этому ускорению равно постоянной для данного тела величине, т. е. равно массе тела:

$$\frac{\mathcal{P}(\phi)}{g(\phi)} = m. \quad (4)$$

Отсюда, учитывая независимость ускорения $g(\phi)$ от свойств тела, получим, что отношение весов двух тел равно отношению масс этих тел:

$$\frac{\mathcal{P}_2}{\mathcal{P}_1} = \frac{m_2}{m_1}. \quad (5)$$

Это соотношение обычно используется в практике измерения масс *).

*) Независимость ускорения свободного падения от свойств тела была экспериментально установлена Галилеем (см. [2], стр. 158), а утверждение (4), также основанное на опыте, было одним из важнейших утверждений, положенных Ньютоном в основу понятия о массе.

Пример 20.2. Отклонение падающего (или взлетающего) тела от вертикали.

Рассмотрим два случая движения свободной материальной точки относительно Земли: падение с нулевой начальной скоростью и движение с начальной скоростью, направленной вверх по вертикали. Будем считать, что движение в обоих случаях происходит в достаточно малой области на географической широте ψ , а сопротивлением атмосферы можно пренебречь. Тогда уравнением движения точки является уравнение (3) предыдущего примера, где $\Phi = 0$. Начало системы S'' , жестко связанной с Землей, поместим на поверхности Земли на одной вертикали с материальной точкой в ее начальном положении; ось $O''z''$ направим вверх по вертикали, ось $O''x''$ — на юг, а ось $O''y''$ — на восток (рис. 20.1). В этой системе проекции постоянных векторов, входящих в уравнение движения, равны

$$g = (0, 0, -g), \quad \omega = (-\omega \cos \psi, 0, \omega \sin \psi).$$

Опуская для удобства штрихи у переменных, из уравнения (3) примера 20.1 получим следующие скалярные уравнения движения точки относительно системы S'' :

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= 2\omega \dot{y} \sin \psi, \\ \ddot{y} &= -2\omega (\dot{x} \sin \psi + \dot{z} \cos \psi), \\ \ddot{z} &= -g + 2\omega \dot{y} \cos \psi. \end{aligned} \quad (1)$$

Одно интегрирование системы (1) после подстановки начальных условий дает

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{x}_0 + 2\omega (y - y_0) \sin \psi, \\ \dot{y} &= \dot{y}_0 - 2\omega [(\dot{x} - \dot{x}_0) \sin \psi + (\dot{z} - \dot{z}_0) \cos \psi], \\ \dot{z} &= -gt + \dot{z}_0 + 2\omega (y - y_0) \cos \psi. \end{aligned} \quad (2)$$

Подставим решение (2) в уравнения движения (1) и пренебрежем членами порядка ω^2 . Тогда придем к системе уравнений, правые части которых являются либо постоянными, либо функциями только времени:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= 2\omega \dot{y}_0 \sin \psi, \\ \ddot{y} &= -2\omega [\dot{x}_0 \sin \psi + (-gt + \dot{z}_0) \cos \psi], \\ \ddot{z} &= -g + 2\omega \dot{y}_0 \cos \psi. \end{aligned}$$

Отсюда нетрудно получить приближенное решение для проекций

скорости и радиуса-вектора точки:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 2\omega \dot{y}_0 t \sin \psi + \dot{x}_0, \\ \dot{y} &= \omega g t^2 \cos \psi - 2\omega (\dot{x}_0 \sin \psi + \dot{z}_0 \cos \psi) t + \dot{y}_0, \\ \dot{z} &= (-g + 2\omega \dot{y}_0 \cos \psi) t + \dot{z}_0; \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} x &= \omega \dot{y}_0 t^2 \sin \psi + \dot{x}_0 t, \\ y &= \omega g \frac{t^3}{3} \cos \psi - \omega (\dot{x}_0 \sin \psi + \dot{z}_0 \cos \psi) t^2 + \dot{y}_0 t, \\ z &= (-g + 2\omega \dot{y}_0 \cos \psi) \frac{t^2}{2} + \dot{z}_0 t + z_0 \end{aligned} \quad (4)$$

(здесь учтено, что в силу выбора системы отсчета $x_0 = y_0 = 0$).

В случае падения точки с высоты z_0 с нулевой начальной скоростью найдем

$$\begin{aligned} x &= 0, \quad y = \frac{1}{3} g \omega t^3 \cos \psi, \\ z &= -\frac{g t^2}{2} + z_0. \end{aligned}$$

Эти функции определяют время падения точки на поверхность Земли и величину отклонения точки на восток:

$$\begin{aligned} \Delta t &= \left(\frac{2z_0}{g} \right)^{1/2}, \\ \Delta y &= \frac{1}{3} \left(\frac{2z_0}{g} \right)^{3/2} g \omega \cos \psi. \end{aligned}$$

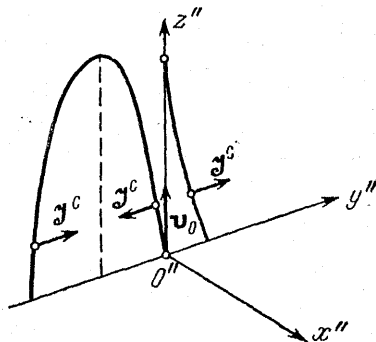


Рис. 20.2.

В случае вертикального взлета точки с поверхности Земли ($z_0 = 0$, $\dot{x}_0 = \dot{y}_0 = 0$, $\dot{z}_0 > 0$) решение (4) имеет вид

$$x = 0, \quad y = \omega \cos \psi \left(\frac{g t^3}{3} - \dot{z}_0 t^2 \right), \quad z = -\frac{g t^2}{2} + \dot{z}_0 t.$$

Отсюда для полного времени полета точки и ее западного склонения соответственно находим

$$\Delta t = \frac{2\dot{z}_0}{g}, \quad \Delta y = -\frac{4}{3} \frac{\dot{z}_0^3}{g^2} \omega \cos \psi.$$

Итак, в обоих случаях точка остается в плоскости, перпендикулярной меридиану; однако в первом случае она отклоняется *на восток*, а во втором — *на запад* (имеется в виду движение в северном полушарии). Причиной отклонения с точки зрения земного наблюдателя является кориолисова сила инерции \mathcal{E}^c (траектории точки и направления сил инерции изображены на рис. 20.2).

Пример 20.3. Состояние невесомости.

Рассмотрим поведение тела, находящегося в спутнике, который движется под действием притяжения Земли вне ее атмосферы с выключенным двигателем. Допустим, что спутник изменяет ориентацию относительно инерциальной системы отсчета с постоянной угловой скоростью ω (в качестве инерциальной системы с достаточной степенью точности можно принять систему S , начало которой помещено в центр инерции Земли, а оси направлены на «неподвижные» звезды). Определить силу, с которой стенка спутника действует на материальную точку, соприкасающуюся со стенкой.

На любую материальную точку, находящуюся в спутнике, действует F^e — сила притяжения со стороны Земли и, кроме того, может отличаться от нуля R — сила, с которой на точку действует оболочка спутника или скрепленные с оболочкой тела. Уравнение движения точки относительно системы S' с началом в центре масс спутника и осями, жестко связанными со спутником, имеет вид (см. (20.1))

$$mw' = R + F^e - mw_m - m[\omega[\omega r']] - 2m[\omega v'].$$

Ускорение w_m центра масс спутника нетрудно определить, учитывая силу притяжения спутника Землей и пренебрегая воздействием материальной точки на движение центра масс.

Используя уравнение (9.14), получим

$$w_m = -\frac{\gamma m_3}{M} \sum_j \frac{m_j}{r_j^3} r_j \quad (1)$$

где m_3 — масса Земли; r_j , m_j — радиус-вектор и масса j -й достаточно малой части спутника, а $M = \sum_j m_j$ — масса спутника.

В уравнении (1) векторы r_j можно заменить на радиус-вектор r_m центра масс спутника, поскольку *размеры спутника исчезающе малы по сравнению с расстоянием от центра Земли до любой точки спутника*. Поэтому из уравнения (1) следует, что

$$w_m = -\gamma \frac{m_3}{r_m^3} r_m \quad (2)$$

По той же причине *сила притяжения F^e и сила инерции $-mw_m$ компенсируют друг друга*, т. е.

$$F^e - mw_m = \gamma m m_3 \left(\frac{r_m}{r_m^3} - \frac{r}{r^3} \right) \approx 0; \quad (3)$$

здесь r — радиус-вектор материальной точки относительно S . Таким образом, приходим к уравнению движения точки относительно спутника

$$mw' = R - m[\omega[\omega r']] - 2m[\omega v']. \quad (4)$$

Если материальная точка, соприкасающаяся со стенкой спутника или с поверхностью тела, скрепленного со спутником, находится в покое, то сила, с которой стенка или тело действует на точку, отлична от нуля и равна

$$R = m [\omega [\omega r']], \quad (5)$$

Следовательно, и точка действует на стенку с силой, равной по величине $m\omega^2 r$ (r — расстояние точки до оси вращения, проходящей через центр масс спутника). Эта сила и является весом точки во вращающемся спутнике (ср. с определением веса на стр. 169 в примере 20.1). Если точка соприкасается с достаточно малым телом, скрепленным со спутником и размещенным на оси вращения, проходящей через центр масс спутника, то $r' \parallel \omega$ и, следовательно, вес точки равняется нулю, т. е. точка невесома, она не давит на «подставку».

Если же $\omega = 0$, т. е. спутник движется *поступательно относительно инерциальной системы отсчета*, то в любом месте спутника точка невесома. В состоянии невесомости точка либо покоится относительно спутника, либо движется равномерно и прямолинейно до столкновения с другими телами*).

§ 21. Законы изменения кинетического момента и кинетической энергии

относительно поступательно движущейся системы центра масс

Система S_m или поступательно движущаяся система центра масс (см. определение на стр. 104) характеризуется тем, что *ее начало O' находится в центре масс механической системы, а ее угловая скорость относительно инерциальной системы S равна нулю*, т. е.

$$r_{O'} = r_m, \quad \omega = 0, \quad (21.1)$$

где r_m — радиус-вектор центра масс механической системы. Если ускорение центра масс отлично от нуля, то поступательно движущаяся система центра масс (см. условие (20.2)) является неинерциальной системой, однако по сравнению с другими неинерциальными системами она обладает рядом особых свойств. Например, соотношения между положениями, скоростями и ускорениями точек, взятыми относительно S и S_m согласно (1.6), (19.10), (19.18) и (21.1) имеют вид

$$r_i = r_m + r'_i, \quad v_i = v_m + v'_i, \quad w_i = w_m + w'_i \quad (21.2)$$

*) «Инерциальность» невращающейся системы S' связана не с поведением точки в отсутствие прочих тел (см. определение на стр. 33), а с тем, что гравитационное поле *в достаточно малой пространственной области* одинаково ускоряет все тела. Поэтому системы, подобные S' , называются *локально-инерциальными*.

(здесь $i = 1, 2, \dots, N$; N — число точек механической системы). Отсюда видно, что все величины \mathbf{r}_i , \mathbf{v}_i и \mathbf{w}_i являются суммами двух членов: один из них характеризует движение центра масс относительно инерциальной системы S , а другой характеризует движение точек относительно системы S_m .

Из первого условия (21.1) вытекает, что радиус-вектор, скорость и ускорение центра масс относительно системы S_m равны нулю:

$$\mathbf{r}'_m = 0, \quad \mathbf{v}'_m = 0, \quad \mathbf{w}'_m = 0. \quad (21.3)$$

Следовательно, в системе центра масс существуют зависимости между радиусами-векторами, скоростями и ускорениями всех точек соответственно. Действительно, пользуясь определениями (9.1), (9.2), (9.3) в системе S_m и учитывая (21.3), найдем, что

$$\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}'_i = 0, \quad \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}'_i = 0, \quad \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{w}'_i = 0. \quad (21.4)$$

Второе из этих соотношений означает, что \mathbf{P}' — импульс механической системы относительно S_m — равен нулю. Итак, импульсы механической системы относительно S и S_m соответственно равны (см. (9.5))

$$\mathbf{P} = m \mathbf{v}_m, \quad \mathbf{P}' = 0. \quad (21.5)$$

Используя определения кинетического момента и момента внешних сил (см. (10.2), (10.5)), а также используя соотношения (21.2), получим

$$\mathbf{M} = \sum_i m_i [\mathbf{r}_m \mathbf{v}_m] + \sum_i m_i [\mathbf{r}'_i \mathbf{v}'_m] + \sum_i m_i [\mathbf{r}_m \mathbf{v}'_i] + \mathbf{M}',$$

$$\mathbf{L}^e = \sum_i [\mathbf{r}_m \mathbf{F}_i^e] + (\mathbf{L}^e),$$

где $\mathbf{M}' = \sum_{i=1}^N m_i [\mathbf{r}'_i \mathbf{v}'_i]$ — кинетический момент системы относительно S_m ,

$(\mathbf{L}^e) = \sum_{i=1}^N [\mathbf{r}'_i \mathbf{F}_i^e]$ — сумма моментов внешних сил относительно S_m .

Отсюда, учитывая (21.4), найдем

$$\mathbf{M} = [\mathbf{r}_m \mathbf{P}] + \mathbf{M}', \quad (21.6)$$

$$\mathbf{L}^e = [\mathbf{r}_m \mathbf{F}^e] + (\mathbf{L}^e), \quad (21.7)$$

где \mathbf{F}^e — сумма всех внешних сил, действующих на точки системы. Из (21.6) видно, что кинетический момент механической системы относительно инерциальной системы отсчета S равен сумме взятого относительно S момента импульса центра масс, в котором как бы сосредоточена вся масса системы, и кинетического момента системы относительно поступательно движущейся системы

центра масс S_m . Соотношение (21.7) показывает, что векторы L^e и $(L^e)'$ отличаются на момент суммы внешних сил, действующих на точки и мысленно приложенных к центру масс.

Соотношения для кинетических энергий и мощностей получим аналогично, воспользовавшись определениями этих величин (см. (11.2)) и формулами (21.2):

$$T = \frac{mv^3}{2} + T', \quad (21.8)$$

$$\frac{dA}{dt} = F^e v_m + \frac{(dA)'}{dt}, \quad (21.9)$$

где $T' = \sum_{i=1}^N \frac{m_i (v_i')^2}{2}$ — кинетическая энергия в системе S_m , $\frac{(dA)'}{dt} = \sum_{i=1}^N F_i^{in} v_i' + \sum_{i=1}^N F_i^e v_i'$ — мощность всех сил относительно S_m (в соответствии (21.9) учтено, что внутренние силы подчинены закону действия и противодействия). Следовательно, кинетическая энергия механической системы относительно инерциальной системы отсчета равна сумме кинетической энергии центра масс, в котором как бы сосредоточена вся масса системы, и кинетической энергии относительно поступательно движущейся системы центра масс. В свою очередь мощность всех сил относительно системы S равна сумме мощностей всех внешних сил, мысленно приложенных к центру масс, и мощностей всех сил относительно системы S_m .*

Теперь найдем законы изменения кинетического момента и кинетической энергии относительно системы S_m . Подставляя выражения (21.6) и (21.7) в уравнение (10.5), получим

$$[\dot{\mathbf{r}}_m \mathbf{P}] + [\mathbf{r}_m \dot{\mathbf{P}}] + \frac{d\mathbf{M}'}{dt} = [\mathbf{r}_m \mathbf{F}^e] + (L^e)'$$

Здесь член $[\dot{\mathbf{r}}_m \mathbf{P}]$ равен нулю, поскольку он пропорционален векторному произведению скорости центра масс самой на себя, а

$$[\mathbf{r}_m \dot{\mathbf{P}}] = [\mathbf{r}_m \mathbf{F}^e], \quad (21.10)$$

что очевидным образом вытекает из уравнения (9.15). Следовательно, закон изменения кинетического момента относительно поступательно движущейся системы центра масс имеет вид

$$\frac{d\mathbf{M}'}{dt} = (L^e)'. \quad (21.11)$$

*) Заметим, что соотношения (21.2) и (21.6) — (21.9) справедливы при любом выборе системы S , относительно которой система S_m движется поступательно. Система S может быть как инерциальной, так и неинерциальной, поскольку соотношения (1.6), (19.10) и (19.18) справедливы для любых двух систем отсчета.

Подставляя (21.8) и (21.9) в (11.2), получим

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{mv_m^2}{2} \right) + \frac{dT'}{dt} = \mathbf{F}^e \mathbf{v}_m + \frac{(dA)'}{dt}.$$

Первые члены обеих частей этого уравнения равны друг другу, что следует из уравнения движения центра масс (9.14). Действительно, скалярным умножением (9.14) на \mathbf{v}_m найдем

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{mv_m^2}{2} \right) = \mathbf{F}^e \mathbf{v}_m \quad (21.12)$$

(см. вывод (6.1) на стр. 60). Учитывая (21.12), придем к *закону изменения кинетической энергии относительно поступательно движущейся системы центра масс*:

$$\frac{dT'}{dt} = \frac{(dA^{in})'}{dt} + \frac{(dA^e)'}{dt}, \quad (21.13)$$

где $\frac{(dA^{in})'}{dt}$ и $\frac{(dA^e)'}{dt}$ — мощности внутренних и внешних сил относительно S_m .

Итак, законы изменения кинетического момента и кинетической энергии относительно поступательно движущейся системы центра масс по форме совпадают с соответствующими законами относительно инерциальной системы отсчета (ср. (21.11) с (10.5) и (21.13) с (11.2)). Это свойство системы S_m связано с тем, что сумма моментов и сумма мощностей сил инерции в рассматриваемой системе равны нулю. Действительно, в системе S_m могут отличаться от нуля только переносные силы инерции (см. (21.1))

$$\mathcal{J}_i^h = -m_i \mathbf{w}_m \quad (i = 1, 2, \dots, N), \quad (21.14)$$

а сумма моментов и сумма мощностей этих сил с учетом (21.3) равны

$$\begin{aligned} \sum_i [\mathbf{r}_i' \mathcal{J}_i^h] &= -m [\mathbf{r}_m' \mathbf{w}_m] = 0, \\ \sum_i \mathcal{J}_i^h \mathbf{v}_i' &= -m \mathbf{v}_m' \mathbf{w}_m = 0. \end{aligned} \quad (21.15)$$

Пример 21.1. Система N точек в однородном поле тяжести.

Найти закон движения системы N материальных точек, которые движутся в однородном постоянном поле тяжести напряженности \mathbf{g} ; внутренними силами системы являются силы притяжения, прямо пропорциональные расстоянию между точками и произведению масс соответствующих точек (коэффициент пропорциональности κ).

Уравнениями движения системы относительно инерциальной системы S являются уравнения

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \mathbf{F}_{ji} + \mathbf{F}_i^e \quad (i = 1, 2, \dots, N), \quad (1)$$

где

$$\mathbf{F}_{ji} = -\chi m_i m_j (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j), \quad \mathbf{F}_i^e = m_i \mathbf{g}.$$

Прежде всего найдем закон движения центра масс относительно S , для чего используем уравнение (см. (9.14))

$$m \ddot{\mathbf{r}}_m = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{g},$$

где $m = \sum_{i=1}^N m_i$. Отсюда получим, что

$$\mathbf{r}_m = \mathbf{g} \frac{t^2}{2} + \mathbf{v}_m t + \mathbf{r}_{m0}. \quad (2)$$

Итак, относительно S центр масс движется по параболе с постоянным ускорением \mathbf{g} и, следовательно, система S_m будет неинерциальной. В этой системе единственными отличными от нуля силами инерции будут переносные силы

$$\mathcal{E}_i^h = -m_i \mathbf{w}_m = -m_i \mathbf{g} \quad (3)$$

($i = 1, 2, \dots, N$), а уравнения движения имеют вид

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \mathbf{F}_{ji} + \mathbf{F}_i^e + \mathcal{E}_i^h \quad (i = 1, 2, \dots, N).$$

Подставляя сюда выражения сил (см. (1) и (3)) и имея в виду, что $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j = \mathbf{r}'_i - \mathbf{r}'_j$, найдем

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = -\chi \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N m_j (\mathbf{r}'_i - \mathbf{r}'_j) \quad (i = 1, 2, \dots, N).$$

Правые части этих уравнений зависят только от радиуса-вектора соответствующей точки. Действительно,

$$(m - m_i) \mathbf{r}'_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N m_j \mathbf{r}'_j = m \mathbf{r}'_i - \sum_{j=1}^N m_j \mathbf{r}'_j$$

где последняя сумма равна нулю в силу (21.4). Таким образом, уравнения движения сводятся к системе уравнений

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = -\chi m \mathbf{r}'_i \quad (i = 1, 2, \dots, N). \quad (4)$$

Отсюда видно, что каждая материальная точка движется так, как будто на нее действует сила притяжения со стороны точки, находящейся в центре масс и обладающей массой, равной массе всей системы. Эти силы центральны, и поэтому моменты импульса каждой точки относительно S_m сохраняются:

$$M'_i = M'_{i0} \quad (i = 1, 2, \dots, N),$$

а движение точек происходит по плоским траекториям.

Общее решение $r'_i(t)$ каждого из уравнений (4) в декартовых координатах имеет вид

$$\begin{aligned} x'_i &= a_i \cos(\omega t + \alpha_i), \\ y'_i &= b_i \cos(\omega t + \beta_i), \\ z'_i &= c_i \cos(\omega t + \gamma_i), \end{aligned} \quad (i = 1, 2, \dots, N),$$

где амплитуды и фазы определяются начальными условиями.

Из приведенных результатов следует, что центр масс механической системы движется по параболе относительно инерциальной системы отсчета; относительно системы S_m точки движутся по эллипсам с общим центром в центре масс и одинаковым периодом, равным $2\pi/(\chi m)^{1/2}$; орбиты точек лежат в плоскостях, проходящих через центр масс; ориентация этих плоскостей постоянна, но может быть различной для разных точек (только в случае $N=2$ точки относительно S_m движутся в одной и той же плоскости, см. рис. 21.1).

Что касается законов изменения момента, то из уравнений (10.5) и (21.11) вытекает, что

$$\dot{M} = L^e = m [r_m g] \neq 0,$$

$$\dot{M}' = (L^e)' = m [r'_m g] = 0.$$

Следовательно, момент M относительно инерциальной системы S не сохраняется, в то время как момент M' относительно S_m сохраняется.

Энергия системы относительно S , как видно из (11.19) и (11.20), сохраняется:

$$E = T_1 + T_2 + U^{\text{in}} + U_1^c + U_2^c = E_0,$$

где $U^{\text{in}} = \chi m_1 m_2 \frac{r_{21}^2}{2}$, $U_1^c = -m_1 g r_1$, $U_2^c = -m_2 g r_2$. Используя (21.8), этот интеграл можно представить в виде

$$\frac{m\omega^2}{2} + T' + U^{\text{in}} + U^c = E_0,$$

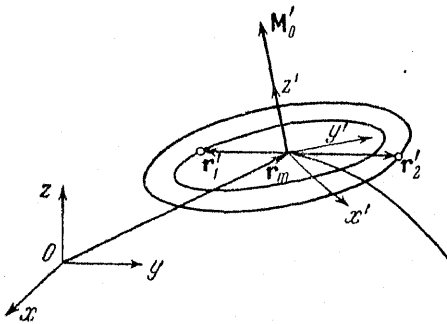


Рис. 21.1.

где $U^e = -mgr_m$ — полная потенциальная энергия во внешнем поле. Ввиду потенциальности суммы сил F^e из уравнения (21.12) следует сохранение «энергии центра масс», т. е.

$$\frac{mv_m^2}{2} - mgr_m = \text{const.}$$

Таким образом, из последних двух интегралов вытекает, что энергия E' относительно системы S_m сохраняется:

$$T' + U^{\text{in}} = E'_0$$

(этот интеграл можно получить также из (21.13)).

Пример 21.2. Осевое и орбитальное вращение планет.

Согласно гипотезе О. Ю. Шмидта солнечная система образовалась в результате захвата Солнцем газо-пылевого облака*). Для простоты это облако будем считать плоским, плотность массы облака постоянной, а его частицы движущимися по круговым орбитам относительно инерциальной системы с началом в центре Солнца. Предположим, что некоторая планета образовалась из частиц, первоначально заключенных в кольцо с радиусами r_1 и r_2 ($r_1 < r_2$), в результате неупругих столкновений частиц кольца, при этом весьма большая часть механической энергии перешла в теплоту. Допуская, что центр масс образовавшейся планеты движется по круговой орбите радиуса R ($r_1 < R < r_2$), покажем, что образовавшаяся планета должна вращаться вокруг своей оси в том же направлении, в каком она вращается по орбите вокруг Солнца.

В данном случае под механической системой будем понимать частицы кольца, из которого образовалась планета. Тогда внешним полем будет гравитационное поле Солнца. Для доказательства воспользуемся законами изменения момента и энергии относительно гелиоцентрической системы отсчета, сравнив два состояния механической системы: начальное состояние, когда частицы кольца двигались по круговым орбитам, а плотность роя была постоянной (рис. 21.2, а), и конечное состояние, когда частицы этого кольца «слиплись» в планету (рис. 21.2, б). Величины, характеризующие эти состояния, будем обозначать индексами 0 и 1 соответственно.

Из закона изменения кинетического момента (10.5) благодаря центральности внешней силы получим

$$M_1 = M_0. \quad (1)$$

С другой стороны, поскольку механическая энергия уменьшается

*) О. Ю. Шмидт, Четыре лекции о теории происхождения Земли, Изд. АН СССР, 1949.

в результате диссипативных внутренних процессов (неупругих соударений), из (11.18) следует:

$$\dot{E} < 0, \quad E_1 = E_0 + \Delta E \quad (\Delta E < 0). \quad (2)$$

Оказывается, что два этих закона определяют соотношение между осевым и орбитальным кинетическим моментами планеты. Чтобы найти это соотношение, подсчитаем ряд величин, входящих в (1) и

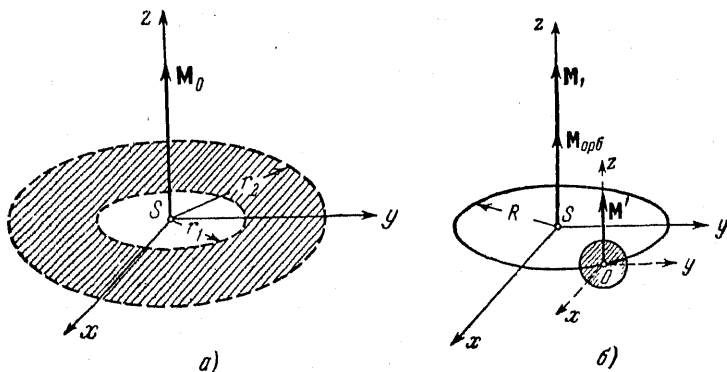


Рис. 21.2.

(2). Величину момента M_0 легко определить, если учесть, что квадрат скорости частицы, движущейся по круговой орбите радиуса r вокруг тела массы m_S , равен

$$v^2 = \gamma \frac{m_S}{r}$$

(см. формулу (3) примера 8.1). Тогда получим, что

$$M_0 = \int dm \cdot r \cdot v = \int_{r_1}^{r_2} n_0 2\pi r dr \cdot r \left(\frac{\gamma m_S}{r} \right)^{1/2} = \frac{4\pi}{5} n_0 (\gamma m_S)^{1/2} (r_2^{5/2} - r_1^{5/2}), \quad (3)$$

где n_0 — плотность массы на единицу площади роя. Аналогично получим кинетическую энергию частиц кольца и их потенциальную энергию во внешнем поле

$$T_0 = \pi n_0 \gamma m_S (r_2 - r_1); \quad U_0^e = -2\pi n_0 \gamma m_S (r_2 - r_1).$$

Отсюда находим полную механическую энергию кольца

$$E_0 = -\pi n_0 \gamma m_S (r_2 - r_1) + U_0^{\text{in}}, \quad (4)$$

где U_0^{in} — потенциальная энергия взаимодействия между частицами кольца.

Теперь подсчитаем ряд величин, относящихся к «планетному состоянию». Согласно (21.6) кинетический момент планеты относительно гелиоцентрической системы складывается из двух членов, один из которых обусловлен орбитальным движением планеты, а другой — ее вращением относительно системы $O'xuz$ с началом в центре масс планеты и осями, параллельными осям гелиоцентрической системы:

$$M_1 = M_{\text{орб}} + M', \quad (5)$$

где $M_{\text{орб}} = m [\gamma_m v_m]$ — орбитальный момент, M' — осевой момент, $m = \pi n_0 (r_2^2 - r_1^2)$ — масса планеты, равная массе кольца. Предполагая, что моменты $M_{\text{орб}}$ и M_1 направлены одинаково, а центр масс планеты движется по круговой орбите радиуса R , и, следовательно, квадрат его скорости равен

$$v_m^2 = \frac{\gamma m_S}{R},$$

для величины орбитального момента получим значение

$$M_{\text{орб}} = m \sqrt{\gamma m_S} R^{1/2}. \quad (6)$$

Аналогично для «кинетической энергии центра масс» планеты и ее потенциальной энергии в поле Солнца найдем

$$\frac{mv_m^2}{2} = \frac{\gamma m_S m}{2R}, \quad U_1^e = -\frac{\gamma m_S m}{R}.$$

Используя эти результаты и соотношение (21.8), найдем полную механическую энергию планеты

$$E_1 = -\frac{\gamma m_S m}{2R} + T_1' + U_1^{\text{in}}, \quad (7)$$

где T_1' — кинетическая энергия осевого вращения планеты, а U_1^{in} — потенциальная энергия взаимодействия между частицами планеты.

Учитывая (3) — (7), из закона сохранения (1) получим проекцию осевого момента на ось $O'z$, перпендикулярную плоскости орбиты, а из закона изменения (2) — уравнение для ΔE :

$$M_2' = \pi n_0 \sqrt{\gamma m_S} \left[\frac{4}{5} (r_2^{5/2} - r_1^{5/2}) - (r_2^2 - r_1^2) R^{1/2} \right],$$

$$\Delta E + U_0^{\text{in}} - U_1^{\text{in}} - T_1' = \pi n_0 \gamma m_S \left[(r_2 - r_1) - \frac{(r_2^2 - r_1^2)}{2R} \right]. \quad (8)$$

Затем, согласно допущению о весьма больших потерях механической энергии в процессе образования планеты, потребуем, чтобы

$$|\Delta E| \gg |U_0^{\text{in}} - U_1^{\text{in}} - T_1'|. \quad (9)$$

Тогда последнее из соотношений (8) можно записать в виде

$$-\Delta E = \pi n_0 \gamma m_S \left[\frac{r_2^2 - r_1^2}{2R} - (r_2 - r_1) \right], \quad (10)$$

откуда вследствие того, что $\Delta E < 0$, получаем неравенство

$$R < \frac{r_1 + r_2}{2}, \quad (11)$$

определяющее знак осевого момента. Действительно, подставим в выражение для M'_z (см. (8)) величину $(r_1 + r_2)/2$ вместо R и, таким образом, найдем

$$M'_z > \pi n_0 \sqrt{\frac{\gamma m_S}{2}} \left[\frac{4\sqrt{2}}{5} (r_2^{5/2} - r_1^{5/2}) - (r_2^2 - r_1^2) (r_2 + r_1)^{1/2} \right]. \quad (12)$$

При упрощающем предположении $r_2 - r_1 \ll r_1$ правая часть неравенства (12) с точностью до членов порядка $[(r_2 - r_1)/r_1]^3$ включительно равна

$$\frac{\pi n_0}{16} \sqrt{\frac{\gamma m_S}{r_1}} (r_2 - r_1)^3.$$

Это выражение положительно, поскольку $r_2 > r_1$, и, следовательно, момент M'_z тоже положителен^{*}).

Таким образом, в процессе образования планеты в результате больших диссипативных потерь возникает вращение планеты вокруг своей оси в том же направлении, в котором она вращается по орбите. Заметим, что, несмотря на весьма большие упрощения, этот вывод теории подтверждается для большинства планет солнечной системы.

§ 22. Законы изменения и сохранения импульса, кинетического момента и энергии относительно произвольных неинерциальных систем отсчета

Рассмотрим соотношения важнейших динамических величин, характеризующих механическую систему и отнесенных к произвольным системам отсчета S и S' . Будем считать, что движение системы S' относительно S известно, т. е. r_0 — радиус-вектор начала системы S' и ω — ее угловая скорость заданы как функции времени; будем также считать, что все векторы, характеризующие механическую систему относительно S , заданы в виде разложений по ортам S , а векторы, характеризующие систему относительно S' , заданы в виде разложения по ортам S' .

Найдем, например, соотношение между \mathbf{P} — импульсом системы относительно S и \mathbf{P}' — импульсом той же системы относительно S' . Для этого используем определение импульса и связь скоростей лю-

^{*} Утверждение о положительности M'_z справедливо и при очень общих предположениях — см. работу, цитированную на стр. 179.

бои точки относительно систем S и S' (см. (9.5) и (19.10)). Тогда получим

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_{O'} + \sum_{i=1}^N m_i [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}_i] + \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i.$$

В первой и второй суммах этого выражения множители $\mathbf{v}_{O'}$ и $\boldsymbol{\omega}$ не зависят от номера точки, а третья сумма является импульсом \mathbf{P}' относительно S' . Учитывая это, придем к соотношению между импульсами \mathbf{P} и \mathbf{P}' (одной и той же механической системы) относительно систем отсчета S и S' :

$$\mathbf{P} = m \mathbf{v}_{O'} + m [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}'_m] + \mathbf{P}', \quad (22.1)$$

где m — масса системы, \mathbf{r}'_m — радиус-вектор центра масс относительно S' . Отсюда следует, что скорость центра масс системы относительно S равна (см. (9.2) и (9.7))

$$\mathbf{v}_m = \mathbf{v}_{O'} + [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}'_m] + \mathbf{v}'_m, \quad (22.2)$$

где \mathbf{v}'_m — скорость центра масс относительно S' .

Аналогично найдем соотношения кинетических моментов и моментов внешних сил. В самом деле, используя определения кинетического момента и момента внешних сил (см. (10.2) и (10.5)), а также соотношения (1.6) и (19.10) для каждой точки системы, получим

$$\mathbf{M} = [\mathbf{r}_O \mathbf{P}] + m [\mathbf{r}'_m \mathbf{v}_{O'}] + \sum_{i=1}^N m_i [\mathbf{r}'_i [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}'_i]] + \mathbf{M}', \quad (22.3)$$

$$\mathbf{L}^e = [\mathbf{r}_O \mathbf{F}^e] + (\mathbf{L}^e)', \quad (22.4)$$

где \mathbf{M}' и $(\mathbf{L}^e)'$ — кинетический момент системы и сумма моментов внешних сил относительно S' .

Соотношения для кинетических энергий и мощностей всех сил, действующих на точки, найдем, используя определения этих величин (см. (11.2) и (6.1)), формулы (19.10) и третий закон Ньютона. В результате получим

$$T = \frac{m v_{O'}^2}{2} + m \mathbf{v}_{O'} [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}'_m] + m \mathbf{v}_{O'} \mathbf{v}'_m + \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}'_i]^2 + \boldsymbol{\omega} \mathbf{M}' + T', \quad (22.5)$$

$$\frac{dA}{dt} = \mathbf{F}^e \mathbf{v}_{O'} + \boldsymbol{\omega} (\mathbf{L}^e)' + \frac{(dA)'}{dt}, \quad (22.6)$$

где T' — кинетическая энергия относительно S' , $\frac{dA}{dt} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt}$ —

мощность сил относительно S , $\frac{(dA)'}{dt} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \frac{d'\mathbf{r}_i}{dt}$ — мощность сил относительно S' . Заметим, что соотношения (22.1) — (22.6) справедливы для любых двух систем отсчета S и S' .

Чтобы установить законы изменения \mathbf{P}' , \mathbf{M}' и T' относительно S' , систему S будем считать инерциальной, а систему S' неинерциальной и исходить из уравнений движения относительно неинерциальной системы отсчета (см. (20.1)). Например, суммируя эти уравнения по всем точкам, найдем

$$\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{w}'_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i + \sum_{i=1}^N \mathcal{J}_i^h + \sum_{i=1}^N \mathcal{J}_i^c. \quad (22.7)$$

Левая часть этого уравнения, согласно определению, равна произведению $m \mathbf{w}'_m$, а ускорение любой точки относительно S' , согласно (19.14), есть производная скорости этой точки относительно S' , взятая при постоянных «штрихованных» ортах. Следовательно, $\mathbf{w}'_m = \frac{d' \mathbf{v}'_m}{dt}$, и левую часть (22.7) можно записать в виде

$$\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{w}'_i = \frac{d' \mathbf{P}'}{dt}.$$

Сумма всех сил \mathbf{F}_i из уравнения (22.7) будет равна сумме только внешних сил \mathbf{F}^e , поскольку внутренние силы взаимодействия подчинены третьему закону Ньютона. Суммируя переносные силы инерции, найдем

$$\sum_{i=1}^N \mathcal{J}_i^h = -m \{ \mathbf{w}_{O'} + [\dot{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{r}'_m] + [\boldsymbol{\omega} [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}'_m]] \}. \quad (22.8)$$

Отсюда видно, что сумма переносных сил инерции, «приложенных» к точкам системы, равна переносной силе инерции, «приложенной» к центру масс. Аналогично для суммы кориолисовых сил инерции получим

$$\sum_{i=1}^N \mathcal{J}_i^c = -2m [\boldsymbol{\omega} \mathbf{v}'_m]. \quad (22.9)$$

Таким образом, уравнение (22.7) представляет собой закон изменения импульса относительно неинерциальной системы отсчета:

$$\frac{d' \mathbf{P}'}{dt} = \mathbf{F}^e + \mathcal{J}_m^h + \mathcal{J}_m^c, \quad (22.10)$$

где

$$\mathcal{J}_m^h = -m \{ \mathbf{w}_{O'} + [\dot{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{r}'_m] + [\boldsymbol{\omega} [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}'_m]] \}, \quad \mathcal{J}_m^c = -2m [\boldsymbol{\omega} \mathbf{v}'_m].$$

Как мы видим, вывод и содержание этого закона аналогичны выводу и содержанию закона изменения импульса относительно инерциальной системы отсчета (9.15). Однако в неинерциальной системе, кроме сил, действующих на точки со стороны различных тел, имеются *силы инерции, которые не подчинены закону действия и противодей-*

ствия. Эти силы играют роль внешних сил и также изменяют импульс системы.

Вывод закона изменения момента M' аналогичен выводу уравнения (10.5) для момента M . Действительно, умножим обе части уравнения (20.1), взятого для l -й точки, векторно слева на \mathbf{r}'_l и просуммируем полученные выражения по всем точкам. Затем учтем, что \mathbf{v}'_l — скорость l -й точки относительно S' — равна производной от \mathbf{r}'_l по времени при постоянных «штрихованных» ортах. Тогда, исключая внутренние силы взаимодействия с помощью третьего закона аналогично (10.3) и (10.4), получим закон изменения кинетического момента относительно неинерциальной системы отсчета:

$$\frac{d'M'}{dt} = (L^e)' + \sum_{i=1}^N [\mathbf{r}'_i \mathcal{J}_i^h] + \sum_{i=1}^N [\mathbf{r}'_i \mathcal{J}_i^e]. \quad (22.11)$$

Умножая каждое из уравнений (20.1), взятых для различных точек системы, скалярно на скорость соответствующей точки относительно системы S' , в результате простых преобразований, найдем закон изменения кинетической энергии относительно неинерциальной системы отсчета:

$$\frac{d'T'}{dt} = \frac{(dA)'}{dt} + \sum_{i=1}^N \mathcal{J}_i^h \mathbf{v}'_i \mathbf{v}'_i \quad (22.12)$$

где $\frac{(dA)'}{dt}$ — мощность всех сил F_i относительно S' . При выводе (22.12) следует иметь в виду, что производная кинетической энергии по времени при постоянных ортах системы S равна производной той же функции при постоянных ортах системы S' , т. е.

$$\frac{dT'}{dt} = \frac{d'T'}{dt}, \quad (22.13)$$

поскольку $\mathbf{v}_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \mathbf{v}_i \left\{ [\boldsymbol{\omega} \mathbf{v}_i] + \frac{d'\mathbf{v}_i}{dt} \right\} = \mathbf{v}_i' \frac{d'\mathbf{v}_i}{dt}$. При выводе закона (22.12) нужно также учитывать, что работа кориолисовых сил относительно S' равна нулю:

$$-2m_l [\boldsymbol{\omega} \mathbf{v}'_l] d'\mathbf{r}'_l = 0 \quad (l = 1, 2, \dots, N). \quad (22.14)$$

Итак, согласно закону (22.12), изменение кинетической энергии относительно S' определяется работой внутренних и внешних сил, а также работой переносных сил инерции. Рассмотрим подробнее этот закон, предполагая, что внешние силы заданы как функции положений и скоростей точек относительно S' , а также предполагая, что среди этих сил есть потенциальные, диссипативные и гироскопические силы; относительно внутренних сил взаимодействия предположим, что среди них могут быть потенциальные и диссипативные

силы. Для потенциальной энергии U' относительно S' аналогично (11.14) и (11.15) получим

$$U' = (U^e)' + U^{in}, \quad (22.15)$$

где $(U^e)' = \sum_{i=1}^N U_i(\mathbf{r}_i, t)$, $U^{in} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i, j=1 \\ i \neq j}}^N U_{ij}(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|)$; а для гироскопических сил будем иметь (ср. с (11.6))

$$\mathbf{F}_i^g d'\mathbf{r}'_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N). \quad (22.16)$$

Учитывая (22.15), (22.16) и соотношения типа (11.2) — (11.13), закон (22.12) можно записать в виде, аналогичном (11.18):

$$\frac{d'}{dt}(T' + U') = \frac{\partial(U^e)'}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^d \mathbf{v}'_i + \sum_{i=1}^N \mathcal{J}_i^h \mathbf{v}'_p \quad (22.17)$$

где $\mathbf{F}_i^d = \mathbf{F}_i^{d, e} + \mathbf{F}_i^{d, in}$.

Изучим свойства переносных сил инерции, имея в виду, что эти силы заданы как функции времени и координат точек, поскольку \mathbf{w}_O — ускорение начала системы S' и $\boldsymbol{\omega}$ — ее угловая скорость считаются известными функциями времени. Вычисляя ротор от каждого из трех слагаемых переносной силы инерции, убеждаемся в потенциальности части сил:

$$\text{rot } \mathbf{w}_O = 0, \quad \text{rot } [\boldsymbol{\omega} [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}']] = 0, \quad \text{rot } [\dot{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{r}'] = 2\dot{\boldsymbol{\omega}} \quad (22.18)$$

(здесь дифференцирование производится по координатам точки пространства в системе S' при фиксированном времени). Таким образом, сила инерции, возникающая за счет поступательного ускорения, и центробежная сила являются потенциальными силами. Поэтому можно ввести U_i^h — потенциальную энергию i -й точки, соответствующую указанным двум силам, и, согласно (11.8), записать эту функцию в виде

$$U_i^h = m_i \int \{ \mathbf{w}_O + [\boldsymbol{\omega} [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}_i]] \} d'\mathbf{r}_i. \quad (22.19)$$

Учитывая, что

$$[\boldsymbol{\omega} [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}_i]] = \boldsymbol{\omega} (\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}_i) - \omega^2 \mathbf{r}_i,$$

для U_i^h получим выражение

$$U_i^h = m_i \left\{ \mathbf{w}_O \cdot \mathbf{r}_i + \int (\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}_i) (\boldsymbol{\omega} d'\mathbf{r}_i) - \frac{\omega^2}{2} (r_i)^2 \right\},$$

в котором

$$\int \omega_x^2 x_i dx_i = \frac{\omega_x^2}{2} (x_i)^2, \quad \int \omega_x \omega_y x_i dy_i = \omega_x \omega_y x_i y_i$$

и т. д. Таким образом, найдем, что

$$\int (\omega \mathbf{r}_i) (\omega d' \mathbf{r}_i) = \frac{1}{2} (\omega \mathbf{r}_i)^2,$$

а затем, используя векторное тождество

$$[\omega \mathbf{r}_i]^2 = \omega^2 (r_i)^2 - (\omega \mathbf{r}_i)^2,$$

окончательно получим

$$U_i^h = m_i \left\{ \omega_O \mathbf{r}_i - \frac{1}{2} [\omega \mathbf{r}_i]^2 \right\}. \quad (22.20)$$

Суммируя это выражение по всем точкам, найдем *потенциальную энергию U^h системы в поле переносных сил инерции*:

$$U^h = m \mathbf{r}'_m \omega_O - \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} [\omega \mathbf{r}_i]^2 \quad (22.21)$$

(еще раз подчеркнем, что (22.21) есть потенциальная энергия, соответствующая не всем переносным силам инерции, а только потенциальной ее части).

Учитывая свойства сил инерции \mathcal{S}_i^h (см. (20.1) и (22.18)), запишем мощность этих сил в виде, аналогичном (11.9):

$$\sum_{i=1}^N \mathcal{S}_i^h \mathbf{v}_i = - \frac{d' U^h}{dt} + \frac{\partial U^h}{\partial t} - \sum_{i=1}^N m_i [\dot{\omega} \mathbf{r}_i] \mathbf{v}_i. \quad (22.22)$$

Затем, используя (22.21), найдем частную производную:

$$\frac{\partial U^h}{\partial t} = m \mathbf{r}'_m \dot{\omega}_O - \sum_{i=1}^N m_i [\omega \mathbf{r}_i] [\dot{\omega} \mathbf{r}_i]. \quad (22.23)$$

Наконец, учитывая (22.22) и (22.23), из (22.17) получим *закон изменения полной энергии относительно неинерциальной системы отсчета*:

$$\frac{d' E'}{dt} = \frac{\partial (U^e)'}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^d \mathbf{v}_i + m \mathbf{r}'_m \dot{\omega}_O - \dot{\omega} \left\{ M' + \sum_{i=1}^N m_i [\mathbf{r}_i' [\omega \mathbf{r}_i]] \right\}, \quad (22.24)$$

где $E' = T' + U' + U^h$ — полная механическая энергия относительно неинерциальной системы отсчета; U' , U^h определены в (22.15) и (22.21), а ω_O и ω являются заданными функциями времени.

Законы сохранения относительно неинерциальных систем отсчета аналогичны соответствующим законам для инерциальных систем; однако для сохранения какой-либо проекции импульса или момента

необходимо большее число требований, включающее в себя требования на соответствующие проекции сил инерции или момента сил инерции. Например, из (22.10) следует: если

$$I'_{z'} = \mathcal{J}'_{mz'} = \mathcal{J}'_{mz'} = 0,$$

то

$$P'_{z'} = P'_{z'0}; \quad (22.25)$$

а из (22.11) получим: если

$$(I^i)'_{z'} = \sum_i [\mathbf{r}_i \mathcal{J}_i^h]_{z'} = \sum_i [\mathbf{r}_i \mathcal{J}_i^c]_{z'} = 0,$$

то

$$M'_{z'} = M'_{z'0}. \quad (22.26)$$

Заметим, что в случае изолированной механической системы ($\mathbf{F}_i^c = 0$, $i = 1, 2, \dots, N$) ее импульс и кинетический момент относительно инерциальной системы отсчета сохраняются; если же движение механической системы отнесено к неинерциальной системе отсчета, то импульс и кинетический момент механической системы сохраняться не будут, так как и в случае изолированной системы на нее «действуют» силы инерции.

Наконец (см. (22.24)), если потенциальная энергия механической системы во внешних полях стационарна, диссипативные силы (внутренние и внешние) отсутствуют, а неинерциальная система отсчета движется относительно инерциальной с постоянной угловой скоростью и постоянным ускорением начала, то полная энергия механической системы относительно неинерциальной системы отсчета будет сохраняться, т. е.

$$\frac{\partial(U^e)'}{\partial t} = 0, \quad \mathbf{F}_i^d = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N),$$

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_0, \quad \mathbf{w}_{O'} = (\mathbf{w}_{O'})_0,$$

то

$$E' = T' + U' + U^h = E'_0. \quad (22.27)$$

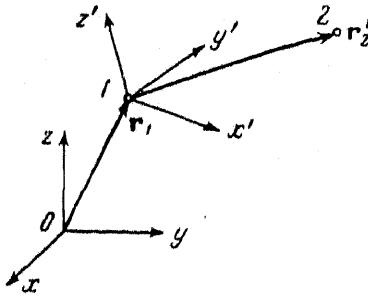


Рис. 22.1.

Пример 22.1. Задача двух тел в инерциальной системе отсчета.

Рассмотрим движение двух взаимодействующих точек относительно поступательно движущейся системы S' с началом в одной из точек (рис. 22.1). Поместим начало этой системы в точку I , т. е. потребуем, чтобы $\mathbf{r}'_1 = 0$. Учтывая, что движение S' относительно инерциальной системы S поступательно, т. е. $\boldsymbol{\omega} = 0$, и что ввиду выбора начала $\mathbf{w}'_1 = 0$, получим из уравнений вида (20.1) уравнения движения относительно S' :

$$0 = \mathbf{F}_{21} - m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1, \quad m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{F}_{12} - m_2 \ddot{\mathbf{r}}_1. \quad (1)$$

Первое из этих уравнений по существу является уравнением движения начала системы S' относительно S , а второе — уравнением движения точки 2 относительно S' . Это движение точка 2 совершает под действием силы F_{12} и силы инерции — $m_2 \ddot{\mathbf{r}}_1$. Исключая $\ddot{\mathbf{r}}_1$ из второго уравнения с помощью первого уравнения, получим уравнение движения второй точки в виде

$$\mu \ddot{\mathbf{r}}'_2 = F_{12}(|\mathbf{r}'_2|), \quad (2)$$

где $\mu = \frac{m_1 m_2}{m}$.

Сопоставляя (2) с (12.11), придем к выводу, что точка 2 движется относительно неинерциальной системы S' так же, как воображаемая « μ -точка» движется относительно инерциальной системы центра масс.

Интересно рассмотреть законы сохранения относительно неинерциальной системы S' . Закон изменения момента (22.11) в данной задаче принимает вид

$$\frac{d\mathbf{M}'}{dt} = [\mathbf{r}'_2 \mathcal{J}_2^h], \quad (3)$$

где $\mathbf{M}' = m_2 [\mathbf{r}'_2 \mathbf{v}'_2]$, $\mathcal{J}_2^h = -m_2 \ddot{\mathbf{r}}_1$. Из первого уравнения (1) следует, что переносная сила инерции равна

$$\mathcal{J}_2^h = \frac{m_2}{m_1} F_{12}(|\mathbf{r}'_2|) \quad (4)$$

и является центральной силой; момент силы \mathcal{J}_2^h относительно точки 1 равен нулю, а значит, момент \mathbf{M}' сохраняется:

$$m_2 [\mathbf{r}'_2 \mathbf{v}'_2] = \mathbf{M}_0. \quad (5)$$

Закон изменения энергии относительно S' используем в форме (22.17), поскольку в рассматриваемом случае ускорение начала системы S' является не заданной функцией времени, а заданной функцией координат. Тогда получим

$$d(T' + U') = \mathcal{J}_2^h dr'_2, \quad (6)$$

где

$$T' = \frac{m_2 (v'_2)^2}{2}, \quad U' = - \int F_{12}(|\mathbf{r}'_2|) dr'_2.$$

Теперь учтем, что переносная сила инерции (4) потенциальна, а соответствующая ей потенциальная энергия равна

$$U^h = - \frac{m_2}{m_1} \int F_{12}(|\mathbf{r}'_2|) dr'_2. \quad (7)$$

Таким образом, используя (6) и (7), придем к интегралу энергии

$$\frac{m_2}{2} (v'_2)^2 + U' + U^h = E'_0. \quad (8)$$

Отметим также, что в предельном случае $m_2 \ll m_1$ центр масс двух точек совпадает с точкой I , а система S' становится инерциальной.

Пример 22.2. Возмущение эллиптической орбиты.

Как известно, под действием силы гравитационного притяжения (2.15) точка может двигаться по эллиптической орбите относительно инерциальной системы отсчета. Определить центральную силу, которую необходимо добавить к силе (2.15) с тем, чтобы орбита стала вращаться относительно инерциальной системы без изменения своего вида, т. е. чтобы точка в некоторой вращающейся системе отсчета двигалась по эллиптической орбите с фокусом в центре сил (центры добавочной и гравитационной сил совпадают).

Начало O инерциальной системы S поместим в центр сил, а плоскость Oxy совместим с плоскостью орбиты (орбита будет плоской, так как и сила гравитационного притяжения F , и возмущающая сила Φ центральны). Введем также неинерциальную систему S' с началом O' , совпадающим с O , а координатную плоскость $O'x'y'$ этой системы совместим с плоскостью Oxy .

Если на точку действует только сила F , то относительно S эта точка движется по эллипсу. Если же на точку действует сила $F + \Phi$, то по условию задачи точка также будет двигаться по эллипсу, но относительно S' ; причем относительно S точка будет двигаться, вообще говоря, по незамкнутой орбите между двумя концентрическими окружностями (см. рис. 8.1).

Уравнение движения точки относительно S' получим (см. (20.1)), учитывая, что $w_{O'} = 0$:

$$mw' = F + \Phi + \mathcal{J}^h + \mathcal{J}^c; \quad (1)$$

здесь

$$\mathcal{J}^h = -m[\dot{\omega}r'] - m[\omega[\omega r']], \quad \mathcal{J}^c = -2m[\omega v'];$$

кроме того, по условию имеем

$$mw' = F. \quad (2)$$

Таким образом, для неизвестной силы Φ получаем уравнение

$$\Phi + \mathcal{J}^h + \mathcal{J}^c = 0, \quad (3)$$

в котором угловая скорость ω также является неизвестной. Векторы ω , r' и v' , входящие в это уравнение, можно записать в виде

$$\omega = \omega n_z, \quad r' = r n_r, \quad v' = \dot{r} n_r + r \dot{\phi}' n_\phi, \quad (4)$$

поскольку система S' вращается относительно S только вокруг оси Oz , а движение точки происходит в плоскости $O'x'y'$ (координаты r и ϕ'

являются полярными координатами точки в этой плоскости). Используя (4), найдем следующие выражения для сил инерции:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}^h &= -m\dot{\omega}p_r - m\dot{\omega}^2 p_r, \\ \mathcal{J}^c &= -2m\dot{\omega}(p_\theta - r\dot{\phi}'p_r), \end{aligned} \quad (5)$$

Учитывая (5) и центральность силы Φ , из уравнения (3) получим

$$r\dot{\omega} + 2\omega^2 = 0, \quad (6)$$

$$\Phi(r) + m\dot{\omega}^2 + 2m\omega r\dot{\phi}' = 0. \quad (7)$$

Интегрируя (6), найдем ω как функцию r :

$$\omega = \frac{\text{const}}{r^2}. \quad (8)$$

Из уравнения (7) следует, что сила F центрально, а сумма сил инерции и добавочной силы Φ равна нулю, вследствие чего имеет место сохранение момента импульса точки относительно S' :

$$mr^2\dot{\phi}' = M'_\phi. \quad (9)$$

Подставляя (8) и (9) в уравнение (7), получим

$$\Phi(r) = \frac{\text{const}}{r^4}. \quad (10)$$

Таким образом, возмущающая сила, которая приводит к неравномерному вращению эллиптической орбиты, является силой, обратно пропорциональной кубу расстояния до центра силы.

Рассмотрим также закон сохранения энергии относительно S' . Если учесть, что силы T и Φ явно от времени не зависят, диссипативных сил нет, а ускорение $\mathbf{w}_O = 0$, то на основании (22,24) и (9) получим

$$\frac{d'E'}{dt} = -(M'_\phi + m[r'|\omega r'|])\dot{\omega}, \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} E' &= T' + U_F + U_\Phi - \frac{m}{2} |\omega r'|^2, \\ U_F &= -\int F dr', \quad U_\Phi = -\int \Phi dr'. \end{aligned}$$

Используя вытекающий из уравнения (2) интеграл

$$T' + U_F = \text{const}$$

и принимая во внимание равенство

$$\frac{d'U_\Phi}{dt} = \frac{dU_\Phi}{dt}$$

(см. также (22.13)), из уравнения (11) найдем

$$\frac{dU_{\Phi}}{dt} - \frac{m}{2} \frac{d}{dt} (\omega r)^2 = -M_0 \dot{\omega} - m\omega r^2 \dot{\omega}. \quad (12)$$

Отсюда, записывая производную U_{Φ} по времени в виде

$$\frac{dU_{\Phi}}{dt} = \frac{dU_{\Phi}}{dr} \dot{r} = -\Phi \dot{r}$$

и подставляя (8) в (12), можно получить результат (10).

УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА

§ 23. Основная задача динамики
несвободной системы и понятие о связях

Многие задачи механики, например такие, которые были рассмотрены в гл. I—IV, сводятся к решению уравнений движения

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N, t) \quad (i = 1, 2, \dots, N);$$

при этом начальные условия обычно определяются значениями радиусов-векторов и скоростей точек в некоторый момент времени t_0 . В этих задачах силы считаются известными функциями положений и скоростей точек, а также времени (такие силы будем для краткости называть заданными); начальные же условия можно задавать произвольно: на них никаких ограничений не налагается. Однако в механике существует и другой класс задач, в которых наряду с заданными силами рассматриваются силы, не известные нам как функции положений, скоростей точек и времени. Метод решения таких задач был намечен Д'Аламбером в 1743 г. в его трактате «Динамика»*) и окончательно сформулирован Лагранжем в 1788 г. в «Аналитической механике»**).

Рассмотрим постановку задач такого класса на примере сферического маятника (рис. 23.1). Пусть тело весьма малых размеров колеблется вблизи земной поверхности, будучи подвешенным на нерастяжимой нити длины l , а сопротивлением воздуха можно пренебречь; тогда на материальную точку массы m действует заданная сила $m\mathbf{g}$ и неизвестное натяжение нити \mathbf{R} . Следовательно, согласно (3.4), уравнение движения маятника имеет вид

$$m\ddot{\mathbf{r}} = m\mathbf{g} + \mathbf{R}.$$

Это векторное уравнение, эквивалентное трем скалярным уравнениям,

*) См. [5], стр. 108—109.

***) См. [6], т. I, отделы первый, второй и четвертый.

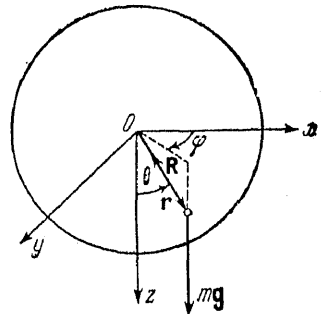


Рис. 23.1.

содержит шесть неизвестных скалярных функций — проекции радиуса-вектора материальной точки и проекции натяжения нити; в декартовых координатах неизвестными являются $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, $R_x(t)$, $R_y(t)$, $R_z(t)$. Очевидно, что для отыскания решения приведенного уравнения необходимы дополнительные сведения. В поставленной задаче такие сведения есть: во-первых, в любой момент времени материальная точка находится на сферической поверхности радиуса l (если нить натянута) и, следовательно, координаты точки должны удовлетворять условию $r^2 = l^2$; во-вторых, натяжение нити направлено вдоль нити, в связи с чем можно написать, что

$$\mathbf{R} = 2\lambda\mathbf{r},$$

где λ — неизвестная скалярная функция. Таким образом, условия задачи приводят к системе

$$m\ddot{\mathbf{r}} = m\mathbf{g} + 2\lambda\mathbf{r}, \quad r^2 - l^2 = 0,$$

т. е. к системе четырех скалярных уравнений с четырьмя неизвестными функциями: например, функциями $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ и $\lambda(t)$. С помощью приведенных уравнений можно найти закон движения точки по сфере и такое натяжение нити, которое необходимо для того, чтобы точка двигалась именно по сфере. Начальные условия в этой задаче не произвольны: точка и в начальный момент времени должна находиться на поверхности сферы радиуса l , а вектор скорости должен лежать в плоскости, касательной к сфере. При этом допускается, что длина нити остается неизменной, т. е. допускается, что жесткость нити бесконечно велика, изменение длины нити исчезающе мало, а ее натяжение конечно.

Как видим, в рассматриваемой задаче положение точки и ее скорость удовлетворяют определенным условиям, не вытекающим из уравнений движения. В этом смысле говорят, что *материальная точка не свободна, на нее наложена связь*.

В общем случае под *связями* понимают ограничения, налагаемые на положения, скорости и ускорения точек механической системы. Связи реализуются посредством поверхностей различных тел, стержней, нитей и т. п.; аналитически связи выражаются уравнениями связей, т. е. соотношениями между радиусами-векторами точек, их скоростями и ускорениями. Силы, с которыми тела, осуществляющие связи, действуют на точки системы, называются реакциями связей. Если на систему N точек наложено k связей, то, обозначая через $R_{\alpha i}$ реакцию связи с номером α на i -ю точку, согласно (2.5) получим, что реакция всех k связей на i -ю точку равняется

$$\mathbf{R}_i = \sum_{\alpha=1}^k \mathbf{R}_{\alpha i}. \quad (23.1)$$

Различают следующие виды связей: голономные и неголономные, удерживающие и неудерживающие, стационарные и нестационарные. Голономными (или интегрируемыми) связями называются такие связи, уравнения которых всегда можно свести к уравнениям вида

$$f(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t) = 0, \quad (23.2)$$

где f является функцией только координат точек и времени. Эти связи налагают ограничение не только на положение, но и на скорости и ускорения точек системы. Действительно, дифференцируя (23.2) по времени, получим ограничение, налагаемое голономной связью на скорости:

$$\frac{df}{dt} = \sum_{i=1}^N (\nabla_i f) \mathbf{v}_i + \frac{\partial f}{\partial t} = 0, \quad (23.3)$$

а продифференцировав (23.3) по времени, найдем ограничение на ускорения точек:

$$\frac{d^2 f}{dt^2} = \sum_{i=1}^N (\nabla_i f) \mathbf{w}_i + \sum_{i=1}^N \left[\frac{d}{dt} (\nabla_i f) \right] \mathbf{v}_i + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right) = 0. \quad (23.4)$$

Однако характерным для голономных связей является то, что ограничения на ускорения и скорости сводятся к ограничению только

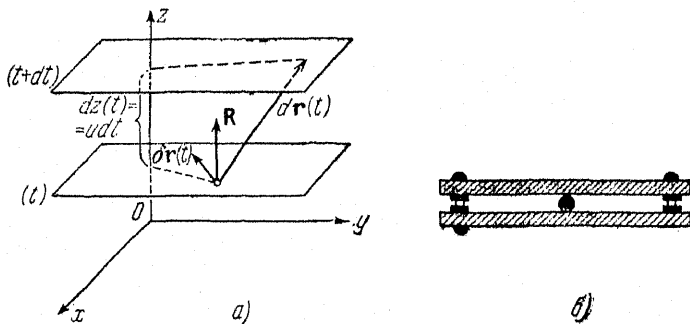


Рис. 23.2.

на положения точек; иначе говоря, уравнения связей, заданные в виде (23.3) или (23.4), могут быть проинтегрированы.

Например, пусть одна точка движется на горизонтальной плоскости, перемещающейся с постоянной скоростью u в вертикальном направлении (рис. 23.2, а). Такая связь реализуется, если шарик исчезающих размеров движется между двумя жестко скрепленными

друг с другом телами с параллельными поверхностями, причем расстояние между поверхностями исчезающе мало, а их деформациями можно пренебречь (рис. 23.2, б). Направляя ось Oz по вертикали, запишем уравнение связи в виде

$$f = z - ut = 0,$$

откуда следует, что рассматриваемая связь голономна, а на положение точки, ее скорость и ускорение налагаются ограничения: $z = ut$, $\dot{z} = u$, $\ddot{z} = 0$.

Неголономными (или неинтегрируемыми) связями называются такие связи, уравнения которых нельзя свести к уравнениям, содержащим только координаты точек и время. Наиболее изученными являются неголономные связи первого порядка, линейные относительно скоростей, т. е. неинтегрируемые связи вида

$$\sum_{i=1}^N a_i v_i + b = 0, \quad (23.5)$$

где a_i и b могут зависеть от положений точек и времени. Например, неголономной связью является, вообще говоря, связь, налагаемая на шар, катящийся по шероховатой поверхности (подробнее см. стр. 366). Большое практическое значение имеют неголономные условия, встречающиеся в задачах об оптимальных траекториях различных тел.

В дальнейшем мы будем рассматривать главным образом голономные связи, поскольку задачи о движении систем с неголономными связями, как правило, являются очень сложными в математическом отношении и реже встречаются в современных физических приложениях механики по сравнению с задачами о движении голономных систем*).

Удерживающими связями называются связи, задаваемые равенствами. Соответственно не удерживающие связи задаются неравенствами; например, не удерживающую связь можно реализовать с помощью гибкой нерастяжимой нити, соединяющей две материальные точки. Однако в этом случае движение точек сводится либо к свободному движению (когда связь, как говорят, не напряжена), либо к движению несвободных точек (когда связь напряжена). Не удерживающие связи мы также рассматривать не будем.

Если уравнение связи явно от времени не зависит, то связь называется стационарной (например, связь, имеющая место в задаче о сферическом маятнике). В противном случае связь называется нестационарной (см. приведенный выше пример с движущейся плоскостью).

*) Уравнения движения систем с линейными неголономными связями будут кратко рассмотрены в § 41 гл. VIII.

Введение понятий о связях и их реакциях позволяет сформулировать основную задачу механики несвободной системы N точек с голономными связями как задачу об отыскании закона движения системы и реакций связей по заданным силам F_i ($i = 1, 2, \dots, N$) и заданным k уравнениям голономных связей. Эта задача сводится к совместному решению уравнений движения и уравнений связей

$$\begin{aligned} m_i \ddot{\mathbf{r}}_i &= \mathbf{F}_i + \mathbf{R}_i & (i = 1, 2, \dots, N), \\ f_\alpha(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t) &= 0 & (\alpha = 1, 2, \dots, k) \end{aligned} \quad (23.6)$$

с начальными условиями, заданными в соответствии с уравнениями связей. Система (23.6) представляет собой систему $3N + k$ скалярных уравнений, содержащих $6N$ неизвестных функций — проекций векторов $\mathbf{r}_i(t)$ и $\mathbf{R}_i(t)$ на координатные оси ($i = 1, 2, \dots, N$), причем наиболее интересным является случай, когда число связей $k < 3N$. Действительно, если $k = 3N$, то уравнения связей полностью определяют движение системы. С другой стороны, если $k < 3N$, то рассматриваемая задача является определенной только в том случае, когда известны $6N - (3N + k) = 3N - k$ независимых соотношений между положениями точек и реакциями связей. Забегая вперед, скажем, что основная задача динамики несвободной системы является определенной для так называемых идеальных связей. Однако введение этого понятия требует знакомства с некоторыми свойствами связей.

§ 24. Действительные, возможные и виртуальные перемещения; идеальные связи

Определим действительные, возможные и виртуальные перемещения на примере одной точки, подчиненной одной голономной удерживающей связи

$$f(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (24.1)$$

Под действительным перемещением $d\mathbf{r}$ точки понимается бесконечно малое перемещение этой точки под действием как заданных сил, так и реакций связи; действительное перемещение происходит за время dt в соответствии с уравнением движения и уравнением связи.

Возможным перемещением назовем «перемещение» $d\mathbf{r}$ точки, допускаемое связью; в отличие от действительных перемещений возможные перемещения удовлетворяют только уравнению связи. Действительное перемещение всегда является одним из возможных. Дифференциальное уравнение, которому подчинены возможные перемещения точки, получим, взяв дифференциал от

левой части уравнения (24.1) и приравняв его нулю *):

$$df = \nabla f d\mathbf{r} + \frac{\partial f}{\partial t} dt = 0. \quad (24.2)$$

Наконец, виртуальным перемещением $\delta\mathbf{r}$ называется *вообще* *разаемое бесконечно малое «перемещение»* точки, допускаемое *связью в данный фиксированный момент времени*; в этот момент времени связь «застывает», т. е. ее изменение со временем мысленно прекращается. Виртуальные перемещения не происходят под действием сил и не обладают длительностью. Представление о виртуальных перемещениях можно получить, если сделать мгновенную фотографию движущейся поверхности и рассмотреть возможные перемещения точки *по изображению* этой поверхности на фотографии. Дифференциальное уравнение, которому подчинены виртуальные перемещения точки, получим, вычисляя дифференциал левой части уравнения (24.1) при фиксированном времени, т. е. вычисляя вариацию $f(\mathbf{r}, t)$ и приравнявая ее нулю **):

$$\delta f = \nabla f \delta\mathbf{r} = 0. \quad (24.3)$$

Здесь приращение $\delta\mathbf{r}$ радиуса-вектора точки также «происходит» при фиксированном времени, т. е. является *вариацией радиуса-вектора*. Из (24.2) и (24.3) видно, что совокупность виртуальных перемещений совпадает с возможными перемещениями только в случае стационарных связей, когда $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$.

Проиллюстрируем уравнения (24.2) и (24.3) на примере точки, движущейся по горизонтальной плоскости (см. рис. 23.2). В этом случае уравнения для возможных и виртуальных перемещений точки имеют вид

$$dz(t) - u dt = 0, \quad \delta z(t) = 0.$$

Легко обобщить рассмотренные определения на систему N точек, подчиненных k голономным связям

$$f_\alpha(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t) = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, k), \quad (24.4)$$

и получить уравнения для механической системы, аналогичные уравнениям (24.2) и (24.3). В самом деле, вычисляя дифференциалы и вариации левых частей уравнений (24.4) и приравнявая их нулю,

*) В силу равенства нулю функции f дифференциал любого порядка от этой функции равен нулю.

***) Л. Э. Эльсгольц, Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление, «Наука», 1969 г., гл. 1, § 1.

найдем

$$\sum_{i=1}^N \nabla_i f_\alpha dr_i + \frac{df_\alpha}{dt} dt = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, k), \quad (24.5)$$

$$\sum_{i=1}^N \nabla_i f_\alpha \delta r_i = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, k). \quad (24.6)$$

Понятие о виртуальных перемещениях позволяет определить очень важный класс связей. Пусть сумма работ всех реакций связей на виртуальных перемещениях точек системы равна нулю; иначе говоря, пусть δA_R — виртуальная работа реакций связей — равна нулю:

$$\delta A_R = \sum_{i=1}^N \mathbf{R}_i \delta \mathbf{r}_i = 0, \quad (24.7)$$

где N — число точек системы. Связи, удовлетворяющие условию (24.7), называются идеальными. Этот класс связей обладает достаточной общностью, причем физические причины идеальности связей могут быть различными. Убедимся в этом на двух примерах.

Еще раз рассмотрим точку, движущуюся по горизонтальной плоскости, допуская, что плоскость абсолютно гладкая. Тогда реакция плоскости на точку в любой момент времени перпендикулярна плоскости (рис. 23.2), т. е. $R_x = R_y = 0$, а $R_z \neq 0$. Следовательно, виртуальная работа, совершаемая реакцией связи, равна нулю,

$$\delta A_R = \mathbf{R} \delta \mathbf{r} = R_z \delta z = 0,$$

поскольку для рассматриваемой связи $\delta z = 0$. Поэтому гладкая плоскость, покоящаяся или движущаяся, является идеальной связью и в том, и в другом случаях виртуальная работа равна нулю. Заметим, что работа dA_R , совершаемая реакцией гладкой плоскости на действительных перемещениях, равна нулю только в случае покоящейся плоскости. Если же плоскость движется, то действительная работа отлична от нуля,

$$dA_R = R_z dz = R_z u dt \neq 0.$$

Таким образом, понятие виртуальной работы, «совершаемой» на воображаемых перемещениях, отражает физическое свойство поверхности — ее гладкость. Нетрудно убедиться, что любые гладкие поверхности и кривые (неподвижные и подвижные) также являются идеальными голономными связями.

В качестве другого примера идеальной связи рассмотрим прямолинейный стержень длины l и исчезающей массы, который соединяет материальные точки 1 и 2, движущиеся, например, по параболической

поверхности (рис. 24.1, а). На точки действуют заданные внешние силы $m_1\mathbf{g}$ и $m_2\mathbf{g}$, реакции поверхности \mathbf{R}_1^e и \mathbf{R}_2^e , а также реакции стержня \mathbf{R}_1^{in} и \mathbf{R}_2^{in} . Для системы «точки — стержень» силы тяжести и реакции поверхности являются внешними силами (величина и направление реакций поверхности зависят от характера поверхности), а реакции стержня являются внутренними силами. Для системы

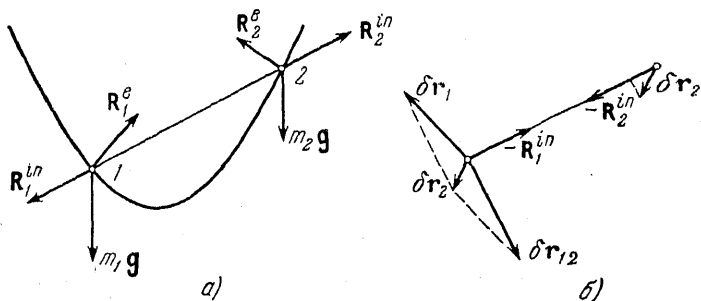


Рис. 24.1.

«стержень» внешними силами являются силы $-\mathbf{R}_1^{in}$ и $-\mathbf{R}_2^{in}$, с которыми точки действуют на концы стержня, а также силы тяжести. Поэтому законы изменения импульса и кинетического момента стержня конечной массы имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{P}_{\text{стержня}}}{dt} &= -\mathbf{R}_1^{in} - \mathbf{R}_2^{in} + \sum_i m_i \mathbf{g}; & \frac{d\mathbf{M}_{\text{стержня}}}{dt} &= \\ &= -[\mathbf{r}_1 \mathbf{R}_1^{in}] - [\mathbf{r}_2 \mathbf{R}_2^{in}] + \sum_i [\mathbf{r}_i m_i \mathbf{g}], \end{aligned}$$

где m_i — масса достаточно малой части стержня, а суммирование ведется по всем его частям. Отсюда, устремляя все m_i к нулю, для стержня исчезающей массы получим соотношения*)

$$\mathbf{R}_1^{in} + \mathbf{R}_2^{in} = 0, \quad [\mathbf{r}_1 \mathbf{R}_1^{in}] + [\mathbf{r}_2 \mathbf{R}_2^{in}] = 0,$$

из которых следует, что реакции \mathbf{R}_1^{in} и \mathbf{R}_2^{in} равны по величине и направлены по стержню в противоположные стороны, т. е.

$$\mathbf{R}_1^{in} = \lambda(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2), \quad \mathbf{R}_2^{in} = \lambda(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$$

(здесь λ — некоторая скалярная функция). Используя эти выражения, найдем, что виртуальная работа реакций стержня равна нулю,

$$\delta A_R^{in} = \lambda(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \delta(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = \frac{\lambda}{2} \delta(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)^2 = 0,$$

поскольку длина стержня задана: $|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1| = l$.

*) Этот предельный переход совершается в предположении, что ускорение центра масс стержня и его угловое ускорение остаются конечными величинами.

К тому же результату можно прийти, замечая, что виртуальное перемещение $\delta \mathbf{r}_{12}$ перпендикулярно к $\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, так как длина стержня задана (рис. 24.1, б). Следовательно, проекции векторов $\delta \mathbf{r}_1$ и $\delta \mathbf{r}_2$ на направление стержня одинаковы, а работа $\mathbf{R}_1 \delta \mathbf{r}_1$ равна по величине и противоположна по знаку работе $\mathbf{R}_2 \delta \mathbf{r}_2$ ($\mathbf{R}_2^{\text{in}} = -\mathbf{R}_1^{\text{in}}$). Таким образом, стержень заданной длины и исчезающей массы действительно является идеальной голономной связью. Кроме того, эта связь стационарна и, следовательно, совокупности виртуальных и возможных перемещений точек 1 и 2 совпадают. Учитывая также, что действительное перемещение всегда является одним из возможных, приходим к выводу о равенстве нулю работы реакций стержня и на действительных перемещениях точек 1 и 2:

$$dA_R^{\text{in}} = \mathbf{R}_1^{\text{in}} d\mathbf{r}_1 + \mathbf{R}_2^{\text{in}} d\mathbf{r}_2 = 0. \quad (24.8)$$

Приведенные примеры показывают сравнительно большую общность класса идеальных связей. Например, любое сочетание гладких связей со связями, состоящими из тонких стержней исчезающей массы и заданной длины, является идеальной связью, если в местах соединения связей отсутствует трение. Все абсолютно шероховатые поверхности, по которым происходит качение тел без проскальзывания, также представляют собой идеальные связи (как голономные, так и неголономные). Действительно, поскольку в точке касания тела и поверхности отсутствует проскальзывание, постольку виртуальное перемещение точки тела, совпадающей с точкой касания, равно нулю, в силу чего и виртуальная работа реакции поверхности равна нулю*).

§ 25. Уравнения Лагранжа с реакциями связей; законы изменения импульса, кинетического момента и энергии для систем со связями

Выше отмечалось, что основная задача механики голономных систем становится определенной для класса идеальных связей. Действительно, пусть на систему из N точек наложено k голономных идеальных связей. Число проекций виртуальных перемещений точек на координатные оси, или, иначе говоря, *число вариаций координат точек, равно $3N$* . Так как вариации координат подчинены уравнениям (24.6), то k вариаций являются зависимыми, а $3N - k$ вариаций — независимыми. Зависимые вариации могут быть единственным образом выражены через независимые, поскольку детерминант из коэффициентов при зависимых вариациях в системе (24.6), по предположению, отличен от нуля (в противном случае среди связей будут такие, которые являются следствием остальных). Учтем далее, что, кроме требования голономности связей, выполняется требование их

*) Подробнее см. пример о шаре на стр. 366.

идеальности (см. (24.7)). В этом условии k зависимых вариаций с помощью (24.6) можно выразить через $3N - k$ независимых вариаций. После такой подстановки, чтобы удовлетворить требованию идеальности, нужно приравнять нулю коэффициенты при независимых вариациях. Тем самым можно получить $3N - k$ соотношений между реакциями связей и радиусами-векторами точек. Таким образом, основная задача динамики несвободной системы с голономными идеальными связями является определенной, поскольку число уравнений и число неизвестных функций в этом случае совпадают.

Рассмотренное сейчас непосредственное исключение зависимых вариаций координат можно в общем случае провести методом неопределенных множителей Лагранжа. Изложим существо этого метода. В силу идеальности и голономности связей из условий (24.7) и (24.6) имеем

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{R}_i \delta \mathbf{r}_i = 0, \\ \sum_{i=1}^N (\nabla_i f_\alpha) \delta \mathbf{r}_i = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, k). \quad (25.1)$$

Умножая каждое из k последних соотношений на соответствующий неопределенный скалярный множитель $-\lambda_\alpha$ ($\alpha = 1, 2, \dots, k$) и складывая все полученные результаты с условием идеальности, придем к соотношению

$$\sum_{i=1}^N \left\{ \mathbf{R}_i - \sum_{\alpha=1}^k \lambda_\alpha \nabla_i f_\alpha \right\} \delta \mathbf{r}_i = 0, \quad (25.2)$$

в котором k вариаций координат являются зависимыми, а $3N - k$ — независимыми. Подберем k множителей λ_α так, чтобы коэффициенты при k зависимых вариациях в (25.2) обратились в нуль. Этот подбор можно провести единственным образом, так как детерминант из коэффициентов при зависимых вариациях в системе (24.6) отличен от нуля (по предположению о связях). С другой стороны, коэффициенты при независимых вариациях в (25.2) должны равняться нулю в силу условия идеальности.

Итак, коэффициенты при всех $\delta \mathbf{r}_i$ должны быть приравнены нулю. В результате приходим к заключению, что между реакциями идеальных голономных связей и функциями f_α , определяющими уравнения связей, имеют место соотношения

$$\mathbf{R}_i = \sum_{\alpha=1}^k \lambda_\alpha \nabla_i f_\alpha \quad (i = 1, 2, \dots, N). \quad (25.3)$$

Таким образом, соотношения (25.3) являются необходимым условием обращения в нуль виртуальной работы реакций связей, т. е. необхо-

димым условием идеальности голономных связей. Можно непосредственно убедиться и в достаточности этого условия.

Проиллюстрируем исключение зависимых вариаций координат на примере точки, движущейся по гладкой окружности, наклоненной под углом α к горизонту. Эта кривая представляет собой пересечение сферы и наклонной плоскости. Следовательно, на точку наложены две голономные связи (см. (24.4))

$$f_1 = x^2 + y^2 + z^2 - l^2 = 0, \quad f_2 = z - y \operatorname{tg} \alpha = 0$$

(начало координат помещено в центр сферы, ось Oz направлена по вертикали вверх, а плоскость проходит через центр сферы и ось Ox и наклонена к оси Oy под углом α). Так как кривая гладкая, то условие идеальности (24.7) выполняется:

$$R_x \delta x + R_y \delta y + R_z \delta z = 0.$$

Виртуальное перемещение точки подчинено системе двух уравнений (см. (24.6))

$$\begin{aligned} -\nabla_x f_1 \cdot \delta x + \nabla_y f_1 \cdot \delta y + \nabla_z f_1 \cdot \delta z &= 0, \\ \nabla_x f_2 \cdot \delta x + \nabla_y f_2 \cdot \delta y + \nabla_z f_2 \cdot \delta z &= 0; \end{aligned}$$

поэтому одна из вариаций координат, например δx , является независимой. Выразим зависимые вариации δy и δz через независимую δx , что можно осуществить, поскольку соответствующий детерминант отличен от нуля:

$$\begin{vmatrix} \nabla_y f_1 & \nabla_z f_1 \\ \nabla_y f_2 & \nabla_z f_2 \end{vmatrix} = 2(y + z \operatorname{tg} \alpha) \neq 0.$$

Используя полученные выражения

$$\delta y = -\frac{x}{y + z \operatorname{tg} \alpha} \delta x, \quad \delta z = -\frac{x \operatorname{tg} \alpha}{y + z \operatorname{tg} \alpha} \delta x,$$

исключим из условия идеальности зависимые вариации и тем самым найдем

$$\left(R_x - \frac{x}{y + z \operatorname{tg} \alpha} R_y - \frac{x \operatorname{tg} \alpha}{y + z \operatorname{tg} \alpha} R_z \right) \delta x = 0.$$

Отсюда видно, что между проекциями реакции связей и радиуса-вектора точки имеет место соотношение

$$R_x (y + z \operatorname{tg} \alpha) = x (R_y + R_z \operatorname{tg} \alpha).$$

Это же соотношение можно получить методом неопределенных множителей. Действительно, умножая уравнения для вариаций координат на $-\lambda_1$ и $-\lambda_2$ соответственно и складывая результаты умножения с условием идеальности связей, находим (см. (25.2))

$$(\mathbf{R} - \lambda_1 \nabla f_1 - \lambda_2 \nabla f_2) \delta \mathbf{r} = 0.$$

Затем подберем множители λ_1 и λ_2 так, чтобы коэффициенты этого уравнения при зависимых вариациях δy и δz обратились в нуль; тогда получим

$$R_y = \lambda_1 \nabla_y f_1 + \lambda_2 \nabla_y f_2, \quad R_z = \lambda_1 \nabla_z f_1 + \lambda_2 \nabla_z f_2.$$

Указанный подбор множителей можно осуществить единственным способом, так как два последних соотношения являются системой, которую можно разрешить относительно λ_1 и λ_2 , поскольку соответствующий детерминант отличен от нуля:

$$\begin{vmatrix} \nabla_y f_1 & \nabla_y f_2 \\ \nabla_z f_1 & \nabla_z f_2 \end{vmatrix} = 2(y + z \operatorname{tg} \alpha) \neq 0$$

(этот детерминант равен детерминанту, использованному выше).

После указанного подбора λ_1 и λ_2 следует приравнять нулю коэффициент при независимой вариации δx , т. е. положить, что

$$R_x = \lambda_1 \nabla_x f_1 + \lambda_2 \nabla_x f_2.$$

В результате придем к соотношению (см. (25.3))

$$\mathbf{R} = \lambda_1 \nabla f_1 + \lambda_2 \nabla f_2,$$

которое в декартовых координатах имеет вид

$$R_x = 2\lambda_1 x, \quad R_y = 2\lambda_1 y - \lambda_2 \operatorname{tg} \alpha, \quad R_z = 2\lambda_1 z + \lambda_2.$$

Исключая отсюда λ_1 и λ_2 , найдем ранее полученное соотношение между проекциями векторов \mathbf{R} и \mathbf{r} .

Итак, реакции идеальных голономных связей являются линейными формами относительно градиентов функций f_α ($\alpha = 1, 2, \dots, k$), определяющих уравнения связей (24.4). Подставляя (25.3) в (23.6), получим уравнения движения механической системы с голономными идеальными связями, т. е. уравнения Лагранжа с реакциями связей или уравнения Лагранжа первого рода*),

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i + \sum_{\alpha=1}^k \lambda_\alpha \nabla_i f_\alpha \quad (i = 1, 2, \dots, N), \quad (25.4)$$

$$f_\alpha(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t) = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, k).$$

Здесь силы \mathbf{F}_i являются заданными функциями \mathbf{r}_i , \mathbf{v}_i и t ($i = 1, \dots, N$). Неизвестными в этих уравнениях являются все радиусы-векторы точек $\mathbf{r}_i(t)$ и множители Лагранжа $\lambda_\alpha(t)$ ($\alpha = 1, 2, \dots, k$). Число уравнений и число неизвестных функций совпадают и равны $3N + k$.

*) Вывод уравнений Лагранжа первого рода для систем с неголономными связями см. на стр. 364.

Подчеркнем, что реакции связей определяются в результате решения уравнений (25.4) и, следовательно, зависят от заданных сил, поэтому заданные силы часто называют активными силами, а реакции связей — пассивными. Такая зависимость одних сил от других появляется в результате упрощения представлений о реальном взаимодействии тел: само наложение связей на систему представляет собой по существу такое упрощение (например, в задаче о сферическом маятнике мы пренебрегаем упругими свойствами нити подвеса и тем самым налагаем связь).

При применении уравнений Лагранжа возникает также вопрос о выполнении условия идеальности связей. Выше мы видели, что это требование связано с определенными физическими допущениями, которые не всегда выполняются, например наличие сил трения на голономных связях делает их неидеальными. Однако всегда можно выделить нормальные составляющие реакций, которые будут удовлетворять условию идеальности (24.7); тогда остальные составляющие реакций должны быть заданы как функции положений, скоростей точек и времени.

Законы изменения импульса, кинетического момента и энергии системы при наличии связей могут быть получены из уравнений Лагранжа (25.4) так же, как аналогичные законы для свободных систем были получены из уравнений Ньютона (3.5) с помощью третьего закона (3.6). В самом деле, учитывая, что по отношению к исследуемой системе связи могут быть как внутренними, так и внешними, найдем

$$\dot{P} = F^e + R^e, \quad (25.5)$$

$$\dot{M} = L^e + L_R^e, \quad (25.6)$$

$$\dot{E} = \frac{\partial U^e}{\partial t} + \sum_{i=1}^N F_i^d v_i + \sum_{i=1}^N R_i v_i, \quad (25.7)$$

где $R_i = R_i^{in} + R_i^e$ — сумма реакций внутренних и внешних связей на i -ю точку; $R^e = \sum_{i=1}^N R_i^e$ — сумма реакций внешних связей; $L_R^e =$

$= \sum_{i=1}^N [r_i R_i^e]$ — сумма моментов реакций внешних связей. По сравнению с законами (9.15), (10.5) и (11.18) здесь появились дополнительные члены: сумма внешних реакций и их моменты, а также мощность как внутренних, так и внешних реакций. Мощность реакций можно представить и в другом виде, используя идеальность и голономность связей. Действительно, имея в виду (25.3) и (24.5), получим

$$\sum_{i=1}^N R_i v_i = \sum_{\alpha=1}^k \lambda_{\alpha} \left(\sum_{i=1}^N (\nabla_i f_{\alpha}) v_i \right) = - \sum_{\alpha=1}^k \lambda_{\alpha} \frac{df_{\alpha}}{dt}. \quad (25.8)$$

Это выражение позволяет записать уравнение (25.7) в виде

$$\dot{E} = \frac{\partial U^e}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^d \mathbf{v}_i - \sum_{\alpha=1}^k \lambda_{\alpha} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t}. \quad (25.9)$$

Законы сохранения импульса и момента при наличии связей должны быть сформулированы в соответствии с (9.16) и (10.6), только к требованиям на заданные внешние силы добавятся аналогичные требования к реакциям внешних связей. Что касается закона сохранения энергии при наличии связей, то он имеет место при условиях (11.19) и *стационарности* идеальных голономных связей, когда

$$\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, k). \quad (25.10)$$

Во многих случаях применение законов сохранения упрощает решение задач о движении несвободных систем. В свою очередь *законы сохранения могут быть связаны с симметрией заданных силовых полей и связей*. Поэтому выбор координат целесообразно осуществлять с учетом этой симметрии.

Рассмотрим некоторые примеры на составление и решение уравнений Лагранжа с реакциями связей.

Пример 25.1. Точка на колеблющейся горизонтальной плоскости.

Точка массы m движется по колеблющейся горизонтальной гладкой плоскости. Найти положение точки и реакцию связи как функции времени, если плоскость колеблется в направлении, перпендикулярном плоскости, с амплитудой a и частотой ω , а напряженность поля тяжести равна g .

Выберем систему координат так, как это показано на рис. 23.2, a , т. е. направим ось Oz коллинеарно вектору \mathbf{g} ; тогда систему уравнений (25.4) можно записать в виде

$$m\ddot{x} = 0, \quad m\ddot{y} = 0, \quad m\ddot{z} = -mg + R_z, \quad z - a \sin \omega t = 0.$$

Здесь учтено, что плоскость является гладкой, поскольку составляющие реакции R_x и R_y приравнены нулю.

Из первых двух уравнений движения находим

$$x = \dot{x}_0 t + x_0, \quad y = \dot{y}_0 t + y_0,$$

а из третьего уравнения движения и уравнения связи получим, что

$$z = a \sin \omega t, \quad R_z = m(g - a\omega^2 \sin \omega t).$$

Проекция импульса точки на оси Ox , Oy сохраняются, так как проекции заданной силы и реакции связи на эти оси равны нулю; кроме того, сохраняется проекция момента импульса точки на ось Oz , поскольку проекции момента заданной силы и момента реакции на

эту ось равны нулю. Что касается энергии, то она изменяется со временем согласно уравнению

$$\dot{E} = R_z \dot{z} = m a \omega \cos \omega t (g - a \omega^2 \sin \omega t).$$

Обратим внимание на то, что R_z является положительной величиной, если частота колебаний плоскости достаточно мала ($a \omega^2 < g$). Если же $a \omega^2 > g$, то R_z будет отрицательной на интервалах времени

$$2n\pi + \omega t_1 < \omega t < (2n + 1)\pi - \omega t_1,$$

где $\omega t_1 = \arcsin(g/a\omega^2)$, а n — целые неотрицательные числа. Это связано с тем, что на указанных интервалах времени z -я компонента ускорения точки отрицательна и достигает большой величины.

Пример 25.2. Точка на расширяющейся цилиндрической поверхности.

Точка массы m движется в поле тяжести по расширяющейся гладкой цилиндрической поверхности с вертикальной осью. Найдите закон движения точки, если напряженность поля тяжести равна g , а радиус цилиндра увеличивается с постоянной скоростью $\dot{\rho}_0$.

Учитывая симметрию связи, совместим ось Oz с осью цилиндра, а ось Ox (или Oy) направим произвольно (рис. 25.1). Из тех же соображений симметрии будем использовать цилиндрические координаты. Тогда, разлагая обе части уравнения (25.4) по ортам \mathbf{n}_ρ , \mathbf{n}_φ и \mathbf{n}_z , получим

$$\begin{aligned} m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2) &= R_\rho, & \frac{m}{\rho} \frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\varphi}) &= 0, \\ m\ddot{z} &= -mg, & \rho &= \dot{\rho}_0 t + \rho_0. \end{aligned}$$

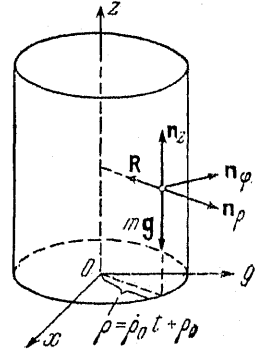


Рис. 25.1.

Здесь учтено, что реакция \mathbf{R} перпендикулярна к цилиндрической поверхности и, следовательно, только R_ρ отлична от нуля.

Используя второе из уравнений движения, найдем первый интеграл

$$\rho^2 \dot{\varphi} = \rho_0^2 \dot{\varphi}_0,$$

который по существу представляет собой интеграл площадей. Отсюда следует, что

$$\dot{\varphi} = \frac{\rho_0^2 \dot{\varphi}_0}{(\rho_0 t + \rho_0)^2}.$$

Интегрируя это уравнение по t , найдем $\varphi(t)$

$$\varphi = \frac{\rho_0 \dot{\varphi}_0 t}{\rho_0 t + \rho_0} + \varphi_0.$$

а интегрируя третье уравнение движения, получим $z(t)$:

$$z = -\frac{gt^2}{2} + z_0 t + z_0.$$

Наконец, подставляя функции $\rho(t)$ и $\varphi(t)$ в первое из уравнений движения, найдем реакцию связи

$$R_p = -m \frac{(\rho_0^2 \dot{\varphi}_0)^2}{(\rho_0 t + \rho_0)^3}.$$

Полная энергия точки E не сохраняется вследствие нестационарности связи.

Пример 25.3. Точка на пересечении сферы и движущейся плоскости.

Точка массы m движется по пересечению неподвижной гладкой сферы радиуса a и гладкой горизонтальной плоскости, движущейся в вертикальном направлении по закону $z = a \sin \omega t$. Найти закон движения точки и реакции связей для $0 \leq t < \pi/2\omega$.

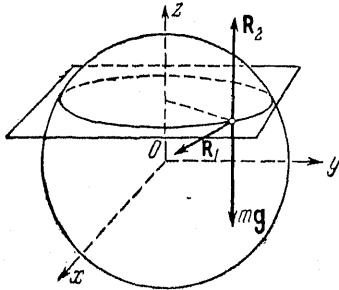


Рис. 25.2.

Учитывая симметрию связей, поместим начало координат в центр сферы, а ось Oz направим коллинеарно вектору \mathbf{g} (рис. 25.2). Тогда систему (25.4) с уравнениями связей можно записать в виде

$$\begin{aligned} m \mathbf{r} &= m \mathbf{g} + \lambda_1 \nabla f_1 + \lambda_2 \nabla f_2, \\ f_1 &= x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0, \\ f_2 &= z - a \sin \omega t = 0. \end{aligned}$$

Замечая, что момент импульса точки относительно оси Oz постоянен и что от цилиндрической координаты φ уравнения связей не зависят, спроектируем обе части уравнения Лагранжа на цилиндрические орты. В результате получим следующую систему скалярных уравнений:

$$\begin{aligned} m(\ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2) &= 2\lambda_1 \rho, & \frac{m}{\rho} \frac{d}{dt}(\rho^2 \dot{\varphi}) &= 0, & m\ddot{z} &= -mg + 2\lambda_1 z + \lambda_2, \\ \rho^2 + z^2 &= a^2, & z &= a \sin \omega t. \end{aligned}$$

Из уравнений связей и второго уравнения движения найдем функции $\rho(t)$ и $\dot{\varphi}(t)$:

$$\rho = a \cos \omega t, \quad \dot{\varphi} = \frac{\dot{\varphi}_0}{\cos^2 \omega t}$$

(здесь учтено, что в начальный момент времени $t_0 = 0$ $\rho = a$).

Интегрируя $\dot{\phi}(t)$, получим угол ϕ как функцию времени:

$$\phi = \frac{\dot{\phi}_0}{\omega} \operatorname{tg} \omega t + \phi_0.$$

Множители λ_1 и λ_2 определим из первого и третьего уравнений движения:

$$\lambda_1 = -\frac{m}{2}(\omega^2 + \dot{\phi}^2), \quad \lambda_2 = m(g + \dot{\phi}^2 z).$$

Отсюда с помощью соотношений

$$R_{1p} = 2\lambda_1 p, \quad R_{1z} = 2\lambda_1 z, \quad R_{2z} = \lambda_2$$

находим реакции связей

$$R_p = R_{1p} = -ma \left(\omega^2 + \frac{\dot{\phi}_0^2}{\cos^4 \omega t} \right) \cos \omega t,$$

$$R_z = R_{1z} + R_{2z} = m(g - a\omega^2 \sin \omega t).$$

§ 26. Уравнения Лагранжа в независимых координатах и общее уравнение механики; циклические координаты и симметрия силового поля и связей

Как уже отмечалось, уравнения Лагранжа с реакциями связей дают возможность найти и положение точек системы, и реакции связей как функции времени. Однако на практике часто не требуется столь «подробная» информация о механической системе, а требуется найти лишь закон движения точек по связям. Для разрешения таких задач необходимы уравнения движения, которые в качестве неизвестных содержат только *независимые координаты*. С другой стороны, эти уравнения должны полностью *учитывать влияние связей на систему*. Такие уравнения существуют и называются уравнениями Лагранжа в независимых координатах (или уравнениями Лагранжа второго рода). Значение этих уравнений не исчерпывается применением к указанному типу задач. Даже в том случае, когда требуется определить реакции связей, зачастую проще с помощью уравнений Лагранжа второго рода определить закон движения системы, а затем с помощью уравнений Лагранжа первого рода найти реакции связей. Уравнения Лагранжа второго рода имеют большое значение и для свободных систем. В этом случае они представляют собой уравнения движения в произвольных криволинейных координатах.

Ввиду большой общности этих уравнений выведем сначала дифференциальное уравнение, которому подчинена независимая координата какой-либо простейшей системы, например математического маятника. Так называется тело достаточно малых размеров,

повешенное на стержне (или нити) исчезающе малой массы и постоянной длины l и совершающее движение в вертикальной плоскости (в точке подвеса трением пренебрегается).

Движение такого маятника описывается следующим уравнением Лагранжа с реакциями связей (см. (25.4))

$$m\ddot{\mathbf{r}} = m\mathbf{g} + \lambda_1 \nabla f_1 + \lambda_2 \nabla f_2,$$

$$f_1 = x^2 + y^2 + z^2 - l^2 = 0, \quad f_2 = z = 0$$

(начало координат помещено в точку подвеса, плоскость $z = 0$ совмещена с плоскостью движения, а ось Ox направлена по вертикали вниз).

Чтобы исключить из этих уравнений реакции связей, умножим уравнение движения маятника скалярно на виртуальное перемещение $\delta \mathbf{r}$; тогда, учитывая идеальность связей (см. (24.7)), найдем

$$\ddot{\mathbf{r}} \delta \mathbf{r} = \mathbf{g} \delta \mathbf{r}.$$

Отсюда, используя декартовы координаты и учитывая уравнения связей, получим систему

$$(\ddot{x} - g)\delta x + \ddot{y}\delta y = 0, \quad f = x^2 + y^2 - l^2 = 0,$$

которая явно не содержит реакций связей, но учитывает их влияние на движение материальной точки, поскольку вариации δx и δy соответствующим образом зависят друг от друга.

Используя голономность связи, перейдем в найденной системе уравнений к независимой координате, в качестве которой удобно взять угол φ отклонения маятника от вертикали. Выражая декартовы координаты маятника через φ

$$x = l \cos \varphi, \quad y = l \sin \varphi,$$

найдем

$$\delta x = -l \sin \varphi \delta \varphi, \quad \ddot{x} = -l(\ddot{\varphi} \sin \varphi - \dot{\varphi}^2 \cos \varphi),$$

$$\delta y = l \cos \varphi \delta \varphi, \quad \ddot{y} = l(\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi).$$

Наконец, используя эти выражения, приходим к уравнению, содержащему только независимую вариацию $\delta \varphi$:

$$(\ddot{\varphi} - \omega_0^2 \sin \varphi) \delta \varphi = 0,$$

где $\omega_0^2 = g/l$. Приравняв коэффициент при независимой вариации нулю, получим одно дифференциальное уравнение, описывающее движение математического маятника:

$$\ddot{\varphi} - \omega_0^2 \sin \varphi = 0.$$

Это уравнение не содержит реакций связей в качестве неизвестных, однако полностью учитывает их воздействие на точку, поскольку сама независимая координата выбрана с учетом связей. В самом деле, уравнение связи, выраженное через угол φ , удовлетворяется тождественно:

$$l = l^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) - l^2 \equiv 0.$$

Теперь выведем уравнения Лагранжа второго рода для механической системы, состоящей из N точек, на которые налагается k идеальных голономных связей. Движение такой системы подчинено уравнениям (25.4). Чтобы *исключить из этих уравнений реакции связей*, умножим каждое из них скалярно на соответствующее виртуальное перемещение $\delta \mathbf{r}_i$ и сложим результаты умножения; тогда получим

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \delta \mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \delta \mathbf{r}_i + \sum_{i=1}^N \left(\sum_{\alpha=1}^k \lambda_\alpha \nabla_i f_\alpha \right) \delta \mathbf{r}_i. \quad (26.1)$$

Последняя сумма в этом уравнении представляет собой виртуальную работу всех реакций связей и по условию идеальности связей равна нулю (см. (24.7) и (24.6)):

$$\sum_{i=1}^N \sum_{\alpha=1}^k \lambda_\alpha \nabla_i f_\alpha \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_{\alpha=1}^k \lambda_\alpha \left(\sum_{i=1}^N \nabla_i f_\alpha \cdot \delta \mathbf{r}_i \right) = 0. \quad (26.2)$$

Поэтому (26.1) можно записать в виде уравнения

$$\sum_{i=1}^N \{m_i \ddot{\mathbf{r}}_i - \mathbf{F}_i\} \delta \mathbf{r}_i = 0, \quad (26.3)$$

которое называется общим уравнением механики или уравнением Д'Аламбера—Лагранжа. Заметим, что уравнения Лагранжа с реакциями связей могут быть получены из общего уравнения механики. Действительно, умножим каждое из уравнений (24.6) на соответствующий неопределенный множитель $-\lambda_\alpha$ ($\alpha = 1, 2, \dots, k$) и сложим результаты умножения с общим уравнением механики. Тогда, используя метод неопределенных множителей, придем к уравнениям Лагранжа с реакциями связей. Таким образом, мы убедимся, что система, состоящая из уравнений (26.3) и уравнений связей (24.4), эквивалентна системе (25.4). Более того, можно утверждать, что общее уравнение механики и уравнения движения с реакциями любых идеальных связей эквивалентны*).

*) Действительно, система с идеальными связями подчинена уравнениям

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i + \mathbf{R}_i \quad (i = 1, \dots, N),$$

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{R}_i \delta \mathbf{r}_i = 0, \quad (\alpha)$$

откуда вытекает, что

$$\sum_{i=1}^N \{m_i \ddot{\mathbf{r}}_i - \mathbf{F}_i\} \delta \mathbf{r}_i = 0.$$

Если же исходить из последнего уравнения, то, полагая

$$\mathbf{R}_i = m_i \ddot{\mathbf{r}}_i - \mathbf{F}_i,$$

придем к системе (а).

Прежде чем продолжить вывод уравнений Лагранжа второго рода, остановимся на понятии независимых обобщенных координат. Такими координатами по определению являются *любые* $3N - k$ величин, однозначно определяющих положение системы (N и k — числа точек системы и голономных связей соответственно). Число независимых обобщенных координат, равное $s = 3N - k$, в случае систем с голономными связями называется числом степеней свободы. Независимые обобщенные координаты будем обозначать q_1, q_2, \dots, q_s , а всю эту совокупность для краткости будем в дальнейшем обозначать символом q .

Из определения независимых координат следует, что они должны удовлетворять двум требованиям. Во-первых, радиусы-векторы точек системы должны быть однозначными функциями q :

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_s, t) \quad (i = 1, 2, \dots, N), \quad (26.4)$$

причем из этих $3N$ скалярных функций s функций должны быть независимыми, что обеспечивается требованием *)

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial q_s} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial x_s}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial x_s}{\partial q_s} \end{vmatrix} \neq 0 \quad (26.5)$$

(здесь проекции радиусов-векторов точек обозначены символом x_i с общей для всех точек нумерацией, например проекции вектора \mathbf{r}_1 обозначаются x_1, x_2, x_3 , а проекции вектора \mathbf{r}_2 обозначаются x_4, x_5, x_6 и т. д.). Во-вторых, координаты q должны быть выбраны в соответствии с уравнениями связей. Это означает, что функции (26.4) должны обращать в тождество уравнения связей (24.4):

$$f_\alpha(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t) \Big|_{\substack{\mathbf{r}_1 \rightarrow \mathbf{r}_1(q, t) \\ \dots \\ \mathbf{r}_N \rightarrow \mathbf{r}_N(q, t)}} \equiv 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, k). \quad (26.6)$$

Обратим внимание на то, что в случае стационарных связей уравнения связей явно от времени не зависят; поэтому и функции (26.4) можно подобрать явно не зависящими от времени. В дальнейшем это условие для стационарных связей будем считать выполненным.

Ввиду важности понятий о независимых обобщенных координатах и числе степеней свободы рассмотрим несколько примеров. Пусть точка движется по эллипсу с полуосями a и b . В системе координат с началом в центре эллипса и осями Ox, Oy , направленными по осям эллипса, уравнениями связей являются

$$f_1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \quad f_2 = z = 0.$$

*) См. В. А. Ильин, Э. Г. Позняк, Основы математического анализа, «Наука», 1965, стр. 520, теорема 15.4.

Первое из этих уравнений обращается в тождество, если положить, что

$$x = a \cos \alpha, \quad y = b \sin \alpha.$$

Таким образом, в качестве независимой координаты можно выбрать параметр α , а число степеней свободы в этом случае будет равно единице ($s = 1$).

Если точка движется по сфере радиуса l с центром в начале координат, то уравнением связи является уравнение

$$f = x^2 + y^2 + z^2 - l^2 = 0,$$

которое обращается в тождество подстановкой

$$x = l \sin \theta \cos \varphi, \quad y = l \sin \theta \sin \varphi, \quad z = l \cos \theta,$$

где θ и φ — углы сферических координат (см. рис. 23.1). Следовательно, эти углы могут служить независимыми координатами, а число степеней свободы $s = 2$.

Наконец, в случае свободной точки $s = 3$, а в качестве независимых координат можно взять различные криволинейные координаты, например цилиндрические; эти координаты связаны с декартовыми координатами точки соотношениями вида (26.4)

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z.$$

Используя формулы преобразования (26.4), представим общее уравнение механики в форме уравнения относительно независимых координат и их производных по времени. Для этого прежде всего найдем виртуальные перемещения $\delta \mathbf{r}_i$ всех точек как функции q :

$$\delta \mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \quad (i = 1, 2, \dots, N). \quad (26.7)$$

Подставляя (26.7) в общее уравнение механики и изменяя порядок суммирования, получим

$$\sum_{j=1}^s \left\{ \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} - \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right\} \delta q_j = 0. \quad (26.8)$$

Здесь все суммы по индексу i имеют размерность энергии, деленной на размерность соответствующей координаты q_j . При этом те суммы по i , в которые входят ускорения точек, определяются кинетической энергией как функцией обобщенных координат и их производных по времени. Действительно, возьмем i -й член одной из таких сумм и преобразуем его очевидным образом:

$$\ddot{\mathbf{r}}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left(\dot{\mathbf{r}}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) - \dot{\mathbf{r}}_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right). \quad (26.9)$$

Далее найдем скорости точек как функции обобщенных координат (см. (26.4)):

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \quad (i=1, 2, \dots, N). \quad (26.10)$$

Отсюда видно, что скорости материальных точек являются линейными функциями величин \dot{q}_j ($j=1, \dots, s$), называемых обобщенными скоростями. Из (26.10) также видно, что в общем случае имеет место равенство частной производной от скорости точки по обобщенной скорости и частной производной радиус-вектора той же точки по соответствующей обобщенной координате, т. е.

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \quad \left(\begin{array}{l} i=1, 2, \dots, N; \\ j=1, 2, \dots, s \end{array} \right). \quad (26.11)$$

Используя (26.11) и изменяя порядок дифференцирования по t и q_j , вместо (26.9) получим

$$\ddot{\mathbf{r}}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left(\dot{\mathbf{r}}_i \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - \dot{\mathbf{r}}_i \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_j}. \quad (26.12)$$

Пользуясь этим соотношением, все зависящее от ускорений «суммы по точкам системы» можно представить в виде

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_j}. \quad (26.13)$$

С другой стороны, кинетическую энергию системы нетрудно задать как функцию обобщенных скоростей и координат (см. (26.10)):

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} (\dot{\mathbf{r}}_i)^2 \Big|_{\substack{\dot{\mathbf{r}}_1 = \dot{\mathbf{r}}_1(q, \dot{q}, t) \\ \dot{\mathbf{r}}_N = \dot{\mathbf{r}}_N(q, \dot{q}, t)}} = T(q, \dot{q}, t) \quad (26.14)$$

(здесь и в дальнейшем под \dot{q} понимается совокупность обобщенных скоростей, так же как под q понимается совокупность всех обобщенных координат). Дифференцируя эту функцию по обобщенным скоростям и координатам, найдем

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j}, \quad \frac{\partial T}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_j} \quad (j=1, 2, \dots, s). \quad (26.15)$$

Сопоставляя (26.13) и (26.15), получим

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \quad (j=1, 2, \dots, s). \quad (26.16)$$

«Суммы по точкам системы» (см. (26.8)), зависящие от заданных (активных) сил, обозначим символами

$$Q_j = \sum_{i=1}^N F_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \quad (j=1, 2, \dots, s). \quad (26.17)$$

Величины Q являются заданными функциями обобщенных координат, скоростей и времени. Действительно, все F_i определены как функции \mathbf{r}_i , \mathbf{v}_i и t ($i=1, 2, \dots, N$), а все векторы \mathbf{r}_i и \mathbf{v}_i , согласно (26.4) и (26.10), являются функциями q , \dot{q} и t .

Используя введенные обозначения, виртуальную работу всех заданных сил F_i можно представить в виде

$$\delta A = \sum_{i=1}^N F_i \delta \mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^s Q_j \delta q_j. \quad (26.18)$$

Следовательно, величина Q_j играет по отношению к вариации δq_j независимой координаты ту же роль, которую сила F_i играет по отношению к виртуальному перемещению $\delta \mathbf{r}_i$ точки. Поэтому величину Q_j называют обобщенной силой, соответствующей координате q_j . Размерность обобщенной силы Q_j равна размерности работы, деленной на размерность соответствующей координаты q_j .

Используя (26.8), (26.16) и определение обобщенной силы, приходим к общему уравнению механики в обобщенных координатах:

$$\sum_{j=1}^s \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right\} \delta q_j = 0, \quad (26.19)$$

где все вариации δq_j независимы друг от друга. Поэтому из общего уравнения механики вытекают дифференциальные уравнения движения, а именно уравнения Лагранжа в независимых координатах

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \quad (j=1, 2, \dots, s). \quad (26.20)$$

Эти уравнения, как и уравнения Лагранжа с реакциями связей (25.4), справедливы для систем с голономными идеальными связями.

Итак, уравнения Лагранжа в независимых координатах не содержат реакций связей в качестве неизвестных функций, хотя полностью учитывают влияние связей на движение механической системы. Неизвестными в этих уравнениях являются обобщенные независимые координаты как функции времени. Число неизвестных и число уравнений равно числу степеней свободы.

Если заданные силы потенциальны, а потенциальная энергия системы равна $U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t)$, то, воспользовавшись формулами

$$\mathbf{F}_i = -\nabla_i U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t) \quad (i=1, 2, \dots, N)$$

и определением (26.17), получим выражения

$$Q_j = - \sum_{i=1}^N \nabla_i U \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = - \frac{\partial U}{\partial q_j} \quad (j=1, 2, \dots, s). \quad (26.21)$$

Таким образом, уравнения Лагранжа для случая потенциальных сил приобретают вид

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = - \frac{\partial U}{\partial q_j} \quad (j=1, 2, \dots, s). \quad (26.22)$$

Подчеркнем, что рациональный выбор независимых координат может существенно упростить конкретный вид уравнений Лагранжа и тем самым облегчить решение задачи. Лагранж по этому поводу писал: «Так как эти уравнения могут иметь различные более или менее простые формы и, в частности, более или менее удобные для интегрирования, является не безразличным, в каком виде они представлены с самого начала; пожалуй, одно из главных преимуществ нашего метода заключается в том, что он всегда дает уравнения каждой задачи в наиболее простой форме по отношению к примененным при этом переменным и дает нам возможность наперед судить о том, каковы те переменные, пользование которыми может нам максимально облегчить интегрирование» *). Действительно, пусть обобщенная координата q_j выбрана так, что кинетическая энергия T явно не зависит от нее, а соответствующая этой координате обобщенная сила Q_j равна нулю, т. е.

$$\frac{\partial T}{\partial q_j} = 0, \quad Q_j = 0. \quad (26.23)$$

Тогда уравнение Лагранжа, соответствующее координате q_j , сразу приведет к первому интегралу

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \equiv f(q, \dot{q}, t) = \text{const}. \quad (26.24)$$

Если заданные силы потенциальны, то условия (26.23) приобретают вид

$$\frac{\partial T}{\partial q_j} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial q_j} = 0. \quad (26.25)$$

Координаты, от которых кинетическая и потенциальная энергии системы явно не зависят, называются циклическими координатами. Цикличность координат во многих случаях связана с симметрией заданного силового поля и связей, поэтому

*) См. [6], т. 1, стр. 403.

рациональный выбор обобщенных координат должен отражать эту симметрию.

Выбирая независимые координаты так, чтобы число циклических координат было максимальным, и интегрируя уравнения Лагранжа, можно найти решение уравнений (26.20) (или (26.22)) в виде

$$q_j = q_j(t, C_1, C_2, \dots, C_{2s}) \quad (j = 1, 2, \dots, s) \quad (26.26)$$

(здесь C_α — постоянные интегрирования). Общее решение (26.26) позволяет определить закон движения системы и реакции связей как функции времени. Действительно, используя (26.4), найдем $\mathbf{r}_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, N$). Затем, дифференцируя $\mathbf{r}_i(t)$ по времени, получим векторы скоростей и ускорений всех точек: $\mathbf{v}_i(t)$, $\mathbf{w}_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, N$). И, наконец, используя найденные функции и уравнения Лагранжа (25.4), получим реакции связей как функции времени:

$$\mathbf{R}_i(t) = m_i \mathbf{w}_i(t) - \mathbf{F}_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, N), \quad (26.27)$$

где

$$\mathbf{F}_i(t) = \mathbf{F}_i(\mathbf{r}_1(t), \dots, \mathbf{r}_N(t), \mathbf{v}_1(t), \dots, \mathbf{v}_N(t), t).$$

В заключение этого параграфа рассмотрим принцип виртуальных перемещений, являющийся основой статике — большого раздела механики, в котором изучается равновесие механических систем (этот принцип играет важную роль во многих инженерных расчетах). Пусть в начальный момент времени система находится в положении \mathbf{r}_{i0} ($i = 1, 2, \dots, N$), а скорости всех ее точек равны нулю; если система и в любой другой момент времени остается в положении \mathbf{r}_{i0} ($i = 1, 2, \dots, N$), то это положение называется положением равновесия системы. Из общего уравнения механики следует, что в положении равновесия виртуальная работа заданных сил должна равняться нулю, т. е.

$$\delta A = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \delta \mathbf{r}_i = 0. \quad (26.28)$$

Это необходимое и достаточное условие равновесия системы называется принципом виртуальных перемещений (необходимость и достаточность (26.28) следует из эквивалентности уравнений Лагранжа (25.4) и системы уравнений (26.3) и (24.4)). Записывая принцип виртуальных перемещений в независимых координатах (см. (26.18)), получим

$$\delta A = \sum_{j=1}^s Q_j \delta q_j = 0, \quad (26.29)$$

откуда ввиду независимости всех вариаций δq_j следует, что необходимым и достаточным условием равновесия механической системы с голономными идеальными связями является обращение в нуль всех обобщенных сил в рассматриваемом положении системы.

Таким образом, положение равновесия системы определяется следующими s уравнениями:

$$Q_j = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, s). \quad (26.30)$$

Рассмотрим ряд примеров на решение уравнений Лагранжа в независимых координатах.

Пример 26.1. Циклоидальный маятник.

Точка массы m движется в однородном поле тяжести по гладкой циклоиде, расположенной в вертикальной плоскости (см. рис. 26.1).

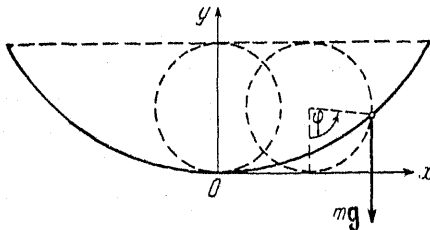


Рис. 26.1.

Найти закон движения точки, если напряженность поля тяжести g , а радиус окружности, производящей циклоиду, равен R .

Выберем декартовы оси так, чтобы одна из осей была коллинеарна g , а одна из координатных плоскостей совпала с плоскостью циклоиды (см. рисунок, на котором производящая окружность катится без скольжения по штрихованной прямой, параллельной оси Ox). За независимую координату возьмем угол φ — угол поворота окружности, отсчитываемый от оси Oy ; тогда уравнение связи запишется в виде

$$x = R(\varphi + \sin \varphi), \quad y = R(1 - \cos \varphi).$$

Используя эти функции, легко найти T и U как функции φ и $\dot{\varphi}$:

$$T = 2mR^2 \cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) \dot{\varphi}^2, \quad U = 2mgR \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right).$$

Отсюда видно, что уравнение Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = - \frac{\partial U}{\partial \varphi},$$

соответствующее координате φ , будет достаточно сложным. Однако из тех же выражений можно усмотреть, что T и U принимают весьма простой вид, если в качестве переменной взять величину, пропорциональную $\sin(\varphi/2)$. Действительно, производная от $\sin(\varphi/2)$ по t пропорциональна $\cos(\varphi/2) \dot{\varphi}$. В связи с этим вместо φ возьмем обобщенную координату $s = 4R \sin(\varphi/2)$ (s является длиной дуги циклоиды, отсчитываемой от начала координат до материальной точки). Выражая T и U через переменную s :

$$T = \frac{m}{2} \dot{s}^2, \quad U = \frac{mg}{8R} s^2,$$

получим уравнение Лагранжа, соответствующее этой переменной:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{s}} \right) - \frac{\partial T}{\partial s} = - \frac{\partial U}{\partial s},$$

т. е.

$$\ddot{s} + \omega^2 s = 0,$$

где $\omega^2 = g/4R$. Отсюда находим закон движения точки по циклоиде

$$s = a \cos(\omega t + \alpha).$$

Здесь a и α — амплитуда и фаза гармонического колебания соответственно; их можно выразить через s_0 и v_0 — величины дуги и скорости точки в начальный момент времени:

$$a = \left(s_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2} \right)^{1/2}, \quad \operatorname{tg} \alpha = - \frac{v_0}{\omega s_0}.$$

В частности, если $v_0 = 0$, то решение принимает вид

$$s = s_0 \cos \omega t,$$

откуда следует, что при любом начальном отклонении $s_0 < s_{\max} = 4R$ точка придет в нижнее положение за один и тот же промежуток времени (это свойство движения называется *изохронностью*).

Пример 26.2. Точка на колеблющейся горизонтальной плоскости.

Рассмотрим решение примера 25.1 с помощью уравнений Лагранжа в независимых координатах.

Поскольку на одну точку налагается одна связь, то число степеней свободы точки будет равно двум. В качестве независимых координат можно выбрать декартовы координаты x и y (см. рис. 23.2, a), а используя уравнение связи, найти кинетическую энергию T как функцию обобщенных скоростей \dot{x} и \dot{y}

$$T = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + a^2 \omega^2 \cos^2 \omega t)$$

и потенциальную энергию

$$U = mga \sin \omega t.$$

Эти выражения для T и U дают возможность составить уравнения Лагранжа (26.22) для рассматриваемой задачи:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} = - \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \text{т. е.} \quad m\ddot{x} = 0;$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial T}{\partial y} = - \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \text{т. е.} \quad m\ddot{y} = 0.$$

В настоящем примере обе координаты x и y циклические, так как ни T , ни U явно от них не зависят (см. (26.25)). Поэтому для

решения задачи не обязательно выписывать уравнения Лагранжа; можно сразу получить интегралы вида (26.24)

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} = m\dot{x}_0, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} = m\dot{y}_0,$$

с помощью которых найти окончательное решение (см. пример 25.1). Заметим, что сохранение проекций скорости \dot{x} и \dot{y} здесь связано с циклическостью координат x и y .

Пример 26.3. Точка на расширяющейся цилиндрической поверхности.

Рассмотрим решение примера 25.2 методом независимых координат.

Согласно условию связь, налагаемая на точку, обладает цилиндрической симметрией, а ось цилиндра направлена вдоль вектора \mathbf{g} (рис. 25.1). Поэтому выберем в качестве независимых переменных цилиндрические координаты φ , z (число степеней свободы точки равно двум) и запишем уравнения (26.22) в этих переменных в общей форме:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} &= - \frac{\partial U}{\partial \varphi}, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{z}} \right) - \frac{\partial T}{\partial z} &= - \frac{\partial U}{\partial z}. \end{aligned}$$

Используя выражение для скорости в цилиндрических координатах (см. (1.17)) и уравнение связи

$$\rho = \dot{\rho}_0 t + \rho_0,$$

найдем кинетическую и потенциальную энергии как функции обобщенных скоростей и координат:

$$T = \frac{m}{2} [\dot{\rho}_0^2 + (\dot{\rho}_0 t + \rho_0)^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2],$$

$$U = mgz.$$

Отсюда видно, что координата φ является циклической. Это приводит к интегралу

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = m(\dot{\rho}_0 t + \rho_0)^2 \dot{\varphi} = C,$$

который дает возможность найти $\varphi(t)$. Нетрудно убедиться, что частная производная $\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}$ равна M_z — проекции момента импульса на ось Oz , а ее сохранение связано с циклическостью координаты φ .

Независимая координата z не является циклической, так как $\frac{\partial U}{\partial z} \neq 0$. Поэтому закон изменения этой координаты получим из

соответствующего уравнения Лагранжа

$$\ddot{z} = -g.$$

Пример 26.4. Уравнение движения свободной точки в цилиндрических и сферических координатах.

Поскольку свободная точка обладает тремя степенями свободы, то в качестве независимых координат можно взять любые три независимые координаты точки, в частности цилиндрические координаты ρ , φ , z . Приращение радиуса-вектора в этих координатах равно

$$d\mathbf{r} = \mathbf{n}_\rho d\rho + \mathbf{n}_{\varphi\rho} d\varphi + \mathbf{n}_z dz.$$

Следовательно, кинетическая энергия точки имеет вид

$$T = \frac{m}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2), \quad (1)$$

а частные производные, необходимые для получения обобщенных сил, равны

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} = \mathbf{n}_\rho, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = \rho \mathbf{n}_\varphi, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = \mathbf{n}_z.$$

Используя эти выражения, найдем (см. (26.17))

$$Q_\rho = \mathbf{F} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} = F_\rho, \quad Q_\varphi = \mathbf{F} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = \rho F_\varphi, \quad Q_z = \mathbf{F} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = F_z, \quad (2)$$

где F_ρ , F_φ , F_z — проекции силы \mathbf{F} на цилиндрические орты. Таким образом, обобщенные силы Q_ρ и Q_z являются проекциями силы \mathbf{F} на координатные оси (ρ) и (z), а обобщенная сила Q_φ равна L_z — проекции момента силы на ось (z).

Подставляя (1) и (2) в (26.20), найдем уравнения движения точки в цилиндрических координатах:

$$m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2) = F_\rho, \quad m \frac{d}{dt}(\rho^2 \dot{\varphi}) = \rho F_\varphi, \quad m\ddot{z} = F_z. \quad (3)$$

По определению сферических координат приращение радиуса-вектора свободной точки имеет вид

$$d\mathbf{r} = \mathbf{n}_r dr + \mathbf{n}_\theta r d\theta + \mathbf{n}_\varphi r \sin\theta d\varphi.$$

Следовательно, кинетическая энергия в сферических координатах равна

$$T = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2); \quad (4)$$

нетрудно также получить, что

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} = \mathbf{n}_r, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = r \mathbf{n}_\theta, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = r \sin\theta \mathbf{n}_\varphi.$$

Используя эти частные производные, найдем обобщенные силы

$$Q_r = F_r, \quad Q_\theta = rF_\theta, \quad Q_\varphi = r \sin \theta \cdot F_\varphi, \quad (5)$$

где F_r , F_θ , F_φ — проекции заданной силы \mathbf{F} на сферические орты. Подставляя (4) и (5) в уравнения (26.20), где в качестве независимых координат взяты r , θ и φ , получим *уравнения движения точки в сферических координатах*:

$$\begin{aligned} m \{ \ddot{r} - r(\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \cdot \dot{\varphi}^2) \} &= F_r, \\ m \left\{ \frac{d}{dt}(r^2 \dot{\theta}) - r^2 \sin \theta \cos \theta \cdot \dot{\varphi}^2 \right\} &= rF_\theta, \\ m \frac{d}{dt}(r^2 \sin^2 \theta \cdot \dot{\varphi}) &= r \sin \theta \cdot F_\varphi. \end{aligned} \quad (6)$$

Отсюда легко найти проекции ускорения точки на орты сферических координат:

$$\begin{aligned} \omega_r &= \ddot{r} - r(\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \cdot \dot{\varphi}^2), \\ \omega_\theta &= \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2 \dot{\theta}) - r \sin \theta \cos \theta \cdot \dot{\varphi}^2, \\ \omega_\varphi &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{d}{dt}(r^2 \sin^2 \theta \cdot \dot{\varphi}). \end{aligned} \quad (7)$$

§ 27. Структура уравнений движения в независимых координатах и функция Лагранжа

В предыдущем параграфе было выяснено, насколько важен выбор независимых обобщенных координат при составлении уравнений Лагранжа. В свою очередь вопрос о выборе координат требует более тщательного изучения структуры этих уравнений. С этой целью прежде всего рассмотрим структуру кинетической энергии.

Кинетическая энергия является однородной положительной определенной квадратичной формой от скоростей точек. Положительная определенность этой формы означает, что $T > 0$ при любых значениях проекций скоростей, одновременно не равных нулю, а $T = 0$ только в том случае, если все $v_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, N$)^{*}). Однако *кинетическая энергия как функция обобщенных скоростей в общем случае будет неоднородной квадратичной формой.* Убедимся в этом непосредственно, подставляя в кинетическую энергию скорости точек, выраженные через обобщенные переменные, т. е. подставляя (26.10). Изменяя порядок суммирования, найдем, что

$$T = T^{(2)} + T^{(1)} + T^{(0)}, \quad (27.1)$$

^{*}) О свойствах квадратичных форм см. И. М. Гельфанд, Лекции по линейной алгебре, «Наука», 1966, гл. I, §§ 4—7.

где $T^{(2)}$, $T^{(1)}$ и $T^{(0)}$ являются однородными формами соответственно второй, первой и нулевой степени относительно обобщенных скоростей:

$$\begin{aligned} T^{(2)} &= \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^s a_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k, & \text{где } a_{jk} &= \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \frac{\partial r_i}{\partial q_k}, \\ T^{(1)} &= \sum_{j=1}^s a_j \dot{q}_j, & \text{где } a_j &= \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \frac{\partial r_i}{\partial t}, \\ T^{(0)} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left(\frac{\partial r_i}{\partial t} \right)^2. \end{aligned} \quad (27.2)$$

Как видно из (27.2), все коэффициенты a_{jk} , a_j и форма нулевой степени $T^{(0)}$ зависят только от обобщенных координат и времени, а неоднородность кинетической энергии как функции обобщенных скоростей имеет место только в том случае, если преобразование (26.4) явно зависит от времени (например, в случае системы с нестационарными связями). Если же преобразование (26.4) подчиняется условиям

$$\frac{\partial r_i}{\partial t} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N), \quad (27.3)$$

то кинетическая энергия будет однородной формой обобщенных скоростей, т. е. $T = T^{(2)}$. Условия (27.3) выполняются, в частности, для случая стационарных связей.

Рассматривая свойства $T^{(2)}$, прежде всего заметим, что все коэффициенты a_{jk} симметричны по индексам, т. е.

$$a_{jk} = a_{kj} \quad (j, k = 1, 2, \dots, s). \quad (27.4)$$

Далее можно убедиться, что $T^{(2)}$ является положительно определенной формой обобщенных скоростей. Положительная определенность $T^{(2)}$ относительно \dot{q} означает, что $T^{(2)} \geq 0$, причем $T^{(2)} = 0$ только в том случае, если все $\dot{q}_j = 0$ ($j = 1, 2, \dots, s$).

Для доказательства этого утверждения запишем $T^{(2)}$ в виде

$$T^{(2)} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left(\sum_{j=1}^s \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \right)^2.$$

Отсюда следует, что $T^{(2)}$ является положительно определенной формой относительно сумм

$$\sum_{j=1}^s \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \quad (i = 1, 2, \dots, N).$$

Иначе говоря, при любых значениях этих сумм $T^{(a)} \geq 0$, причем $T^{(a)} = 0$ только в том случае, если все эти суммы равны нулю:

$$\sum_{j=1}^s \frac{\partial r_l}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = 0 \quad (l=1, 2, \dots, N). \quad (27.5)$$

Матрица, составленная из коэффициентов вида $\frac{\partial r_l}{\partial \dot{q}_j}$, представляет собой функциональную матрицу системы функций (26.4). Согласно предположению о независимости s этих функций (см. (26.5)) ранг этой матрицы равен s . Если же ранг матрицы равен числу неизвестных в линейной однородной системе (27.5), то нулевое решение такой системы является единственным*). Таким образом, $T^{(a)}$ действительно обращается в нуль только в том случае, когда все $\dot{q}_j = 0$ ($j=1, 2, \dots, s$). С другой стороны, если хотя бы одна из этих скоростей отлична от нуля, то $T^{(a)} > 0$. Итак, форма $T^{(a)}$ является положительно определенной формой от обобщенных скоростей. Следовательно, детерминант, составленный из ее коэффициентов, отличен от нуля**):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{ss} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (27.6)$$

Опираясь на это свойство, можно убедиться, что уравнения Лагранжа (26.20) однозначно определяют движение механической системы, если заданы начальные значения обобщенных координат и скоростей. Действительно, из (27.1) и (27.2) найдем

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{k=1}^s a_{jk} \dot{q}_k + a_j \quad (j=1, 2, \dots, s), \quad (27.7)$$

откуда следует, что

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) = \sum_{k=1}^s a_{jk} \ddot{q}_k + \sum_{k=1}^s \dot{a}_{jk} \dot{q}_k + \dot{a}_j \quad (j=1, 2, \dots, s) \quad (27.8)$$

(величины вида \ddot{q} называются обобщенными ускорениями). С другой стороны, члены $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}$ не зависят от обобщенных ускорений,

*) См. А. Г. Курош, Курс высшей алгебры, «Наука», 1968, гл. 2, § 12, стр. 83.

**) См. И. М. Гельфанд, Лекции по линейной алгебре, «Наука», 1966, гл. I, § 6, теорема 3; в этой теореме сформулировано необходимое и достаточное условие положительной определенности квадратичной формы.

не зависят от них и обобщенные силы, так как все заданные силы F_j являются функциями только положений, скоростей точек и времени. Поэтому уравнения (26.20) представляют собой систему

$$\sum_{k=1}^s a_{jk} \ddot{q}_k = Q_j^*(q, \dot{q}, t) \quad (j=1, 2, \dots, s),$$

которую в силу (27.6) можно разрешить относительно ускорений \ddot{q} и представить в виде

$$\ddot{q}_j = Q_j^{**}(q, \dot{q}, t) \quad (j=1, 2, \dots, s). \quad (27.9)$$

На основании известной теоремы из теории обыкновенных дифференциальных уравнений система (27.9) с заданными функциями $Q_j^{**}(q, \dot{q}, t)$ имеет единственное решение, удовлетворяющее начальным условиям

$$q_j = q_{j0}, \quad \dot{q}_j = \dot{q}_{j0} \quad (j=1, 2, \dots, s)^*.$$

Переходя к изучению структуры обобщенных сил, вспомним, что эти силы, согласно (26.17), определяются известными векторными силами, а в случае потенциальных сил — потенциальной энергией или потенциалом U как функцией положения точек и времени.

Рассмотрим обобщенно-потенциальные силы, *которые могут быть заданы с помощью скалярной функции U , зависящей не только от положений точек и времени, но и от скоростей точек* (такая функция называется обобщенным потенциалом). Например, сила Лоренца, с которой электромагнитное поле действует на движущийся заряд, является обобщенно-потенциальной и, как будет показано ниже, может быть представлена в виде

$$F = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial U}{\partial r}, \quad (27.10)$$

где

$$U = -\frac{e}{c} A \dot{r} + e\varphi, \quad (27.11)$$

а A и φ — векторный и скалярный потенциалы электромагнитного поля, заданные как функции точки пространства и времени и определяющие напряженности поля **):

$$E = -\nabla\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial A}{\partial t}, \quad H = [\nabla A]; \quad (27.12)$$

*) Л. Э. Эльсгольц, Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление, «Наука», 1969, стр. 86, теорема 2.1.

***) См. [30], стр. 155 или [31], стр. 438.

в формуле (27.10) символом $\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}$ обозначен градиент, а символом $\frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{r}}}$ — дифференциальный оператор

$$\mathbf{n}_x \frac{\partial}{\partial \dot{x}} + \mathbf{n}_y \frac{\partial}{\partial \dot{y}} + \mathbf{n}_z \frac{\partial}{\partial \dot{z}}.$$

Подставляя (27.11) в (27.10), получим

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \right) - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} = -\frac{e}{c} \dot{\mathbf{A}} + \frac{e}{c} \nabla (\mathbf{A} \dot{\mathbf{r}}) - e \nabla \varphi. \quad (27.13)$$

Затем, используя полную производную векторного потенциала по времени

$$\dot{\mathbf{A}} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + (\dot{\mathbf{r}} \nabla) \mathbf{A} \quad (27.14)$$

(здесь к вектору \mathbf{A} применяется оператор — скалярное произведение $\dot{\mathbf{r}} \nabla$), убедимся, что правая часть равенства (27.13) имеет вид

$$e \left\{ -\nabla \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right\} + \frac{e}{c} [\dot{\mathbf{r}} [\nabla \mathbf{A}]]. \quad (27.15)$$

Наконец, подставляя сюда (27.12), придем к известному выражению силы Лоренца. Эта сила складывается из потенциальной силы $-e \nabla \varphi$, непотенциальной силы $-\frac{e}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$, зависящей от положения и времени, а также из гироскопической силы $\frac{e}{c} [\mathbf{v} \mathcal{H}]$.

Обобщенные силы, соответствующие силе Лоренца, всегда можно представить в форме

$$Q_j = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial U}{\partial q_j}. \quad (27.16)$$

Действительно, пользуясь (27.10) и определением обобщенной силы, получим

$$Q_j = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \right) \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j} - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j}. \quad (27.17)$$

Затем, учитывая, что $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j} = \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial \dot{q}_j}$, (27.17) можно привести к виду

$$Q_j = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial U}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial q_j} - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j}. \quad (27.18)$$

Отсюда, принимая во внимание очевидные равенства

$$\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial U}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial \dot{q}_j}; \quad \frac{\partial U}{\partial q_j} = \frac{\partial U}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial q_j} + \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j}, \quad (27.19)$$

убеждаемся в справедливости (27.16).

Обобщенный потенциал, определяющий силы вида (27.16), является линейной формой относительно скоростей точек (в противном случае силы будут зависеть от ускорений, что было исключено из рассмотрения). Например, обобщенный потенциал системы зарядов во внешних электромагнитных полях, согласно (27.11), имеет вид

$$\mathcal{U} = - \sum_{i=1}^N \frac{e_i}{c} \mathbf{A}_i \dot{\mathbf{r}}_i + \sum_{i=1}^N e_i \varphi_i. \quad (27.20)$$

Выражая здесь скорости точек и их радиусы-векторы через обобщенные переменные (см. (26.4) и (26.10)), получим, что

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}^{(1)} + \mathcal{U}^{(0)}, \quad (27.21)$$

где $\mathcal{U}^{(1)} = \sum_{j=1}^s U_j \dot{q}_j$ — линейная однородная форма обобщенных скоростей, $\mathcal{U}^{(0)} = U$ — форма нулевой степени или обычная потенциальная энергия, а U_j и U являются функциями только координат и времени. Нетрудно убедиться, что силы Q_j , соответствующие обобщенному потенциалу (27.21), равны

$$Q_j = - \frac{\partial U}{\partial q_j} + \frac{\partial U_j}{\partial t} + \sum_{k=1}^s \gamma_{jk} \dot{q}_k, \quad (27.22)$$

где $\gamma_{jk} = \frac{\partial U_j}{\partial q_k} - \frac{\partial U_k}{\partial q_j}$ — коэффициенты, антисимметричные по индексам. Отсюда видно, что гироскопическая часть обобщенной силы может быть задана с помощью антисимметричной матрицы (см. определение гироскопической силы на стр. 65).

При наличии обобщенно-потенциальных и диссипативных сил уравнения Лагранжа в независимых координатах можно записать в виде

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = Q_j^d \quad (j = 1, 2, \dots, s), \quad (27.23)$$

где $\mathcal{L} = T - \mathcal{U}$ — разность кинетической энергии и обобщенного потенциала, а Q_j^d — обобщенные диссипативные силы. Функция \mathcal{L} называется функцией Лагранжа или лагранжианом. Она является неоднородной квадратичной формой относительно обобщенных скоростей (см. (27.1) и (27.21)):

$$\mathcal{L} = T^{(2)} + (T^{(1)} - \mathcal{U}^{(1)}) + (T^{(0)} - \mathcal{U}^{(0)}). \quad (27.24)$$

Диссипативные силы в случае, когда они линейно зависят от скоростей точек, также могут быть выражены через скалярную функцию. В самом деле, если

$$\mathbf{F}_i^d = -k_i \dot{\mathbf{r}}_i, \quad k_i > 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N), \quad (27.25)$$

то, подставляя (27.25) в (26.17) и используя (26.11), получим

$$Q_j^d = -\frac{\partial D}{\partial \dot{q}_j} \quad (j = 1, 2, \dots, s), \quad (27.26)$$

где $D = \sum_{i=1}^N \frac{k_i}{2} (\dot{r}_i)^2$ — диссипативная функция Рэлея.

Структура этой функции аналогична структуре кинетической энергии, так как формально диссипативная функция может быть получена из кинетической энергии заменой каждой массы m_i на соответствующий коэффициент k_i . Производя такую замену, из (27.1) и (27.2) найдем

$$D = D^{(2)} + D^{(1)} + D^{(0)}, \quad (27.27)$$

где

$$D^{(2)} = \frac{1}{2} \sum_{j, k=1}^s b_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k, \quad b_{jk} = \sum_{i=1}^N k_i \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \frac{\partial r_i}{\partial q_k};$$

$$D^{(1)} = \sum_{j=1}^s b_j \dot{q}_j, \quad b_j = \sum_{i=1}^N k_i \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \frac{\partial r_i}{\partial t},$$

$$D^{(0)} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N k_i \left(\frac{\partial r_i}{\partial t} \right)^2$$

(здесь все коэффициенты b_{jk} симметричны относительно перестановок индексов).

Пример 27.1. Теорема Лармора.

Пусть электрон (заряда e и массы m) движется в электростатическом поле ядра (порядковый номер ядра равен Z , его масса значительно больше массы электрона, а начальная скорость ядра равна нулю). Эта система помещается в достаточно слабое однородное и постоянное магнитное поле напряженности \mathcal{H} . Показать, что при этом орбита электрона будет прецессировать вокруг оси, параллельной напряженности \mathcal{H} , с угловой скоростью, равной частоте Лармора $\omega = \frac{|e|\mathcal{H}}{2mc}$.

Поскольку масса ядра значительно больше массы электрона, введем систему отсчета с началом в ядре (эта система отсчета будет весьма близка к инерциальной — см. замечание на стр. 190). Ось Oz направим вдоль вектора \mathcal{H} ; тогда, используя цилиндрические координаты, получим следующее уравнение для определения вектор-потенциала A (см. (27.12)):

$$\mathcal{L}' \mathbf{n}_z = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right) \mathbf{n}_\rho + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) \mathbf{n}_\varphi + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial (\rho A_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi} \right) \mathbf{n}_z.$$

Полагая здесь, что $A_p = A_z = 0$ и что проекция A_φ не зависит от z , найдем

$$\mathcal{H} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\varphi)$$

и, следовательно,

$$A_\varphi = \frac{\mathcal{H}}{2} \rho$$

(определение \mathbf{A} по заданной напряженности \mathcal{H} неоднозначно, однако эта неоднозначность не сказывается на значении силы, так как сила зависит от напряженности \mathcal{H}).

Таким образом, обобщенный потенциал рассматриваемых полей равен (см. (27.11))

$$\mathcal{U} = -\frac{e\mathcal{H}}{2c} \rho^2 \dot{\varphi} + U,$$

где $U = -\frac{Ze^2}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}$ — потенциал электростатического поля. Используя это выражение \mathcal{U} , получим лагранжиан заряда

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - \frac{|e|\mathcal{H}}{2c} \rho^2 \dot{\varphi} - U. \quad (1)$$

Чтобы убедиться в справедливости теоремы Лармора, введем вращающуюся с угловой скоростью ω систему отсчета с началом в ядре и перейдем от переменных ρ, φ, z к переменным ρ, α, z , где $\alpha = \varphi - \omega t$. Функция Лагранжа в новых переменных будет равна

$$\mathcal{L}' = \frac{m}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\alpha}^2 + \dot{z}^2) - \frac{m}{2} \rho^2 \omega^2 - U.$$

Так как по условию напряженность магнитного поля мала, то, пренебрегая членом, пропорциональным ω^2 , получим

$$\mathcal{L}' \approx \frac{m}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\alpha}^2 + \dot{z}^2) - U. \quad (2)$$

С другой стороны, функция (1) в отсутствие магнитного поля равна

$$\mathcal{L}_{\mathcal{H}=0} = \frac{m}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - U. \quad (3)$$

Совпадение вида функций (2) и (3) говорит о том, что при наличии магнитного поля электрон движется относительно системы, вращающейся с частотой Лармора, так же, как он движется в отсутствие магнитного поля относительно инерциальной системы. Это свидетельствует о прецессии орбиты электрона с угловой скоростью ω .

§ 28. Законы сохранения обобщенного импульса и обобщенной энергии

В главе II были рассмотрены законы сохранения импульса, кинетического момента и энергии, вытекающие из уравнений Ньютона; соответственно законы сохранения обобщенного импульса и обобщенной энергии являются следствием уравнений Лагранжа.

Запишем уравнения (27.23) в виде

$$\frac{dp_j}{dt} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} + Q_j^d \quad (j=1, 2, \dots, s), \quad (28.1)$$

где величина $p_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}$ называется обобщенным импульсом, соответствующим координате q_j . Из (28.1) следует, что обобщенный импульс p_j сохраняется, если функция Лагранжа явно от координаты q_j не зависит и если соответствующая этой координате диссипативная обобщенная сила равна нулю. Таким образом,

$$p_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} = p_{j0}, \quad (28.2)$$

если $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0$ и $Q_j^d = 0$. Если же все диссипативные силы равны нулю, то закон (28.2) сохранения обобщенного импульса принимает вид

$$p_j = p_{j0}, \quad \text{если} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0. \quad (28.3)$$

Приведем ряд небольших примеров. Функция Лагранжа для пространственного осциллятора в декартовых координатах имеет вид (см. (6.30))

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{\kappa}{2} (x^2 + y^2 + z^2),$$

а обобщенные импульсы

$$p_x = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \quad p_y = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}, \quad p_z = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}$$

являются декартовыми проекциями импульса точки. Как видно, ни одна из координат x , y , z в данном случае не является циклической, соответственно ни один из обобщенных импульсов p_x , p_y , p_z не сохраняется.

Теперь запишем лагранжиан пространственного осциллятора в сферических координатах (см. (1.24) и формулу (4) в примере 26.4):

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \cdot \dot{\phi}^2) - \frac{\kappa}{2} r^2.$$

Обобщенными импульсами точки в этих координатах являются

$$p_r = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \quad p_\theta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}, \quad p_\varphi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \sin^2 \theta \cdot \dot{\varphi},$$

причем обобщенный импульс p_φ равен M_z — проекции момента импульса точки на ось Oz . Поскольку координата φ циклическая, то p_φ сохраняется, т. е.

$$mr^2 \sin^2 \theta \cdot \dot{\varphi} = p_{\varphi_0}.$$

Лагранжиан циклоидального маятника равен (см. пример 26.1)

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} \dot{s}^2 - \frac{mg}{8R} s^2;$$

здесь координата s не циклическая и обобщенный импульс

$$p_s = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{s}} = m\dot{s}$$

не сохраняется.

Наконец, возьмем заряд, движущийся в электростатическом поле неподвижного ядра и постоянном однородном магнитном поле (см. пример 27.1). В этом случае координаты ρ и z не циклические, а φ — циклическая. Поэтому закон сохранения (28.3) приводит к интегралу

$$p_\varphi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = m\rho^2 (\dot{\varphi} - \omega) = p_{\varphi_0}.$$

Установим структуру обобщенного импульса в общем случае. Принимая во внимание определение обобщенного импульса и форму лагранжиана (27.24), находим

$$p_j = \sum_{k=1}^s a_{jk} \dot{q}_k + a_j - U_j, \quad (28.4)$$

де a_{jk} , a_j — коэффициенты однородных форм $T^{(2)}$ и $T^{(1)}$ кинетической энергии, U_j — коэффициенты однородной формы $\mathcal{U}^{(1)}$ обобщенного потенциала. Отсюда видно, что обобщенные импульсы являются неоднородными линейными формами обобщенных скоростей.

Закон изменения обобщенной энергии получим из уравнений Лагранжа в независимых координатах аналогично тому, как из уравнений Ньютона был получен закон изменения энергии (11.18). Умножая каждое из уравнений (27.23) на соответствующую обобщенную скорость \dot{q}_j и складывая полученные выражения по всем степеням свободы, найдем

$$\sum_{j=1}^s \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \right\} \dot{q}_j = \sum_{j=1}^s Q_j^d \dot{q}_j. \quad (28.5)$$

Как оказывается, в этом уравнении можно выделить полную производную по времени от такой функции, которая в частном случае будет совпадать с энергией системы. Действительно, используя очевидное соотношение

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) \dot{q}_j \approx \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j, \quad (28.6)$$

представим левую часть уравнения (28.5) в виде

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{j=1}^s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \right) - \sum_{j=1}^s \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \right). \quad (28.7)$$

Затем, учитывая, что функция Лагранжа является функцией обобщенных координат, скоростей и времени и, следовательно, ее полная производная по времени равна

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} = \sum_{j=1}^s \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}, \quad (28.8)$$

вместо (28.5) получим уравнение

$$\frac{dH}{dt} = - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} + \sum_{j=1}^s Q_j^d \dot{q}_j, \quad (28.9)$$

где

$$H \approx \sum_{j=1}^s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - \mathcal{L}. \quad (28.10)$$

Эту функцию обобщенных координат, скоростей и времени будем называть обобщенной энергией системы, а уравнение (28.9) — *законом изменения обобщенной энергии*.

Функция H в частном случае совпадает с полной энергией системы E , в чем можно убедиться, рассматривая структуру H . В самом деле, используя (28.4), а также (27.2) и (27.21), найдем, что

$$\sum_{j=1}^s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \approx 2T^{(2)} + T^{(1)} - \mathcal{U}^{(1)}.$$

Подставляя это выражение в (28.10) и учитывая структуру лагранжиана (см. (27.24)), получим

$$H \approx T^{(2)} - T^{(0)} + \mathcal{U}^{(0)}. \quad (28.11)$$

Отсюда видно, что *обобщенная энергия не содержит линейных форм обобщенных скоростей*, в то время как полная энергия включает в себя форму $T^{(1)}$ (см. (11.16), (27.1) и (27.21)):

$$E \approx T^{(2)} + T^{(1)} + T^{(0)} + \mathcal{U}^{(0)}. \quad (28.12)$$

Из сопоставления (28.11) и (28.12) следует, что *обобщенная энергия системы и ее полная энергия совпадают в тех случаях, когда радиусы-векторы точек системы как функции независимых координат явно от времени не зависят*; в частности, это имеет место для систем со стационарными связями (см. (27.3)).

Закон сохранения обобщенной энергии непосредственно вытекает из уравнения (28.9): *обобщенная энергия системы сохраняется, если функция Лагранжа явно от времени не зависит, а диссипативные силы отсутствуют*, т. е.

$$H = T^{(2)} - T^{(1)} + \mathcal{U}^{(0)} = H_0, \quad (28.13)$$

при условии, что $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0$ и $Q_j^d = 0$ ($j = 1, 2, \dots, s$). Заметим, что первое из этих условий не обязательно связано с условием $\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} = 0$ ($i = 1, 2, \dots, N$). Может случиться, что $\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \neq 0$ ($i = 1, 2, \dots, N$), а $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0$; тогда в отсутствие диссипативных сил уравнение (28.9) приводит к *интегралу движения, не совпадающему с интегралом энергии*. Если же наряду с условиями сохранения обобщенной энергии выполняются требования $\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} = 0$ ($i = 1, 2, \dots, N$), то законы сохранения обобщенной и полной энергий системы совпадают, т. е. $H = E = E_0$.

В заключение отметим достаточно распространенный случай механической системы со стационарными связями и диссипативными силами, линейными относительно скоростей точек. Для такой системы мощность обобщенных диссипативных сил равна (см. (27.26) и (27.27))

$$\sum_{j=1}^s Q_j^d \dot{q}_j = -2D^{(2)}. \quad (28.14)$$

Учитывая, что кинетическая энергия системы со стационарными связями явно от времени не зависит, из уравнения (28.9) найдем

$$\dot{E} = \frac{\partial U}{\partial t} - 2D^{(2)}. \quad (28.15)$$

Пример 28.1. Сферический маятник.

Точка массы m движется в однородном поле тяжести напряженности \mathbf{g} по гладкой неподвижной и твердой сфере радиуса l , причем диссипативными силами можно пренебречь. Найти общее решение в независимых координатах.

Учитывая однородность поля тяжести и сферическую симметрию связи, совместим начало координат с центром сферы, ось Oz направим вдоль вектора \mathbf{g} , а за независимые координаты возьмем сфери-

ческие углы θ и φ (рис. 23.1). Тогда функцию Лагранжа можно записать в виде

$$\mathcal{L} = \frac{ml^2}{2} (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \cdot \dot{\varphi}^2) + mgl \cos \theta.$$

Отсюда следует, что координата φ является циклической, а $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0$, т. е. имеют место два интеграла движения (см. (28.3) и (28.13))

$$p_\varphi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2 \sin^2 \theta \cdot \dot{\varphi} = M_{z0},$$

$$H = E = \frac{ml^2}{2} (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \cdot \dot{\varphi}^2) - mgl \cos \theta = E_0.$$

С помощью этих интегралов решение задачи можно довести до квадратур. В самом деле, из интеграла момента следует, что

$$\dot{\varphi} = \frac{M_{z0}}{ml^2} \frac{1}{\sin^2 \theta}. \quad (1)$$

Подставляя это выражение в интеграл энергии, получим

$$\frac{ml^2}{2} \dot{\theta}^2 + \frac{M_{z0}^2}{2ml^2} \frac{1}{\sin^2 \theta} - mgl \cos \theta = E_0, \quad (2)$$

откуда найдем закон движения точки по траектории в виде

$$t = \int \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2}{ml^2} (E_0 - U_{\text{eff}})}} + \text{const}, \quad (3)$$

где

$$U_{\text{eff}} = \frac{M_{z0}^2}{2ml^2} \frac{1}{\sin^2 \theta} - mgl \cos \theta.$$

Исключая из уравнения (2) элемент времени, равный

$$dt = \frac{ml^2}{M_{z0}} \sin^2 \theta d\varphi,$$

получим уравнение траектории *)

$$\varphi = \int \frac{M_{z0}}{ml^2 \sin^2 \theta} \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2}{ml^2} (E_0 - U_{\text{eff}})}} + \text{const}. \quad (4)$$

Область изменения координаты θ определяется неравенством $E_0 \geq U_{\text{eff}}(\theta)$, аналогичным неравенству (7.9). При этом граничные зна-

*) Квадратуры $t(\theta)$ и $\varphi(\theta)$ сводятся к эллиптическим интегралам, которые подробно исследованы, например, в [8], т. I, стр. 433.

чения координаты θ можно найти, используя уравнение $E_0 = U_{\text{eff}}(\theta)$, которое в случае $M_{z0} \neq 0$ является уравнением третьей степени относительно $\cos \theta$ (рис. 28.1). Функция $U_{\text{eff}}(\theta)$ принимает бесконечные значения в точках 0 и π , а при $\theta = \pi/2$ равна $(M_{z0}^2/2ml^2) > 0$; минимум этой функции достигается в точке $\theta = \theta_{\text{eq}}$, определяемой из уравнения

$$\frac{\cos \theta_{\text{eq}}}{\sin^4 \theta_{\text{eq}}} = \frac{m^2 g l^3}{M_{z0}^2}. \quad (5)$$

Из графика видно, что область изменения угла θ ограничена значениями θ_{min} и θ_{max} , причем

$$0 < \theta_{\text{min}} \leq \theta \leq \theta_{\text{max}} < \pi. \quad (6)$$

Это означает, что траектория точки расположена на поверхности сферы между двумя горизонтальными плоскостями, пересекающими сферу, а угловая скорость $\dot{\phi}$ изменяется в конечных пределах (см. (1)).

Обобщенное ускорение $\ddot{\theta}$ положительно, если $\theta < \theta_{\text{eq}}$, отрицательно, если $\theta > \theta_{\text{eq}}$, и равно нулю, если $\theta = \theta_{\text{eq}}$. Это вытекает из уравнения Лагранжа, соответствующего углу θ и записанного с помощью (1) в виде

$$\ddot{\theta} = \left(\frac{M_{z0}^2 \cos \theta}{m^2 l^4 \sin^4 \theta} - \frac{g}{l} \right) \sin \theta. \quad (7)$$

Для вычисления реакции сферы воспользуемся тем, что реакция направлена по нормали к сфере. Проектируя обе части уравнения Лагранжа первого рода на орт \mathbf{n}_r , найдем

$$m\omega_r = mg \cos \theta + R_r. \quad (8)$$

Проекцию ω_r ускорения сферического маятника определим с помощью формулы (7) примера 26.4 при $r = l$. Тогда из уравнения (8) получим (см. (1) и (2))

$$R_r = -\frac{2}{l} E_0 - 3mg \cos \theta. \quad (9)$$

Рассмотрим частный случай, когда $\theta_{\text{max}} = \pi/2$, а в начальный момент времени угол θ_0 наклона маятника по отношению к вертикали равен θ_{max} . Тогда под действием силы тяжести маятник начнет опускаться; соответственно угловая скорость маятника будет возрастать, кинетическая энергия увеличиваться, а потенциальная убывать. Одновременно возрастет реакция сферы, причем у реакции

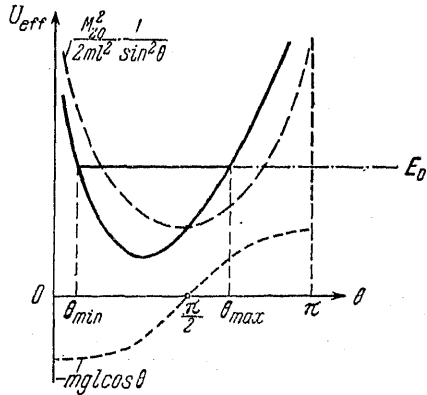


Рис. 28.1.

появится вертикальная составляющая. Это в конце концов приводит к подъему маятника, который сопровождается уменьшением кинетической энергии, угловой скорости и реакции сферы, а также увеличением потенциальной энергии.

Рассмотрим еще один частный случай, когда начальные условия подобраны так, что $E_0 = (U_{\text{eff}})_{\text{min}}$, т. е. прямая E_0 и кривая $U_{\text{eff}}(\theta)$ пересекаются в одной точке, которой соответствует постоянный угол $\theta_{\text{min}} = \theta = \theta_{\text{max}}$ (см. рис. 28.1). Учитывая это, из закона сохранения энергии, записанного в виде

$$v^2 = \frac{2}{m} (E_0 + mgl \cos \theta),$$

найдем

$$v^2 = v_0^2 = gl \frac{\sin^2 \theta_0}{\cos \theta_0}. \quad (10)$$

Отсюда легко получить значение квадрата угловой скорости

$$\dot{\phi}^2 = \dot{\phi}_0^2 = \frac{g}{l \cos \theta_0}. \quad (11)$$

Итак, если начальная скорость точки направлена по горизонтальной касательной к сфере, а величина начальной скорости определяется формулой (10), то точка будет двигаться по горизонтальной окружности радиуса $\rho_0 = l \sin \theta_0$.

Пример 28.2. Ограниченное движение заряда в неоднородных электрическом и магнитном полях.

Пусть заряд e массы m движется в электрическом и магнитном полях, причем напряженность \mathcal{E} электрического поля в любой точке

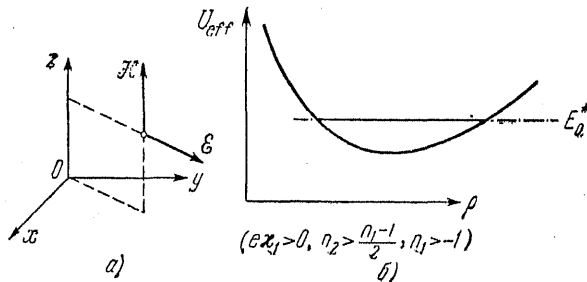


Рис. 28.2.

пространства направлена по прямой, проходящей через неподвижную ось перпендикулярно к ней, а напряженность магнитного поля параллельна неподвижной оси (напряженности обоих полей могут зависеть от расстояния до этой оси). Найти общее решение в квадратурах и указать, при каких условиях движение заряда происходит в ограниченной области пространства.

Совместим координатную ось Oz с осью симметрии полей (рис. 28.2, а). Тогда напряженности полей можно записать в виде

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}(\rho) \mathbf{n}_\rho, \quad \mathcal{H} = \mathcal{H}(\rho) \mathbf{n}_z,$$

где $\mathcal{E}(\rho)$, $\mathcal{H}(\rho)$ — известные функции. Учитывая, что вектор-потенциал магнитного поля и скалярный потенциал электрического поля будут при этом соответственно равны (см. пример 27.1)

$$A_\rho = A_z = 0, \quad A_\varphi = \frac{1}{\rho} \int \mathcal{H}(\rho) \rho d\rho, \quad U = -e \int \mathcal{E}(\rho) d\rho,$$

для функции Лагранжа получим выражение

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) + \frac{e}{c} \dot{\varphi} \int \mathcal{H}(\rho) \rho d\rho + e \int \mathcal{E}(\rho) d\rho.$$

Эта функция явно не зависит от φ , z и t , что приводит, согласно (28.3) и (28.13), к следующим трем первым интегралам:

$$p_\varphi = m\rho^2 \dot{\varphi} + \frac{e}{c} \int \mathcal{H}(\rho) \rho d\rho = p_{\varphi 0},$$

$$p_z = m\dot{z} = p_{z0},$$

$$H = E = \frac{m}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) + U = E_0.$$

Используя эти интегралы, найдем функцию $\dot{\rho}^2(\rho)$:

$$\dot{\rho}^2 = \frac{2}{m} (E_0^* - U_{\text{eff}}),$$

где

$$E_0^* = E_0 - \frac{m}{2} \dot{z}_0^2, \quad U_{\text{eff}} = U(\rho) + \frac{M_z^2(\rho)}{2m\rho^2},$$

$$M_z(\rho) = p_{\varphi 0} - \frac{e}{c} \int \mathcal{H}(\rho) \rho d\rho.$$

Отсюда, разделяя переменные t и ρ , можно получить второй интеграл $t(\rho)$:

$$t = \pm \int \frac{d\rho}{\left[\frac{2}{m} (E_0^* - U_{\text{eff}}) \right]^{1/2}} + \text{const},$$

а используя закон сохранения обобщенного импульса p_φ , можно найти

$$\dot{\varphi} = \frac{M_z(\rho)}{m\rho^2}.$$

Из последнего выражения с помощью функции $\dot{p}^2(\rho)$ легко исключить dt и, таким образом, получить еще один второй интеграл:

$$\varphi = \pm \int \frac{M_z(\rho)}{m\rho^2} \frac{d\rho}{\left[\frac{2}{m}(E_0^* - U_{\text{eff}})\right]^{1/2}} + \text{const.}$$

Наконец, из очевидного интеграла

$$z = \frac{p_{z0}}{m} t + z_0$$

следует, что одним из условий финитности движения является условие $p_{z0} = 0$. Итак, общее решение задачи в виде функций $t(\rho)$, $\varphi(\rho)$ и $z(t)$ найдено.

Теперь, задавая напряженности полей в виде степенных функций

$$\mathcal{E} = \kappa_1 \rho^{n_1}, \quad \mathcal{H} = \kappa_2 \rho^{n_2}$$

и ограничиваясь случаем $e\kappa_1 > 0$, т. е. случаем, когда электрическое поле отталкивает заряд от оси симметрии полей, найдем условия, при которых движение заряда в плоскости $z = z_0$ будет финитным (предполагается, что $p_{z0} = 0$). Полагая, например, $n_1 > -1$, а $n_2 > -2$, для «эффективного потенциала» получаем выражение

$$U_{\text{eff}} = \frac{M_z^2(\rho)}{2m\rho^2} - \frac{e\kappa_1}{n_1 + 1} \rho^{n_1 + 1},$$

где $M_z(\rho) = p_{\varphi 0} - \frac{e\kappa_2}{c(n_2 + 2)} \rho^{n_2 + 2}$. Устремляя здесь ρ к ∞ , выясним, когда U_{eff} будет стремиться к $+\infty$, и, таким образом, найдем условия финитности плоского движения точки (см. рис. 28.2, б):

$$n_1 > -1, \quad n_2 > \frac{n_1 - 1}{2};$$

$$n_1 > -1, \quad n_2 = \frac{n_1 - 1}{2}, \quad \frac{2e^2\kappa_2^2}{mc^2} > e\kappa_1 \frac{(n_1 + 3)^2}{(n_1 + 1)}.$$

Если $n_1 = -1$, а $n_2 > -2$, то

$$U_{\text{eff}} = \frac{M_z^2(\rho)}{2m\rho^2} - e\kappa_1 \ln \rho,$$

и аналогично предыдущему можно убедиться, что движение будет финитным при $n_1 = -1$, $n_2 > -1$. Наконец, в случае $n_1 < -1$, $n_2 > -2$ «эффективный потенциал» равен

$$U_{\text{eff}} = \frac{M_z^2(\rho)}{2m\rho^2} + \frac{e\kappa_1}{(|n_1| - 1) \rho^{|n_1| - 1}},$$

а соответствующим условием финитности является условие $n_1 < -1$, $n_2 > -1$. При других соотношениях между n_1 и n_2 потенциал U_{eff} стремится либо к нулю, либо к $-\infty$, и поэтому движение будет инфинитным.

Итак, плоское движение заряда в случае $ex_1 > 0$ финитно, если напряженность магнитного поля по сравнению с напряженностью электрического поля убывает медленнее или возрастает быстрее в соответствии с полученными условиями финитности.

Пример 28.3. Точка на вращающейся прямой.

Достаточно малое тело массы m движется в однородном поле тяжести по гладкому абсолютно твердому стержню, который вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикали, проходящей через закрепленную точку O стержня. Угол между стержнем и вертикалью постояен и равен θ_0 . Найти общее решение в независимых координатах.

В качестве независимой координаты выберем r — расстояние материальной точки от точки O (рис. 28.3), а уравнения связи запишем в виде $\theta = \theta_0$, $\varphi = \omega t$; тогда

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + \omega^2 \sin^2 \theta_0 \cdot r^2) - mg \cos \theta_0 \cdot r.$$

Интегрируя уравнение Лагранжа

$$\ddot{r} - \omega^2 \sin^2 \theta_0 \cdot r = -g \cos \theta_0,$$

получим общее решение в виде

$$r = \left(r_0 - \frac{g \cos \theta_0}{\omega^2 \sin^2 \theta_0} \right) \text{ch}(\omega \sin \theta_0 \cdot t) + \frac{r_0}{\omega \sin \theta_0} \text{sh}(\omega \sin \theta_0 \cdot t) + \frac{g \cos \theta_0}{\omega^2 \sin^2 \theta_0}.$$

Анализ этого решения облегчается, если воспользоваться интегралом обобщенной энергии (см. (28.13))

$$\begin{aligned} H &= \frac{m}{2} \dot{r}^2 - \frac{m}{2} \omega^2 \sin^2 \theta_0 \cdot r^2 + mg \cos \theta_0 \cdot r = \\ &= H_0 - \frac{m}{2} \dot{r}_0^2 - \frac{m}{2} \omega^2 \sin^2 \theta_0 \cdot r_0^2 + mg \cos \theta_0 \cdot r_0. \end{aligned}$$

Переписывая его в виде

$$\frac{m}{2} \dot{r}^2 = H_0 - U_{\text{eff}}(r),$$

где

$$U_{\text{eff}}(r) = mg \cos \theta_0 \cdot r - \frac{m}{2} \omega^2 \sin^2 \theta_0 \cdot r^2,$$

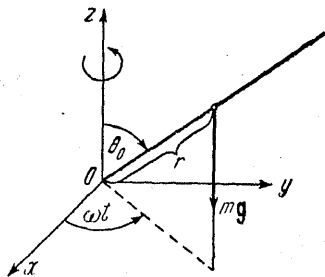


Рис. 28.3.

найдем, что область изменения координаты r определяется требованием

$$H_0 \geq U_{\text{eff}}(r).$$

Если $\theta_0 < \pi/2$ (рис. 28.4), то U_{eff} имеет максимальное значение, равное

$$(U_{\text{eff}})_{\text{max}} = \frac{m}{2} \left(\frac{g \cos \theta_0}{\omega \sin \theta_0} \right)^2,$$

в связи с чем можно рассмотреть следующие три случая:

$$H_0 > (U_{\text{eff}})_{\text{max}}, \quad H_0 < (U_{\text{eff}})_{\text{max}}, \quad H_0 < 0.$$

В первом случае движение может происходить в неограниченной области; осуществляется этот случай, если начальная радиальная скорость удовлетворяет условию

$$\dot{r}_0^2 > \left(\omega \sin \theta_0 \cdot r_0 - \frac{g \cos \theta_0}{\omega \sin \theta_0} \right)^2,$$

которое вытекает из неравенства $H_0 > (U_{\text{eff}})_{\text{max}}$. Во втором случае движение возможно в двух областях

$$0 \leq r \leq r_1, \quad r_2 \leq r \leq \infty.$$

Границы этих областей определяются корнями

$$r_{1,2} = \frac{g \cos \theta_0}{\omega^2 \sin^2 \theta_0} \mp \left\{ \left(\frac{g \cos \theta_0}{\omega^2 \sin^2 \theta_0} \right)^2 - \frac{2H_0}{m\omega^2 \sin^2 \theta_0} \right\}^{1/2}$$

квадратного уравнения

$$\begin{aligned} H_0 &= U_{\text{eff}} = \\ &= mg \cos \theta_0 \cdot r - \frac{m}{2} \omega^2 \sin^2 \theta_0 \cdot r^2. \end{aligned}$$

Второй случай осуществляется, если начальная радиальная скорость сравнительно мала,

$$\dot{r}_0^2 < \left(\omega \sin \theta_0 \cdot r_0 - \frac{g \cos \theta_0}{\omega \sin \theta_0} \right)^2.$$

В третьем случае область изменения r ограничена снизу: $r_3 \leq r \leq \infty$, а начальные условия должны удовлетворять неравенству

$$\dot{r}_0^2 < \omega^2 \sin^2 \theta_0 \cdot r_0^2 - 2g \cos \theta_0 \cdot r_0 \quad (H_0 < 0).$$

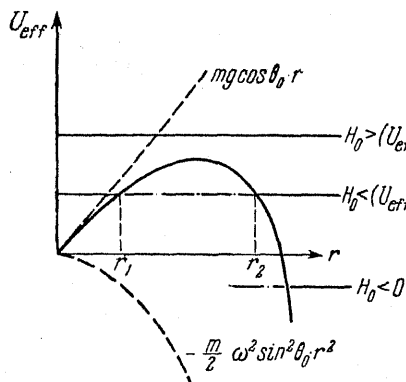


Рис. 28.4.

Наконец, если $\theta_0 \geq \pi/2$, то, рассматривая соответствующий график U_{eff} , легко прийти к выводу об инфинитности движения точки в областях: $0 \leq r \leq \infty$ ($H_0 > 0$), $r_{\text{min}} \leq r \leq \infty$ ($H_0 < 0$).

§ 29. Ковариантность уравнений Лагранжа в независимых координатах

Уравнения Лагранжа (26.20) в независимых координатах были получены из общего уравнения механики (26.3) с помощью преобразования (26.4), представляющего собой преобразование от радиусовекторов \mathbf{r}_i всех точек к обобщенным независимым координатам q . Однако выбор этих координат неоднозначен: в самом деле, координаты q всегда можно задать с помощью произвольных однозначных функций других s переменных q' и времени

$$q_j = q_j(q'_1, \dots, q'_s, t) \quad (j=1, 2, \dots, s). \quad (29.1)$$

Подставляя (29.1) в (26.4), найдем однозначные выражения радиусовекторов точек через величины q' :

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q'_1, \dots, q'_s, t) \quad (i=1, 2, \dots, N). \quad (29.2)$$

Эти функции, как и функции (26.4), обращают в тождество уравнения связей (см. (26.6)), и, следовательно, величины q' также являются обобщенными координатами механической системы. Преобразование (29.1), т. е. преобразование от одной системы обобщенных координат к другой системе, называется *точечным преобразованием*.

Если исходить из общего уравнения механики (26.3), а в качестве независимых переменных взять координаты q' , то, используя (29.2) и проводя вычисления, аналогичные (26.7) — (26.18), получим уравнения Лагранжа в новых переменных

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T'}{\partial \dot{q}'_j} \right) - \frac{\partial T'}{\partial q'_j} = Q'_j \quad (j=1, 2, \dots, s), \quad (29.3)$$

где кинетическая энергия T' и обобщенные силы Q'_j являются функциями q' , \dot{q}' и t . Сопоставляя уравнения (26.20) и (29.3), приходим к выводу, что *общая форма уравнений Лагранжа в независимых координатах не зависит от выбора этих координат; другими словами, уравнения Лагранжа в независимых координатах ковариантны относительно точечных преобразований*. Это свойство уравнений Лагранжа является отражением того, что при любом выборе независимых переменных между обобщенными координатами, скоростями и ускорениями существует взаимосвязь.

Точечные преобразования независимых координат включают в себя ряд важных случаев; например, для свободных систем точечные преобразования могут представлять собой преобразования между различными криволинейными координатами в данной системе отсчета,

а также преобразования между координатами в различных системах отсчета, в том числе и в неинерциальных. Убедимся в этом, показав, что уравнения движения свободной точки относительно неинерциальной системы отсчета можно записать в форме уравнений Лагранжа.

Действительно, поступательная и центробежная части переносной силы инерции могут быть выражены через потенциальную энергию U^h точки в поле этих сил (см. (22.20)); сила инерции, определяемая угловым ускорением $\dot{\omega}$, является непотенциальной силой, зависящей от положения точки и времени, а кориолисова сила гироскопична. Таким образом, сумму всех сил инерции можно записать в форме

$$\mathcal{J} = -\nabla U^h - m[\dot{\omega}\mathbf{r}'] + 2m[\mathbf{v}'\boldsymbol{\omega}],$$

аналогичной силе Лоренца

$$\mathbf{F} = -e\nabla\varphi - \frac{e}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} + \frac{e}{c}[\mathbf{v}'\text{rot}\mathbf{A}].$$

Сопоставляя эти выражения, видим, что скалярным потенциалом сил инерции является функция U^h , а вектор-потенциал этих сил, равный $\mathbf{A}_{\mathcal{J}} = m[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}']$, можно найти из уравнений

$$\frac{\partial\mathbf{A}_{\mathcal{J}}}{\partial t} = m[\dot{\boldsymbol{\omega}}\mathbf{r}'], \quad \text{rot}\mathbf{A}_{\mathcal{J}} = 2m\boldsymbol{\omega}.$$

Итак, силы инерции являются обобщенно-потенциальными силами с потенциалом

$$\mathcal{W}' = -m[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}']\mathbf{v}' + U^h, \quad (29.4)$$

где

$$U^h = m\boldsymbol{\omega}_0\mathbf{r}' - \frac{m}{2}[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}']^2$$

(в случае системы N точек потенциал \mathcal{W}' будет равен сумме членов вида (29.4), каждый из которых относится к i -й точке). Из вышесказанного вытекает, что уравнения движения относительно неинерциальной системы отсчета (см. (20.1)) могут быть представлены в виде следующих уравнений Лагранжа:

$$\frac{d'}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial\dot{q}_j}\right) - \left(\frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial q_j}\right) = Q'_j \quad (j = 1, 2, \dots, s); \quad (29.5)$$

здесь $\mathcal{L}' = T' - \mathcal{W}'$, T' — кинетическая энергия относительно неинерциальной системы, \mathcal{W}' — обобщенный потенциал сил инерции, а Q'_j — обобщенные силы, соответствующие векторным силам \mathbf{F}_j , с которыми различные тела действуют на точки механической системы.

Пример 29.1. Преобразование лагранжиана свободной точки.

Свободная точка массы m движется в центрально-симметричном поле $U(r)$ с центром силы в начале координат O . Найти функции

Лагранжа этой точки относительно системы отсчета S' , начало которой O' и ось $O'z'$ совпадают соответственно с началом O и осью Oz инерциальной системы отсчета S , предполагая, что система S' вращается относительно S с постоянной угловой скоростью ω .

Если в качестве независимых координат выбрать декартовы координаты точки относительно системы S , то функция Лагранжа будет иметь вид

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}(x^2 + y^2 + z^2) - U(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}). \quad (1)$$

Координаты x , y , z связаны с координатами точки относительно S' следующими формулами:

$$\begin{aligned} x &= x' \cos \omega t - y' \sin \omega t, \\ y &= x' \sin \omega t + y' \cos \omega t, \\ z &= z'. \end{aligned} \quad (2)$$

Поэтому функция Лагранжа в новых переменных равна

$$\mathcal{L}' = T^{(2)'} + T^{(1)'} + T^{(0)'} - U', \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} T^{(2)'} &= \frac{m}{2}(\dot{x}'^2 + \dot{y}'^2 + \dot{z}'^2), & T^{(1)'} &= m\omega(x'\dot{y}' - y'\dot{x}'), \\ T^{(0)'} &= \frac{m\omega^2}{2}(x'^2 + y'^2), & U' &= U(\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}). \end{aligned}$$

Подставляя функцию \mathcal{L}' в (29.5), получим уравнения движения точки относительно системы S'

$$\begin{aligned} m(\ddot{x}' - 2\omega\dot{y}' - \omega^2 x') &= -\frac{\partial U}{\partial x'}, \\ m(\ddot{y}' + 2\omega\dot{x}' - \omega^2 y') &= -\frac{\partial U}{\partial y'}, \\ m\ddot{z}' &= -\frac{\partial U}{\partial z'}. \end{aligned} \quad (4)$$

Поскольку \mathcal{L}' явно от времени не зависит, то обобщенная энергия точки сохраняется:

$$H = \frac{m}{2}(\dot{x}'^2 + \dot{y}'^2 + \dot{z}'^2) - \frac{m\omega^2}{2}(x'^2 + y'^2) + U(\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}) = H_0.$$

Нетрудно увидеть, что в данном случае функция H является полной энергией точки относительно неинерциальной системы отсчета (см. (22.27)).

Пример 29.2. Движение точки по вращающейся окружности.

Точка массы m движется по гладкой окружности радиуса a , вращающейся с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной

оси, проходящей через некоторую точку окружности (плоскость окружности перпендикулярна оси вращения). Найти уравнение движения точки.

Выберем системы координат S и S' так, как это показано на рис. 29.1, а в качестве независимой переменной возьмем угол φ между \mathbf{r}' и осью $O'x'$. Выражая через φ проекции радиуса-вектора точки на оси системы

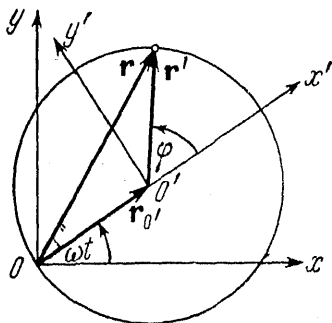


Рис. 29.1.

$$x = a \cos \omega t + a \cos(\omega t + \varphi),$$

$$y = a \sin \omega t + a \sin(\omega t + \varphi),$$

получим кинетическую энергию точки в виде

$$T = \frac{ma^2}{2} \{ \omega^2 + (\omega + \dot{\varphi})^2 + 2\omega(\omega + \dot{\varphi}) \cos \varphi \}.$$

Для данной задачи эта функция является функцией Лагранжа; она приводит к уравнению движения

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \sin \varphi = 0.$$

Отсюда следует, что относительно неинерциальной системы S' точка движется так же, как математический маятник в однородном поле тяжести движется относительно инерциальной системы S .

Записывая кинетическую энергию в виде (27.1), где

$$T^{(2)} = \frac{ma^2}{2} \dot{\varphi}^2, \quad T^{(1)} = m\omega a^2 (1 + \cos \varphi) \dot{\varphi},$$

$$T^{(0)} = ma^2 \omega^2 (1 + \cos \varphi),$$

нетрудно получить интеграл обобщенной энергии

$$\frac{ma^2}{2} \dot{\varphi}^2 - ma^2 \omega^2 \cos \varphi = H_0.$$

Здесь $\frac{ma^2}{2} \dot{\varphi}^2$ — кинетическая энергия точки относительно S' , а $-ma^2 \omega^2 \cos \varphi$ — потенциальная энергия точки в поле переносной силы инерции $-m\mathbf{w}_O$. Что касается центробежной силы инерции, равной $m\omega^2 \mathbf{r}'$, то она не совершает работы на перемещениях точки относительно S' и поэтому не дает вклада в H_0 . Таким образом, функция H является полной энергией E' точки относительно S' (см. (22.27) и (22.20)).

ЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

В этой главе изучается движение механической системы с достаточно малыми скоростями в достаточно малой пространственной области около положений равновесия точек системы. Если при этом диссипативные силы малы, то система будет совершать, как говорят, малые колебания; если же диссипативные силы значительны, то будет иметь место аperiodическое движение. Теория малых колебаний широко применяется для изучения как механических, так и немеханических систем. Например, с помощью этой теории можно описать колебания математического маятника и колебания напряжения в электрической цепи. Поэтому излагаемая ниже теория играет большую роль в различных областях физики.

§ 30. Собственные одномерные колебания

Пусть на систему с одной степенью свободы наложены *стационарные голономные связи*. Тогда кинетическая энергия как функция независимой координаты q и обобщенной скорости \dot{q} равна (см. (27.1))

$$T = \frac{1}{2} a_{11}(q) \dot{q}^2 \tag{30.1}$$

(здесь коэффициент a_{11} явно от времени не зависит, так как связи стационарны). Пусть также на систему действуют *стационарные потенциальные силы* и диссипативные силы, пропорциональные первой степени скоростей точек системы. В этом случае потенциальная энергия и диссипативная функция D системы имеют вид (см. (27.27))

$$U = U(q), \quad D = \frac{1}{2} b_{11}(q) \dot{q}^2. \tag{30.2}$$

Предположим, что наложенные связи и заданные силы таковы, что существует хотя бы одно положение равновесия системы (для обозначения положения равновесия будем использовать в дальнейшем символ q_{eq}). Согласно (26.30) обобщенная сила, прилагаемая к системе, покоящейся в положении равновесия, должна быть равна нулю (см. (26.21) и (27.26)):

$$Q = - \left(\frac{\partial U}{\partial q} + b_{11} \dot{q} \right)_{\substack{q = q_{eq} \\ \dot{q} = 0}} = 0. \tag{30.3}$$

Отсюда следует, что потенциальная энергия в положении равновесия должна обладать экстремумом, т. е.

$$\left. \frac{\partial U}{\partial q} \right|_{q=q_{\text{eq}}} = 0. \quad (30.4)$$

Это уравнение определяет положения равновесия системы.

Рассмотрим свойства достаточно малой окрестности таких положений. Пусть, например, система имеет два положения равновесия

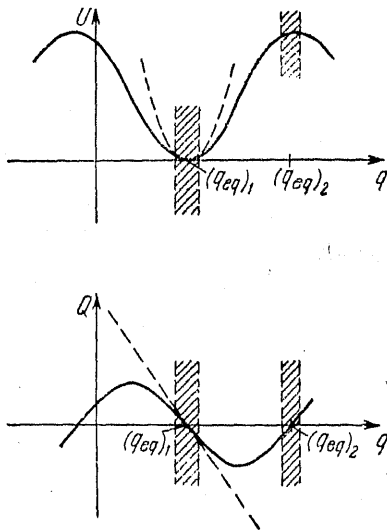


Рис. 30.1.

($q_{\text{eq}1}$ и $q_{\text{eq}2}$), причем в первом положении потенциальная энергия достигает минимума, а во втором — максимума (рис. 30.1). Тогда в окрестности положения ($q_{\text{eq}1}$) имеем $Q < 0$, если $q > (q_{\text{eq}1})$, и $Q > 0$, если $q < (q_{\text{eq}1})$ (здесь $(q_{\text{eq}1}) - \varepsilon < q < (q_{\text{eq}1}) + \varepsilon$, а ε — сколь угодно малая положительная величина). В окрестности положения ($q_{\text{eq}2}$) наоборот: $Q > 0$, если $q > (q_{\text{eq}2})$ и $Q < 0$, если $q < (q_{\text{eq}2})$ (здесь $(q_{\text{eq}2}) - \varepsilon < q < (q_{\text{eq}2}) + \varepsilon$). Следовательно, вблизи максимума потенциальной энергии возникает сила, стремящаяся отклонить систему от положения равновесия, а вблизи минимума возникает сила, стремящаяся вернуть систему в положение равновесия. В этом последнем случае система, обладающая достаточно

малым начальным отклонением $q_0 - q_{\text{eq}}$ от положения равновесия и достаточно малой начальной скоростью \dot{q}_0 , при любом $t \geq t_0$ не выйдет за пределы наперед заданной сколь угодно малой окрестности положения равновесия, причем обобщенная скорость также будет сколь угодно мала*). Положения равновесия, окрестности которых имеют описанные свойства, называются устойчивыми.

Учитывая эти свойства, кинетическую и потенциальную энергии системы, а также ее диссипативную функцию можно разложить в положении устойчивого равновесия в ряд по степеням отклонения $\xi = q - q_{\text{eq}}$ от этого положения и степеням скорости $\dot{\xi} = \dot{q}$. С точностью до величин второго порядка малости включительно

*) В справедливости этого утверждения можно убедиться с помощью закона изменения энергии (доказательство признака устойчивости системы в общем случае см. в § 31).

эти разложения имеют вид

$$T = \frac{1}{2} a_{11} (q_{\text{eq}}) \dot{\xi}^2, \quad U = \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 U}{dq^2} \right)_{\text{eq}} \xi^2, \quad D = \frac{1}{2} b_{11} (q_{\text{eq}}) \dot{\xi}^2 \quad (30.5)$$

(здесь в разложении потенциальной энергии опущена несущественная постоянная $U(q_{\text{eq}})$ и учтено (30.4)). Используя (30.5), найдем приближенное уравнение Лагранжа, справедливое в малой окрестности положения устойчивого равновесия:

$$a_{11} \ddot{\xi} + b_{11} \dot{\xi} + c_{11} \xi = 0, \quad (30.6)$$

где

$$a_{11} = a_{11}(q_{\text{eq}}), \quad b_{11} = b_{11}(q_{\text{eq}}), \quad c_{11} = \left(\frac{d^2 U}{dq^2} \right)_{\text{eq}}.$$

Уравнение (30.6) является *линейным* дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами. Если коэффициент b_{11} равен нулю или сравнительно мал, то это уравнение описывает колебания системы, называемые *линейными*. Стационарность сил и связей, рассматриваемых в данной задаче, приводит не только к постоянству коэффициентов уравнения (30.6), но и к его *однородности*; поэтому описываемые этим уравнением колебания называют *собственными* (или *свободными*).

Решение уравнения (30.6) ищется, как известно, в виде

$$\xi = C e^{\lambda t}. \quad (30.7)$$

Подставляя (30.7) в (30.6) и сокращая на общий множитель $e^{\lambda t}$, получим

$$C \Delta(\lambda) = 0, \quad (30.8)$$

где $\Delta(\lambda) = a_{11} \lambda^2 + b_{11} \lambda + c_{11}$. Поскольку интерес представляет нетривиальное решение (т. е. решение при $C \neq 0$), то уравнение (30.8) эквивалентно следующему уравнению относительно λ :

$$\Delta(\lambda) = 0. \quad (30.9)$$

Это уравнение называется *характеристическим уравнением* (или *уравнением частот*). Вводя обозначения $b_{11}/a_{11} = 2\mu$, $c_{11}/a_{11} = \omega_0^2$, запишем его в виде

$$\lambda^2 + 2\mu\lambda + \omega_0^2 = 0. \quad (30.10)$$

Значения λ , удовлетворяющие характеристическому уравнению, называются *собственными значениями*. В одномерном случае имеем два собственных значения λ :

$$\lambda_{1,2} = -\mu \pm i\omega, \quad (30.11)$$

где $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \mu^2}$. Вид $\lambda_{1,2}$ соответствует известной алгебраической теореме о том, что корни всякого многочлена с действительными

коэффициентами либо вещественны, либо попарно комплексно сопряжены. Действительно, если $\omega_0 > \mu$, то $\lambda_1 = \lambda_2^*$, а если $\mu > \omega_0$, то

$$\lambda_{1,2} = -\mu_{1,2} \quad (30.12)$$

где $\mu_{1,2} = \mu \pm \sqrt{\mu^2 - \omega_0^2}$ (случай кратных корней, когда $\omega_0 = \mu$, мы рассматривать не будем).

Наличие двух собственных значений λ соответствует двум частным независимым решениям

$$\xi^{(1)} = C^{(1)} e^{\lambda_1 t}, \quad \xi^{(2)} = C^{(2)} e^{\lambda_2 t},$$

где $\lambda_1, \lambda_2, C^{(1)}$ и $C^{(2)}$ могут быть комплексными. Если в качестве обобщенных координат выбираются действительные величины*), то в качестве общего решения уравнения (30.6) следует взять действительную часть суммы частных независимых решений $\xi^{(1)}$ и $\xi^{(2)}$:

$$\xi = \operatorname{Re} \{ C^{(1)} e^{\lambda_1 t} + C^{(2)} e^{\lambda_2 t} \}, \quad (30.13)$$

где $C^{(1)}$ и $C^{(2)}$ — постоянные интегрирования, а λ_1 и λ_2 определены характеристическим уравнением (30.10)**). Заметим, что двум комплексным постоянным соответствуют четыре действительные постоянные. Однако после отделения действительной части в (30.13) фактически остаются две произвольные постоянные, как и должно быть в общем решении дифференциального уравнения второго порядка. Например, записывая решение (30.13) в случае $\omega_0 > \mu$ в виде

$$\xi = e^{-\mu t} \operatorname{Re} \{ C^{(1)} e^{i\omega t} + C^{(2)} e^{-i\omega t} \} \quad (30.14)$$

и учитывая, что постоянные $C^{(1)}$ и $C^{(2)}$ всегда можно представить в форме

$$C^{(1)} = a^{(1)} + ib^{(1)}, \quad C^{(2)} = a^{(2)} + ib^{(2)}, \quad (30.15)$$

после отделения вещественной части найдем

$$\xi = e^{-\mu t} (C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t), \quad (30.16)$$

где C_1 и C_2 — действительные произвольные постоянные, определяемые начальными условиями. Решение (30.16) легко также представить в виде

$$\xi = a e^{-\mu t} \cos(\omega t + \alpha), \quad (30.17)$$

где постоянные a и α связаны с постоянными C_1 и C_2 соотношениями

$$a = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \quad \operatorname{tg} \alpha = -\frac{C_2}{C_1}. \quad (30.18)$$

*) Здесь и в дальнейшем мы будем использовать только вещественные независимые координаты.

**) Мнимая часть суммы $\xi^{(1)}$ и $\xi^{(2)}$ также будет общим решением уравнения (30.6) — см. Л. Э. Эльсгольц, Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление, «Наука», 1969, стр. 95, теорема 2.4.

Решение (30.17) или (30.16) описывает затухающее гармоническое колебание системы. Величина мнимой части λ называется собственной частотой колебаний ω , а величина действительной части λ называется коэффициентом затухания μ .

В случае $\mu > \omega_0$ общее решение (30.13) с учетом (30.12) принимает вид

$$\xi = C_1 e^{-\mu t} + C_2 e^{-\mu t}, \quad (30.19)$$

где C_1 и C_2 — действительные постоянные. В этом случае имеем аperiodическое движение, характеризующееся двумя коэффициентами затухания.

Из решений (30.17) и (30.19) видно, что в линейной теории собственные частоты и коэффициенты затухания не зависят от начальных условий. Отметим еще две характерные черты линейной теории малых колебаний: в решении (30.17) отсутствуют «обертонны», т. е. частоты, кратные собственной частоте; кроме того, в силу линейности уравнения (30.6) его общее решение является суммой частных решений, т. е. имеет место, как говорят, принцип суперпозиции.

Независимость собственной частоты и коэффициента затухания от начальных условий приводит к интересному свойству линейных одномерных колебаний — к свойству изохронности. Оно заключается в том, что при равной нулю начальной скорости ($\dot{\xi}_0 = 0$) время, за которое система переходит из начального положения в положение равновесия, не зависит от величины начального отклонения ξ_0 . Действительно, подставляя в (30.17) $t = 0$, получим

$$\xi_0 = a \cos \alpha, \quad \dot{\xi}_0 = -\mu a \cos \alpha - \omega a \sin \alpha,$$

откуда следует, что

$$a^2 = \xi_0^2 + \frac{(\dot{\xi}_0 + \mu \xi_0)^2}{\omega^2}, \quad \operatorname{tg} \alpha = -\frac{\dot{\xi}_0 + \mu \xi_0}{\omega \xi_0}.$$

Полагая здесь $\dot{\xi}_0 = 0$, найдем

$$\xi = \xi_0 \sqrt{1 + \frac{\mu^2}{\omega^2}} e^{-\mu t} \cos(\omega t + \alpha),$$

где $\operatorname{tg} \alpha = -\mu/\omega$. Следовательно, интервал времени, за который система переходит в положение равновесия $\xi_{\text{eq}} = 0$, равен

$$\Delta t = \frac{\pi}{2\omega} \left(1 + \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\mu}{\omega} \right).$$

Этот интервал не зависит от величины отклонения ξ_0 .

Полезно обратить внимание и на то, что в отсутствие затухания энергия системы пропорциональна произведению квадратов амплитуды и частоты колебания. В этом нетрудно убедиться, если

учесть, что при $\mu = 0$ решение (30.17) описывает незатухающее гармоническое колебание

$$\xi = a \cos(\omega_0 t + \alpha),$$

где $\omega_0^2 = \frac{c_{11}}{a_{11}}$. Подставляя эту функцию в выражения для T и U (см. (30.5)), получим

$$E = \frac{a_{11}}{2} (\dot{\xi}^2 + \omega_0^2 \xi^2) = \frac{a_{11}}{2} \omega_0^2 a^2. \quad (30.20)$$

Пример 30.1. Движение точки по эллипсу в среде с «линейным» сопротивлением вблизи положения устойчивого равновесия.

Точка массы m движется по гладкому эллипсу в среде с сопротивлением. Полуоси эллипса равны соответственно a и b , причем первая полуось направлена по вертикали (рис. 30.2). Найти собственную частоту и коэффициент затухания линейных колебаний точки.

Согласно условию точка подчинена двум стационарным связям

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1, \quad z = 0.$$

Выберем в качестве независимой переменной параметр ψ , с которым декартовы координаты точки связаны соотношениями

$$x = a \cos \psi, \quad y = b \sin \psi;$$

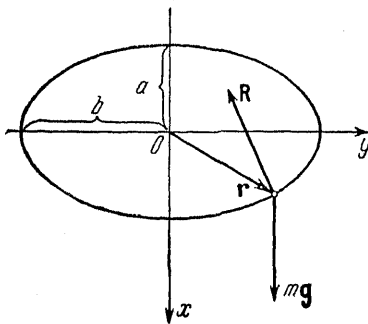


Рис. 30.2.

тогда для кинетической и потенциальной энергий точки получим выражения

$$T = \frac{m}{2} (a^2 \sin^2 \psi + b^2 \cos^2 \psi) \dot{\psi}^2,$$

$$U = -mga \cos \psi,$$

где g — напряженность поля тяжести. Предполагая, что сопротивление среды пропорционально первой степени скорости точки, выразим диссипативную функцию через ψ и $\dot{\psi}$:

$$D = \frac{k}{2} (a^2 \sin^2 \psi + b^2 \cos^2 \psi) \dot{\psi}^2.$$

Учитывая, что, согласно (30.3) и (30.4), положения равновесия определяются уравнением

$$\frac{\partial U}{\partial \psi} = mga \sin \psi = 0,$$

находим следующие две точки равновесия: $\psi_{\text{eq}} = 0$ и $\psi_{\text{eq}} = \pi$. В первом положении потенциальная энергия минимальна, так как

$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial \psi^2}\right)_{\psi_{\text{eq}}=0} > 0$, а во втором положении она обладает максимумом, так как $\left(\frac{\partial^2 U}{\partial \psi^2}\right)_{\psi_{\text{eq}}=\pi} < 0$. Следовательно, первое положение равновесия устойчиво, а второе неустойчиво. Разлагая в положении устойчивого равновесия кинетическую и потенциальную энергии, а также диссипативную функцию в ряд по степеням ψ и $\dot{\psi}$ с точностью до величины второго порядка малости включительно, получим

$$T = \frac{mb^2}{2} \dot{\psi}^2, \quad U = \frac{mga}{2} \psi^2, \quad D = \frac{kb^2}{2} \dot{\psi}^2.$$

Используя эти функции, найдем линеаризованное уравнение Лагранжа

$$mb^2 \ddot{\psi} + kb^2 \dot{\psi} + mga\psi = 0,$$

представляющее собой уравнение затухающих гармонических колебаний (или аperiодического движения). Собственная частота и коэффициент затухания колебаний точки равны

$$\omega = \left[\frac{ga}{b^2} - \left(\frac{k}{2m} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad \mu = \frac{k}{2m}.$$

В случае аperiодического движения коэффициенты затухания равны

$$\mu_{1,2} = \frac{k}{2m} \pm \left[\left(\frac{k}{2m} \right)^2 - \frac{ga}{b^2} \right]^{1/2}.$$

Пример 30.2. Колебания точки по наклонному эллипсу.

Точка массы m движется по гладкому эллипсу с полуосями, равными a и b . Плоскость эллипса вертикальна, а полуось a отклонена от вертикали на угол φ_0 . Найти собственную частоту линейных колебаний точки (сопротивлением среды пренебречь).

Выберем систему координат так, как это показано на рис. 30.3. Тогда уравнения связей совпадут с аналогичными уравнениями предыдущего примера, а за независимую переменную можно будет взять параметр ψ . В таком случае кинетическая и потенциальная энергии точки будут равны

$$T = \frac{m}{2} (a^2 \sin^2 \psi + b^2 \cos^2 \psi) \dot{\psi}^2,$$

$$U = -m\mathbf{g}\mathbf{r} = \\ = -mg(a \cos \varphi_0 \cos \psi + b \sin \varphi_0 \sin \psi),$$

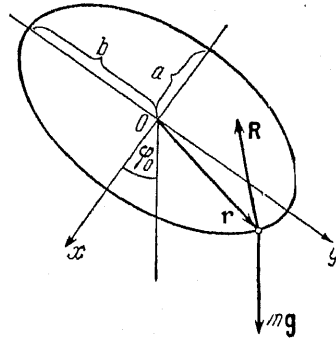


Рис. 30.3.

где \mathbf{g} — напряженность поля тяжести. Для исследования U на экстремум находим ее первую и вторую производные. Приравнявая первую производную нулю, получаем уравнение

$$\operatorname{tg} \psi_{\text{eq}} = \frac{b}{a} \operatorname{tg} \varphi_0,$$

определяющее положения равновесия ψ_{eq} . Выбирая положение устойчивого равновесия и учитывая, что вблизи этого положения

$$\sin \psi \approx \sin \psi_{\text{eq}} + \cos \psi_{\text{eq}} \cdot \xi,$$

$$\cos \psi \approx \cos \psi_{\text{eq}} - \sin \psi_{\text{eq}} \cdot \xi$$

(здесь $\xi = \psi - \psi_{\text{eq}}$), для T и U с точностью до величин второго порядка малости получим выражения

$$T = \frac{m}{2} (a^2 \sin^2 \psi_{\text{eq}} + b^2 \cos^2 \psi_{\text{eq}}) \dot{\xi}^2, \quad U = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \psi^2} \right)_{\text{eq}} \xi^2.$$

Отсюда находим уравнение линейных колебаний

$$m (a^2 \sin^2 \psi_{\text{eq}} + b^2 \cos^2 \psi_{\text{eq}}) \ddot{\xi} + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \psi^2} \right)_{\text{eq}} \xi = 0$$

и квадрат собственной частоты

$$\omega^2 = \frac{g}{a^2 b^2} (a^2 \cos^2 \varphi_0 + b^2 \sin^2 \varphi_0)^{3/2}.$$

Пример 30.3. Колебания точки, находящейся на горизонтальном стержне, под действием пружины.

Точка массы m , движущаяся по гладкому горизонтальному стержню, соединена пружиной с неподвижной точкой O , находящейся на расстоянии l от стержня. Найти частоту линейных колебаний точки (жесткость и длина пружины в ненапряженном состоянии соответственно равны κ и a , см. (2.8); пружина навита на гладкий стержень, шарнирно закрепленный в точке O).

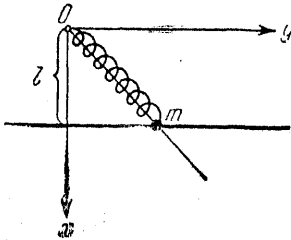


Рис. 30.4.

Выберем систему координат так, как это показано на рис. 30.4, тогда для кинетической и потенциальной энергий точки получим выражения

$$T = \frac{m}{2} \dot{y}^2, \quad U = \frac{\kappa}{2} (\sqrt{l^2 + y^2} - a)^2.$$

Чтобы определить положение устойчивого равновесия, рассмотрим первую и вторую производные от U :

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \kappa (\sqrt{l^2 + y^2} - a) \frac{y}{\sqrt{l^2 + y^2}},$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{\kappa}{\sqrt{l^2 + y^2}} \left\{ \frac{y^2}{\sqrt{l^2 + y^2}} + (\sqrt{l^2 + y^2} - a) \frac{l^2}{l^2 + y^2} \right\}.$$

Приравнявая нулю $\frac{\partial U}{\partial y}$, получим три положения равновесия:

$$y_{\text{eq}} = 0, \quad y_{\text{eq}} = \pm \sqrt{a^2 - l^2} \quad (a > l).$$

Первое положение будет устойчивым, если

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)_{y_{\text{eq}}=0} = \frac{x}{l}(l-a) > 0,$$

т. е. будет устойчивым, если $l > a$ (пружина в положении равновесия растянута). Два других положения равновесия существуют, если $a > l$, причем эти положения устойчивы, поскольку

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)_{y_{\text{eq}} = \pm \sqrt{a^2 - l^2}} = \frac{x}{a^2}(a^2 - l^2) > 0.$$

Разлагая U в положении устойчивого равновесия $y_{\text{eq}} = 0$, получим

$$U = \frac{x}{2}(l-a)^2 + \frac{x}{2}\left(1 - \frac{a}{l}\right)y^2 \quad (l > a),$$

а в двух других положениях будем иметь

$$U = \frac{x}{2}\left(1 - \frac{l^2}{a^2}\right)\xi^2 \quad (a > l),$$

где $\xi = y \mp \sqrt{a^2 - l^2}$.

Используя эти выражения для U , найдем квадраты частот линейных колебаний точки в окрестностях указанных выше положений:

$$\omega^2 = \frac{x}{m}\left(1 - \frac{a}{l}\right) \quad (l > a),$$

$$\omega^2 = \frac{x}{m}\left(1 - \frac{l^2}{a^2}\right) \quad (a > l).$$

Как видно, при различных соотношениях a и l возможны различные положения устойчивого равновесия и соответственно различные частоты колебаний.

§ 31. Положение устойчивого равновесия

Теория собственных линейных колебаний системы с s степенями свободы во многом аналогична теории одномерных колебаний. В этой теории предполагается, что *связи, наложенные на систему, идеальны, голономны и стационарны, а заданные силы явно от времени не зависят*; кроме того, предполагается, что *система обладает по крайней мере одним положением устойчивого равновесия*.

Существо этой теории сводится к линеаризации уравнений Лагранжа в окрестности положения устойчивого равновесия. Поэтому исследование собственных колебаний нужно начинать с отыскания таких положений. Прежде всего напомним, что необходимым и достаточным условием равновесия механической системы с голономными идеальными связями является обращение в нуль всех обобщенных сил в некотором положении — положении равновесия $(q_j)_{\text{eq}}$ ($j = 1, 2, \dots$

..., s) (см. (26.30)). Приведем это условие в более общем случае, когда обобщенные силы зависят не только от координат q , но и от скоростей \dot{q} :

$$Q_j|_{q_1=(q_1)_{\text{eq}}, \dots, q_s=(q_s)_{\text{eq}}; \dot{q}_1=\dots=\dot{q}_s=0} = 0 \quad (j=1, 2, \dots, s). \quad (31.1)$$

Таким образом, состояние равновесия характеризуется $2s$ величинами: $q_j=(q_j)_{\text{eq}}$ и $\dot{q}_j=0$ ($j=1, 2, \dots, s$). Это состояние может быть представлено в виде точки $2s$ -мерного пространства обобщенных координат и скоростей.

Определим положение устойчивого равновесия. Пусть для сколь угодно малых наперед заданных положительных величин ε_q и $\varepsilon_{\dot{q}}$ можно найти такие положительные величины δ_q и $\delta_{\dot{q}}$, что для любого момента времени $t \geq t_0$ отклонения $q - (q)_{\text{eq}}$ от положения равновесия и скорости \dot{q} будут удовлетворять неравенствам

$$|q_j - (q_j)_{\text{eq}}| < \varepsilon_{q_j}, \quad |\dot{q}_j| < \varepsilon_{\dot{q}_j} \quad (j=1, 2, \dots, s), \quad (31.2)$$

если только отклонения и скорости в начальный момент времени удовлетворяют неравенствам

$$|q_{j0} - (q_j)_{\text{eq}}| < \delta_{q_j}, \quad |\dot{q}_{j0}| < \delta_{\dot{q}_j} \quad (j=1, 2, \dots, s) \quad (31.3)$$

(величины δ_q и $\delta_{\dot{q}}$, конечно, зависят от наперед заданных величин ε_q и $\varepsilon_{\dot{q}}$)*. Тогда положение равновесия $(q)_{\text{eq}}$ называется устойчивым. (Для краткости окрестность состояния равновесия в $2s$ -мерном пространстве, определяемую условием (31.2), назовем ε -окрестностью «точки» q_{eq} , а окрестность, определяемую (31.3), δ -окрестностью этой «точки».)

Достаточный признак устойчивости положения равновесия механической системы относительно инерциальной системы отсчета устанавливается следующей теоремой. Пусть идеальные голономные связи, наложенные на систему, стационарны, заданные силы явно от времени не зависят, а потенциальная энергия системы в некотором положении обладает изолированным минимумом; тогда это положение будет положением устойчивого равновесия. Минимум потенциальной энергии U называется изолированным, если в некоторой окрестности положения q_{eq} , в котором энергия минимальна, нет других экстремальных «точек» функции U . Иначе говоря, минимум будет изолированным, если

$$|q_j - (q_j)_{\text{eq}}| < \Delta_j \quad (j=1, 2, \dots, s)$$

*) Здесь символом ε_q обозначена совокупность величин $\varepsilon_{q_1}, \varepsilon_{q_2}, \dots, \varepsilon_{q_s}$; символом $\varepsilon_{\dot{q}}$ — совокупность $\varepsilon_{\dot{q}_1}, \varepsilon_{\dot{q}_2}, \dots, \varepsilon_{\dot{q}_s}$ и т. д. В дальнейшем везде совокупность s величин будем обозначать соответствующим символом без индекса j .

(положительные величины Δ определяют окрестность минимума), потенциальная энергия удовлетворяет условию

$$U(q_1, \dots, q_s) \geq U((q_1)_{\text{eq}}, \dots, (q_s)_{\text{eq}}),$$

а равенство имеет место только в том случае, когда $q_j = (q_j)_{\text{eq}}$ ($j = 1, 2, \dots, s$).

Сначала докажем сформулированную теорему, предполагая, что диссипативные силы отсутствуют, т. е. предполагая, что полная энергия системы сохраняется ($E = E_0$). Положение q_{eq} в котором потенциальная энергия системы минимальна, является положением равновесия. В самом деле, обобщенные силы, приложенные к системе, покоящейся в этом положении, равны нулю (см. (27.22) и (31.1)):

$$Q_j = \left\{ -\frac{\partial U}{\partial q_j} + \sum_{k=1}^s \gamma_{jk} \dot{q}_k \right\} \Big|_{q=q_{\text{eq}}, \dot{q}=0} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, s).$$

Так как потенциальная энергия определяется с точностью до постоянной, то, полагая $U(q_{1\text{eq}}, \dots, q_{s\text{eq}}) = 0$, из условия теоремы получим

$$U(q_1, \dots, q_s) \geq 0, \quad (31.4)$$

если $|q_j - q_{j\text{eq}}| < \Delta_j$ ($j = 1, 2, \dots, s$) (здесь равенство имеет место только в том случае, если все $q_j = q_{j\text{eq}}$). Из условия стационарности связей вытекает, что кинетическая энергия является положительно определенной формой обобщенных скоростей (см. (27.1) и (27.2)), т. е.

$$T = T^{(2)} \geq 0, \quad (31.5)$$

причем T равняется нулю только в том случае, если все $\dot{q}_j = 0$. Из (31.4) и (31.5) следует, что в Δ -окрестности

$$E = T + U \geq 0, \quad (31.6)$$

а равенство имеет место только в том случае, когда все отклонения от положения равновесия и скорости равны нулю, т. е. $q_j = q_{j\text{eq}}$ и $\dot{q}_j = 0$ ($j = 1, 2, \dots, s$). Итак, из условия теоремы (в отсутствие диссипативных сил) вытекает, что полная энергия системы при ее перемещениях сохраняется, а как функция обобщенных координат и скоростей имеет изолированный минимум в $2s$ -мерной точке $q = q_{\text{eq}}$, $\dot{q} = 0$.

Зададим некоторую ϵ -окрестность состояния равновесия, т. е. зададим сколь угодно малые величины ϵ_q и $\epsilon_{\dot{q}}$:

$$\Delta_j > \epsilon_{q_j} > 0, \quad \epsilon_{\dot{q}_j} > 0 \quad (j = 1, 2, \dots, s). \quad (31.7)$$

Точки, лежащие на границе этой окрестности, определяются такими значениями отклонений и скоростей, когда по крайней мере одно отклонение $q_j - (q_j)_{\text{eq}}$ равняется ϵ_{q_j} или хотя бы одна скорость \dot{q}_j

равна $\varepsilon_{\dot{q}_j}$, а остальные отклонения и скорости удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} |q_l - (q_l)_{\text{eq}}| &\leq \varepsilon_{q_l} \\ |\dot{q}_l| &\leq \varepsilon_{\dot{q}_l} \quad (l \neq j). \end{aligned}$$

Полную энергию как функцию «точки», лежащей на указанной границе, обозначим символом E_s . В силу непрерывности эта функция имеет как максимальное значение $\max E_s$, так и минимальное значение $\min E_s$ *).

Теперь выберем такую δ -окрестность состояния равновесия, чтобы выполнялось неравенство

$$\max E_\delta < \min E_s \quad (31.8)$$

где E_δ — значения полной энергии на границе δ -окрестности. Такой выбор возможен, так как непрерывная функция E обращается в нуль только при $q_j = (q_j)_{\text{eq}}$, $\dot{q}_j = 0$ ($j = 1, 2, \dots, s$), а другие экстремальные «точки» в рассматриваемой Δ -окрестности отсутствуют. Наконец, подчиним начальные условия неравенствам (31.3), где совокупность величин δ_q и $\delta_{\dot{q}}$ удовлетворяет требованию (31.8). Тогда $E_0 < \min E_s$ (такой выбор начальных условий возможен в силу тех же причин). Таким образом, из вышеизложенного следует, что для заданной сколь угодно малой ε -окрестности положения q_{eq} всегда может быть найдена такая δ -окрестность и такие начальные условия, чтобы

$$E = E_0 < \max E_\delta < \min E_s \quad (31.9)$$

Следовательно, в любой момент времени $E < \min E_s$. Это означает, что ни одна из обобщенных координат и скоростей системы с течением времени не достигнет границ ε -окрестности, так как на границе $E = \min E_s$, что и доказывает теорему в отсутствие диссипативных сил.

Для иллюстрации рассмотрим доказательство теоремы на частном примере циклоидального маятника (см. пример 26.1). Энергия такого маятника равна

$$E = \frac{m}{2} (\dot{s}^2 + \omega^2 s^2) = E_0,$$

*) В. А. Ильин, Э. Г. Позняк, Основы математического анализа, «Наука», 1965, стр. 246—247.

где $\omega^2 = g/4R$, а s — длина пути точки, отсчитываемая от положения равновесия $s = 0$. Зададимся ϵ -окрестностью состояния равновесия, т. е. возьмем сколь угодно малые величины ϵ , удовлетворяющие неравенствам $4R > \epsilon_s > 0$, $\epsilon_s > 0$ (для определенности будем считать, что $\epsilon_s^2 < \omega^2 \epsilon_s^2$). Поскольку движение в данном случае одномерное, постольку состояние маятника можно изобразить на плоскости, откладывая по одной оси координату s , а по другой — обобщенную скорость \dot{s} . Тогда границей ϵ -окрестности будет граница прямоугольника (рис. 31.1). В точках 1 этой границы функция E_ϵ достигает своего максимального значения

$$\max E_\epsilon = \frac{m}{2} (\epsilon_s^2 + \omega^2 \epsilon_s^2).$$

В точках 2 E_ϵ принимает значение $(m/2)\omega^2 \epsilon_s^2$, а в точках 3 E_ϵ имеет минимальное значение

$$\min E_\epsilon = \frac{m}{2} \epsilon_s^2.$$

Аналогично максимальное значение энергии на границе δ -окрестности равно

$$\max E_\delta = \frac{m}{2} (\delta_s^2 + \omega^2 \delta_s^2).$$

Подберем δ_s и δ_s так, чтобы выполнялось неравенство (31.8):

$$\delta_s^2 + \omega^2 \delta_s^2 < \epsilon_s^2.$$

Очевидно, что этот подбор δ -окрестности можно осуществить при любом сколь угодно малом ϵ_s . При этом «траектория» точки (эллипс) в плоскости (s, \dot{s}) будет лежать внутри эллипса, соответствующего $\max E_\delta$, если в начальный момент времени точка находится внутри δ -окрестности.

Доказательство достаточного признака устойчивости положения равновесия было проведено без учета диссипативных сил. Если эти силы присутствуют, то полная энергия системы убывает. Следовательно, повторяя доказательство, вместо (31.9) получим

$$E < E_0 < \max E_\delta < \min E_\epsilon, \quad (31.10)$$

откуда и вытекает справедливость теоремы.

Можно также сформулировать достаточный признак устойчивости относительно неинерциальной системы отсчета. В этом случае к условию теоремы нужно добавить *требования постоянства \mathbf{w}_0 — ускорения начала неинерциальной системы и ω — ее угловой скорости*. Такое заключение вытекает из закона изменения энергии относительно неинерциальной системы отсчета, который в рассматриваемом случае по форме совпадает с уравнением (22.24), полученным для свободных систем (совпадение имеет место, поскольку мощность реакций идеальных стационарных связей равна нулю).

Заметим, что наряду с признаком устойчивости положения равновесия большое значение имеют признаки неустойчивости; они в ряде важных случаев устанавливаются теоремами Ляпунова и Четаева *).

Пример 31.1. Положение устойчивого равновесия материальной точки, подвешенной на пружине.

Точка массы m подвешена на пружине жесткости κ и длины a в ненапряженном состоянии. Определим положение устойчивого равновесия точки (напряженность поля тяготения равна g).

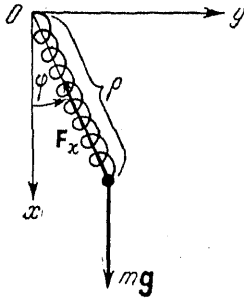


Рис. 31.2.

Выберем систему координат так, как это показано на рис. 31.2, а в качестве независимых координат возьмем полярные координаты ρ и φ . Тогда потенциальная энергия, равная сумме энергии точки в поле тяготения и энергии упругой деформации пружины, имеет вид

$$U = -m g \rho \cos \varphi + \frac{\kappa}{2} (\rho - a)^2.$$

Для отыскания положения устойчивого равновесия найдем первые и вторые производные от U по ρ и φ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \rho} &= -m g \cos \varphi + \kappa (\rho - a), & \frac{\partial U}{\partial \varphi} &= m g \rho \sin \varphi, \\ \frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2} &= \kappa, & \frac{\partial^2 U}{\partial \rho \partial \varphi} &= m g \sin \varphi, & \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} &= m g \rho \cos \varphi. \end{aligned}$$

Приравняв первые производные нулю, определим положения равновесия. Одно из них, а именно положение

$$\rho_{\text{eq}} = a + \frac{m g}{\kappa}, \quad \varphi_{\text{eq}} = 0,$$

является устойчивым. Действительно, в этом положении вторые производные равны

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2} \right)_{\text{eq}} = \kappa, \quad \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \rho \partial \varphi} \right)_{\text{eq}} = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} \right)_{\text{eq}} = m g \rho_{\text{eq}}$$

и удовлетворяют неравенствам

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2} \right)_{\text{eq}} > 0, \quad \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2} \right)_{\text{eq}} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} \right)_{\text{eq}} - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \rho \partial \varphi} \right)_{\text{eq}}^2 > 0,$$

*) См. Н. Г. Четаев, Устойчивость движения. Работы по аналитической механике, изд-во АН СССР, 1962; см. также [23], гл. V.

что свидетельствует о наличии изолированного минимума потенциальной энергии *). Другое положение равновесия

$$\rho_{\text{eq}} = a - \frac{mg}{\kappa}, \quad \varphi_{\text{eq}} = \pi,$$

как нетрудно убедиться, является неустойчивым.

Пример 31.2. Колебания точки на вращающемся стержне.

Точка массы m движется по гладкому тонкому стержню, вращающемуся в горизонтальной плоскости с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси, проходящей через неподвижную точку стержня O . Ось и материальная точка соединены между собой пружиной жесткости κ и длины a в ненапряженном состоянии (см. (2.8)). Определить собственную частоту колебаний точки около положения устойчивого равновесия.

Напишем обобщенный потенциал в неинерциальной системе отсчета $Ox'y'$ (см. рис. 2.3, v и формулу (29.4)). В рассматриваемом случае векторы $[\omega \mathbf{r}']$ и \mathbf{v}' перпендикулярны, следовательно, обобщенный потенциал сводится к потенциальной энергии в поле упругой силы и центробежной силы инерции:

$$U' = \frac{\kappa}{2} (x' - a)^2 - \frac{m}{2} \omega^2 x'^2.$$

Отсюда, приравнявая первую производную от U' по x' нулю, получим положение равновесия

$$x'_{\text{eq}} = \frac{\kappa a}{\kappa - m\omega^2}.$$

Это положение существует и будет устойчивым, если угловая скорость ω удовлетворяет условию: $\omega^2 < \kappa/m$. Выражая U' через отклонение $\xi = x' - x'_{\text{eq}}$ и отбрасывая несущественную постоянную, получим

$$U' = \frac{1}{2} (\kappa - m\omega^2) \xi^2.$$

Используя это выражение и выражение кинетической энергии относительно $Ox'y'$

$$T' = \frac{m}{2} \dot{\xi}^2,$$

найдем уравнение Лагранжа (см. (29.5))

$$m\ddot{\xi} + (\kappa - m\omega^2) \xi = 0.$$

*) См. В. А. Ильин, Э. Г. Позняк, Основы математического анализа, «Наука», 1965, гл. 14, § 6, п. 8.

При $\omega^2 < x/m$ решение этого уравнения описывает гармоническое колебание точки с частотой, равной

$$\left(\frac{x}{m} - \omega^2\right)^{1/2}.$$

Пример 31.3. Колебания точки на вращающемся эллипсе.

Точка массы m движется по гладкому эллипсу с полуосями a и b . Эллипс вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси, совпадающей с одной из его полуосей (рис. 31.3).

Найти частоту линейных колебаний точки.

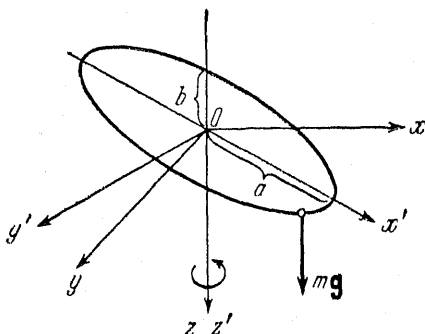


Рис. 31.3.

Выберем инерциальную систему $Oxyz$ и неинерциальную систему $Ox'y'z'$ так, как это показано на рис. 31.3. В качестве независимой переменной используем безразмерный параметр ψ , определяемый функциями

$$x' = a \sin \psi, \quad z = b \cos \psi.$$

Тогда кинетическая энергия относительно системы S' равна

$$T' = \frac{m}{2} (a^2 \cos^2 \psi + b^2 \sin^2 \psi) \dot{\psi}^2,$$

а обобщенный потенциал сводится к потенциальной энергии точки в поле тяжести и в поле центробежной силы инерции:

$$U' = -mgb \cos \psi - \frac{m}{2} \omega^2 a^2 \sin^2 \psi.$$

Приравняв нулю первую производную от U' по ψ , найдем положения равновесия

$$\psi_{\text{eq}} = 0, \pi \quad \text{и} \quad \cos \psi_{\text{eq}} = \frac{gb}{\omega^2 a^2} \quad (gb \leq \omega^2 a^2).$$

Рассматривая в этих точках значения второй производной от U' по ψ , получим, что положение $\psi_{\text{eq}} = 0$ устойчиво, если $gb > \omega^2 a^2$ (в противном случае оно неустойчиво); положения, определяемые равенством $\cos \psi_{\text{eq}} = \frac{gb}{\omega^2 a^2}$, устойчивы, если $gb < \omega^2 a^2$, если же $gb > \omega^2 a^2$, то этих положений равновесия не существует; что касается положения $\psi_{\text{eq}} = \pi$, то оно в любом случае неустойчиво.

Предполагая, что $gb > \omega^2 a^2$, разложим T' и U' в положении устойчивого равновесия $\psi_{\text{eq}} = 0$. В результате с точностью до членов второго порядка малости включительно получим

$$T' = \frac{m}{2} a^2 \dot{\psi}^2, \quad U' = \frac{m}{2} (gb - \omega^2 a^2) \psi^2.$$

Отсюда, используя (29.5) и (30.5)—(30.11), найдем частоту ω_0 колебаний около положения $\psi_{\text{eq}} = 0$:

$$\omega_0 = \left(\frac{gb}{a^2} - \omega^2 \right)^{1/2} \quad (gb > \omega^2 a^2).$$

Если же $gb < \omega^2 a^2$, то T' и U' следует разлагать в точках, определяемых равенством $\cos \psi_{\text{eq}} = gb/\omega^2 a^2$. Тогда получим

$$T' = \frac{m}{2} (a^2 \cos^2 \psi_{\text{eq}} + b^2 \sin^2 \psi_{\text{eq}}) \xi^2,$$

$$U' = \frac{m\omega^2 a^2}{2} \left[1 - \left(\frac{gb}{\omega^2 a^2} \right)^2 \right] \xi^2,$$

где $\xi = \psi - \psi_{\text{eq}}$. Частота колебаний около рассматриваемого положения равновесия будет равна

$$\omega_0 = \omega \frac{a}{b} \left[\frac{1 - \cos^2 \psi_{\text{eq}}}{1 + \frac{a^2 - b^2}{b^2} \cos^2 \psi_{\text{eq}}} \right]^{1/2} \quad (gb < \omega^2 a^2)$$

(здесь $\cos \psi_{\text{eq}}$ определен выше).

§ 32. Собственные и главные колебания системы под действием потенциальных сил

Рассмотрим несвободную систему с идеальными голономными стационарными связями и s степенями свободы, предполагая, что заданные силы, действующие на точки системы, потенциальны и стационарны, а у системы есть хотя бы одно положение устойчивого равновесия. Покажем, что в достаточно малой окрестности такого положения *каждая независимая координата системы как функция времени может быть представлена в виде суммы гармонических функций, изменяющихся во времени с частотами, которые определяются свойствами системы, связей и заданных сил.*

В силу стационарности связей

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j, k=1}^s a_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k \quad (32.1)$$

где $a_{jk} = a_{kj}$ (см. (27.1)—(27.3)), а в силу стационарности заданных сил потенциальная энергия системы будет функцией лишь независимых координат.

Разложим кинетическую энергию в положении устойчивого равновесия в ряд по степеням координат $\xi_j = q_j - (q_j)_{\text{eq}}$ и степеням обобщенных скоростей $\dot{\xi}_j = \dot{q}_j$ ($j = 1, 2, \dots, s$). Тогда с точностью до

членов второго порядка малости включительно из (32.1) получим

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j, k=1}^s (a_{jk})_{\text{eq}} \dot{\xi}_j \dot{\xi}_k, \quad (32.2)$$

где $(a_{jk})_{\text{eq}} = a_{jk} (q_1 \text{ eq}, \dots, q_s \text{ eq})$.

Предполагая, что в положении устойчивого равновесия потенциальная энергия U обладает изолированным минимумом и разлагая ее в том же положении по степеням отклонений ξ , найдем

$$U = \frac{1}{2} \sum_{j, k=1}^s (c_{jk})_{\text{eq}} \xi_j \xi_k, \quad (32.3)$$

где $c_{jk} = \frac{\partial^2 U}{\partial \xi_j \partial \xi_k} = c_{kj}$ (здесь опущена несущественная постоянная).

Разложение потенциальной энергии может начаться с членов третьего или более высокого порядка малости, что приведет к нелинейным уравнениям. В связи с этим допустим, что не все коэффициенты c_{jk} в разложении (32.3) равны нулю.

Подставляя (32.2) и (32.3) в (27.23), придем к уравнениям

$$\sum_{k=1}^s (a_{jk} \ddot{\xi}_k + c_{jk} \xi_k) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, s) \quad (32.4)$$

(здесь знак равновесия при коэффициентах опущен для сокращения записи, однако всегда следует помнить, что коэффициенты в (32.4) берутся в положении равновесия, т. е. являются постоянными величинами). Итак, закон движения системы с s степенями свободы около положения устойчивого равновесия определяется линейными однородными уравнениями с постоянными действительными и симметричными коэффициентами.

Решение этих уравнений ищем в виде

$$\xi_k = C_k e^{i\lambda t} \quad (k = 1, 2, \dots, s). \quad (32.5)$$

Подставляя (32.5) в (32.4), получим уравнения для «амплитуд» C_k :

$$\sum_{k=1}^s (a_{jk} \lambda^2 + c_{jk}) C_k = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, s). \quad (32.6)$$

Эта система однородных уравнений имеет нетривиальное решение, если ее детерминант равняется нулю:

$$\det (a_{jk} \lambda^2 + c_{jk}) = 0 \quad (32.7)$$

(для краткости детерминант системы (32.6) будем обозначать символом $\Delta(\lambda)$ — см. (30.9)).

Характеристическое уравнение (32.7) представляет собой алгебраическое уравнение $2s$ -й степени относительно λ и, следовательно, имеет $2s$ корней, т. е. $2s$ *собственных значений* λ_α ($\alpha = 1, 2, \dots, 2s$) *). Система (32.6) после подстановки в нее данного корня λ_α определяет соотношение между «амплитудами» C :

$$\sum_{k=1}^s (a_{jk}\lambda_\alpha^2 + c_{jk})C_k = 0 \quad (j=1, \dots, s). \quad (32.8)$$

Полученные отсюда амплитуды будем обозначать C_k^α и называть «амплитудами, принадлежащими собственному значению λ_α ».

Общее решение системы дифференциальных уравнений (32.4) можно записать в виде действительной (или мнимой) части суммы частных решений, т. е. в виде

$$\xi_k = \operatorname{Re} \sum_{\alpha=1}^{2s} C_k^\alpha e^{\lambda_\alpha t} \quad (k=1, \dots, s), \quad (32.9)$$

где амплитуды C_k^α (а точнее их отношения) определяются системой (32.8), а корни λ_α — уравнением (32.7).

Из (32.9) видно, что существенным шагом в решении уравнений (32.4) является определение собственных значений λ . Поэтому большое значение имеют общие заключения о корнях характеристического уравнения. Например, можно утверждать, что в рассматриваемом случае консервативных систем действительные части всех λ должны равняться нулю, так как иначе q и \dot{q} имели бы экспоненциальные возрастающие и убывающие со временем множители, которые при произвольных условиях привели бы к нарушению закона сохранения энергии **). Таким образом, *если на систему действуют только потенциальные стационарные силы, то все собственные значения λ будут чисто мнимыми.*

$$\lambda_\alpha^+ = +i\omega_\alpha, \quad \lambda_\alpha^- = -i\omega_\alpha \quad (\alpha=1, 2, \dots, s); \quad (32.10)$$

здесь ω_α — действительные величины, называемые собственными частотами системы, а собственные значения λ перенумерованы не от 1 до $2s$, а от 1 до s , поскольку каждому номеру соответствует одна пара комплексно сопряженных значений корня. Тогда (32.9) можно записать в виде

$$\xi_k = \operatorname{Re} \sum_{\alpha=1}^s \{ (C_k^\alpha)^+ e^{+i\omega_\alpha t} + (C_k^\alpha)^- e^{-i\omega_\alpha t} \}. \quad (32.11)$$

*) Далее предполагается, что характеристическое уравнение не имеет кратных корней.

***) Строгое доказательство отмеченного свойства корней характеристического уравнения см. в приложении 32.1.

Значения амплитуд C_k^α , соответствующих λ_α , определяются с помощью однородной системы (32.8). Поскольку интересующее нас решение нетривиально, среди амплитуд C_k^α должна существовать хотя бы одна амплитуда, отличная от нуля. Предположим, что от нуля отлична амплитуда C_s^α (*). Тогда, перенеся в правую часть системы (32.8) слагаемые $(a_{js}\lambda_\alpha^2 + c_{js})C_s^\alpha$, согласно правилу решения линейных уравнений получим (**)

$$C_k^\alpha = \frac{\Delta_k^\alpha}{\Delta_s^\alpha} C_s^\alpha \quad (k = 1, 2, \dots, s-1), \quad (32.12)$$

где Δ_k^α — алгебраическое дополнение к элементу k -го столбца любой строки характеристического детерминанта, взятого при значении $\lambda = \lambda_\alpha$. Так как амплитуда C_s^α не определена, то, вводя обозначение $C_\alpha = C_s^\alpha / \Delta_s^\alpha$, все амплитуды можно представить в виде

$$C_k^\alpha = C_\alpha \Delta_k^\alpha \quad (k = 1, 2, \dots, s), \quad (32.13)$$

где C_α — произвольная постоянная. Подставляя (32.13) в (32.11), получим

$$\xi_k = \operatorname{Re} \sum_{\alpha=1}^s \{ C_\alpha^+ \Delta_k^+ (+i\omega_\alpha) e^{+i\omega_\alpha t} + C_\alpha^- \Delta_k^- (-i\omega_\alpha) e^{-i\omega_\alpha t} \} \quad (32.14)$$

$(k = 1, 2, \dots, s).$

Ввиду потенциальности заданных сил характеристическое уравнение (32.7) и все дополнения характеристического детерминанта содержат только степени квадрата λ . Поэтому в рассматриваемом случае дополнения будут действительными величинами, которые удовлетворяют соотношениям (см. (32.10))

$$\Delta_k(+i\omega_\alpha) = \Delta_k(-i\omega_\alpha) \quad \left(\begin{array}{l} k = 1, 2, \dots, s \\ \alpha = 1, 2, \dots, s \end{array} \right). \quad (32.15)$$

Используя эти соотношения, а также учитывая, что

$$\operatorname{Re} \{ C_\alpha^+ e^{+i\omega_\alpha t} + C_\alpha^- e^{-i\omega_\alpha t} \} = a_\alpha \cos(\omega_\alpha t + \beta_\alpha) \quad (32.16)$$

(здесь a_α и β_α — действительные произвольные постоянные), найдем

*) Обобщенные координаты всегда можно перенумеровать так, чтобы от нуля отличалась амплитуда, соответствующая координате ξ_s .

***) Здесь предполагается, что ранг матрицы, составленной из коэффициентов системы (32.8), равен $s-1$; см. А. Г. Курош, Курс высшей алгебры, «Наука», 1968, гл. 2, § 12.

общее решение системы дифференциальных уравнений (32.4) в виде

$$\xi_k = \sum_{\alpha=1}^s \Delta_k(i\omega_\alpha) \theta_\alpha \quad (k=1, 2, \dots, s), \quad (32.17)$$

где $\theta_\alpha = a_\alpha \cos(\omega_\alpha t + \beta_\alpha)$.

Итак, собственные колебания системы, описываемые координатами ξ_k ($k=1, \dots, s$), представляют собой наложение гармонических колебаний с собственными частотами системы. Функции θ являются строго периодическими функциями времени, а ξ в общем случае не являются таковыми (например, при несоизмеримости собственных частот координата ξ_k никогда не примет начального значения ξ_{k0}). Подчеркнем также, что нельзя отождествлять какую-либо собственную частоту ω_α с частотой колебаний какой-либо определенной точки системы. Такое представление верно лишь в предельном случае невзаимодействующих точек системы, если каждая из них обладает одной степенью свободы. Вообще говоря, *собственные частоты характеризуют движение так, чтобы все координаты гармонически изменялись со временем с одной из собственных частот системы*. Действительно, в силу произвольности амплитуд a начальные условия можно выбрать так, чтобы все амплитуды, кроме одной, равнялись нулю. Например, пусть $a_{\alpha'} \neq 0$, тогда из (32.17) получим частное решение

$$\xi_k = \Delta_k(i\omega_{\alpha'}) a_{\alpha'} \cos(\omega_{\alpha'} t + \beta_{\alpha'}) \quad (k=1, \dots, s). \quad (32.18)$$

Как видно, в этом случае все координаты гармонически изменяются с одной собственной частотой $\omega_{\alpha'}$, в фазе или противофазе в зависимости от знака $\Delta_k(i\omega_{\alpha'})$. Во многих простых случаях такое выделение гармонических колебаний из собственных колебаний системы помогает сразу определить соответствующую частоту.

Из общего решения (32.17) следует, что в качестве независимых координат можно взять величины θ_α ($\alpha=1, \dots, s$). Действительно, это решение определяет линейное преобразование от координат θ к координатам ξ . Координаты θ называются главными (или нормальными) координатами. Соответственно гармонические колебания с собственными частотами системы называются главными (или нормальными) колебаниями. Очевидно, что координаты θ удовлетворяют уравнениям

$$\ddot{\theta}_\alpha + \omega_\alpha^2 \theta_\alpha = 0 \quad (\alpha=1, \dots, s). \quad (32.19)$$

Эта система представляет собой уравнения Лагранжа в главных координатах*). Каждое из этих уравнений является уравнением отно-

*) Строгое преобразование от уравнений движения в произвольных независимых координатах ξ к уравнениям движения в главных координатах θ см. в приложении 32.2.

сительно лишь одной главной координаты. Поэтому системе (32.19) соответствует функция Лагранжа, равная сумме функций \mathcal{L}_α , каждая из которых зависит только от соответствующей главной координаты θ_α и ее производной $\dot{\theta}_\alpha$, т. е. лагранжиан системы в главных координатах должен иметь вид

$$\mathcal{L} = \sum_{\alpha=1}^s \mathcal{L}_\alpha \quad (32.20)$$

где

$$\mathcal{L}_\alpha = T_\alpha - U_\alpha, \quad T_\alpha = \frac{a_\alpha}{2} \dot{\theta}_\alpha^2, \quad U_\alpha = \frac{c_\alpha}{2} \theta_\alpha^2.$$

Введение главных координат равносильно одновременному приведению двух квадратичных форм T и U к каноническому виду. Действительно, T и U в случае произвольных независимых координат задаются с помощью двух симметричных матриц

$$\|a_{jk}\| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{s1} & \dots & \dots & a_{ss} \end{vmatrix}, \quad \|c_{jk}\| = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1s} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{s1} & \dots & \dots & c_{ss} \end{vmatrix}.$$

Если одна из двух квадратичных форм определено положительна, то некоторым линейным преобразованием обе формы всегда можно привести к каноническому виду*); при этом матрицы преобразуются к диагональным матрицам

$$\|a_\alpha\| = \begin{vmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_s \end{vmatrix}, \quad \|c_\alpha\| = \begin{vmatrix} c_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & c_s \end{vmatrix}.$$

Соответственно для систем с идеальными голономными связями и консервативными потенциальными силами всегда можно ввести главные координаты.

В заключение остановимся на случаях кратных и нулевых корней характеристического уравнения. Если некоторый корень этого уравнения является кратным, то в качестве общего решения следует опять-таки взять решение вида (32.17). Однако в этом случае коэффициенты Δ_i^α , соответствующие кратному корню, не являются алгебраическими дополнениями характеристического детерминанта и должны быть определены из уравнений (32.8). Нужно также иметь в виду,

*) А. И. Мальцев, Основы линейной алгебры, Гостехиздат, 1956, гл. VI, § 3, п. 95, теорема 2.

что кратному корню соответствуют главные колебания, одинаковые по частоте, но различные в общем случае по амплитуде и фазе (см. пример 32.4).

Если какая-нибудь собственная частота $\omega_\alpha = 0$, то, как видно из (32.19),

$$\theta_\alpha = \theta_{\alpha 0} t + \theta_{\alpha 0}. \quad (32.21)$$

«Нулевая частота» возникает, например, в том случае, когда потенциальная энергия системы достигает минимума не в одной «точке», а в некоторой области, т. е. в том случае, когда потенциальная энергия не обладает изолированным минимумом (см. примеры 32.5 и 32.6).

Пример 32.1. Плоские колебания материальной точки, подвешенной на пружине.

Положение устойчивого равновесия точки, подвешенной на пружине, а именно положение

$$\rho_{\text{eq}} = a + \frac{mg}{\kappa}, \quad \varphi_{\text{eq}} = 0,$$

было определено в примере 31.1. Там же были найдены значения вторых производных потенциальной энергии в рассматриваемом положении. Используя эти результаты, найдем общее решение, описывающее линейные колебания точки в вертикальной плоскости.

Разлагая кинетическую и потенциальную энергии точки в положении устойчивого равновесия, получим

$$T = \frac{m}{2} (\dot{\xi}^2 + \rho_{\text{eq}}^2 \dot{\varphi}^2), \quad U = \frac{1}{2} (\kappa \xi^2 + mg\rho_{\text{eq}}\varphi^2),$$

где $\xi = \rho - \rho_{\text{eq}}$. Отсюда видно, что координаты ξ и φ являются главными координатами (см. (32.20)). Используя выражения T и U , получим уравнения колебаний (см. (32.19))

$$m\ddot{\xi} + \kappa\xi = 0, \quad \rho_{\text{eq}}\ddot{\varphi} + g\varphi = 0$$

и значения квадратов двух собственных частот

$$\omega_1^2 = \frac{\kappa}{m}, \quad \omega_2^2 = \frac{g}{\rho_{\text{eq}}}.$$

Общим решением уравнений будут функции

$$\xi = a_1 \cos(\omega_1 t + \beta_1), \quad \varphi = a_2 \cos(\omega_2 t + \beta_2).$$

Таким образом, колебание точки складывается из гармонического колебания вдоль оси пружины с частотой, равной $(\kappa/m)^{1/2}$, и гармонического колебания математического маятника длины ρ_{eq} с частотой, равной $(g/\rho_{\text{eq}})^{1/2}$.

Пример 32.2. Колебания системы двух точек на горизонтальном стержне.

Две точки одинаковой массы m находятся на неподвижном гладком и горизонтальном стержне длины $3a$. Эти точки соединены друг с другом и с концами стержня тремя пружинами, подчиненными закону Гука (жесткость каждой из пружин и длина в ненапряженном

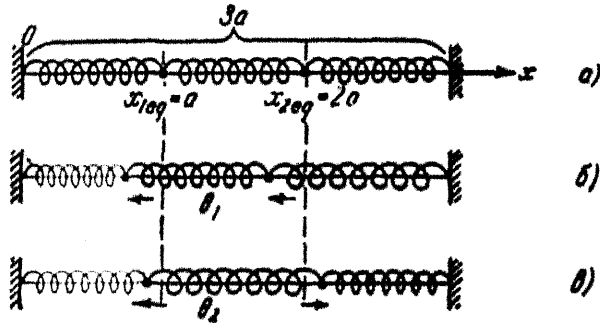


Рис. 32.1.

состоянии соответственно равны x и a). Найти закон движения системы вблизи ее положения устойчивого равновесия.

Направим ось Ox вдоль стержня и совместим начало отсчета с одним из концов стержня. Выбирая в качестве независимых координат декартовы координаты точек x_1 и x_2 (рис. 32.1, а), для кинетической энергии системы получим выражение

$$T = \frac{m}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2).$$

Потенциальная энергия U системы складывается из энергии упругой деформации всех пружин, т. е.

$$U = \frac{\kappa}{2} [(\Delta l_1)^2 + (\Delta l_2)^2 + (\Delta l_3)^2],$$

где Δl_i ($i=1, 2, 3$) — удлинения пружин, соответственно равные

$$\Delta l_1 = x_1 - a, \quad \Delta l_2 = x_2 - x_1 - a, \quad \Delta l_3 = 2a - x_2.$$

В данном случае положение устойчивого равновесия очевидно и определяется координатами

$$x_{1\text{eq}} = a, \quad x_{2\text{eq}} = 2a.$$

Кинетическая и потенциальная энергии как функции отклонения от этого положения и обобщенных скоростей будут равны

$$T = \frac{m}{2} (\dot{\xi}_1^2 + \dot{\xi}_2^2), \quad U = \kappa (\xi_1^2 + \xi_2^2 - \xi_1 \xi_2),$$

где $\xi_1 = x_1 - a$, $\xi_2 = x_2 - 2a$,

Соответственно уравнения движения (32.4) примут вид

$$\ddot{\xi}_1 + 2\omega^2 \xi_1 - \omega^2 \xi_2 = 0, \quad -\omega^2 \xi_1 + \ddot{\xi}_2 + 2\omega^2 \xi_2 = 0,$$

где $\omega^2 = x/m$.

Повторяя общую процедуру решения уравнений, запишем уравнения для амплитуд (см. (32.6))

$$(\lambda^2 + 2\omega^2) C_1 - \omega^2 C_2 = 0, \quad -\omega^2 C_1 + (\lambda^2 + 2\omega^2) C_2 = 0$$

и характеристическое уравнение (см. (32.7))

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda^2 + 2\omega^2 & -\omega^2 \\ -\omega^2 & \lambda^2 + 2\omega^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Последнее уравнение распадается на два квадратных уравнения, решение которых приводит к четырем собственным значениям λ :

$$\lambda_{1,2} = \pm i\omega_1, \quad \lambda_{3,4} = \pm i\omega_2,$$

где $\omega_1^2 = \frac{x}{m}$, $\omega_2^2 = 3\frac{x}{m}$.

Подставляя λ_1 в первое из уравнений для амплитуд, найдем

$$(\lambda_1^2 + 2\omega^2) C_1^{(1)} - \omega^2 C_2^{(1)} = 0, \quad \text{т. е.} \quad C_2^{(1)} = C_1^{(1)}.$$

Аналогично получим, что

$$C_2^{(2)} = C_1^{(2)}, \quad C_2^{(3)} = -C_1^{(3)}, \quad C_2^{(4)} = -C_1^{(4)}.$$

Используя эти соотношения, находим общее решение (см. (32.9))

$$\xi_1 = \theta_1 + \theta_2, \quad \xi_2 = \theta_1 - \theta_2,$$

где

$$\theta_1 = a_1 \cos(\omega_1 t + \beta_1), \quad \theta_2 = a_2 \cos(\omega_2 t + \beta_2).$$

Итак, колебания системы двух точек в общем случае характеризуются двумя собственными частотами ω_1 , ω_2 и складываются из двух главных колебаний. Главное колебание θ_1 осуществляется (см. рис. 32.1, б), если в начальный момент времени средняя пружина не растянута, обе точки одинаково отклонены в одну сторону и имеют одинаковые начальные скорости (по величине и направлению). В этом случае средняя пружина в любой момент времени не напряжена и, следовательно, не влияет на колебания точек; соответственно частота этого колебания равна $(x/m)^{1/2}$. Второе главное колебание θ_2 осуществляется, если в начальный момент времени боковые пружины одинаково сжаты (или растянуты), а скорости точек одинаковы по величине и противоположно направлены (рис. 32.1, в). Соответственно частота второго колебания больше частоты первого колебания и равна $(3x/m)^{1/2}$.

Пример 32.3. Математический маятник с подвесом, колеблющимся по горизонтальному стержню.

Две материальные точки 1 и 2 с одинаковыми массами m соединены невесомым стержнем длины l . Точка 1 (подвес) может двигаться по горизонтальному гладкому и неподвижному стержню длины $2a$ под действием пружин, соединяющих подвес с концами этого стержня. К точке 2 присоединены также две пружины, другие концы которых закреплены неподвижно (рис. 32.2). Все четыре пружины жесткости κ и длины a в ненапряженном состоянии. Найдем общее решение, описывающее линейные колебания маятника в вертикальной плоскости, проходящей через горизонтальный стержень.

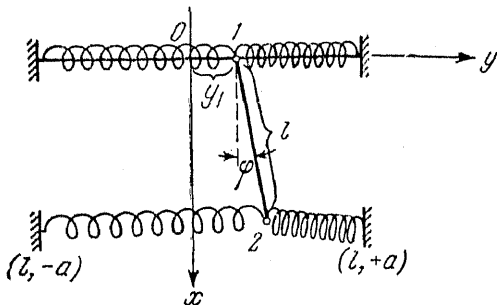


Рис. 32.2.

В равновесии маятник расположен на вертикали, проходящей посредине между точками закрепления всех пружин. Поэтому поместим начало координат в середину неподвижного стержня, ось Oy направим по стержню, а ось Ox — по вертикали вниз. В качестве независимых координат возьмем координату y_1 точки 1 и φ — угол отклонения маятника от вертикали. Тогда положение устойчивого равновесия определяется значениями $(y_1)_{\text{eq}} = 0$, $\varphi_{\text{eq}} = 0$, а отклонения от положения равновесия совпадают с координатами y_1 и φ .

Потенциальная энергия системы складывается из энергии деформации четырех пружин и энергии точки 2 в поле тяжести:

$$U = \frac{\kappa}{2} [y_1^2 + (-y_1)^2 + (\Delta l_3)^2 + (\Delta l_4)^2] - mgx_2;$$

здесь

$$\Delta l_3 = [(x_2 - l)^2 + (y_2 + a)^2]^{1/2} - a, \quad \Delta l_4 = [(x_2 - l)^2 + (y_2 - a)^2]^{1/2} - a,$$

а координаты точки 2 выражаются через y_1 и φ

$$y_2 = y_1 + l \sin \varphi, \quad x_2 = l \cos \varphi.$$

Используя приближенные выражения для удлинений двух нижних пружин

$$\Delta l_{3,4} = \pm (y_1 + l\varphi),$$

получим потенциальную энергию в окрестности положения равновесия с точностью до величин второго порядка малости включительно:

$$U = \kappa (2y_1^2 + 2ly_1\varphi + l^2\varphi^2) + \frac{mgl}{2}\varphi^2.$$

Затем, учитывая, что

$$\dot{x}_2^2 = l^2 \sin^2 \varphi \cdot \dot{\varphi}^2 \approx l^2 \varphi^2 \dot{\varphi}^2,$$

т. е. является величиной четвертого порядка малости, найдем приближенное выражение для кинетической энергии системы:

$$T = my_1^2 + mly_1\dot{\varphi} + \frac{m}{2}l^2\dot{\varphi}^2.$$

С помощью функций T и U получим уравнения Лагранжа

$$\ddot{y}_1 + \omega_{01}^2 y_1 + \frac{l}{2}(\ddot{\varphi} + \omega_{01}^2 \varphi) = 0,$$

$$\frac{1}{l}(\ddot{y}_1 + \omega_{01}^2 y_1) + \ddot{\varphi} + (\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2)\varphi = 0,$$

где $\omega_{01}^2 = 2\kappa/m$, $\omega_{02}^2 = g/l$. Из этих уравнений найдем уравнения для амплитуд

$$(\lambda^2 + \omega_{01}^2)C_1 + \frac{l}{2}(\lambda^2 + \omega_{01}^2)C_2 = 0,$$

$$\frac{1}{l}(\lambda^2 + \omega_{01}^2)C_1 + (\lambda^2 + \omega_{01}^2 + \omega_{02}^2)C_2 = 0$$

и характеристическое уравнение

$$(\lambda^2 + \omega_{01}^2)(\lambda^2 + \omega_{01}^2 + 2\omega_{02}^2) = 0,$$

откуда определим собственные значения λ

$$\lambda_{1,2}^2 = -\omega_{01}^2, \quad \lambda_{3,4}^2 = -\omega_{01}^2 - 2\omega_{02}^2$$

и квадраты собственных частот системы

$$\omega_1^2 = \omega_{01}^2 = \frac{2\kappa}{m}, \quad \omega_2^2 = \omega_{01}^2 + 2\omega_{02}^2 = 2\left(\frac{\kappa}{m} + \frac{g}{l}\right).$$

Подставляя $\lambda_{1,2}$ и $\lambda_{3,4}$ в уравнения для амплитуд, получим

$$C_2^{(1,2)} = 0, \quad C_2^{(3,4)} = -\frac{2}{l}C_1^{(3,4)}.$$

Наконец, используя эти соотношения, найдем общее решение

$$y_1 = \theta_1 + \theta_2, \quad \varphi = -\frac{2}{l}\theta_2,$$

а также координату второй точки в виде

$$y_2 = \theta_1 - \theta_2.$$

Первое главное колебание θ_1 с частотой $(2\kappa/m)^{1/2}$ осуществляется, если в начальный момент времени обе точки одинаково отклонить от положения равновесия и задать им одинаковые начальные скорости (рис. 32.3, а). Второе главное колебание θ_2 с частотой $\left[2\left(\frac{\kappa}{m} + \frac{g}{l}\right)\right]^{1/2}$ осуществляется, если в начальный момент времени как отклонения

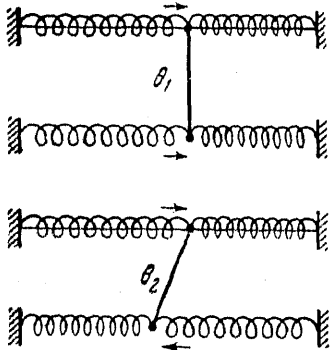


Рис. 32.3.

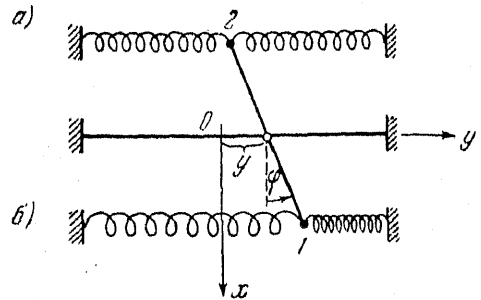


Рис. 32.4.

точек, так и их скорости соответственно равны по величине и противоположны по направлению (рис. 32.3, б).

Пример 32.4. Маятник с кратными собственными частотами.

Две материальные точки 1 и 2 с одинаковыми массами m соединены невесомым стержнем длины $2l$. Центр этого маятника движется по горизонтальному гладкому и неподвижному стержню длины $2a$ (рис. 32.4). Каждая из точек 1 и 2 соединена с двумя одинаковыми пружинами жесткости κ и длины a в ненапряженном состоянии. Неподвижные концы пружин закреплены на расстоянии l от горизонтального стержня. Найти общее решение для линейных колебаний маятника в вертикальной плоскости (плоскости рисунка).

Выберем систему координат так, как это показано на рис. 32.4. В качестве независимых координат возьмем координату y центра маятника и угол φ его наклона относительно вертикали. Тогда координаты точек 1 и 2 будут равны

$$\begin{aligned} y_1 &= y + l \sin \varphi, & y_2 &= y - l \sin \varphi, \\ x_1 &= l \cos \varphi, & x_2 &= -l \cos \varphi. \end{aligned}$$

Подставляя в общее выражение для потенциальной энергии маятника

$$U = \frac{\kappa}{2} \sum_{i=1}^4 (\Delta l_i)^2 - mg(x_1 + x_2)$$

приближенные значения удлинений пружин

$$\Delta l_{1,2} = \pm (y \mp l\varphi), \quad \Delta l_{3,4} = \pm (y - l\varphi),$$

получим

$$U = 2x(y^2 + l^2\varphi^2).$$

Кинетическая энергия маятника в тех же обобщенных переменных и с той же точностью будет равна

$$T = my^2 + ml^2\dot{\varphi}^2.$$

Из выражений для T и U следует, что y и φ являются главными координатами, удовлетворяющими уравнениям Лагранжа:

$$\ddot{y} + \omega^2 y = 0, \quad \ddot{\varphi} + \omega^2 \varphi = 0,$$

где $\omega^2 = 2x/m$. Корни характеристического уравнения этой системы кратны, соответственно чему общее решение определяется двумя главными колебаниями с одинаковыми частотами и с различными, вообще говоря, амплитудами и фазами:

$$y = a_1 \cos(\omega t + \beta_1), \quad \varphi = \frac{1}{l} a_2 \cos(\omega t + \beta_2).$$

Эти колебания можно осуществить, задавая «симметричные» и «анти-симметричные» начальные условия (см. предыдущий пример).

Пример 32.5. Продольные колебания невращающейся двухатомной молекулы.

Известно, что внутренняя энергия двухатомной молекулы с хорошей степенью точности описывается потенциалом как функцией расстояния r между атомами *):

$$U = D \left[1 - e^{-\sqrt{\frac{x}{2D}}(r-a)} \right]^2 - D,$$

где D , x и a — постоянные, характеризующие молекулу (например, a является расстоянием между атомами, при котором потенциальная энергия минимальна).

Если отклонение $r - a$ достаточно мало, то энергию взаимодействия атомов можно приближенно записать в виде

$$U = \frac{x}{2} (r - a)^2$$

(здесь опущена несущественная постоянная). Отсюда следует, что двухатомную молекулу можно представлять как систему двух материальных точек с массами m_1 и m_2 , соединенных между собой пружиной жесткости x и длины a в ненапряженном состоянии. Исходя

*) См., например, А. А. Соколов, Ю. М. Лоскутов, И. М. Тернов, Квантовая механика, «Просвещение», 1965, стр. 225.

из указанной модели и предполагая, что молекула движется только вдоль своей оси, т. е. вдоль оси пружины, найти закон такого движения молекулы.

Совместив декартову ось Ox с осью молекулы, получим следующие выражения для кинетической и потенциальной энергий молекулы:

$$T = \frac{m_1}{2} \dot{x}_1^2 + \frac{m_2}{2} \dot{x}_2^2, \quad U = \frac{\kappa}{2} (x_2 - x_1 - a)^2.$$

Отсюда видно, что U обращается в нуль не только в некотором фиксированном положении $x_{2\text{eq}} - x_{1\text{eq}} = a$, но и в любом другом положении, соответствующем требованию $x_2 - x_1 = a$. Следовательно, U не имеет изолированного минимума в положении $x_{2\text{eq}} - x_{1\text{eq}} = a$. Несмотря на это, применим метод решения, изложенный в настоящем параграфе (оправданность этого шага будет видна в дальнейшем).

Введем отклонения от положения равновесия

$$\xi_1 = x_1 - x_{1\text{eq}}, \quad \xi_2 = x_2 - x_{2\text{eq}},$$

где $x_{1\text{eq}}$ и $x_{2\text{eq}}$ связаны соотношением $x_{2\text{eq}} - x_{1\text{eq}} = a$.

Выражая T и U через отклонения, получим

$$T = \frac{m_1}{2} \dot{\xi}_1^2 + \frac{m_2}{2} \dot{\xi}_2^2, \quad U = \frac{\kappa}{2} (\xi_2 - \xi_1)^2.$$

Соответственно уравнения движения, уравнения для амплитуд и частот будут иметь вид

$$\begin{aligned} \ddot{\xi}_1 + \frac{\kappa}{m_1} \xi_1 - \frac{\kappa}{m_1} \xi_2 &= 0, & (\lambda^2 + \frac{\kappa}{m_1}) C_1 - \frac{\kappa}{m_1} C_2 &= 0, \\ -\frac{\kappa}{m_2} \xi_1 + \ddot{\xi}_2 + \frac{\kappa}{m_2} \xi_2 &= 0, & -\frac{\kappa}{m_2} C_1 + (\lambda^2 + \frac{\kappa}{m_2}) C_2 &= 0, \\ \Delta(\lambda) &= \lambda^2 \left(\lambda^2 + \frac{\kappa}{\mu} \right) = 0 \end{aligned}$$

(здесь μ — приведенная масса). Из этих уравнений находим частоты и отношение амплитуд

$$\omega_1^2 = \frac{\kappa}{\mu}, \quad \omega_2 = 0, \quad C_2^{(1, 2)} = -\frac{m_1}{m_2} C_1^{(1, 2)}.$$

Используя эти результаты, получим общее решение

$$\xi_1 = -\frac{m_2}{m} \theta + C_1 t + C_2, \quad \xi_2 = +\frac{m_1}{m} \theta - C_1 t - C_2,$$

где $\theta = C \cos \left(\sqrt{\frac{\kappa}{\mu}} t + \beta \right)$; C , β , C_1 и C_2 — действительные константы, а коэффициенты при θ выбраны в соответствии с решением задачи двух тел (см. (12.7)). Выражая C_1 и C_2 через начальные

значения x_{10} , x_{20} , \dot{x}_{10} , \dot{x}_{20} , найдем общее решение для x_1 и x_2 :

$$x_1 = x_{1\text{ eq}} + x_{m0} - x_{m\text{ eq}} + \dot{x}_{m0}t - \frac{m_2}{m} \theta,$$

$$x_2 = x_{2\text{ eq}} + x_{m0} - x_{m\text{ eq}} + \dot{x}_{m0}t + \frac{m_1}{m} \theta,$$

где

$$\dot{x}_{m0} = \frac{1}{m} (m_1 \dot{x}_{10} + m_2 \dot{x}_{20}),$$

$$x_{m0} - x_{m\text{ eq}} = \frac{1}{m} [m_1 (x_{10} - x_{1\text{ eq}}) + m_2 (x_{20} - x_{2\text{ eq}})].$$

Используя систему центра масс молекулы, ту же задачу можно решить короче. В этой системе кинетическая и потенциальная энергии молекулы равны

$$T = \frac{\mu}{2} \dot{x}^2, \quad U = \frac{\kappa}{2} (x - a)^2,$$

где $x = x'_2 - x'_1$ (см. (12.7)). Отсюда можно найти уравнение Лагранжа

$$\mu \ddot{\theta} + \kappa \theta = 0,$$

где $\theta = x - a$, а затем, используя соотношения задачи двух тел, получить решение

$$x'_1 = x'_{1\text{ eq}} - \frac{m_2}{m} \theta, \quad x'_2 = x'_{2\text{ eq}} + \frac{m_1}{m} \theta,$$

где

$$\theta = C \cos \left(\sqrt{\frac{\kappa}{\mu}} t + \beta \right).$$

Из обоих решений видно, что движение молекулы складывается из движения молекулы как целого со скоростью \dot{x}_{m0} (с чем связана нулевая частота, появившаяся в первом решении) и колебаний атомов с частотой $(\kappa/\mu)^{1/2}$, которые совершаются в системе масс около положения устойчивого равновесия $x'_{1\text{ eq}} = -\frac{m_2}{m} a$, $x'_{2\text{ eq}} = +\frac{m_1}{m} a$. Колебания первого и второго атомов совершаются в противофазе с отношением амплитуд, равным m_2/m_1 .

Пример 32.6. Продольные колебания линейной трехатомной симметричной молекулы.

Рассмотрим трехатомную молекулу как систему, состоящую из трех точек с массами m_1 , m_2 и m_3 , расположенных на одной прямой и соединенных между собой одинаковыми пружинами (длина в ненапряженном состоянии и жесткость каждой из пружин соответственно равны a и κ). Найти собственные частоты колебаний невращающейся молекулы и закон ее движения.

Решая задачу в произвольной инерциальной системе отсчета, мы, так же как и в предыдущем примере, получим нулевую частоту, связанную с поступательным движением молекулы как целого. Однако проще с самого начала исключить эту частоту и рассматривать колебания молекулы в системе ее центра масс.

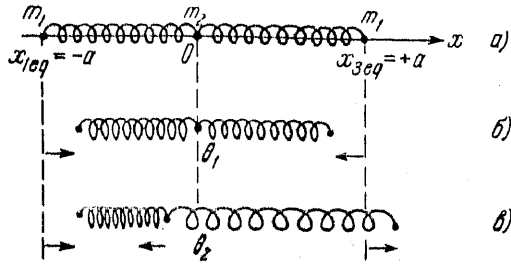


Рис. 32.5.

Направим декартову ось Ox по оси молекулы (рис. 32.5, а). Тогда кинетическая и потенциальная энергии будут равны

$$T = \frac{m_1}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_3^2) + \frac{m_2}{2} \dot{x}_2^2,$$

$$U = \frac{\kappa}{2} \{ (x_2 - x_1 - a)^2 + (x_3 - x_2 - a)^2 \}.$$

Здесь координаты точек связаны соотношением (см. (21.4))

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_1 x_3 = 0,$$

с помощью которого из выражений для T и U можно исключить, например, x_2 . В результате получим

$$T = \frac{m_1}{2m_2} (m_1 + m_2) (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_3^2) + \frac{m_1^2}{m_2} \dot{x}_1 \dot{x}_3,$$

$$U = \frac{\kappa}{2} \left\{ \left(\frac{m_1 + m_2}{m_2} x_1 + \frac{m_1}{m_2} x_3 + a \right)^2 + \left(\frac{m_1}{m_2} x_1 + \frac{m_1 + m_2}{m_2} x_3 - a \right)^2 \right\}.$$

Имея в виду, что положение устойчивого равновесия в системе S_m определяется равенствами

$$x_{1\text{eq}} = -a, \quad x_{2\text{eq}} = 0, \quad x_{3\text{eq}} = a,$$

и вводя в качестве переменных отклонения от этого положения

$$\xi_1 = x_1 + a, \quad \xi_2 = x_2, \quad \xi_3 = x_3 - a,$$

в независимых координатах ξ_1 и ξ_3 найдем

$$T = \frac{m_1}{2m_2} (m_1 + m_2) (\dot{\xi}_1^2 + \dot{\xi}_3^2) + \frac{m_1^2}{m_2} \dot{\xi}_1 \dot{\xi}_3,$$

$$U = \frac{\kappa}{2m_2^2} \{ [(m_1 + m_2) \xi_1 + m_1 \xi_3]^2 + [m_1 \xi_1 + (m_1 + m_2) \xi_3]^2 \}.$$

Используя эти функции, приходим к следующим уравнениям движения, уравнениям для амплитуд и характеристическому уравнению:

$$\begin{aligned}\ddot{\xi}_1 + \omega_{01}^2 \xi_1 + \frac{m_1}{m_1 + m_2} (\ddot{\xi}_2 + \omega_{02}^2 \xi_2) &= 0, \\ \frac{m_1}{m_1 + m_2} (\ddot{\xi}_1 + \omega_{02}^2 \xi_1) + \ddot{\xi}_2 + \omega_{01}^2 \xi_2 &= 0; \\ (\lambda^2 + \omega_{01}^2) C_1 + \frac{m_1}{m_1 + m_2} (\lambda^2 + \omega_{02}^2) C_2 &= 0, \\ \frac{m_1}{m_1 + m_2} (\lambda^2 + \omega_{02}^2) C_1 + (\lambda^2 + \omega_{01}^2) C_2 &= 0; \\ \Delta(\lambda) = (\lambda^2 + \omega_{01}^2)^2 - \frac{m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} (\lambda^2 + \omega_{02}^2)^2 &= 0,\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}\omega_{01}^2 &= \kappa \frac{m_1^2 + (m_1 + m_2)^2}{m_1 m_2 (m_1 + m_2)}, \\ \omega_{02}^2 &= \kappa \frac{2(m_1 + m_2)}{m_1 m_2}.\end{aligned}$$

Характеристическому уравнению удовлетворяют

$$\lambda_{1,2}^2 = -\omega_1^2, \quad \lambda_{3,4}^2 = -\omega_2^2,$$

где

$$\omega_1^2 = \frac{\kappa}{m_1}, \quad \omega_2^2 = \kappa \frac{m}{m_1 m_2},$$

а $m = 2m_1 + m_2$ — масса всей молекулы. Соответственно из уравнений для амплитуд вытекают соотношения

$$C_2^{(1,2)} = -C_1^{(1,2)}, \quad C_2^{(3,4)} = C_1^{(3,4)}.$$

Таким образом, общее решение будет иметь вид

$$\xi_1 = \theta_1 + \theta_2, \quad \xi_2 = -\theta_1 + \theta_2,$$

где

$$\theta_1 = a_1 \cos(\omega_1 t + \beta_1), \quad \theta_2 = a_2 \cos(\omega_2 t + \beta_2).$$

Возвращаясь к переменным x_1 , x_2 , x_3 и учитывая соотношения между ними, окончательно найдем

$$\begin{aligned}x_1 &= -a + \theta_1 + \theta_2, \\ x_2 &= -\frac{2m_1}{m_2} \theta_2, \\ x_3 &= -a - \theta_1 + \theta_2.\end{aligned}$$

Из этого решения видно, что продольные колебания трехатомной симметричной молекулы сводятся к наложению двух главных колебаний. Главное колебание θ_1 совершается с частотой $(\kappa/m_1)^{1/2}$ и осуществляется, если в начальный момент времени отклонения и скорости

двух крайних атомов одинаковы по величине и направлены в разные стороны, средний атом в этом случае все время находится в центре масс молекулы (рис. 32.5, б). Второе главное колебание ν_2 с частотой $\left(\frac{m}{m_1 m_2}\right)^{1/2}$ асимметрично; для его осуществления нужно задать одинаковые начальные условия для крайних атомов; что касается атома 2, то его начальные отклонения и скорость должны относиться к отклонениям и скоростям крайних атомов как $-2m_1/m_2$ (рис. 32.5, в).

Приложение 32.1. Общие соотношения, которым подчинены собственные значения λ для систем с идеальными голономными стационарными связями и потенциальными стационарными силами.

Умножая каждое из уравнений системы (32.8) на соответствующую комплексно сопряженную амплитуду $(C_j)^*$ и складывая все результаты умножения, получим

$$\left(\sum_{j,k} a_{jk} (C_j)^* C_k\right) \lambda^2 + \left(\sum_{j,k} c_{jk} (C_j)^* C_k\right) = 0. \quad (1)$$

Входящие в это соотношение билинейные формы от амплитуд $(C^*)^*$ и C^* соответствуют квадратичным формам T и U . Действительно, выполняя в (32.2) замену

$$\xi_j = (C_j)^*, \quad \eta_k = C_k^*$$

найдем билинейную форму $T((C^*)^* C^*)$. Производя аналогичную замену в (32.3), получим билинейную форму $U((C^*)^* C^*)$. Используя эти обозначения, запишем соотношение (1) в виде *)

$$T((C^*)^*, C^*) \lambda^2 + U((C^*)^*, C^*) = 0. \quad (2)$$

Квадратичные формы T и U являются положительно определенными формами с действительными симметричными коэффициентами. Следовательно, билинейные формы $T((C^*)^* C^*)$ и $U((C^*)^* C^*)$ являются действительными положительными величинами при любом α . Чтобы убедиться в этом, представим амплитуды C в виде

$$C_k = u_k + i v_k, \quad C_j^* = u_j - i v_j,$$

где коэффициенты u и v вещественны. Тогда для билинейной формы T получим выражение

$$T(C^*, C) = \frac{1}{2} \sum_{j,k} a_{jk} (u_j u_k + v_j v_k) + \frac{i}{2} \sum_{j,k} a_{jk} (u_j v_k - u_k v_j).$$

Мнимая часть формы $T(C^* C)$ равна нулю в силу симметрии коэффициентов a_{jk} и антисимметрии множителей $u_j v_k - u_k v_j$. Действительная часть той же формы равна сумме билинейных форм от вещественных амплитуд u и v , т. е.

$$T(C^*, C) = T(u, u) + T(v, v).$$

Если хотя бы один из коэффициентов u или v отличен от нуля (а нас интересует именно такой случай нетривиального решения), то $T(C^*, C) > 0$.

*) Соотношение (2) не может служить уравнением для отыскания λ , поскольку билинейные формы T и U зависят от амплитуд, определение которых требует знания λ . Однако соотношение (2) может быть полезным для общего анализа корней характеристического уравнения (32.1).

Аналогично найдем, что $U(C^*, C) > 0$. Таким образом, из соотношения (2) действительно вытекает свойство (32.10).

Приложение 32.2. Уравнения Лагранжа в главных координатах.

Чтобы получить уравнения (32.19), найдем, исходя из (32.2) и (32.3), кинетическую и потенциальную энергии в главных координатах. Например, подставляя (32.17) в (32.3), получим

$$U = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} \left(\sum_{j, k} c_{jk} \Delta_j^\alpha \Delta_k^\beta \right) \theta_\alpha \theta_\beta. \quad (1)$$

Эта форма зависит только от квадратов θ , поскольку коэффициенты при произведениях $\theta_\alpha \theta_\beta$ ($\alpha \neq \beta$) равны нулю:

$$\sum_{j, k} c_{jk} \Delta_j^\alpha \Delta_k^\beta = 0 \quad (\alpha \neq \beta). \quad (2)$$

Действительно, умножая каждое из уравнений (32.8) на амплитуду C_j^β и складывая все результаты умножения, найдем соотношения, аналогичные соотношениям (2) приложения 32.1:

$$T(C^\beta C^\alpha) \lambda_\alpha^2 + U(C^\beta C^\alpha) = 0. \quad (3)$$

Таким же образом получим соотношение для λ_β :

$$T(C^\alpha C^\beta) \lambda_\beta^2 + U(C^\alpha C^\beta) = 0. \quad (4)$$

Ввиду симметрии коэффициентов a_{jk} и c_{jk} билинейные формы, входящие в (3) и (4), также симметричны относительно индексов α и β , т. е.

$$T(C^\beta C^\alpha) = T(C^\alpha C^\beta), \quad U(C^\beta C^\alpha) = U(C^\alpha C^\beta). \quad (5)$$

Используя это свойство, из соотношений (3) и (4) найдем

$$T(C^\beta C^\alpha) (\lambda_\alpha^2 - \lambda_\beta^2) = 0 \quad (\alpha \neq \beta).$$

Отсюда, предполагая отсутствие кратных корней, получим

$$T(C^\alpha C^\beta) = 0 \quad (\alpha \neq \beta) \quad (6)$$

и, следовательно (см. (3)),

$$U(C^\alpha C^\beta) = 0 \quad (\alpha \neq \beta). \quad (7)$$

Представляя билинейную форму

$$U(C^\alpha C^\beta) = \frac{1}{2} \sum_{j, k} c_{jk} C_j^\alpha C_k^\beta$$

в виде (см. (32.12))

$$\frac{1}{2} C_\alpha C_\beta \sum_{j, k} c_{jk} \Delta_j^\alpha \Delta_k^\beta$$

(здесь C_α и C_β отличны от нуля) и используя соотношения (7), убеждаемся в справедливости (2).

Учитывая эти соотношения, найдем потенциальную энергию в главных координатах

$$U = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^s c_\alpha \theta_\alpha^2, \quad (8)$$

где

$$c_{\alpha} = \sum_{j, k} c_{jk} \Delta_j^{\alpha} \Delta_k^{\alpha}.$$

Аналогично для кинетической энергии получим выражение

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^s a_{\alpha} \dot{\theta}_{\alpha}^2, \quad (9)$$

где

$$a_{\alpha} = \sum_{j, k} a_{jk} \Delta_j^{\alpha} \Delta_k^{\alpha}.$$

С помощью (8) и (9) нетрудно убедиться, что уравнения Лагранжа в главных координатах имеют вид (32.19).

§ 33. Собственные колебания системы под действием потенциальных, гироскопических и диссипативных сил

Рассмотрим колебания системы при наличии потенциальных и гироскопических сил, а также диссипативных сил, линейных относительно скоростей точек. В остальном сохраним предположения о силах и связях, сформулированные в предыдущем параграфе. Тогда кинетическая энергия T , обобщенный потенциал \mathcal{U} и диссипативная функция D будут иметь вид (см. (32.1), (27.21), (27.27))

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j, k=1}^s a_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k, \quad \mathcal{U} = \sum_{j=1}^s U_j \dot{q}_j + \mathcal{U}^{(0)}, \quad D = \frac{1}{2} \sum_{j, k=1}^s b_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k, \quad (33.1)$$

где все функции a_{jk} , U_j , $\mathcal{U}^{(0)}$ и b_{jk} зависят только от координат, поскольку силы и связи стационарны; кроме того, коэффициенты a_{jk} и b_{jk} симметричны относительно перестановок индексов.

Разлагая T , \mathcal{U} и D в положении устойчивого равновесия с точностью до членов второго порядка малости включительно, можно получить линейные уравнения движения*). Однако эти уравнения легче получить, проводя разложение обеих частей уравнений Лагранжа (27.23) с точностью до членов первого порядка.

Запишем исходные уравнения (27.23) с учетом (27.26)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial q_j} - \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_j} \quad (j=1, 2, \dots, s). \quad (33.2)$$

Используя выражение для кинетической энергии (см. (33.1)), представим левые части системы (33.2) в виде

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = \sum_{k=1}^s a_{jk} \ddot{q}_k + \sum_{k, l=1}^s \frac{\partial a_{jk}}{\partial q_l} \dot{q}_l \dot{q}_k - \frac{1}{2} \sum_{k, l=1}^s \frac{\partial a_{lk}}{\partial q_j} \dot{q}_l \dot{q}_k. \quad (33.3)$$

*) Разложение обобщенного потенциала см. в приложении 33.1.

Затем, учитывая, что производные от обобщенного потенциала равны

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \dot{q}_j} \right) = \frac{dU_j}{dt} = \sum_{k=1}^s \frac{\partial U_j}{\partial q_k} \dot{q}_k,$$

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial q_j} = \sum_{k=1}^s \frac{\partial U_k}{\partial q_j} \dot{q}_k + \frac{\partial \mathcal{U}^{(0)}}{\partial q_j},$$

для обобщенно-потенциальной силы получим выражения

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial q_j} = \sum_{k=1}^s \gamma_{jk} \dot{q}_k - \frac{\partial \mathcal{U}^{(0)}}{\partial q_j} \quad (j = 1, 2, \dots, s), \quad (33.4)$$

где $\gamma_{jk} = \frac{\partial U_j}{\partial q_k} - \frac{\partial U_k}{\partial q_j}$ — коэффициенты, антисимметричные по индексам. Для обобщенных диссипативных сил соответственно найдем

$$Q_j^d = - \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_j} = - \sum_{k=1}^s b_{jk} \dot{q}_k \quad (j = 1, 2, \dots, s). \quad (33.5)$$

Теперь разложим все члены, входящие в уравнения Лагранжа, в положении устойчивого равновесия, т. е. в положении изолированного минимума обычной потенциальной энергии $\mathcal{U}^{(0)}$ (см. достаточный признак устойчивости на стр. 254). Это положение определяется из уравнений

$$\left. \frac{\partial \mathcal{U}^{(0)}}{\partial q_j} \right|_{q_1 = q_{1 \text{ eq}}, \dots, q_s = q_{s \text{ eq}}} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, s). \quad (33.6)$$

Разложение доведем до членов первого порядка малости включительно по степеням отклонений ξ_j и обобщенных скоростей $\dot{\xi}_j$ ($j = 1, 2, \dots, s$). В результате из (33.3), (33.4) и (33.5) с учетом (33.6) получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} &= \sum_{k=1}^s (a_{jk})_{\text{eq}} \ddot{\xi}_k, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial q_j} &= \sum_{k=1}^s (\gamma_{jk})_{\text{eq}} \dot{\xi}_k - \sum_{k=1}^s (c_{jk})_{\text{eq}} \xi_k, \\ \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_j} &= \sum_{k=1}^s (b_{jk})_{\text{eq}} \dot{\xi}_k, \end{aligned} \quad (33.7)$$

где $c_{jk} = \frac{\partial^2 \mathcal{U}^{(0)}}{\partial q_j \partial q_k}$.

Подставляя (33.7) в (33.2) и опуская для простоты записи знак равновесия ед, найдем интересующие нас уравнения

$$\sum_{k=1}^s \{a_{jk} \ddot{\xi}_k + (b_{jk} - \gamma_{jk}) \dot{\xi}_k + c_{jk} \xi_k\} = 0 \quad (j=1, 2, \dots, s). \quad (33.8)$$

В этой системе уравнений коэффициенты a_{jk} , b_{jk} , c_{jk} симметричны, а γ_{jk} антисимметричны относительно перестановки индексов.

Общая процедура решения системы (33.8) аналогична методу решения системы (32.4). Поэтому сразу приведем соответствующее характеристическое уравнение и уравнения для амплитуд:

$$\det (a_{jk} \lambda^2 + (b_{jk} - \gamma_{jk}) \lambda + c_{jk}) = 0, \quad (33.9)$$

$$\sum_{k=1}^s \{a_{jk} \lambda_\alpha^2 + (b_{jk} - \gamma_{jk}) \lambda_\alpha + c_{jk}\} C_k = 0 \quad (j=1, 2, \dots, s). \quad (33.10)$$

Общее решение системы (33.8) имеет вид (32.9), где λ_α определяются из (33.9), а отношения амплитуд — из (33.10).

Каждое из собственных значений λ может быть либо комплексным (и тогда сопряженное ему число также будет корнем характеристического уравнения), либо вещественным. Таким образом, каждое из собственных значений λ можно записать в одной из форм

$$\lambda_\alpha^{\pm} = -\mu_\alpha \pm i\omega_\alpha, \quad \lambda_\alpha^+ = -\mu_\alpha^+, \quad (33.11)$$

где ω_α , μ_α , μ_α^+ — действительные величины. Это следует из известной теоремы о корнях алгебраического уравнения с действительными коэффициентами*). Кроме того, можно утверждать, что все коэффициенты затухания μ_α , μ_α^+ , μ_α^- положительны. Действительно, согласно закону (28.15) энергия системы со стационарными силами и связями убывает за счет работы диссипативных сил. Ввиду наличия экспоненциальных множителей в решении (32.9) это возможно только в случае положительности коэффициентов затухания.

Если диссипация энергии достаточно мала, то все корни λ можно разбить на пары комплексно сопряженных корней, а общее решение имеет вид

$$\xi_k = \sum_{\alpha=1}^s e^{-\mu_\alpha t} \operatorname{Re} \{C_\alpha^+ \Delta_k(\lambda_\alpha^+) e^{i\omega_\alpha t} + C_\alpha^- \Delta_k(\lambda_\alpha^-) e^{-i\omega_\alpha t}\} \quad (k=1, 2, \dots, s) \quad (33.12)$$

и описывает затухающие колебания системы. Если диссипация энергии отсутствует (т. е. все коэффициенты $b_{jk}=0$), то корни будут

*) См., например, А. Г. Курош, Курс высшей алгебры, «Наука», 1968, стр. 159—161.

чисто мнимыми, коэффициенты затухания равны нулю, а система совершает незатухающие колебания. Наконец, если все коэффициенты b_{jk} достаточно велики, то все корни λ вещественны*). В этом случае система совершает аperiодическое движение, которое описывается решением

$$\xi_k = \sum_{\alpha=1}^s \{ e^{-\mu_{\alpha}^+ t} \operatorname{Re}(C_{\alpha}^+ \Delta_k(\lambda_{\alpha}^+)) + e^{-\mu_{\alpha}^- t} \operatorname{Re}(C_{\alpha}^- \Delta_k(\lambda_{\alpha}^-)) \} \quad (k=1, 2, \dots, s). \quad (33.13)$$

Если среди всех корней характеристического уравнения часть корней является комплексными, а часть действительными, то соответствующую форму общего решения нетрудно получить из (32.9).

Заметим, что в общем случае при наличии диссипативных и гироскопических сил алгебраические дополнения, определяющие отношения амплитуд в решении (32.9), не удовлетворяют требованию (32.15), т. е. имеют место неравенства

$$\Delta_k(\lambda_{\alpha}^+) \neq \Delta_k(\lambda_{\alpha}^-) \quad (k, \alpha=1, 2, \dots, s). \quad (33.14)$$

Однако в частных случаях и при наличии диссипативных сил возможно выполнение требований (32.15), в связи с чем становится возможным введение «главных» координат (в том смысле, что каждое из уравнений (33.8), записанное в таких переменных, будет уравнением относительно какой-либо одной переменной).

Пример 33.1. Движение маятников, соединенных пружиной, в среде с сопротивлением.

Точки подвеса двух одинаковых математических маятников длины l и массы m находятся на расстоянии a друг от друга и расположены на одной горизонтали. Точки соединены между собой пружиной жесткости x и длины a в ненапряженном состоянии. Вся система помещена в среду с сопротивлением, пропорциональным первой степени скорости тела (коэффициент сопротивления k). Найти закон движения маятников в вертикальной плоскости, проходящей через точки подвеса, вблизи положения устойчивого равновесия системы**).

Выберем систему координат так, как это показано на рис. 33.1, а в качестве независимых координат возьмем φ_1 и φ_2 — углы отклонения каждого маятника от положения устойчивого равновесия: $\varphi_{1 \text{ eq}} = \varphi_{2 \text{ eq}} = 0$. Тогда удлинение пружины для малых отклонений и

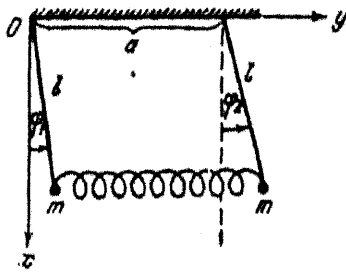
*) Подробнее об исследовании общих свойств корней характеристического уравнения (33.9) см. приложение 33.2.

***) Отметим, что метод решения данной задачи применим к решению ряда задач о колебаниях немеханических систем; например, задача об индуктивно связанных электрических контурах решается в полной аналогии с данным примером.

энергия ее упругой деформации с точностью до величин второго порядка малости будут соответственно равны

$$l|\varphi_2 - \varphi_1|, \quad \frac{x}{2} l^2 (\varphi_2 - \varphi_1)^2.$$

С той же точностью для потенциальной энергии обоих маятников в поле тяжести получим выражение



$$-mgl(\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2) \approx$$

$$\approx -2mgl + \frac{mgl}{2} (\varphi_1^2 + \varphi_2^2).$$

Следовательно, потенциальная энергия системы будет равна

$$U = \frac{1}{2} \{ (mgl + kl^2) \varphi_1^2 + (mgl + kl^2) \varphi_2^2 - 2kl^2 \varphi_1 \varphi_2 \}$$

Рис. 33.1.

(здесь опущена несущественная постоянная). Выражения для кинетической энергии и диссипативной функции будут иметь вид

$$T = \frac{ml^2}{2} (\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2), \quad D = \frac{kl^2}{2} (\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2).$$

Квадратичные формы T , D и U могут быть заданы с помощью следующих матриц:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & b_{22} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix}.$$

где

$$a_{11} = a_{22} = ml^2, \quad b_{11} = b_{22} = kl^2, \\ c_{11} = c_{22} = mgl + kl^2, \quad c_{12} = c_{21} = -kl^2.$$

Записывая линейные уравнения движения в форме (33.8)

$$a_{11}\ddot{\varphi}_1 + b_{11}\dot{\varphi}_1 + c_{11}\varphi_1 + c_{12}\varphi_2 = 0,$$

$$c_{21}\varphi_1 + a_{22}\ddot{\varphi}_2 + b_{22}\dot{\varphi}_2 + c_{22}\varphi_2 = 0,$$

найдем характеристическое уравнение

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11}\lambda^2 + b_{11}\lambda + c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & a_{22}\lambda^2 + b_{22}\lambda + c_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

Учитывая, что $a_{11} = a_{22}$, $b_{11} = b_{22}$, $c_{11} = c_{22}$ и $c_{12} = c_{21}$, это уравнение можно записать в виде

$$(a_{11}\lambda^2 + b_{11}\lambda + c_{11})^2 = c_{12}^2$$

или в виде двух квадратных уравнений

$$\lambda^2 + \frac{b_{11}}{a_{11}} \lambda + \frac{c_{11} \pm c_{12}}{a_{11}} = 0$$

с коэффициентами

$$\frac{b_{11}}{a_{11}} = \frac{k}{m}, \quad \frac{c_{11} \pm c_{12}}{a_{11}} = \begin{cases} \frac{g}{l}, \\ \frac{g}{l} + \frac{2x}{m}. \end{cases}$$

Таким образом, решение характеристического уравнения приводит к четырем собственным значениям λ :

$$\lambda_{1,2} = -\mu \pm i\omega_1, \quad \lambda_{3,4} = -\mu \pm i\omega_2,$$

где

$$\omega_1 = (\omega_0^2 - \mu^2)^{1/2}, \quad \omega_2 = \left(\omega_0^2 + \frac{2x}{m} - \mu^2\right)^{1/2}; \quad \omega_0^2 = \frac{g}{l}, \quad \mu = \frac{k}{2m}.$$

Общее решение уравнений движения запишем в виде (33.12)

$$\varphi_k = e^{-\mu t} \sum_{\alpha=1}^2 \operatorname{Re} \left\{ C_{\alpha}^{+} \Delta_k(\lambda_{\alpha}^{+}) e^{i\omega_{\alpha} t} + C_{\alpha}^{-} \Delta_k(\lambda_{\alpha}^{-}) e^{-i\omega_{\alpha} t} \right\} \quad (k = 1, 2).$$

Затем получим значения алгебраических дополнений

$$\Delta_1 = a_{11}\lambda^2 + b_{11}\lambda + c_{11}, \quad \Delta_2 = -c_{12}$$

характеристического детерминанта при различных корнях λ характеристического уравнения. Нетрудно убедиться, что

$$\Delta_1(\lambda_1^{+}) = \Delta_1(\lambda_1^{-}) = -c_{12},$$

$$\Delta_1(\lambda_2^{+}) = \Delta_1(\lambda_2^{-}) = +c_{12},$$

а дополнение Δ_2 , как видно, не зависит от λ . В связи с этим общее решение может быть записано в виде

$$\varphi_1 = \theta_1 - \theta_2, \quad \varphi_2 = \theta_1 + \theta_2.$$

Здесь θ_1 и θ_2 равны

$$\theta_1 = \begin{cases} a_1 e^{-\mu t} \cos(\omega_1 t + \beta_1), & \text{если } \omega_0^2 > \mu^2, \\ C_1 e^{-\mu_1 t} + C_2 e^{-\mu_2 t}, & \text{если } \omega_0^2 < \mu^2 \end{cases}$$

$$(\mu_{1,2} = \mu \pm (\mu^2 - \omega_0^2)^{1/2});$$

$$\theta_2 = \begin{cases} a_2 e^{-\mu t} \cos(\omega_2 t + \beta_2), & \text{если } \omega_0^2 + \frac{2x}{m} > \mu^2, \\ C_3 e^{-\mu_3 t} + C_4 e^{-\mu_4 t}, & \text{если } \omega_0^2 + \frac{2x}{m} < \mu^2 \end{cases}$$

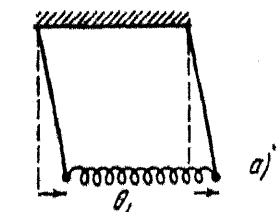
$$(\mu_{3,4} = \mu \pm \left[\mu^2 - \left(\omega_0^2 + \frac{2x}{m}\right)^{1/2}\right]).$$

Таким образом, функция θ_1 описывает либо затухающее колебание с частотой ω_1 и коэффициентом затухания μ_1 , либо аperiodическое движение с коэффициентами затухания μ_1 и μ_2 . Функция θ_2 соответственно характеризуется частотой ω_2 и затуханием μ или двумя коэффициентами затухания μ_3 и μ_4 .

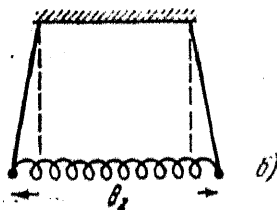
Величины θ_1 и θ_2 являются главными координатами системы. Действительно, эти независимые координаты помещены уравнением Лагранжа

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}_1 + 2\mu\dot{\theta}_1 + \omega_0^2\theta_1 &= 0, \\ \ddot{\theta}_2 + 2\mu\dot{\theta}_2 + \left(\omega_0^2 + \frac{2x}{m}\right)\theta_2 &= 0, \end{aligned}$$

каждое из которых является уравнением относительно одной из этих координат. Соответствующие T , D и U , выраженные через главные координаты, будут содержать только квадраты переменных, т. е. коэффициенты этих форм будут образовывать диагональные матрицы:



$$\begin{aligned} \|a_n\| &= \begin{vmatrix} 2mI^2 & 0 \\ 0 & 2mI^2 \end{vmatrix}, & \|b_n\| &= \begin{vmatrix} 2kI^2 & 0 \\ 0 & 2kI^2 \end{vmatrix}, \\ \|c_n\| &= \begin{vmatrix} 2mgl & 0 \\ 0 & 2mgl + 4xI^2 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$



Главное «колебание» θ_1 осуществляется, если начальные отклонения обоих маятников и их скорости соответственно равны между собой (рис. 33.2, а). Если же начальные отклонения обоих маятников и их скорости соответственно равны по величине, но противоположны по знаку, то реализуется второе главное «колебание» θ_2 (рис. 33.2, б).

Рис. 33.2.

В заключение отметим частные случаи. Пусть, например, сопротивление среды мало, т. е. $\omega_0^2 > \mu^2$. Тогда функции θ_1 и θ_2 описывают затухающие гармонические колебания. Если же маятники помещены в достаточно вязкую среду ($\omega_0^2 + \frac{2x}{m} > \mu^2 > \omega_0^2$), то θ_1 изменяется аperiodически, а θ_2 совершает затухающее колебание. Наконец, в весьма вязкой среде, когда $\mu^2 > \omega_0^2 + \frac{2x}{m}$, обе главные координаты описывают аperiodические движения.

Пример 33.2. Линейный заряженный осциллятор в магнитном поле.

Точка массы m с зарядом e движется в постоянном однородном магнитном поле напряженности \mathcal{H} . На материальную точку также

действует сила притяжения, пропорциональная расстоянию до центра силы O (коэффициент пропорциональности κ). Найти частоты колебаний осциллятора и закон его движения.

Выбирая систему декартовых координат с началом в точке O и осью Oz , направленной вдоль \mathcal{H} , и проецируя правую и левую части уравнения движения точки

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\kappa\mathbf{r} - \frac{e}{c} [\dot{\mathbf{r}}\mathcal{H}]$$

на координатные оси, получим следующую систему скалярных уравнений:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \omega_x^2 x - \omega_c \dot{y} &= 0, \\ \omega_c \dot{x} + \ddot{y} + \omega_x^2 y &= 0, \\ \ddot{z} + \omega_x^2 z &= 0, \end{aligned}$$

где

$$\omega_x^2 = \frac{\kappa}{m}, \quad \omega_c = \frac{e\mathcal{H}}{mc}.$$

Эти же уравнения можно получить, используя уравнения Лагранжа. Действительно, обобщенный потенциал в рассматриваемой задаче равен (см. (27.11) и (27.21))

$$\mathcal{U} = -\frac{e}{c} \mathbf{A}\dot{\mathbf{r}} - \frac{\kappa}{2} r^2,$$

где \mathbf{A} — вектор-потенциал магнитного поля. Выбор \mathbf{A} диктуется (хотя и неоднозначно) условиями задачи. Например, если положить

$$A_x = A_z = 0, \quad A_y = \mathcal{H}x,$$

то мы сможем удовлетворить условию

$$\mathcal{H}\mathbf{n}_z = \text{rot } \mathbf{A}.$$

Используя выражение для \mathbf{A} , найдем функцию Лагранжа в декартовых координатах

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{e\mathcal{H}}{c} xy - \frac{\kappa}{2} (x^2 + y^2 + z^2),$$

которая приведет к полученным выше линейным уравнениям движения.

Соответствующие им уравнения для амплитуд и характеристическое уравнение имеют вид

$$\begin{aligned} (\lambda^2 + \omega_x^2) C_1 - \omega_c \lambda C_2 &= 0, \\ \omega_c \lambda C_1 + (\lambda^2 + \omega_x^2) C_2 &= 0, \\ (\lambda^2 + \omega_x^2) C_3 &= 0; \\ \Delta(\lambda) &= [(\lambda^2 + \omega_x^2)^2 + \omega_c^2 \lambda^2] (\lambda^2 + \omega_x^2) = 0. \end{aligned}$$

Из последнего уравнения находим собственные значения λ :

$$\lambda_{1,2} = \pm i\omega_1, \quad \lambda_{3,4} = \pm i\omega_2, \quad \lambda_{5,6} = \pm i\omega_L,$$

где

$$\omega_1 = (\omega_0^2 + \omega_L^2)^{1/2} + \omega_L,$$

$$\omega_2 = (\omega_0^2 + \omega_L^2)^{1/2} - \omega_L,$$

$$\omega_3 = \omega_0,$$

а $\omega_L = \frac{e\mathcal{H}}{2mc}$ — ларморова частота.

Последовательно подставляя собственные значения λ в уравнения для амплитуд, получем соотношения между амплитудами:

$$C_2^{(1)} = iC_1^{(1)}, \quad C_4^{(1)} = -iC_3^{(1)},$$

$$C_2^{(2)} = -iC_1^{(2)}, \quad C_4^{(2)} = iC_3^{(2)},$$

$$C_1^{(3)} = C_1^{(4)} = C_2^{(3)} = C_2^{(4)} = 0,$$

$$C_3^{(3)} = C_3^{(4)} = C_4^{(3)} = C_4^{(4)} = 0.$$

Используя эти соотношения, приходим к общему решению в виде

$$x = \operatorname{Re} \{ C_1^{(1)} e^{i\omega_1 t} + C_1^{(2)} e^{-i\omega_1 t} \} + \operatorname{Re} \{ C_1^{(3)} e^{i\omega_2 t} + C_1^{(4)} e^{-i\omega_2 t} \},$$

$$y = \operatorname{Re} \{ i C_1^{(1)} e^{i\omega_1 t} - i C_1^{(2)} e^{-i\omega_1 t} \} - \operatorname{Re} \{ i C_1^{(3)} e^{i\omega_2 t} - i C_1^{(4)} e^{-i\omega_2 t} \},$$

$$z = \operatorname{Re} \{ C_3^{(3)} e^{i\omega_2 t} + C_3^{(4)} e^{-i\omega_2 t} \},$$

откуда окончательно находим

$$x = a_1 \cos(\omega_1 t + \beta_1) + a_2 \cos(\omega_2 t + \beta_2),$$

$$y = a_1 \cos\left(\omega_1 t + \beta_1 + \frac{\pi}{2}\right) - a_2 \cos\left(\omega_2 t + \beta_2 + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$z = a_3 \cos(\omega_2 t + \beta_3),$$

где все a и β — постоянные, определяемые начальными условиями.

Итак, мы видим, что колебание проекции заряженной точки на плоскость, перпендикулярную \mathcal{H} , характеризуется частотами ω_1 и ω_2 , отличными от ω_0 , собственной частоты осциллятора в отсутствие магнитного поля. Интересно отметить, что первое частное решение описывает движение проекции точки по окружности с угловой скоростью ω_1 по часовой стрелке; второе частное решение описывает аналогичное движение с угловой скоростью ω_2 против часовой стрелки. Колебание заряда в направлении \mathcal{H} происходит с собственной частотой ω_0 . В случае малой напряженности магнитного поля частоты ω_1 и ω_2 сводятся к сумме и разности собственной частоты осциллятора и ларморова частоты:

$$\omega_{1,2} \approx \omega_0 \pm \omega_L.$$

Пример 33.3. Линейные колебания вращающейся двухатомной молекулы.

Исходя из той же модели молекулы, что и в примере 32.5, и допуская, что внешние силы отсутствуют, определить частоту линейных колебаний вращающейся молекулы.

Применяя законы сохранения момента и энергии относительно системы центра масс молекулы, получим два интеграла движения в полярных координатах в плоскости движения молекулы (см. (7.2) и (12.16))

$$\mu \dot{\rho}^2 = M_0, \quad \frac{\mu}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2) + \frac{\kappa}{2} (\rho - a)^2 = E_0,$$

где $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$, ρ и φ — полярные координаты вектора $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, а M_0 и E_0 — момент и энергия молекулы относительно S_m -системы.

Исключая из интеграла энергии с помощью интеграла момента угловую скорость $\dot{\varphi}$, найдем

$$\frac{\mu}{2} \dot{\rho}^2 + U_{\text{eff}} = E_0,$$

где $U_{\text{eff}} = \frac{\kappa}{2} (\rho - a)^2 + \frac{M_0^2}{2\mu\rho^2}$. Функция $U_{\text{eff}}(\rho)$ имеет минимум (рис. 33.3), причем если $E_0 = (U_{\text{eff}})_{\text{min}}$, то в S_m -системе каждый атом

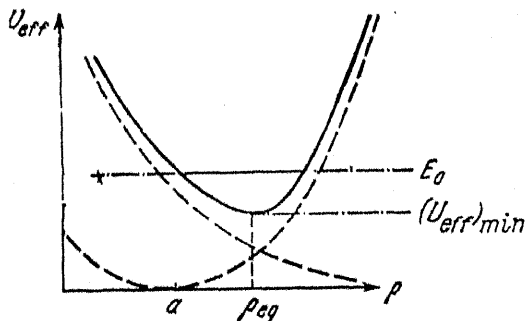


Рис. 33.3.

будет двигаться по окружности, а расстояние ρ между ними будет неизменным.

Обозначая расстояние между атомами, соответствующее $(U_{\text{eff}})_{\text{min}}$, символом ρ_{eq} и приравнивая нулю первую производную $U_{\text{eff}}(\rho)$, получим уравнение, определяющее ρ_{eq} :

$$1 - \frac{a}{\rho_{\text{eq}}} = \frac{M_0^2}{\mu \kappa \rho_{\text{eq}}^3}.$$

Если E_0 несколько превышает $(U_{\text{eff}})_{\text{min}}$, то молекула будет вращаться вокруг своего центра масс с переменной угловой скоростью $\dot{\varphi}$, а атомы будут совершать колебания вдоль оси молекулы. Чтобы найти

частоту этих колебаний, разложив $U_{\text{от}}$ в окрестности минимума до членов второго порядка малости включительно. Тогда с точностью до несущественной постоянной получим

$$U_{\text{от}} = \frac{1}{2} \left(x + \frac{3M\ddot{\xi}}{\mu\rho_{\text{ср}}^2} \right) \xi^2,$$

где $\xi = \rho - \rho_{\text{ср}}$. Таким образом, интеграл энергии примет вид

$$\frac{\mu}{2} \dot{\xi}^2 + \frac{1}{2} \left(x + \frac{3M\ddot{\xi}}{\mu\rho_{\text{ср}}^2} \right) \xi^2 + \dots = E_0.$$

Дифференцируя правую и левую части этого интеграла по времени, с точностью до линейных членов найдем

$$\ddot{\xi} + \omega_{\text{вib}}^2 \xi = 0,$$

где $\omega_{\text{вib}}^2 = \frac{x}{\mu} + \frac{3M\ddot{\xi}}{\mu\rho_{\text{ср}}^2}$.

Замечая, что величина $M_0/\mu\rho_{\text{ср}}^2$ равна угловой скорости $\dot{\phi}$ в «равновесии» (тогда $\rho = \rho_{\text{ср}}$), приходим к выводу, что квадрат частоты линейных колебаний вращающейся двухатомной молекулы равен сумме квадрата частоты колебаний невращающейся молекулы и утроенного квадрата угловой скорости вращения молекулы в «равновесии», т. е.

$$\omega_{\text{вib}}^2 = \frac{x}{\mu} + 3(\omega_{\text{rot}})_{\text{ср}}^2$$

где $(\omega_{\text{rot}})_{\text{ср}} = M_0/\mu\rho_{\text{ср}}^2$. Влияние колебаний молекулы на ее угловую скорость вращения можно определить, используя интеграл момента. Тогда с точностью до членов первого порядка включительно найдем, что

$$\dot{\phi} = \omega_{\text{rot}} = (\omega_{\text{rot}})_{\text{ср}} \left(1 - 2 \frac{\xi}{\rho_{\text{ср}}} \right).$$

Приложение 33.1. Разложение обобщенного потенциала в положении устойчивого равновесия.

Интересующее нас разложение имеет вид (см. (27.21))

$$\begin{aligned} U = U_{\text{ср}} + \sum_{l=1}^n \left\{ \left(\frac{\partial U}{\partial q_l} \right)_{\text{ср}} \xi_l + \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_l} \right)_{\text{ср}} \dot{\xi}_l \right\} + \\ + \frac{1}{2} \sum_{l, k=1}^n \left\{ \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_l \partial q_k} \right)_{\text{ср}} \xi_l \xi_k + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_l \partial \dot{q}_k} \right)_{\text{ср}} \xi_l \dot{\xi}_k + \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \dot{q}_l \partial q_k} \right)_{\text{ср}} \dot{\xi}_l \xi_k + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \dot{q}_l \partial \dot{q}_k} \right)_{\text{ср}} \dot{\xi}_l \dot{\xi}_k \right\}. \quad (1) \end{aligned}$$

Найдем значения первых и вторых производных потенциала U в положении равновесия:

$$\left. \left(\frac{\partial U}{\partial q_\alpha} \right)_{\text{eq}} = \left(\sum_{i=1}^s \frac{\partial U_i}{\partial q_\alpha} \dot{q}_i + \frac{\partial U}{\partial q_\alpha} \right) \right|_{\substack{q_1 = q_{1\text{eq}} \\ \dots \\ q_s = q_{s\text{eq}} \\ \dot{q}_1 = \dots = \dot{q}_s = 0}} = 0, \quad \left(\frac{\partial U}{\partial q_\alpha} \right)_{\text{eq}} = (U_\alpha)_{\text{eq}},$$

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_\alpha \partial q_\beta} \right)_{\text{eq}} = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_\alpha \partial q_\beta} \right)_{\text{eq}}, \quad \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_\alpha \partial q_\beta} \right)_{\text{eq}} = \left(\frac{\partial U_\beta}{\partial q_\alpha} \right)_{\text{eq}},$$

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_\alpha \partial q_\beta} \right)_{\text{eq}} = \left(\frac{\partial U_\alpha}{\partial q_\beta} \right)_{\text{eq}}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial q_\alpha \partial q_\beta} = 0.$$

Используя (2) и опуская несущественную постоянную, преобразуем разложение (1) к виду

$$U = \sum_{i=1}^s U_i \xi_i + \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^s \left\{ \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_k} \right)_{\text{eq}} \xi_i \xi_k + \left(\frac{\partial U_i}{\partial q_k} \right)_{\text{eq}} \xi_i \xi_k + \left(\frac{\partial U_k}{\partial q_i} \right)_{\text{eq}} \xi_i \xi_k \right\},$$

откуда находим

$$\frac{\partial U}{\partial \xi_i} = U_i \text{eq} + \sum_{k=1}^s \left(\frac{\partial U_i}{\partial q_k} \right)_{\text{eq}} \xi_k, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U}{\partial \xi_i} \right) = \sum_{k=1}^s \left(\frac{\partial U_i}{\partial q_k} \right)_{\text{eq}} \dot{\xi}_k,$$

$$\frac{\partial U}{\partial \xi_i} = \sum_{k=1}^s \left\{ \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_k} \right)_{\text{eq}} \xi_k + \left(\frac{\partial U_k}{\partial q_i} \right)_{\text{eq}} \xi_k \right\}.$$

Эти выражения и позволяют получить обобщенно-потенциальную силу в виде (33.4).

Приложение 33.2. Общие свойства корней характеристического уравнения.

Умножая каждое из уравнений (33.10) на соответствующую амплитуду $(C_i^\alpha)^*$ и складывая эти результаты, получим

$$T^\alpha \lambda_\alpha^2 + (D^\alpha - \Gamma^\alpha) \lambda_\alpha + U^\alpha = 0, \tag{1}$$

где T^α , D^α и U^α — билинейные формы, соответствующие квадратичным положительно определенным формам с вещественными симметричными коэффициентами. Как было показано в приложении 32.1, введенные билинейные формы являются действительными положительными величинами. Аналогично можно убедиться в том, что билинейная форма, образованная с помощью антисимметричных вещественных коэффициентов, является чисто мнимой величиной, а именно:

$$\frac{1}{2} \sum_{i,k} \gamma_{ik} (C_i^\alpha)^* C_k^\alpha = \Gamma^\alpha, \tag{2}$$

где Γ^α — действительная величина.

Запишем соотношение (1) в виде решения квадратного уравнения

$$\lambda_{\alpha} = -\frac{D^{\alpha} - \Gamma^{\alpha}}{2T^{\alpha}} \pm \left[\left(\frac{D^{\alpha} - \Gamma^{\alpha}}{2T^{\alpha}} \right)^2 - \frac{U^{\alpha}}{T^{\alpha}} \right]^{1/2} \quad (3)$$

и отметим ряд частных случаев. Пусть, например, гироскопические силы отсутствуют, т. е. $\Gamma^{\alpha} = 0$. Тогда «решение» (3) принимает вид

$$\lambda_{\alpha} = \frac{1}{2T^{\alpha}} \{ -D^{\alpha} \pm [(D^{\alpha})^2 - 4T^{\alpha}U^{\alpha}]^{1/2} \}. \quad (4)$$

Отсюда следует, что характер корней существенно зависит от знака подкоренного выражения в (4). Нетрудно видеть, что в рассматриваемом случае возможны как затухающие колебания, так и аperiodические движения.

Если отсутствуют диссипативные силы ($D^{\alpha} = 0$), то из (8) найдем

$$\lambda_{\alpha} = \frac{i}{2T^{\alpha}} \{ \Gamma^{\alpha} \pm [(\Gamma^{\alpha})^2 + 4T^{\alpha}U^{\alpha}]^{1/2} \}. \quad (5)$$

В этом случае система будет совершать незатухающие колебания.

Теперь убедимся в справедливости одного общего утверждения, заключающегося в том, что если T , D и U являются положительно определенными формами, то вещественная часть любого комплексного корня характеристического уравнения отрицательна. Действительно, ввиду положительной определенности U характеристическое уравнение не имеет нулевых корней. Поэтому соотношение (1) можно записать в виде

$$T^{\alpha}\lambda_{\alpha} + (D^{\alpha} - \Gamma^{\alpha}) + U^{\alpha}\lambda_{\alpha}^{-1} = 0.$$

Заменяя здесь все комплексные величины на комплексно сопряженные, получим

$$T^{\alpha}\lambda_{\alpha}^{*} + (D^{\alpha} + \Gamma^{\alpha}) + U^{\alpha}(\lambda_{\alpha}^{*})^{-1} = 0.$$

Складывая последние два соотношения, находим

$$(\lambda_{\alpha} + \lambda_{\alpha}^{*}) \left(T^{\alpha} + \frac{U^{\alpha}}{\lambda_{\alpha}\lambda_{\alpha}^{*}} \right) + 2D^{\alpha} = 0, \quad (6)$$

откуда ввиду положительности T^{α} , U^{α} и D^{α} следует, что

$$\lambda_{\alpha} + \lambda_{\alpha}^{*} < 0. \quad (7)$$

§ 34. Вынужденные колебания

Рассмотрим механическую систему, подчиненную требованиям, сформулированным в начале § 32, предполагая, что на систему также действуют *нестационарные силы*, т. е. силы, явно зависящие от времени. Ниже мы убедимся, что такая система наряду с собственными колебаниями будет совершать еще и *вынужденные колебания*. Чтобы получить в этом случае уравнения движения, необходимо линеаризовать уравнения Лагранжа около положения устойчивого равновесия, как это было сделано в §§ 32 и 33. Ввиду наличия нестационарных сил вместо уравнений (32.4) или (33.8) здесь будут

иметь место уравнения

$$\sum_{k=1}^s \{a_{jk} \ddot{\xi}_k + (b_{jk} - \gamma_{jk}) \dot{\xi}_k + c_{jk} \xi_k\} = Q_j^0(t) \quad (j = 1, 2, \dots, s), \quad (34.1)$$

где $Q_j^0(t)$ — заданные функции времени*).

Как известно, решение системы (34.1) складывается из общего решения соответствующей однородной системы и частного решения неоднородной системы. Решение однородной системы было рассмотрено в предыдущих параграфах. Поэтому рассмотрим только *частное решение* системы (34.1), которое и будет описывать *вынужденные колебания*. Сначала исследуем систему с одной степенью свободы, на которую действует вынуждающая сила, гармонически зависящая от времени. В этом случае уравнение движения имеет вид

$$a_{11} \ddot{\xi}_1 + b_{11} \dot{\xi}_1 + c_{11} \xi_1 = Q_e \cos(\omega_e t + \beta_e), \quad (34.2)$$

где Q_e , ω_e и β_e — соответственно амплитуда, частота и фаза вынуждающей силы. Представляя уравнение (34.2) в комплексной форме

$$a_{11} \ddot{\xi}_1 + b_{11} \dot{\xi}_1 + c_{11} \xi_1 = Q_e e^{i(\omega_e t + \beta_e)}, \quad (34.3)$$

его частное решение будем искать в виде

$$\xi_1 = a_e e^{i\Delta\beta_e} e^{i(\omega_e t + \beta_e)}. \quad (34.4)$$

Подставляя (34.4) в (34.3) и сокращая на общий множитель, найдем комплексную амплитуду

$$a_e e^{i\Delta\beta_e} = Q_e \frac{1}{\Delta(i\omega_e)}, \quad (34.5)$$

где $\Delta(i\omega_e) = a_{11}(i\omega_e)^2 + b_{11}(i\omega_e) + c_{11}$. Далее, записывая (34.5) в виде

$$a_e e^{i\Delta\beta_e} = Q_e \frac{\Delta^*(i\omega_e)}{\Delta(i\omega_e) \Delta^*(i\omega_e)}, \quad (34.6)$$

получим амплитуду a_e и разность фаз $\Delta\beta_e$ как функции частоты ω_e вынуждающей силы:

$$a_e = \frac{Q_e}{a_{11}} \frac{1}{[(\omega_0^2 - \omega_e^2)^2 + 4\mu^2\omega_e^2]^{1/2}}, \quad (34.7)$$

$$\operatorname{tg}(\Delta\beta_e) = -\frac{2\mu\omega_e}{\omega_0^2 - \omega_e^2},$$

где $\omega_0^2 = \frac{c_{11}}{a_{11}}$, $2\mu = \frac{b_{11}}{a_{11}}$. Функции $a_e(\omega_e)$ и $\Delta\beta_e(\omega_e)$ называются *амплитудной* и *фазовой характеристиками* соответственно.

* Система уравнений (34.1) является лишь одной из простейших систем, описывающих движение под действием нестационарных сил. В ряде случаев нестационарность сил приводит к более сложным уравнениям, например к уравнениям с переменными коэффициентами.

Итак, (34.4) и (34.7) определяют частное решение уравнения (34.2)

$$\xi_e = a_e(\omega_e) \cos[\omega_e t + \beta_e + \Delta\beta_e(\omega_e)]. \quad (34.8)$$

Это решение описывает вынужденное колебание системы. Из (34.8) и (34.7) видно, что амплитуда вынужденного колебания зависит от амплитуды возмущающей силы Q_e и частот ω_e и ω_0 . Если $\omega_e \approx \omega_0$, а затухание достаточно мало ($\mu^2 \ll \omega_0^2$), то имеет место резонанс, т. е. резкое возрастание амплитуды вынужденных колебаний (рис. 34.1). Нетрудно также видеть, что вынужденное колебание по фазе всегда отстает от возмущающей силы, т. е. $\Delta\beta_e$ всегда отрицательна. Приведем выражения a_e и $\Delta\beta_e$ для ряда случаев:

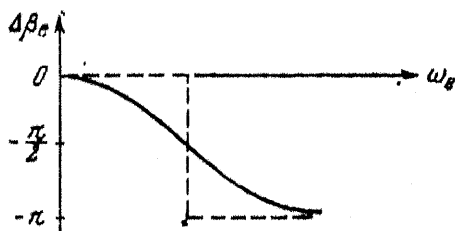
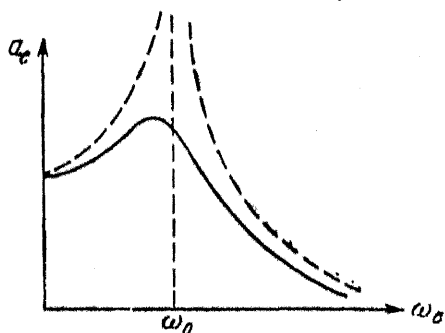


Рис. 34.1

a_e и $\Delta\beta_e$ для ряда случаев:

$$a_e \approx \frac{Q_e}{a_{11}} \frac{1}{\omega_e^2},$$

$$\Delta\beta_e \approx 0, \text{ если } \omega_e < \omega_0;$$

$$(a_e)_{\text{max}} = \frac{Q_e}{a_{11}} \frac{1}{2\mu \sqrt{\omega_0^2 - \mu^2}},$$

$$\text{tg}(\Delta\beta_e) = -\frac{\sqrt{\omega_0^2 - 2\mu^2}}{\mu},$$

$$\text{если } \omega_e^2 = \omega_0^2 - 2\mu^2;$$

$$a_e = \frac{Q_e}{a_{11}} \frac{1}{2\mu\omega_0},$$

$$\Delta\beta_e = -\frac{\pi}{2}, \text{ если } \omega_e = \omega_0;$$

$$a_e \approx \frac{Q_e}{a_{11}} \frac{1}{\omega_e^2},$$

$$\text{tg}(\Delta\beta_e) \approx \frac{2\mu}{\omega_e},$$

$$\text{если } \omega_e > \omega_0.$$

(34.9)

Резонансные свойства амплитудных характеристик лежат в основе устройства «усилителей» и «фильтров».

Отметим предельный случай, когда диссипацией энергии можно пренебречь, т. е. μ можно устремить к нулю. Тогда из (34.7) и (34.8) получим разрывное решение:

$$\xi_e = \frac{Q_e}{a_{11}} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega_e^2} \cos(\omega_e t + \beta_e), \quad \text{если } \omega_e < \omega_0;$$

$$\xi_e = \frac{Q_e}{a_{11}} \frac{1}{\omega_e^2 - \omega_0^2} \cos(\omega_e t + \beta_e - \pi), \quad \text{если } \omega_e > \omega_0 \quad (34.10)$$

(амплитудная и фазовая характеристики, соответствующие (34.10), изображены на рис. 34.1 штриховыми линиями).

Полная энергия E рассматриваемых одномерных колебаний, после того как собственные колебания вследствие затухания станут исчезающе малыми, будет с большой степенью точности равна

$$E = \frac{a_{11}}{2} (\xi_e^2 + \omega_0^2 \xi_e^2). \quad (34.11)$$

Изменение энергии E со временем характеризуется производной

$$\dot{E} = a_{11} (\ddot{\xi}_e + \omega_0^2 \xi_e) \dot{\xi}_e. \quad (34.12)$$

Это выражение с помощью уравнения (34.2) можно записать в виде

$$\dot{E} = -b_{11} \dot{\xi}_e^2 + Q_e \cos(\omega_e t + \beta_e) \dot{\xi}_e. \quad (34.13)$$

Если $\omega_e = \omega_0$, то мощность, вносимая в систему нестационарной силой, компенсирует диссипацию энергии; в результате энергия остается постоянной. Действительно, учитывая, что функция $\xi_e(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\ddot{\xi}_e + \omega_e^2 \xi_e = 0, \quad (34.14)$$

из (34.12) при $\omega_e = \omega_0$ получим $E = \text{const}$.

При произвольном соотношении ω_e и ω_0 энергия, усредненная по периоду колебания $T_e = 2\pi/\omega_e$, сохраняется (здесь опять-таки предполагается, что собственными колебаниями системы можно пренебречь).

В самом деле, имея в виду, что

$$\bar{\xi}_e^2 = \frac{a_e^2}{2}, \quad \bar{\xi}_e^2 = \frac{\omega_e^2 a_e^2}{2},$$

из (34.11) найдем

$$\bar{E} = \frac{a_{11}}{2} a_e^2 \frac{\omega_e^2 + \omega_0^2}{2} \quad (34.15)$$

(черта над функциями означает усреднение по периоду T_e).

Если нестационарная сила $Q_e(t)$ является произвольной функцией времени, разложимой в ряд Фурье,

$$Q_e(t) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n \cos(n\omega_e t + \beta_e^{(n)}), \quad (34.16)$$

то интересующее нас решение можно представить в виде

$$\xi_e = \sum_{n=0}^{\infty} a_e(Q_n, n\omega_e) \cos[n\omega_e t + \beta_e^{(n)} + \Delta\beta_e(n\omega_e)]. \quad (34.17)$$

Если же $Q_e(t)$ — произвольная функция, представляемая интегралом Фурье, то общим решением уравнения

$$\ddot{\xi} + 2\mu\dot{\xi} + \omega_0^2 \xi = \frac{Q_e(t)}{a_{11}}, \quad (34.18)$$

например, в случае $\omega_0 > \mu$, является решение

$$\xi = \left[\xi_0 \cos \omega t + \frac{1}{\omega} (\dot{\xi}_0 + \mu \xi_0) \sin \omega t \right] e^{-\mu t} + \frac{1}{a_{11} \omega} \int_0^t Q_s(\tau) e^{-\mu(t-\tau)} \sin \omega(t-\tau) d\tau, \quad (34.19)$$

где $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \mu^2}$ (здесь пределы интеграла выбраны так, чтобы удовлетворить начальным условиям).

Частное решение системы уравнений (34.1) находится аналогично одномерному случаю. Например, если нестационарные силы являются гармоническими функциями времени

$$Q_j(t) = Q_j^0 \cos(\omega_j t + \beta_j) \quad (j = 1, 2, \dots, s), \quad (34.20)$$

то, заменяя эти функции соответствующими комплексными выражениями и представляя решение полученной системы в виде

$$\xi_k = a_k^0 e^{i\Delta \beta_k^0} e^{i(\omega_j t + \beta_j)} \quad (k = 1, 2, \dots, s), \quad (34.21)$$

после соответствующих подстановок получим

$$\sum_{k=1}^s \{a_{jk} \lambda_k^s + (b_{jk} - \gamma_{jk}) \lambda_k + c_{jk}\} a_k^0 e^{i\Delta \beta_k^0} = Q_j^0 \quad (j = 1, 2, \dots, s), \quad (34.22)$$

где $\lambda_k = i\omega_k$. Эта система линейных неоднородных уравнений имеет следующее решение:

$$a_k^0 e^{i\Delta \beta_k^0} = \frac{\Delta^k(\lambda_j)}{\Delta(\lambda_k)} \quad (k = 1, \dots, s), \quad (34.23)$$

где $\Delta(\lambda_j)$ — характеристический детерминант системы (33.10), взятый при значении $\lambda = \lambda_j$, а $\Delta^k(\lambda_j)$ — детерминант, полученный из характеристического заменой элементов k -го столбца на столбец, составленный из $Q_1^0, Q_2^0, \dots, Q_s^0$. Так как характеристическое уравнение имеет $2s$ корней λ_j , то $\Delta(\lambda_j)$ можно представить в виде произведения

$$\Delta(\lambda_j) = a \prod_{\alpha=1}^{2s} (\lambda_j - \lambda_\alpha), \quad (34.24)$$

где a — некоторая постоянная. Если все корни характеристического уравнения комплексны, то детерминант $\Delta(\lambda_j)$ целесообразно свести к произведению s сомножителей вида

$$(\lambda_j - \lambda_\alpha^+) (\lambda_j - \lambda_\alpha^-) = \lambda_j^2 - (\lambda_\alpha^+ + \lambda_\alpha^-) \lambda_j + \lambda_\alpha^+ \cdot \lambda_\alpha^-. \quad (34.25)$$

Учитывая, что

$$\lambda_{\alpha}^{+} + \lambda_{\alpha}^{-} = -2\mu_{\alpha}, \quad \lambda_{\alpha}^{+}\lambda_{\alpha}^{-} = \omega_{0\alpha}^2, \quad (34.26)$$

где $\omega_{0\alpha}^2 = \mu_{\alpha}^2 + \omega_{\alpha}^2$, характеристический детерминант (34.24) можно представить в виде

$$\Delta(\lambda_e) = a \prod_{\alpha=1}^s \{(\omega_{0\alpha}^2 - \omega_e^2) + i2\mu_{\alpha}\omega_e\}. \quad (34.27)$$

Умножая числитель и знаменатель правых частей (34.23) на $\Delta^*(\lambda_e)$, приходим к выводу, что амплитуды a_k^e обратно пропорциональны произведению характерных резонансных сомножителей, поскольку

$$\Delta(\lambda_e)\Delta(\lambda_e^*) \sim \prod_{\alpha=1}^s \{(\omega_{0\alpha}^2 - \omega_e^2)^2 + 4\mu_{\alpha}^2\omega_e^2\}. \quad (34.28)$$

Таким образом, если затухание достаточно мало, то каждая амплитуда a_k^e будет иметь s резонансных пиков на s частотах $\omega_e \approx \omega_{0\alpha}$ ($\alpha = 1, 2, \dots, s$). Эти максимумы обращаются в бесконечность, если диссипация энергии отсутствует, т. е. все $\mu_{\alpha} \rightarrow 0$. В этом случае

$$a_k^e \sim \frac{1}{s \prod_{\alpha=1}^s (\omega_{\alpha}^2 - \omega_e^2)} \quad (k = 1, 2, \dots, s). \quad (34.29)$$

Пример 34.1. Движение системы при наличии силы, действующей на конечном интервале времени.

На систему с одной степенью свободы, собственной частотой ω и коэффициентом a , играющим роль «массы», в течение промежутка времени t_1 действует постоянная сила Q_0 . Найти отклонение системы от начального положения (предполагается, что это положение является положением устойчивого равновесия), если в начальный момент времени система покоилась.

Уравнением движения системы (см. (34.18)) является уравнение

$$\ddot{\xi} + \omega^2\xi = \frac{1}{a} Q_e(t),$$

где

$$Q_e(t) = \begin{cases} Q_0, & 0 \leq t \leq t_1, \\ 0, & t_1 \leq t. \end{cases}$$

Его решение можно получить, воспользовавшись (34.19). Однако более наглядным является непосредственное решение уравнений движения на двух интервалах времени с последующим «сшиванием» этих решений. Учитывая, что

$$\ddot{\xi} + \omega^2\xi = \frac{1}{a} Q_0 \quad (0 \leq t \leq t_1)$$

и

$$\ddot{\xi} + \omega^2 \xi = 0 \quad (t_1 < t)$$

находим решение первого уравнения

$$\xi = \frac{2Q_0}{a\omega^2} \sin^2 \frac{\omega t}{2} \quad (0 < t < t_1)$$

(здесь использованы начальные условия $\xi_0 = 0$, $\dot{\xi}_0 = 0$), а также общее решение второго уравнения

$$\xi = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t \quad (t_1 < t),$$

где постоянные C_1 и C_2 должны быть выбраны из условия непрерывности координаты и скорости при $t = t_1$. Пользуясь этими условиями, получаем

$$C_1 = \frac{Q_0}{a\omega^2} (\cos \omega t_1 - 1),$$

$$C_2 = \frac{Q_0}{a\omega^2} \sin \omega t_1.$$

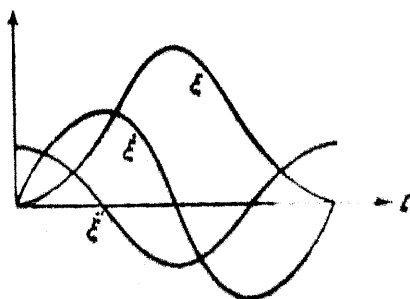


Рис. 34.2.

Соответственно решение, справедливое для $t \geq t_1$, оказывается равным

$$\xi = \frac{2Q_0}{a\omega^2} \sin^2 \frac{\omega t_1}{2} \cos \left(\omega t - \frac{\omega t_1}{2} + \frac{3\pi}{2} \right).$$

Отсюда видно, что если время действия силы t_1 равно (или кратно) собственному периоду системы $2\pi/\omega$, то после действия силы система останется в положении устойчивого равновесия (рис. 34.2).

Пример 34.2. Вынужденные колебания под действием силы, экспоненциально спадающей со временем.

Пусть система с одной степенью свободы, собственной частотой ω , коэффициентом затухания μ и массой a , играющим роль массы, в начальный момент времени $t = 0$ покоилась в положении устойчивого равновесия. Найти движение системы от положения равновесия под действием силы $Q_0 e^{-\mu t}$.

Используя (34.13) и (34.19), запишем уравнение движения системы

$$\ddot{\xi} + 2\mu\dot{\xi} + \omega_0^2 \xi = \frac{Q_0}{a} e^{-\mu t} \quad (\omega_0^2 = \omega^2 + \mu^2)$$

и его решение в виде интеграла

$$\xi = \frac{Q_0}{a\omega} e^{-\mu t} \int_0^t \sin \omega(t - \tau) d\tau.$$

Отсюда окончательно найдем

$$\xi = \frac{2Q_0}{a\omega^3} e^{-\mu t} \sin^2\left(\frac{\omega t}{2}\right).$$

Пример 34.3. Гашение колебаний.

Исследуем колебания системы двух маятников, отличающихся от тех, которые были рассмотрены в примере 33.1, только массами точек (см. рис. 33.1), предполагая, что на первую точку массы m_1 , кроме пружины, действует сила, направленная по горизонтали и изменяющаяся по гармоническому закону с частотой ω_e и амплитудой Q_0 . Как выбрать массу второго маятника m_2 и жесткость κ пружины, соединяющей оба маятника, чтобы амплитуда колебаний первого маятника была исчезающе малой?

Учитывая некоторые результаты примера 33.1, запишем кинетическую и потенциальную энергии системы в виде

$$T = \frac{m_1}{2} l^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{m_2}{2} l^2 \dot{\varphi}_2^2,$$

$$U = \frac{1}{2} \{ (m_1 g l + \kappa l^2) \varphi_1^2 + (m_2 g l + \kappa l^2) \varphi_2^2 - 2\kappa l^2 \varphi_1 \varphi_2 \}$$

(здесь φ_1 и φ_2 — углы отклонения маятников от положения устойчивого равновесия). Обобщенные силы, соответствующие нестационарной силе, равны (см. (26.17))

$$Q_{1e} = Q_0 \cos \omega_e t \frac{\partial y_1}{\partial \varphi_1} = Q_0 l \cos \omega_e t, \quad Q_{2e} = 0.$$

Используя полученные функции, найдем уравнения движения системы (см. (34.1))

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_1 + \left(\omega_0^2 + \frac{\kappa}{m_1} \right) \varphi_1 - \frac{\kappa}{m_1} \varphi_2 &= \frac{Q_0}{m_1 l} \cos \omega_e t, \\ -\frac{\kappa}{m_2} \varphi_1 + \ddot{\varphi}_2 + \left(\omega_0^2 + \frac{\kappa}{m_2} \right) \varphi_2 &= 0, \end{aligned}$$

где $\omega_0^2 = g/l$.

Уравнения для амплитуд и характеристическое уравнение этой линейной системы имеют вид

$$\begin{aligned} \left(\lambda^2 + \omega_0^2 + \frac{\kappa}{m_1} \right) C_1 - \frac{\kappa}{m_1} C_2 &= 0, \\ -\frac{\kappa}{m_2} C_1 + \left(\lambda^2 + \omega_0^2 + \frac{\kappa}{m_2} \right) C_2 &= 0, \\ \Delta(\lambda) = \lambda^4 + \lambda^2 \left(2\omega_0^2 + \frac{\kappa}{\mu} \right) + \omega_0^2 \left(\omega_0^2 + \frac{\kappa}{\mu} \right) &= 0, \end{aligned}$$

где $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$. Отсюда получим собственные значения λ и квадраты

собственных частот системы

$$\lambda_{1,2}^2 = -\omega_0^2, \quad \lambda_{3,4}^2 = -\omega_0^2 - \frac{x}{\mu},$$

$$\omega_1^2 = \frac{g}{l}, \quad \omega_2^2 = \frac{g}{l} + \frac{x}{\mu},$$

а также соотношения амплитуд

$$C_2^{(1,2)} = C_1^{(1,2)}, \quad C_2^{(3,4)} = -\frac{m_1}{m_2} C_1^{(3,4)}.$$

Это дает возможность найти общее решение для собственных колебаний маятников (см. (32.9))

$$\varphi_1 = \theta_1 + \theta_2, \quad \varphi_2 = \theta_1 - \frac{m_1}{m_2} \theta_2,$$

где

$$\theta_1 = a_1 \cos(\omega_1 t + \beta_1), \quad \theta_2 = a_2 \cos(\omega_2 t + \beta_2).$$

Амплитуды частного решения уравнений движения (см. (34.20) и (34.21)) определяются из уравнений

$$\left(\lambda_e^2 + \omega_0^2 + \frac{x}{m_1}\right) C_{1e} - \frac{x}{m_1} C_{2e} = \frac{Q_0}{m_1 l},$$

$$-\frac{x}{m_2} C_{1e} + \left(\lambda_e^2 + \omega_0^2 + \frac{x}{m_2}\right) C_{2e} = 0,$$

где $\lambda_e = i\omega_e$. Отсюда получим, что

$$C_{1e} = \frac{Q_0}{m_1 l} \frac{\omega_0^2 + \frac{x}{m_2} - \omega_e^2}{\Delta(\omega_e)}, \quad C_{2e} = \frac{Q_0 x}{m_1 m_2 l} \frac{1}{\Delta(\omega_e)},$$

где

$$\Delta(\omega_e) = (\omega_1^2 - \omega_e^2)(\omega_2^2 - \omega_e^2).$$

Общее решение исходных уравнений складывается из общего решения, описывающего собственные колебания системы, и частного решения, описывающего вынужденные колебания:

$$\varphi_1 = \theta_1 + \theta_2 + C_{1e} \cos \omega_e t,$$

$$\varphi_2 = \theta_1 - \frac{m_1}{m_2} \theta_2 + C_{2e} \cos \omega_e t.$$

Если, например, оба маятника в начальный момент времени покоятся в положении равновесия, т. е.

$$\varphi_{10} = \varphi_{20} = 0, \quad \dot{\varphi}_{10} = \dot{\varphi}_{20} = 0,$$

тогда

$$\varphi_1 = a_1 \cos \omega_1 t + a_2 \cos \omega_2 t + C_{1e} \cos \omega_e t,$$

$$\varphi_2 = a_1 \cos \omega_1 t - \frac{m_1}{m_2} a_2 \cos \omega_2 t + C_{2e} \cos \omega_e t,$$

где

$$a_1 = -\frac{1}{1 + \frac{m_2}{m_1}} \left(C_{1e} + \frac{m_2}{m_1} C_{2e} \right),$$

$$a_2 = \frac{m_2}{m_1} \frac{1}{1 + \frac{m_2}{m_1}} (C_{2e} - C_{1e}).$$

Это решение дает возможность ответить на вопрос, поставленный в условии примера. Действительно, если $\omega_e > \omega_0$, то можно так подобрать массу второго маятника m_2 и жесткость пружины x , чтобы $C_{1e} = 0$. В этом случае решение принимает вид

$$\varphi_1 = \frac{m_2}{m_1} \frac{C_{2e}}{1 + \frac{m_2}{m_1}} (\cos \omega_2 t - \cos \omega_1 t),$$

$$\varphi_2 = C_{2e} \left(\cos \omega_e t - \frac{\cos \omega_2 t}{1 + \frac{m_2}{m_1}} \right) - \frac{m_2}{m_1} \frac{C_{2e}}{1 + \frac{m_2}{m_1}} \cos \omega_1 t.$$

Если при этом $m_2 \ll m_1$, то амплитуда колебаний первого маятника станет исчезающе малой по сравнению с амплитудой второго маятника. Таким образом, чтобы второй маятник играл роль «гасителя колебаний», должны выполняться следующие требования:

$$\frac{x}{m_2} = \omega_e^2 - \omega_0^2 \quad (\omega_e > \omega_0), \quad m_2 \ll m_1.$$

Гашение колебаний первого маятника связано с тем, что воздействия вынуждающей силы и второго маятника на первый маятник уравновешивают друг друга с точностью до величины порядка m_2/m_1 .

НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

§ 35. Собственные колебания и метод Крылова — Боголюбова

Рассмотрим систему с одной степенью свободы, на которую наложены голономные стационарные связи и действуют заданные стационарные силы; при этом предположим, что у системы имеется положение устойчивого равновесия. Разложение кинетической, потенциальной и диссипативной функций в окрестности этого положения вплоть до членов второго порядка малости включительно приводит к линейному уравнению. Однако во многих практически важных случаях возникает необходимость исследования колебаний с достаточно большими амплитудами и скоростями. В таких случаях линейное приближение оказывается недостаточным и приходится учитывать последующие члены разложений, приводящие к нелинейным уравнениям. Если при этом отклонения от положения равновесия и скорости точек не слишком велики, то соответствующие уравнения будут описывать малые нелинейные колебания.

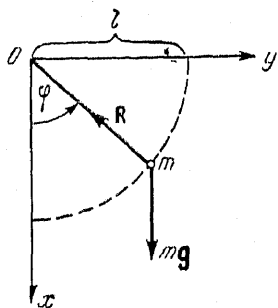


Рис. 35.1.

Изучим особенности таких колебаний на примере математического маятника, помещенного в среду с «линейным» сопротивлением (рис. 35.1). Его кинетическая и потенциальная энергия, а также диссипативная функция равны

$$T = \frac{ml^2}{2} \dot{\varphi}^2, \quad U = mgl(1 - \cos \varphi), \quad D = \frac{k l^2}{2} \dot{\varphi}^2.$$

Разлагая потенциальную энергию в положении устойчивого равновесия $\varphi_{eq} = 0$ с точностью до членов четвертого порядка малости включительно, получим

$$U = mgl \left(\frac{\varphi^2}{2!} - \frac{\varphi^4}{4!} \right),$$

а используя (27.23) и (27.26), найдем соответствующее уравнение Лагранжа

$$\ddot{\varphi} + 2\mu \dot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = \frac{\omega_0^4}{3!} \varphi^3,$$

где $\omega_0^2 = g/l$, $2\mu = k/m$. Если в этом уравнении пренебречь нелинейным членом, пропорциональным φ^3 , то приходим к линейному уравнению, решением которого в случае $\omega_0 > \mu$ является функция

$$\varphi = a_0 e^{-\mu t} \cos(\omega t + \psi_0),$$

где $\omega^2 = \omega_0^2 - \mu^2$. Если же не пренебрегать нелинейным членом, то, учитывая его малость по сравнению с линейным членом, пропорциональным φ , можно предположить, что решение, описывающее нелинейное колебание, по форме близко к решению линейного уравнения, т. е.

$$\varphi \approx a \cos \psi, \quad (35.1)$$

где a и ψ — неизвестные амплитуда и фаза нелинейного колебания.

Величина обобщенной силы, связанной с отклонением маятника от вертикали и пропорциональной $-\varphi + \varphi^3/6$, меньше величины той же силы в линейном приближении, причем различие в этих значениях тем больше, чем больше отклонение маятника от вертикали (см., например, рис. 30.1). Следовательно, первая производная фазы ψ по времени или *мгновенная частота $\dot{\psi}$ нелинейных колебаний* маятника будет меньше собственной частоты ω_0 его линейных колебаний и *будет зависеть от амплитуды колебаний*. В связи с этим можно допустить, что для собственных нелинейных колебаний, вообще говоря, имеет место следующая зависимость:

$$\dot{\psi} = \omega(a), \quad (35.2)$$

где $\omega(a)$ — неизвестная функция, вид которой определяется видом обобщенной силы.

Предположение об изменении амплитуды нелинейного колебания, по существу, также связано с допущением (35.1) о «близости» нелинейного и линейного колебаний в течение одного периода. Действительно, в линейном приближении амплитуда математического маятника изменяется по закону

$$a = a_0 e^{-\mu t}$$

и удовлетворяет уравнению

$$\dot{a} = -\mu a.$$

Поэтому будем считать, что и в общем случае *производная от амплитуды нелинейных колебаний является функцией амплитуды*, т. е.

$$\dot{a} = f(a). \quad (35.3)$$

Характерным для нелинейных колебаний является наличие «обертонов», т. е. частот, кратных основной частоте. В частности, это можно видеть на примере математического маятника, уравнение

которого содержит нелинейный член, приводящий к появлению высшей гармоники (см. (35.1)):

$$\varphi^3 \approx a^3 \cos^3 \psi = \frac{a^3}{4} (3 \cos \psi + \cos 3\psi).$$

Наконец, в силу нелинейности уравнения движения его *общее решение не сводится к сумме частных решений*, и, следовательно, принцип суперпозиции не имеет места. Таковы особенности нелинейных малых колебаний или, как говорят, *слабо нелинейных колебаний*.

Рассмотрим уравнение слабо нелинейных собственных одномерных колебаний вида

$$\ddot{\xi} + \omega_0^2 \xi = \varepsilon Q(\xi, \dot{\xi}), \quad (35.4)$$

где ε — параметр, указывающий на малость функции εQ по сравнению с линейным членом (заметьте, что порядок малости членов в этом и последующих уравнениях определяется так, чтобы при $\varepsilon \rightarrow 0$ имел место случай линейных гармонических колебаний). Одним из методов решения этого уравнения является метод Крылова — Боголюбова.

Учитывая (35.1), решение уравнения (35.4) будем искать в виде ряда

$$\xi = a \cos \psi + \varepsilon \xi_1(a, \psi) + \varepsilon^2 \xi_2(a, \psi) + \dots, \quad (35.5)$$

где $\varepsilon \xi_1$, $\varepsilon^2 \xi_2$ — неизвестные функции амплитуды a и периодические функции фазы ψ . В свою очередь *амплитуда a и фаза ψ являются неизвестными функциями времени, подчиненными «своему» дифференциальным уравнениям* (см. (35.3) и (35.2))

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \varepsilon f_1(a) + \varepsilon^2 f_2(a) + \dots, \\ \dot{\psi} &= \omega_0 + \varepsilon \omega_1(a) + \varepsilon^2 \omega_2(a) + \dots \end{aligned} \quad (35.6)$$

Правые части этих уравнений могут быть найдены, поскольку ряд (35.5), в котором a и ψ как функции времени определяются уравнениями вида (35.6), должен удовлетворять исходному уравнению (35.4).

Неизвестные функции $\varepsilon \xi_1$, $\varepsilon^2 \xi_2$, ..., εf_1 , $\varepsilon^2 f_2$, ..., $\varepsilon \omega_1$, $\varepsilon^2 \omega_2$, ... определяются с некоторым произволом, который можно исключить, если потребовать, чтобы a явилась полной амплитудой основной гармоники. Тогда функции $\varepsilon \xi_1$, $\varepsilon^2 \xi_2$, ... не будут содержать членов, пропорциональных $\cos \psi$ и $\sin \psi$, и будут удовлетворять условиям:

$$\int_0^{2\pi} \varepsilon^n \xi_n(a, \psi) \cos \psi d\psi = 0, \quad \int_0^{2\pi} \varepsilon^n \xi_n(a, \psi) \sin \psi d\psi = 0 \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (35.7)$$

Общая схема решения исходного уравнения заключается в отыскании функций εf_1 , $\varepsilon \omega_1$, $\varepsilon \xi_1$ и т. д. по заданной функции εQ ; при этом

амплитуда и фаза как функции времени будут определяться по найденным функциям εf_1 , $\varepsilon \omega_1$ и т. д. с помощью уравнений (35.6).

Найдем решение исходного уравнения в первом приближении. Прежде чем подставить ряд (35.5) в уравнение (35.4), получим величины ξ и $\dot{\xi}$ как функции a и ψ с точностью до ε включительно. Дифференцируя первые два члена ряда (35.5) по времени, найдем

$$\xi = \dot{a} \cos \psi - a \sin \psi \cdot \dot{\psi} + \varepsilon \left\{ \frac{\partial \xi_1}{\partial a} \dot{a} + \frac{\partial \xi_1}{\partial \psi} \dot{\psi} \right\}. \quad (35.8)$$

Учитывая, что a и ψ подчинены уравнениям (35.6), в результате их подстановки с той же точностью получим

$$\xi = -\omega_0 a \sin \psi + \varepsilon \left\{ f_1 \cos \psi - \omega_1 a \sin \psi + \omega_0 \frac{\partial \xi_1}{\partial \psi} \right\}. \quad (35.9)$$

Дифференцируя (35.9) по времени, получим

$$\begin{aligned} \dot{\xi} = & -\omega_0 \dot{a} \sin \psi - \omega_0 a \cos \psi \cdot \dot{\psi} + \varepsilon \left\{ \frac{df_1}{da} \dot{a} \cos \psi - f_1 \sin \psi \cdot \dot{\psi} - \right. \\ & \left. - \frac{d\omega_1}{da} \dot{a} a \sin \psi - \omega_1 \dot{a} \sin \psi - \omega_1 a \cos \psi \cdot \dot{\psi} + \omega_0 \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial a \partial \psi} \dot{a} + \omega_0 \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial \psi^2} \dot{\psi} \right\}, \end{aligned} \quad (35.10)$$

a подставляя сюда (35.6), найдем с точностью до ε включительно

$$\dot{\xi} = -\omega_0^2 a \cos \psi + \varepsilon \left\{ -2\omega_0 a \omega_1 \cos \psi - 2\omega_0 f_1 \sin \psi + \omega_0^2 \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial \psi^2} \right\}. \quad (35.11)$$

Формулы (35.11) и (35.5) дают возможность определить левую часть исходного уравнения как функцию a и ψ . Для отыскания с точностью до ε правой части (35.4) как функции a и ψ нужно разложить $\varepsilon Q(\xi, \dot{\xi})$ в «точке» $a \cos \psi, -\omega_0 a \sin \psi$:

$$\varepsilon Q(\xi, \dot{\xi}) = \varepsilon Q(a \cos \psi, -\omega_0 a \sin \psi). \quad (35.12)$$

Подставляя (35.5), (35.11) и (35.12) в исходное уравнение (35.4), с указанной точностью получим

$$\omega_0^2 \left(\varepsilon \xi_1 + \frac{\partial^2 \varepsilon \xi_1}{\partial \psi^2} \right) = 2\omega_0 a \varepsilon \omega_1 \cos \psi + 2\omega_0 \varepsilon f_1 \sin \psi + \varepsilon Q_0(a, \psi), \quad (35.13)$$

где $\varepsilon Q_0(a, \psi) = \varepsilon Q(a \cos \psi, -\omega_0 a \sin \psi)$.

Соотношение (35.13) дает возможность определить неизвестные функции $\varepsilon \xi_1$, εf_1 и $\varepsilon \omega_1$ по заданной функции εQ_0 . Действительно, представим заданную функцию εQ_0 и неизвестную функцию $\varepsilon \xi_1$ (по предположению, она является периодической функцией ψ) в виде рядов Фурье

$$\varepsilon Q_0(a, \psi) = \sum_{n=0}^{\infty} \{ \varepsilon \beta_n(a) \cos n\psi + \varepsilon \alpha_n(a) \sin n\psi \}, \quad (35.14)$$

где $\varepsilon\beta_n(a)$ и $\varepsilon\alpha_n(a)$ — известные коэффициенты Фурье, и

$$\varepsilon\xi_1(a, \psi) = \sum_{n=0}^{\infty} \{ \varepsilon\nu_n(a) \cos n\psi + \varepsilon\gamma_n(a) \sin n\psi \}, \quad (35.15)$$

где $\varepsilon\nu_n(a)$ и $\varepsilon\gamma_n(a)$ ($n=0, 2, 3, \dots$) — коэффициенты Фурье, подлежащие определению, а коэффициенты $\varepsilon\nu_1$ и $\varepsilon\gamma_1$, согласно (35.7), равны

$$\varepsilon\nu_1 = \varepsilon\gamma_1 = 0. \quad (35.16)$$

Подставляя (35.14) и (35.15) в (35.13) и приравнявая коэффициенты при одинаковых гармониках, находим εf_1 , $\varepsilon\omega_1$ и коэффициенты $\varepsilon\nu_n$ и $\varepsilon\gamma_n$ *):

$$\varepsilon f_1 = -\frac{\varepsilon\alpha_1}{2\omega_0}, \quad \varepsilon\omega_1 = -\frac{\varepsilon\beta_1}{2\omega_0 a}; \quad (35.17)$$

$$\varepsilon\nu_0 = \frac{\varepsilon\beta_0}{\omega_0^2}, \quad \varepsilon\nu_n = \frac{\varepsilon\beta_n}{(1-n^2)\omega_0^2}, \quad \varepsilon\gamma_n = \frac{\varepsilon\alpha_n}{(1-n^2)\omega_0^2} \quad (n=2, 3, \dots). \quad (35.18)$$

Используя (35.17), получим дифференциальные уравнения (35.6) для амплитуды и фазы

$$\dot{a} = -\frac{\varepsilon\alpha_1(a)}{2\omega_0}, \quad \dot{\psi} = \omega_0 - \frac{\varepsilon\beta_1(a)}{2\omega_0 a}. \quad (35.19)$$

Таким образом, в первом приближении производная амплитуды по времени и мгновенная частота определяются коэффициентами Фурье заданной функции $\varepsilon Q_0(a, \psi)$, т. е. коэффициентами Фурье правой (вообще говоря, нелинейной) части исходного уравнения, взятой с точностью до ε ; производная амплитуды определяется коэффициентом Фурье при $\sin \psi$, а производная фазы определяется коэффициентом Фурье при $\cos \psi$.

Подстановка (35.18) в (35.15) приведет к определению функции

$$\varepsilon\xi_1 = \frac{\varepsilon\beta_0(a)}{\omega_0^2} + \frac{1}{\omega_0^2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{1-n^2} \{ \varepsilon\beta_n(a) \cos n\psi + \varepsilon\alpha_n(a) \sin n\psi \}. \quad (35.20)$$

*) Приведем промежуточные вычисления:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon\xi_1}{\partial \psi^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-n^2) (\varepsilon\nu_n \cos n\psi + \varepsilon\gamma_n \sin n\psi),$$

$$\omega_0^2 \left\{ \varepsilon\nu_0 + \sum_{n=2}^{\infty} (1-n^2) (\varepsilon\nu_n \cos n\psi + \varepsilon\gamma_n \sin n\psi) \right\} = 2\omega_0 a \varepsilon\omega_1 \cos \psi + 2\omega_0 \varepsilon f_1 \sin \psi + \\ + \varepsilon\beta_0 + \varepsilon\beta_1 \cos \psi + \varepsilon\alpha_1 \sin \psi + \sum_{n=2}^{\infty} (\varepsilon\beta_n \cos n\psi + \varepsilon\alpha_n \sin n\psi).$$

Решая систему уравнений (35.19), получим амплитуду a и фазу ψ как функции времени и начальных значений a_0, ψ_0 . Используя эти функции, с помощью (35.5) и (35.20) найдем решение исходного уравнения

$$\xi = a(t) \cos \psi(t) + \varepsilon \xi_1(a(t), \psi(t)).$$

Проводя аналогичные вычисления с точностью до ε^2 , можно получить решение во втором приближении. Для этого прежде всего определим $\xi, \dot{\xi}$ и $\varepsilon Q(\xi, \dot{\xi})$ как функции от a и ψ с точностью до ε^2 :

$$\xi = -\omega_0 a \sin \psi + \varepsilon \left\{ f_1 \cos \psi - a \omega_1 \sin \psi + \omega_0 \frac{\partial \xi_1}{\partial \psi} \right\} + \varepsilon^2 \left\{ f_2 \cos \psi - a \omega_2 \sin \psi + f_1 \frac{\partial \xi_1}{\partial a} + \omega_1 \frac{\partial \xi_1}{\partial \psi} + \omega_0 \frac{\partial \xi_2}{\partial \psi} \right\}; \quad (35.21)$$

$$\dot{\xi} = -\omega_0^2 a \cos \psi + \varepsilon \left\{ -2\omega_0 a \omega_1 \cos \psi - 2\omega_0 f_1 \sin \psi + \omega_0^2 \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial \psi^2} \right\} + \varepsilon^2 \left\{ \left(-2\omega_0 a \omega_2 - a \omega_1^2 + f_1 \frac{df_1}{da} \right) \cos \psi - \left(2\omega_0 f_2 + 2\omega_1 f_1 + a f_1 \frac{d\omega_1}{da} \right) \sin \psi + 2\omega_0 f_1 \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial a \partial \psi} + 2\omega_0 \omega_1 \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial \psi^2} + \omega_0^2 \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial \psi^2} \right\}; \quad (35.22)$$

$$\varepsilon Q(\xi, \dot{\xi}) = \varepsilon Q(a \cos \psi, -\omega_0 a \sin \psi) + \varepsilon^2 \left\{ \left(\frac{\partial Q}{\partial \xi} \right)_{a \cos \psi, -a \omega_0 \sin \psi} \cdot \xi_1 + \left(\frac{\partial Q}{\partial \dot{\xi}} \right)_{a \cos \psi, -a \omega_0 \sin \psi} \left[f_1 \cos \psi - \omega_1 a \sin \psi + \omega_0 \frac{\partial \xi_1}{\partial \psi} \right] \right\}. \quad (35.23)$$

Подставляя (35.5), (35.22) и (35.23) в уравнение (35.4) и приравнявая члены порядка ε , получим соотношение (35.13), а приравнявая члены порядка ε^2 , найдем уравнение, определяющее второе приближение:

$$\omega_0^2 \left(\varepsilon^2 \xi_2 + \frac{\partial^2 \varepsilon^2 \xi_2}{\partial \psi^2} \right) = 2\omega_0 a \varepsilon^2 \omega_2 \cos \psi + 2\omega_0 \varepsilon^2 f_2 \sin \psi + \varepsilon^2 Q_1(a, \psi), \quad (35.24)$$

здесь

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 Q_1(a, \psi) = & \left(\frac{\partial \varepsilon Q}{\partial \xi} \right)_{a \cos \psi, -a \omega_0 a \sin \psi} \varepsilon \xi_1 + \\ & + \left(\frac{\partial \varepsilon Q}{\partial \dot{\xi}} \right)_{a \cos \psi, -a \omega_0 a \sin \psi} \left[\varepsilon f_1 \cos \psi - a \varepsilon \omega_1 \sin \psi + \omega_0 \frac{\partial \varepsilon \xi_1}{\partial \psi} \right] + \\ & + \left(a \varepsilon^2 \omega_1^2 + \varepsilon f_1 \frac{d \varepsilon f_1}{da} \right) \cos \psi + \left(2 \varepsilon \omega_1 + a \frac{d \varepsilon \omega_1}{da} \right) \varepsilon f_1 \sin \psi - \\ & - 2\omega_0 \varepsilon f_1 \frac{\partial^2 \varepsilon \xi_1}{\partial a \partial \psi} - 2\omega_0 \varepsilon \omega_1 \frac{\partial^2 \varepsilon \xi_1}{\partial \psi^2}, \end{aligned}$$

а $\varepsilon f_1, \varepsilon \omega_1$ и $\varepsilon \xi_1$ — функции амплитуды и фазы, полученные в первом приближении (см. (35.17) и (35.20)). Разлагая функцию $\varepsilon^2 Q_1(a, \psi)$ в ряд Фурье, представляя неизвестную $\varepsilon^2 \xi_2$ также в виде ряда Фурье и используя условия (35.7) для функции $\varepsilon^2 \xi_2$, определим $\varepsilon^2 f_2, \varepsilon^2 \omega_2$ и $\varepsilon^2 \xi_2$. В результате в полной

аналогии с (35.17), (35.18) и (35.20) найдем

$$\varepsilon^2 f_2 = -\frac{\varepsilon^2 \alpha_1^{(1)}}{2\omega_0}, \quad \varepsilon^2 \omega_2 = -\frac{\varepsilon^2 \beta_1^{(1)}}{2\omega_0 a}, \quad (35.25)$$

$$\varepsilon^2 \xi_2 = \frac{\varepsilon^2 \beta_0^{(1)}}{\omega_0^2} + \frac{1}{\omega_0^2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{1-n^2} [\varepsilon^2 \beta_n^{(1)} \cos n\psi + \varepsilon^2 \alpha_n^{(1)} \sin n\psi], \quad (35.26)$$

где $\varepsilon^2 \beta_n^{(1)}$ и $\varepsilon^2 \alpha_n^{(1)}$ — коэффициенты Фурье от функции $\varepsilon^2 Q_1(a, \psi)$.

Рассмотренную процедуру последовательных приближений можно продолжить. Однако применимость метода Крылова — Боголюбова практически определяется не сходимостью этих приближений при увеличении их числа, а асимптотическими свойствами рядов (35.5) и (35.6) при фиксированном числе членов ряда и ε , стремящемся к нулю.

Заметим, что на достаточно большом интервале времени первому приближению для функций \dot{a} и ψ соответствует нулевое приближение для ξ , а второму приближению для \dot{a} и ψ соответствует первое приближение для ξ и т. д. *) Действительно, возьмем за меру большого временного интервала время $\sim 1/\varepsilon$. Для таких интервалов конечные приращения амплитуды Δa и фазы $\Delta(\psi - \omega_0 t)$ можно записать в виде (см. уравнения (35.6) в первом приближении)

$$\Delta a \sim \varepsilon \bar{f}_1 t \sim \bar{f}_1, \quad \Delta(\psi - \omega_0 t) \sim \varepsilon \bar{\omega}_1 t \sim \bar{\omega}_1, \quad (35.27)$$

где \bar{f}_1 и $\bar{\omega}_1$ — средние значения f_1 и ω_1 на рассматриваемом интервале времени. Таким образом, погрешностям порядка ε в значениях производных \dot{a} и ψ соответствуют погрешности нулевого порядка в значениях самих амплитуды и фазы. Поэтому для достаточно больших интервалов времени в качестве первого и второго приближений нужно брать следующие приближения:

$$\xi = a \cos \psi, \quad \dot{a} = \varepsilon f_1(a), \quad \psi = \omega_0 + \varepsilon \omega_1(a); \quad (35.28)$$

$$\xi = a \cos \psi + \varepsilon \xi_1(a, \psi), \quad \dot{a} = \varepsilon f_1(a) + \varepsilon^2 f_2(a), \quad (35.29)$$

$$\psi = \omega_0 + \varepsilon \omega_1(a) + \varepsilon^2 \omega_2(a).$$

Пример 35.1. Нелинейные колебания математического маятника в среде с «линейной» силой сопротивления.

Пусть математический маятник совершает малые нелинейные колебания в среде, сила сопротивления которой пропорциональна первой степени скорости точки. Найти закон движения маятника.

Перепишем уравнение движения маятника, полученное на стр. 302, в виде (35.4)

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = \varepsilon Q(\varphi, \dot{\varphi}),$$

*) См. [19], стр. 42—43.

где $\varepsilon Q(\varphi, \dot{\varphi}) = \frac{\omega_0^3}{3!} \varphi^3 - 2\mu\dot{\varphi}$. Затем в первом приближении определим правую часть этого уравнения как функцию a и ψ (см. (35.13)):

$$\varepsilon Q_0(a, \psi) = \frac{\omega_0^3}{3!} a^3 \cos^3 \psi + 2\mu\omega_0 a \sin \psi.$$

Разлагая эту функцию в ряд Фурье, что в данном случае сводится к использованию формулы

$$\cos^3 \psi = \frac{3}{4} \cos \psi + \frac{1}{4} \cos 3\psi,$$

найдем

$$\begin{aligned} \varepsilon Q_0(a, \psi) &= \\ &= \frac{\omega_0^3 a^3}{8} \cos \psi + 2\mu\omega_0 a \sin \psi + \frac{\omega_0^3 a^3}{4!} \cos 3\psi. \end{aligned}$$

Отсюда получим коэффициенты Фурье

$$\varepsilon\beta_1 = \frac{\omega_0^3 a^3}{8}, \quad \varepsilon\alpha_1 = 2\mu\omega_0 a,$$

а следовательно, и уравнения для амплитуды и фазы (см. (35.28))

$$\dot{a} = -\mu a, \quad \dot{\omega} = \dot{\psi} = \omega_0 \left(1 - \frac{a^2}{16}\right).$$

Подставляя решение первого из этих уравнений

$$a = a_0 e^{-\mu t}$$

во второе уравнение, в результате интегрирования найдем угол отклонения маятника как функцию времени

$$\varphi = a_0 e^{-\mu t} \cos \left\{ \omega_0 \left[t + \frac{\varphi_0^3}{32\mu} (e^{-2\mu t} - 1) \right] + \psi_0 \right\}$$

(постоянные интегрирования a_0 и ψ_0 связаны с начальными условиями φ_0 и $\dot{\varphi}_0$).

Итак, в данном примере учет нелинейной потенциальной силы приводит к уменьшению мгновенной частоты ω по сравнению с частотой ω_0 линейных колебаний. С течением времени благодаря сопротивлению амплитуда становится исчезающе малой, поэтому ω стремится к ω_0 (рис. 35.2).

Пример 35.2. Нелинейные колебания маятника в среде с «нелинейной» силой сопротивления.

Найти закон движения математического маятника массы m и длины l , если он совершает слабо нелинейные колебания в среде с квадратичной

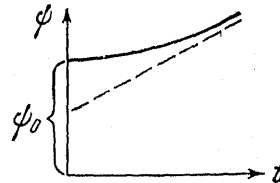
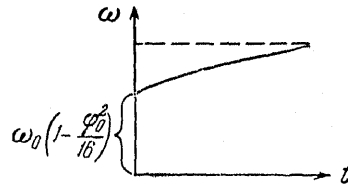
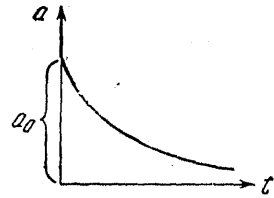


Рис. 35.2.

относительно скорости маятника силой сопротивления (коэффициент сопротивления k).

Уравнения движения рассматриваемого маятника определяются двумя скалярными функциями T , U и силой сопротивления F^d :

$$T = \frac{ml^2}{2} \dot{\varphi}^2, \quad U = -mgl \cos \varphi, \quad F^d = -k |\dot{r}| \dot{r},$$

причем силе сопротивления соответствует обобщенная диссипативная сила, равная

$$Q^d = -k |\dot{r}| \dot{r} \frac{\partial r}{\partial \varphi} = -kl^3 |\dot{\varphi}| \dot{\varphi}.$$

Используя выражения для T , U и Q^d , получим уравнение Лагранжа (см. (27.23))

$$\ddot{\varphi} + \mu |\dot{\varphi}| \dot{\varphi} + \omega_0^2 \sin \varphi = 0,$$

где $\mu = kl/m$, $\omega_0^2 = g/l$. Разлагая $\sin \varphi$ в положении $\varphi_{eq} = 0$, найдем уравнение движения в виде (35.4)

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = \frac{\omega_0^3}{3!} \varphi^3 - \mu |\dot{\varphi}| \dot{\varphi}.$$

Отсюда получим функцию $\varepsilon Q_0(a, \psi)$, определяющую решение в первом приближении по Крылову — Боголюбову:

$$\varepsilon Q_0(a, \psi) = \frac{\omega_0^3}{8} a^3 \cos \psi + \frac{\omega_0^3}{4!} a^3 \cos 3\psi - \mu \omega_0^2 a^2 |\sin \psi| \sin \psi.$$

Чтобы найти необходимые для решения задачи коэффициенты Фурье этой функции, вычислим интегралы

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \mu \omega_0^2 a^2 |\sin \psi| \sin \psi \begin{pmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi \end{pmatrix} d\psi.$$

Записывая первый интеграл в виде

$$\int_0^{\pi} \sin^2 \psi \cos \psi d\psi - \int_{\pi}^{2\pi} \sin^2 \psi \cos \psi d\psi,$$

убедимся, что коэффициент при $\cos \psi$ равен нулю. Представляя второй из интегралов в аналогичном виде

$$\int_0^{\pi} \sin^3 \psi d\psi - \int_{\pi}^{2\pi} \sin^3 \psi d\psi,$$

найдем, что он равен $8/3$. Таким образом, получим следующие коэффициенты Фурье функции $\varepsilon Q_0(a, \psi)$:

$$\varepsilon \beta_1 = \frac{\omega_0^3 a^3}{8}, \quad \varepsilon \alpha_1 = \frac{8\mu \omega_0^2 a^2}{3\pi};$$

они определяют уравнения для a и ψ :

$$\dot{a} = -\frac{4\mu\omega_0}{3\pi} a^3, \quad \dot{\psi} = \omega_0 \left(1 - \frac{a^2}{16}\right).$$

Интегрируя эти уравнения, найдем решение задачи в первом приближении (см. (35.28)):

$$\varphi = \frac{a_0}{1 + \frac{4\mu\omega_0 a_0}{3\pi} t} \cos \left\{ \omega_0 t \left[1 - \frac{a_0^2}{16 \left(1 + \frac{4\mu\omega_0 a_0}{3\pi} t\right)} \right] + \psi_0 \right\}.$$

Пример 35.3. Автоколебания математического маятника.

Подвес маятника жестко скреплен с муфтой, которая надета на вал, вращающийся с постоянной угловой скоростью Ω (рис. 35.3). Сила сухого трения F^d , действующая со стороны вала на маятник,

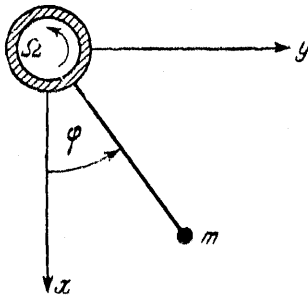


Рис. 35.3.

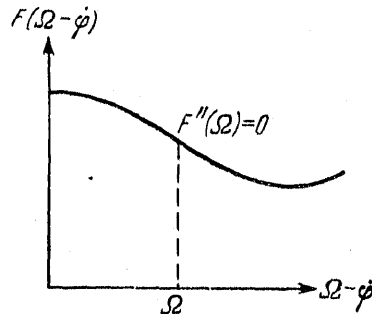


Рис. 35.4.

известна как функция их относительной угловой скорости. Найти амплитуду установившихся колебаний маятника.

Уравнение движения маятника определяется кинетической и потенциальной энергиями (см. предыдущий пример), а также диссипативной силой

$$F^d = F(\Omega - \dot{\varphi}) n_\varphi,$$

где φ — угол отклонения маятника от вертикали. Используя (27.23), получим

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \sin \varphi = \frac{1}{ml} F(\Omega - \dot{\varphi}),$$

где $\omega_0^2 = g/l$.

Сила сухого трения как функция относительной угловой скорости имеет «падающие» участки (рис. 35.4), на которых $F' < 0$. Выберем угловую скорость вращения вала так, чтобы она являлась абсциссой точки перегиба на «падающем» участке функции $F(\Omega)$, тогда $F''(\Omega) = 0$; кроме того, допустим, что $F'''(\Omega) > 0$.

Учитывая, что положение φ_{eq} равновесия маятника определяется соотношением $\sin \varphi_{\text{eq}} = F(\Omega)/mg$, и разлагая обе части исходного уравнения Лагранжа по степеням отклонения $\xi = \varphi - \varphi_{\text{eq}}$ от положения равновесия и скорости $\dot{\xi} = \dot{\varphi}$, получим уравнение для слабо нелинейных колебаний

$$\ddot{\xi} + \omega_0^{*2} \xi = \frac{\omega_0^3 \sin \varphi_{\text{eq}}}{2} \xi^2 + \frac{\omega_0^{*3}}{6} \xi^3 + (x_1 - x_2 \xi^2) \dot{\xi}, \quad (1)$$

где

$$\omega_0^{*2} = \omega_0^2 \cos \varphi_{\text{eq}},$$

$$x_1 = -\frac{F'(\Omega)}{ml} > 0, \quad x_2 = \frac{F'''(\Omega)}{6ml} > 0.$$

Знак обобщенной диссипативной силы, пропорциональной $(x_1 - x_2 \xi^2) \dot{\xi}$, при $\dot{\xi} \rightarrow 0$ совпадает со знаком скорости $\dot{\xi}$; для достаточно заметных значений $\dot{\xi}$ этот знак противоположен знаку $\dot{\xi}$. Это связано с тем, что в качестве «рабочего» участка выбран «падающий» участок функции $F(\Omega - \dot{\varphi})$. Итак, для очень малых $\dot{\xi}$ амплитуда колебаний маятника будет нарастать, а для достаточно заметных $\dot{\xi}$ убывать; следовательно, возможно установление стационарной амплитуды, независимой от начального значения амплитуды.

Изучаемый маятник является типичным примером автоколебательной системы. Такая система состоит из «колебательного контура» (маятника), «источника питания» (вращающегося вала) и «нелинейного элемента» (силы сухого трения), регулирующего поступление энергии в колебательный контур. Автоколебательные (механические и немеханические) системы часто встречаются на практике (например, такой автоколебательной системой является простейший ламповый генератор).

В первом приближении правая часть уравнения (1) как функция a и ψ равна

$$\varepsilon Q_0(a, \psi) = \frac{\omega_0^3 \sin \varphi_{\text{eq}}}{2} a^2 \cos^2 \psi + \frac{\omega_0^{*3}}{6} a^3 \cos^3 \psi - (x_1 - x_2 \omega_0^{*2} a^2 \sin^2 \psi) a \omega_0^* \sin \psi.$$

Выделяя здесь первые гармоники, получим

$$\varepsilon Q_0(a, \psi) = \frac{\omega_0^{*3}}{8} a^3 \cos \psi - \omega_0^* a \left(x_1 - \frac{3x_2}{4} \omega_0^{*2} a^2 \right) \sin \psi + \dots$$

Отсюда, используя (35.14), (35.17) и (35.19), найдем уравнения для амплитуды a и фазы ψ

$$\dot{a} = \frac{x_1 a}{2} \left(1 - \frac{3x_2}{4x_1} \omega_0^{*2} a^2 \right), \quad \dot{\psi} = \omega_0^* \left(1 - \frac{a^2}{16} \right). \quad (2)$$

Интегрируя первое из уравнений (2), получим амплитуду как функцию времени

$$a(t) = \frac{a_0 e^{\frac{x_1}{2} t}}{\left[1 + \frac{3x_2}{4x_1} \omega_0^{*2} a_0^2 (e^{x_1 t} - 1) \right]^{1/2}}$$

и ее значение a_∞ при $t \rightarrow +\infty$:

$$a_\infty = \frac{2}{\omega_0} \sqrt{\frac{-2F''(\Omega)}{F'''(\Omega) \cos \varphi_{\text{eq}}}}, \quad (3)$$

где $\cos \varphi_{\text{eq}} = \sqrt{1 - \left(\frac{F(\Omega)}{mg}\right)^2}$. Из (3) видно, что амплитуда установившихся колебаний не зависит от начального значения амплитуды: достаточно сколь угодно малого начального отклонения от положения равновесия, чтобы амплитуда возросла вплоть до значения a_∞ .

§ 36. Вынужденные колебания и резонанс

Проанализируем физические особенности вынужденных нелинейных колебаний на примере системы с одной степенью свободы, предполагая, что на систему действует малая нестационарная сила, гармонически изменяющаяся со временем: $\varepsilon Q_{e0} \cos \omega_e t$. С этой целью определим среднюю мощность силы

$$\frac{1}{\Delta t} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} \varepsilon Q_{e0} \cos \omega_e t \cdot \dot{\xi} dt \quad (36.1)$$

на некотором интервале времени Δt , причем потребуем, чтобы этот интервал был, с одной стороны, достаточно большим по сравнению с периодом $2\pi/\omega_0$ собственных линейных колебаний, а с другой стороны, достаточно ограниченным с тем, чтобы форма колебаний не успевала заметно измениться (такой выбор Δt возможен ввиду малости внешней силы и нелинейных членов). Учитывая, что на интервале Δt нелинейное колебание близко к линейному (см. (35.1)), т. е.

$$\xi \approx a \cos \psi, \quad \dot{\xi} \approx -a\omega_0 \sin \psi,$$

где $\psi = \omega_0 t + \theta(t)$, и принимая во внимание, что изменения функций $a(t)$ и $\theta(t)$ на интервале Δt малы, для средней мощности получим выражение

$$\frac{\varepsilon Q_{e0} \omega_0 a(t)}{\Delta t} \left\{ \frac{\cos [(\omega_e + \omega_0)t + \theta(t)]}{\omega_e + \omega_0} - \frac{\cos [(\omega_e - \omega_0)t - \theta(t)]}{\omega_e - \omega_0} \right\} \Big|_{t_0}^{t_0 + \Delta t}. \quad (36.2)$$

Отсюда видно, что в *нерезонансном случае*, когда ω_e весьма отличается от ω_0 , мощность вынуждающей силы исчезающе мала,

поскольку $\Delta t \gg 2\pi/\omega_0$. Если же имеет место резонанс, т. е. $\omega_e \approx \omega_0$, то мощность становится порядка ε . Действительно, подставляя в (36.2) $\omega_e = \omega_0 + \Delta\omega$ и устремляя $\Delta\omega$ к нулю, за счет второго слагаемого в фигурных скобках для средней мощности получим выражение:

$$-\varepsilon Q_{e0}(\omega_0) a(t) \sin \theta(t). \quad (36.3)$$

Таким образом, в случае резонанса средняя мощность является функцией как амплитуды a , так и «расстройки фазы» θ .

Основываясь на этом примере, можно предположить, что в резонансном случае как изменение амплитуды, так и мгновенная частота зависят от значений амплитуды a и «расстройки фазы» θ . Что касается нерезонансного случая, то изменение амплитуды и мгновенная частота зависят только от амплитуды (так же как в случае собственных колебаний).

Другая особенность вынужденных нелинейных колебаний заключается в появлении резонанса на так называемых комбинационных частотах. Это можно видеть из того, что в решении уравнения вынужденных нелинейных колебаний благодаря наличию нелинейных членов войдут высшие гармоники с частотами, примерно равным $n\omega_0$. Рассматривая среднюю мощность, вносимую в систему «с помощью» этих гармоник, т. е. подставляя в интеграл (36.1) не $\sin(\omega_e t + \theta)$ а $\sin(n\omega_e t + \theta_n)$, приходим к выводу о возможности резонанса на частоте примерно равной $n\omega_0$. В общем случае, когда правая часть уравнения (35.4) более сложным образом зависит от аргумента $\omega_e t$, возможен возникновение резонанса на комбинационных частотах вида $n\omega_0 + m\omega_e$, где n и m — целые числа. Действительно, разложение функции εQ в ряд Фурье приводит к появлению гармоник с указанными частотами. Итак, в общем случае возможен резонанс вынужденных колебаний на частотах

$$\omega_e \approx \frac{q}{p} \omega_0, \quad (36.4)$$

где p и q — целые взаимно простые числа (если $p = q$, то резонанс называется главным).

Изложим метод Крылова — Боголюбова применительно к вынужденным нелинейным колебаниям. В качестве исходного уравнения рассмотрим уравнение вида

$$\ddot{\xi} + \omega_0^2 \xi = \varepsilon Q(\xi, \dot{\xi}, \omega_e t), \quad (36.5)$$

где εQ — периодическая функция относительно $\omega_e t$ с периодом 2π . В нерезонансном случае решение уравнения (36.5) будем искать в виде ряда

$$\xi = a \cos \psi + \varepsilon \xi_1(a, \psi, \omega_e t) + \dots, \quad (36.6)$$

где a и ψ подчинены уравнениям (35.6). Подставляя (36.6) в (36.5)

и учитывая (35.6), найдем соотношение, определяющее первое приближение (ср. с (35.13)):

$$\omega_0^2 \frac{\partial^2 \varepsilon \xi_1}{\partial \psi^2} + 2\omega_0 \frac{\partial^2 \varepsilon \xi_1}{\partial \psi \partial t} + \frac{\partial^2 \varepsilon \xi_1}{\partial t^2} + \omega_0^2 \varepsilon \xi_1 = \\ = \varepsilon Q_0(a, \psi, \omega_e t) + 2\omega_0 a \varepsilon \omega_1 \cos \psi + 2\omega_0 \varepsilon f_1 \sin \psi, \quad (36.7)$$

где $\varepsilon Q_0(a, \psi, \omega_e t) = \varepsilon Q(a \cos \psi, -\omega_0 a \sin \psi, \omega_e t)$. Разлагая известную функцию εQ_0 в двойной ряд Фурье по переменным ψ и $\omega_e t$

$$\varepsilon Q_0(a, \psi, \omega_e t) = \sum_{n, m} \varepsilon \alpha_{nm}(a) e^{i(n\omega_e t + m\psi)} \quad (36.8)$$

и представляя в виде ряда Фурье неизвестную функцию $\varepsilon \xi_1$

$$\varepsilon \xi_1(a, \psi, \omega_e t) = \sum_{n, m} \varepsilon \gamma_{nm}(a) e^{i(n\omega_e t + m\psi)}, \quad (36.9)$$

из (36.7) получим

$$\sum_{n, m} [\omega_0^2 - (n\omega_e + m\omega_0)^2] \varepsilon \gamma_{nm} e^{i(n\omega_e t + m\psi)} = \\ = \sum_{n, m} \varepsilon \alpha_{nm} e^{i(n\omega_e t + m\psi)} + 2\omega_0 a \varepsilon \omega_1 \cos \psi + 2\omega_0 \varepsilon f_1 \sin \psi. \quad (36.10)$$

Из этого соотношения видно, что в решении могут появиться коэффициенты $\varepsilon \gamma_{nm}$, обращающиеся в бесконечность. Чтобы исключить появление таких членов, потребуем выполнения условия, аналогичного условиям (35.7):

$$\sum_{n, m} \varepsilon \alpha_{nm} e^{i(n\omega_e t + m\psi)} + 2\omega_0 a \varepsilon \omega_1 \cos \psi + 2\omega_0 \varepsilon f_1 \sin \psi = 0, \quad (36.11)$$

если $\omega_0^2 - (n\omega_e + m\omega_0)^2 = 0$.

Требование (36.11) позволяет определить функции $\varepsilon \omega_1$ и εf_1 . В самом деле, поскольку рассматривается нерезонансный случай, постольку условие

$$\omega_0^2 - (n\omega_e + m\omega_0)^2 = 0$$

будет выполняться, если

$$n = 0, \quad m = \pm 1. \quad (36.12)$$

Следовательно, сумма по n и m в (36.11) сводится к сумме двух членов с коэффициентами $\alpha_{0,+1}$ и $\alpha_{0,-1}$. Таким образом, используя (36.12) и общее выражение для коэффициентов Фурье

$$\varepsilon \alpha_{nm} = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \varepsilon Q_0(a, \psi, \omega_e t) e^{-i(n\omega_e t + m\psi)} d(\omega_e t) d\psi, \quad (36.13)$$

из условия (36.11) найдем

$$\varepsilon f_1 = -\frac{\varepsilon}{4\pi^2 \omega_0} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} Q_0(a, \psi, \omega_e t) \sin \psi \, d\psi \, d(\omega_e t), \quad (36.14)$$

$$\varepsilon \omega_1 = -\frac{\varepsilon}{4\pi^2 \omega_0 a} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} Q_0(a, \psi, \omega_e t) \cos \psi \, d\psi \, d(\omega_e t). \quad (36.15)$$

В резонансном случае частота вынуждающей силы или равна резонансной частоте или близка к ней. Следовательно, можно положить (см. (36.4)), что

$$\omega_0^2 = \left(\frac{p}{q} \omega_e\right)^2 + \varepsilon \Delta, \quad (36.16)$$

где $\varepsilon \Delta$ — малая заданная расстройка между квадратом собственной частоты ω_0 и квадратом резонансной частоты. Используя (36.16), запишем исходное уравнение (36.5) в форме

$$\ddot{\xi} + \left(\frac{p}{q} \omega_e\right)^2 \xi = \varepsilon \{Q(\xi, \dot{\xi}, \omega_e t) - \xi \Delta\}. \quad (36.17)$$

Решение этого уравнения будем искать в виде ряда (36.6), где a и ψ подчинены «своим» уравнениям, имеющим более общий вид по сравнению с (35.6), так как в резонансном случае изменения амплитуды и фазы зависят не только от значения амплитуды a , но и от фазовой расстройки θ :

$$\dot{a} = \varepsilon f_1(a, \theta) + \dots, \quad \dot{\psi} = \frac{p}{q} \omega_e + \varepsilon \omega_1(a, \theta) + \dots, \quad (36.18)$$

где ψ и θ связаны соотношением

$$\psi = \frac{p}{q} \omega_e t + \theta(t). \quad (36.19)$$

Кроме того, потребуем, чтобы в решении отсутствовали члены, обращающиеся в бесконечность.

Подставляя (36.19) в (36.6) и (36.18), найдем, что

$$\xi = a \cos\left(\frac{p}{q} \omega_e t + \theta\right) + \varepsilon \xi_1(a, \theta, \omega_e t) + \dots, \quad (36.20)$$

а уравнения, которым подчинены переменные a и θ , имеют вид

$$\dot{a} = \varepsilon f_1(a, \theta) + \dots, \quad \dot{\theta} = \varepsilon \omega_1(a, \theta) + \dots \quad (36.21)$$

С помощью (36.20) и (36.21) из (36.17) получим соотношение, определяющее функции $\varepsilon \xi_1$, εf_1 и $\varepsilon \omega_1$ в резонансном случае (промежуточ-

ные вычисления аналогичны (35.8) — (35.13):

$$\begin{aligned} \left(\frac{p}{q} \omega_e\right)^2 \varepsilon \xi_1 + \frac{\partial^2 \varepsilon \xi_1}{\partial t^2} = \varepsilon Q_0 \left(a, \frac{p}{q} \omega_e t + \theta, \omega_e t \right) + \\ + \left(2 \frac{p}{q} \omega_e \varepsilon \omega_1 - \varepsilon \Delta \right) a \cos \left(\frac{p}{q} \omega_e t + \theta \right) + \\ + 2 \frac{p}{q} \omega_e \varepsilon f_1 \sin \left(\frac{p}{q} \omega_e t + \theta \right); \end{aligned} \quad (36.22)$$

здесь

$$\begin{aligned} \varepsilon Q_0 \left(a, \frac{p}{q} \omega_e t + \theta, \omega_e t \right) = \\ = \varepsilon Q \left(a \cos \left(\frac{p}{q} \omega_e t + \theta \right), -\frac{p}{q} \omega_e a \sin \left(\frac{p}{q} \omega_e t + \theta \right), \omega_e t \right). \end{aligned}$$

Разлагая $\varepsilon \xi_1$ в ряд Фурье (см. (36.9)), получим

$$\begin{aligned} \left(\frac{p}{q} \omega_e\right)^2 \varepsilon \xi_1 + \frac{\partial^2 \varepsilon \xi_1}{\partial t^2} = \\ = \sum_{n, m} \left\{ \left(\frac{p}{q}\right)^2 - \left(n + m \frac{p}{q}\right)^2 \right\} \omega_e^2 \varepsilon \gamma_{nm} e^{i \left[n \omega_e t + m \left(\frac{p}{q} \omega_e t + \theta \right) \right]}. \end{aligned} \quad (36.23)$$

Принимая далее во внимание разложение функции εQ_0 в ряд Фурье (см. (36.8)) и требуя, чтобы коэффициенты $\varepsilon \gamma_{nm}$ были конечны, из (36.22) найдем

$$\begin{aligned} \sum_{n, m} \varepsilon \alpha_{nm} e^{i \left[n \omega_e t + m \left(\frac{p}{q} \omega_e t + \theta \right) \right]} + \\ + \left(2 \frac{p}{q} \omega_e \varepsilon \omega_1 - \varepsilon \Delta \right) a \cos \left(\frac{p}{q} \omega_e t + \theta \right) + 2 \frac{p}{q} \omega_e \varepsilon f_1 \sin \left(\frac{p}{q} \omega_e t + \theta \right) = 0, \end{aligned} \quad (36.24)$$

где суммирование ведется по любым целым n и m , для которых

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 - \left(n + m \frac{p}{q}\right)^2 = 0, \quad (36.25)$$

причем это условие эквивалентно более простому

$$nq + (m \pm 1)p = 0. \quad (36.26)$$

Приравнивая в (36.24) коэффициенты при $\cos \psi$ и $\sin \psi$ соответственно, можно будет найти функции εf_1 и $\varepsilon \omega_1$. С этой целью, используя (36.26), запишем показатели экспонент (см. (36.24)) в виде

$$n \omega_e t + m \left(\frac{p}{q} \omega_e t + \theta \right) = \mp \left(\frac{p}{q} \omega_e t + \theta \right) - \frac{nq}{p} \theta. \quad (36.27)$$

Тогда двойную сумму в соотношении (36.24) можно будет представить как сумму только по n :

$$\begin{aligned} & \left[\sum_n \varepsilon \alpha_{n, -n \frac{q}{p} + 1} e^{-in \frac{q}{p} \theta} \right] e^{i\psi} + \left[\sum_n \varepsilon \alpha_{n, -n \frac{q}{p} - 1} e^{-in \frac{q}{p} \theta} \right] e^{-i\psi} = \\ & = \left[\sum_n \left(\varepsilon \alpha_{n, -n \frac{q}{p} + 1} + \varepsilon \alpha_{n, -n \frac{q}{p} - 1} \right) e^{-in \frac{q}{p} \theta} \right] \cos \psi + \\ & + \left[\sum_n i \left(\varepsilon \alpha_{n, -n \frac{q}{p} + 1} - \varepsilon \alpha_{n, -n \frac{q}{p} - 1} \right) e^{-in \frac{q}{p} \theta} \right] \sin \psi, \quad (36.28) \end{aligned}$$

где суммы и разности коэффициентов Фурье равны (см. (36.13))

$$\varepsilon \alpha_{n, -n \frac{q}{p} + 1} + \varepsilon \alpha_{n, -n \frac{q}{p} - 1} = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \varepsilon Q_0 e^{in \frac{q}{p} \theta} \cos \psi d(\omega_e t) d\psi, \quad (36.29)$$

$$i \left(\varepsilon \alpha_{n, -n \frac{q}{p} + 1} - \varepsilon \alpha_{n, -n \frac{q}{p} - 1} \right) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \varepsilon Q_0 e^{in \frac{q}{p} \theta} \sin \psi d(\omega_e t) d\psi.$$

Используя (36.28), (36.29) и приравнявая соответствующие коэффициенты при $\sin \psi$ и $\cos \psi$, из (36.24) получим

$$\varepsilon f_1 = -\frac{1}{4\pi^2 \frac{p}{q} \omega_e} \sum_n e^{-in \frac{q}{p} \theta} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \varepsilon Q_0(a, \psi, \omega_e t) e^{+in \frac{q}{p} \theta} \sin \psi d(\omega_e t) d\psi, \quad (36.30)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon \omega_1 &= \frac{\varepsilon \Delta}{2 \frac{p}{q} \omega_e} - \\ & - \frac{1}{4\pi^2 \frac{p}{q} \omega_e a} \sum_n e^{-in \frac{q}{p} \theta} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \varepsilon Q_0(a, \psi, \omega_e t) e^{+in \frac{q}{p} \theta} \cos \psi d(\omega_e t) d\psi \end{aligned} \quad (36.31)$$

(здесь $\theta = \psi - \frac{p}{q} \omega_e t$, а суммирование ведется по $n = 0, +1, +2, \dots$). Эти соотношения позволяют получить решение задачи о резонансе вынужденных нелинейных колебаний в первом приближении.

Пример 36.1. Резонанс нелинейных колебаний материальной точки, подвешенной на пружине.

Точка массы m совершает колебания в вертикальном направлении в среде с сопротивлением под действием силы упругой деформации

пружины и достаточно малой силы Q_e , гармонически зависящей от времени. Найти амплитудную характеристику стационарных колебаний точки вблизи резонанса.

Помещая начало отсчета в точку подвеса и направляя ось Ox вдоль оси пружины, получим выражения кинетической и потенциальной энергии точки, диссипативной функции и нестационарной силы:

$$T = \frac{m}{2} \dot{x}^2, \quad U = -mgx + U_x(x),$$

$$D = \frac{k}{2} \dot{x}^2, \quad Q_e = F_e \sin \omega_e t,$$

где U_x — энергия упругой деформации пружины, k — коэффициент сопротивления среды (предполагается, что сила сопротивления пропорциональна скорости точки), F_e и ω_e — амплитуда и частота нестационарной силы, а x — координата точки. Определяя положение x_{eq} равновесия точки из уравнения

$$\left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{\text{eq}} = -mg + \left. \frac{\partial U_x}{\partial x} \right|_{\text{eq}} = 0,$$

разложим потенциальную энергию U в ряд по степеням отклонения $\xi = x - x_{\text{eq}}$ точки от положения равновесия с точностью до величин четвертого порядка малости включительно:

$$U = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 U_x}{\partial x^2} \right)_{\text{eq}} \xi^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{\partial^3 U_x}{\partial x^3} \right)_{\text{eq}} \xi^3 + \frac{1}{4!} \left(\frac{\partial^4 U_x}{\partial x^4} \right)_{\text{eq}} \xi^4.$$

Тогда уравнение движения точки можно будет записать в виде (36.5)

$$\ddot{\xi} + \omega_0^2 \xi = \varepsilon Q(\xi, \dot{\xi}, \omega_e t) = -\kappa_1 \xi^3 - \kappa_2 \xi^4 - 2\mu \dot{\xi} + f_e \sin \omega_e t, \quad (1)$$

где

$$\omega_0^2 = \frac{1}{m} \left(\frac{\partial^2 U_x}{\partial x^2} \right)_{\text{eq}}, \quad \kappa_1 = \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial^3 U_x}{\partial x^3} \right)_{\text{eq}},$$

$$\kappa_2 = \frac{1}{6m} \left(\frac{\partial^4 U_x}{\partial x^4} \right)_{\text{eq}}, \quad 2\mu = \frac{k}{m}, \quad f_e = \frac{F_e}{m}.$$

Рассматривая выражение средней мощности нестационарной сил (см. (36.1) и (36.2)), приходим к выводу о возможности главного резонанса, в связи с чем решение исходного уравнения (1) будем искать в виде (см. (36.20))

$$\xi = a \cos \psi, \quad (2)$$

где $\psi = \omega_e t + \theta$. Подставляя (2) в εQ , с точностью до ε найдем (см. (36.22))

$$\varepsilon Q_0 = -\frac{3\kappa_2}{4} a^3 \cos \psi + 2\mu \omega_e a \sin \psi + f_e \sin \omega_e t -$$

$$-\frac{\kappa_1 a^3}{2} (1 + \cos 2\psi) - \frac{\kappa_2}{4} a^3 \cos 3\psi$$

Отсюда видно, что в первом приближении коэффициент x_1 (или третья производная функции U_x) не влияет на поведение системы.

Пользуясь выражением εQ_0 , найдем необходимые для решения коэффициенты Фурье этой функции (см. (36.30) и (36.31)). Например, коэффициенты Фурье, соответствующие $n=0$, получим, учитывая, что

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \varepsilon Q_0 \begin{Bmatrix} \sin \psi \\ \cos \psi \end{Bmatrix} d\psi d(\omega_e t) = \begin{cases} 4\pi^2 \mu \omega_e a, \\ -\frac{3}{2} \pi^2 \kappa_2 a^3. \end{cases}$$

Аналогично коэффициенты Фурье, соответствующие $n=\pm 1$, найдем, вычисляя интегралы

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \varepsilon Q_0 (\cos \theta \pm l \sin \theta) \sin \psi d\psi d(\omega_e t),$$

где

$$\theta = \psi - \omega_e t.$$

Принимая во внимание, что величина последнего интеграла определена значениями

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \varepsilon Q_0 \cos \psi \sin \psi \cos(\omega_e t) d\psi d(\omega_e t) = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \varepsilon Q_0 \sin^2 \psi \sin(\omega_e t) d\psi d(\omega_e t) = \pi^2 f_e,$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \varepsilon Q_0 \sin^2 \psi \cos(\omega_e t) d\psi d(\omega_e t) = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \varepsilon Q_0 \cos \psi \sin \psi \sin(\omega_e t) d\psi d(\omega_e t) = 0,$$

найдем, что

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \varepsilon Q_0 e^{\pm i\theta} \sin \psi d\psi d(\omega_e t) = \pi^2 f_e.$$

Нетрудно убедиться, что соответствующие $n=\pm 1$ члены ряда (36.31) пропорциональны значениям

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \varepsilon Q_0 e^{\pm i\theta} \cos \psi d\psi d(\omega_e t) = \mp l \pi^2 f_e,$$

а интегралы с $n=\pm 2, \pm 3, \dots$ все равны нулю.

Далее, используя (36.30) и (36.31), найдем функции

$$\begin{aligned} \varepsilon f_1 &= \frac{-1}{4\pi^2\omega_e} [4\pi^2\mu\omega_e a + (e^{-i\theta} + e^{+i\theta})\pi^2 f_e], \\ \varepsilon\omega_1 &= \frac{\varepsilon\Delta}{2\omega_e} - \frac{1}{4\pi^2\omega_e a} \left[-\frac{3}{2}\pi^2\chi_2 a^3 + e^{-i\theta}(-i\pi^2 f_e) + e^{+i\theta}(i\pi^2 f_e) \right], \end{aligned}$$

определяющие уравнения для a и θ (см. (36.21)):

$$\begin{aligned} \dot{a} &= -\mu a - \frac{f_e}{2\omega_e} \cos \theta, \\ \dot{\theta} &= \frac{\varepsilon\Delta}{2\omega_e} + \frac{3\chi_2 a^2}{8\omega_e} + \frac{f_e}{2\omega_e a} \sin \theta; \end{aligned}$$

здесь $\varepsilon\Delta = \omega_0^2 - \omega_e^2$ (см. (36.16)).

В случае стационарного режима $\dot{a} = 0$ и $\dot{\theta} = 0$; следовательно,

$$-\mu a \omega_e = \frac{f_e}{2} \cos \theta, \quad a \left(\frac{3\chi_2 a^2}{8} + \frac{\varepsilon\Delta}{2} \right) = \frac{f_e}{2} \sin \theta.$$

Возводя в квадрат обе части каждого из этих уравнений и складывая результаты, найдем амплитудную характеристику $a(\omega_e)$ в виде

$$a^2 \left[\left(\frac{3\chi_2}{8} a^2 + \frac{\varepsilon\Delta}{2} \right)^2 + \omega_e^2 \mu^2 \right] = \left(\frac{f_e}{2} \right)^2. \quad (3)$$

Это уравнение можно упростить, используя близость ω_e к ω_0 и малость всех членов, входящих в правую часть уравнения (1). Вводя вместо $\varepsilon\Delta$ разность частот $\Delta\omega = \omega_e - \omega_0$, из (3) получим уравнение

$$(\omega_0 + \Delta\omega)^2 \mu^2 + \left[\frac{3\chi_2}{8} a^2 - \frac{\Delta\omega}{2} (2\omega_0 + \Delta\omega) \right]^2 = \left(\frac{f_e}{2a} \right)^2. \quad (4)$$

Пренебрегая в этом уравнении членами, пропорциональными $(\Delta\omega)^3$ и $(\Delta\omega)^4$, найдем

$$\left[\omega_0^2 \mu^2 + \left(\frac{3\chi_2}{8} a^2 \right)^2 \right] + 2\omega_0 \left(\mu^2 - \frac{3\chi_2}{8} a^2 \right) \Delta\omega + (\omega_0^2 + \mu^2) (\Delta\omega)^2 = \left(\frac{f_e}{2a} \right)^2. \quad (5)$$

Уравнение (5) также можно упростить, поскольку $\omega_0^2 \gg \chi_2 a^2$ и $\omega_0 \gg \mu$ (ввиду малости всех членов εQ). Полагая далее, что все члены, входящие в εQ , являются величинами одного порядка, и сопоставляя второй и третий члены εQ , найдем, что $\chi_2 a^2 \sim \mu\omega_0$. Учитывая все приведенные оценки, получим амплитудную характеристику в виде

$$a^2 [(\lambda a^2 - \Delta\omega)^2 + \mu^2] = \left(\frac{f_e}{2\omega_0} \right)^2, \quad (6)$$

где $\lambda = \frac{3\chi_2}{8\omega_0}$.

Разрешая это квадратное относительно $\Delta\omega$ уравнение, найдем функцию

$$\Delta\omega = \lambda a^2 \pm \left[\left(\frac{f_e}{2\omega_0 a} \right)^2 - \mu^2 \right]^{1/2}, \quad (7)$$

с помощью которой нетрудно построить амплитудную характеристику (см. рис. 36.1, где изображен случай $x_2 < 0$). Дифференцируя по $\Delta\omega$ правую и левую части уравнения (6), получим

$$\frac{d(a^2)}{d(\Delta\omega)} = \frac{2a^2(\lambda a^2 - \Delta\omega)}{3(\lambda a^2)^2 - 4\lambda a^2 \Delta\omega + \mu^2 + (\Delta\omega)^2}. \quad (8)$$

Эти результаты позволяют исследовать амплитудную характеристику. Сначала рассмотрим известный уже предельный случай линейных колебаний. С этой целью устремим $f_e \rightarrow 0$ и $a \rightarrow 0$ в функциях (6) и (8) (см. (34.7) и кривую α на рис. 36.1); тогда получим

$$a^2 = \left(\frac{f_e}{2\omega_0}\right)^2 \frac{1}{\mu^2 + (\Delta\omega)^2}, \quad \frac{d(a^2)}{d(\Delta\omega)} = \left(\frac{f_e}{2\omega_0}\right)^2 \frac{-2\Delta\omega}{[\mu^2 + (\Delta\omega)^2]^2}.$$

Если нелинейным членом пренебречь нельзя, а $|\lambda|a^2 < \mu$, то амплитудная характеристика близка к соответствующей характеристике

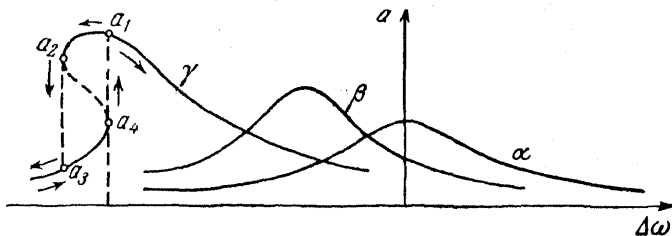


Рис. 36.1.

линейных колебаний: ее максимум смещен в сторону $\Delta\omega < 0$, поскольку $x_2 < 0$ (см. β на рис. 36.1). Действительно, амплитуда a достигает максимума при $\Delta\omega = \lambda a^2$, а значение a_{\max} , равное

$$a_{\max} = \left(\frac{f_e}{2\omega_0}\right) \frac{1}{\mu},$$

совпадает с соответствующим значением амплитуды линейных колебаний. В этом случае производная $\frac{d(a^2)}{d(\Delta\omega)}$ нигде в бесконечность не обращается.

Если $|\lambda|a^2 > \mu$, то производная $\frac{d(a^2)}{d(\Delta\omega)}$ обращается в бесконечность при двух значениях

$$\Delta\omega = 2\lambda a^2 \pm [(\lambda a^2)^2 - \mu^2]^{1/2}. \quad (9)$$

При этом условии, как показывает анализ выражения (6), зависимость амплитуды вынужденных колебаний в некоторой области частот оказывается неоднозначной (см. γ на рис. 36.1). Поэтому становится возможным так называемый срыв амплитуды. Это явление про-

исходит следующим образом: если частота ω_e вынуждающей силы сравнительно велика, то при ее уменьшении до достаточно малых значений амплитуда вынужденных колебаний будет плавно изменяться в областях $\omega_e > \omega_e^*$ и $\omega_e < \omega_e^*$, а в «точке» $\omega_e = \omega_e^* = \omega_0 + 2\lambda a^2 + [(\lambda a^2)^2 - \mu^2]^{1/2}$, которой соответствует бесконечное значение производной $\frac{da^2}{d(\Delta\omega)}$, произойдет скачкообразное изменение амплитуды от величины a_2 до величины a_3 . Аналогично при увеличении ω_e от достаточно малых значений до сравнительно больших значений амплитуда вынужденных колебаний изменяется скачкообразно в точке $\omega_e = \omega_e^{**} = \omega_0 + 2\lambda a^2 - [(\lambda a^2)^2 - \mu^2]^{1/2}$ от величины a_4 до величины a_1 , а в областях $\omega_e < \omega_e^{**}$ и $\omega_e > \omega_e^{**}$ происходит плавное изменение амплитуды. Явление скачкообразного изменения амплитуды и представляет собой срыв амплитуды. Заметим, что явление срыва может наблюдаться только в том случае, если область $\omega_e^{**} - \omega_e^*$ частот, в которой зависимость амплитуды от частоты неоднозначна, отлична от нуля. При $\omega_e^{**} - \omega_e^* \rightarrow 0$ явление срыва будет исчезать. Последнему условию соответствует равенство нулю подкоренного выражения (9). Используя амплитудную характеристику (6) и введенные ранее обозначения, найдем, что в этом случае

$$a^2 = \frac{8k\omega_0}{\left| \left(\frac{\partial^4 U_x}{\partial x^4} \right)_{\text{eq}} \right|}, \quad \Delta\omega = -\frac{k}{m}, \quad F_e^2 = \frac{16k^3\omega_0}{\left| \left(\frac{\partial^4 U_x}{\partial x^4} \right)_{\text{eq}} \right|}.$$

Пример 36.2. Резонанс маятника с колеблющимся подвесом (параметрический резонанс).

Найти условия возникновения резонанса колебаний математического маятника, если он движется в среде с «линейной» силой сопротивления, а его подвес совершает гармонические колебания по вертикали с амплитудой a_e и частотой ω_e .

Выбирая в качестве независимой координаты угол φ отклонения маятника от вертикали и обозначая смещение подвеса через $x_{0'}$, найдем кинетическую энергию маятника

$$T = \frac{m}{2} (\dot{x}_{0'}^2 - 2l \sin \varphi \cdot \dot{\varphi} \dot{x}_{0'} + l^2 \dot{\varphi}^2),$$

где m , l — масса и длина маятника. По аналогии получим диссипативную функцию

$$D = \frac{k}{2} (\dot{x}_{0'}^2 - 2l \sin \varphi \cdot \dot{\varphi} \dot{x}_{0'} + l^2 \dot{\varphi}^2),$$

где k — коэффициент сопротивления среды. Потенциальная энергия маятника имеет вид

$$U = -mg(x_{0'} + l \cos \varphi),$$

а смещение подвеса, согласно условию, равно

$$x_{0'} = a_e \sin \omega_e t.$$

Используя эти функции, получим уравнение движения

$$\ddot{\varphi} + 2\mu\dot{\varphi} + (\omega_0^2 + \omega_e^2 h \sin \omega_e t - 2\mu\omega_e h \cos \omega_e t) \sin \varphi = 0,$$

где $h = a_e/l$. Отсюда, полагая, что $h \ll 1$ и $\mu \ll \omega_0$, найдем приближенное уравнение слабо нелинейных колебаний

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = \varepsilon Q(\varphi, \dot{\varphi}, \omega_e t), \quad (1)$$

где $\varepsilon Q = -\omega_e^2 h \sin(\omega_e t) \cdot \varphi - 2\mu\dot{\varphi} + \frac{\omega_0^2}{6} \varphi^3$.

Рассматривая интеграл

$$\frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} \sin(\omega_e t) \varphi \dot{\varphi} dt,$$

пропорциональный средней мощности нестационарной силы, определим резонансную частоту колебаний. Для качественной оценки этой частоты положим, что

$$\varphi \approx a \cos(\omega_0 t + \theta),$$

где a и θ — медленно меняющиеся функции времени. Тогда интересующий нас интеграл приближенно будет равен

$$\frac{\omega_0 a^2}{\Delta t} \left\{ \frac{\sin[(\omega_e + 2\omega_0)t + 2\theta]}{\omega_e + 2\omega_0} - \frac{\sin[(\omega_e - 2\omega_0)t - 2\theta]}{\omega_e - 2\omega_0} \right\} \Big|_0^{\Delta t},$$

откуда видно, что резонанс возможен на частоте $\omega_e \approx 2\omega_0$. Резонанс на такой частоте называется *главным демультимпликативным резонансом*. В этом случае, согласно (36.16), вблизи резонанса можно положить, что

$$\omega_0^2 = \left(\frac{\omega_e}{2}\right)^2 + \varepsilon \Delta,$$

где $\varepsilon \Delta$ — малая заданная величина, а решение уравнения (1) следует искать в форме (36.20) ($p = 1$, $q = 2$)

$$\varphi = a \cos\left(\frac{\omega_e}{2} t + \theta\right).$$

Используя данное приближение, определим функцию (см. (36.22))

$$\varepsilon Q_0 = \left(\frac{\omega_0^2 a^2}{8} - \omega_e^2 h \sin \omega_e t\right) a \cos \psi + \mu \omega_e a \sin \psi + \frac{\omega_0^2 a^2}{24} \cos 3\psi,$$

где $\psi = \frac{\omega_e}{2} t + \theta$, и ее разложение в двойной ряд Фурье по перемен-

ным ψ и $\omega_e t$. Вычислим для этого следующие интегралы (см. (36.30) и (36.31)):

$$n=0 \quad \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \varepsilon Q_0 \sin \psi \, d\psi \, d(\omega_e t) = 2\pi^2 \mu \omega_e a,$$

$$n=0 \quad \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \varepsilon Q_0 \cos \psi \, d\psi \, d(\omega_e t) = \frac{\pi^2}{4} \omega_0^2 a^3,$$

$$n=\pm 1 \quad \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \varepsilon Q_0 e^{\pm i2\theta} \sin \psi \, d\psi \, d(\omega_e t) = -\frac{\pi^2}{2} \omega_e^2 h a,$$

$$n=\pm 1 \quad \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \varepsilon Q_0 e^{\pm i2\theta} \cos \psi \, d\psi \, d(\omega_e t) = \pm i \frac{\pi^2}{2} \omega_e^2 h a.$$

Наконец, подставляя значения интегралов в (36.30) и (36.31), из (36.21) получим уравнения для $a(t)$ и $\theta(t)$

$$\dot{a} = -\mu a + \frac{\omega_e}{2} h a \cos 2\theta, \quad \dot{\theta} = \frac{\varepsilon \Delta}{\omega_e} - \frac{\omega_0^2 a^2}{8\omega_e} - \frac{\omega_e}{2} h \sin 2\theta. \quad (2)$$

Исследуем уравнения (2), пренебрегая нелинейным членом, пропорциональным a^2 . Тогда получим систему уравнений, которая заменой

$$u = a \cos \theta, \quad v = a \sin \theta$$

приводится к виду

$$\begin{aligned} \dot{u} + \left(\mu - \frac{\omega_e}{2} h \right) u + \frac{\varepsilon \Delta}{\omega_e} v &= 0, \\ -\frac{\varepsilon \Delta}{\omega_e} u + \dot{v} + \left(\mu + \frac{\omega_e}{2} h \right) v &= 0. \end{aligned}$$

Решением характеристического уравнения

$$(\lambda + \mu)^2 - \left(\frac{\omega_e}{2} h \right)^2 + \left(\frac{\varepsilon \Delta}{\omega_e} \right)^2 = 0$$

этой системы является

$$\lambda = -\mu \pm \sqrt{\left(\frac{\omega_e}{2} h \right)^2 - \left(\frac{\varepsilon \Delta}{\omega_e} \right)^2}.$$

Отсюда видно, что при некоторых значениях ω_e и определенном подборе параметров ω_0 , h и μ собственное значение λ будет действительным положительным числом. Следовательно, амплитуда a , равная $\sqrt{u^2 + v^2}$, будет возрастать по экспоненциальному закону, т. е. будет иметь место резонанс нестационарных колебаний. Условием возникновения резонанса является неравенство

$$\frac{\omega_e^2}{4} h^2 - \mu^2 > \left(\frac{\varepsilon \Delta}{\omega_e} \right)^2.$$

Выражая здесь ω_e^2 и $\varepsilon\Delta$ через ω_0 и $\Delta\omega = \omega_e - 2\omega_0$ и оставляя старшие члены, пропорциональные h^2 , $(\mu/\omega_0)^2$, $(\Delta\omega/\omega_0)^2$, преобразуем последнее условие к виду

$$2\sqrt{\omega_0^2 h^2 - \mu^2} > |\omega_e - 2\omega_0|. \quad (3)$$

Это неравенство определяет интервал частот ω_e , в котором возникает резонанс:

$$2(\omega_0 - \sqrt{\omega_0^2 h^2 - \mu^2}) < \omega_e < 2(\omega_0 + \sqrt{\omega_0^2 h^2 - \mu^2}). \quad (4)$$

Неравенство (3) содержит дополнительное условие, определяющее минимальную «глубину модуляции» h , необходимую для возникновения резонанса, а именно

$$h > \frac{\mu}{\omega_0}. \quad (5)$$

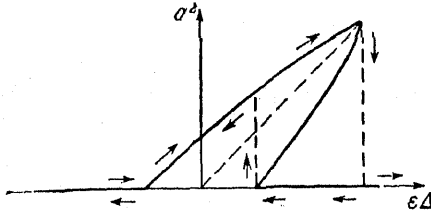


Рис. 36.2.

Итак, в линейном приближении при определенных значениях параметров системы возникают колебания с неограниченно возрастающей амплитудой. В действительности благодаря нелинейности резонансный режим может быть стационарным. Полагая в уравнениях (2) амплитуду a и фазу θ постоянными, найдем уравнения, характеризующие этот режим:

$$2\mu = \omega_e h \cos 2\theta, \quad \frac{2}{\omega_e} \left(\varepsilon\Delta - \frac{\omega_0^2}{8} a^2 \right) = \omega_e h \sin 2\theta,$$

а исключая отсюда θ , получим амплитудную характеристику в виде

$$a^2 = \frac{8}{\omega_0^2} \left\{ \varepsilon\Delta \mp \sqrt{\omega_e^2 \left(\frac{\omega_e^2}{4} h^2 - \mu^2 \right)} \right\}, \quad (6)$$

где

$$\omega_e^2 = 4(\omega_0^2 - \varepsilon\Delta).$$

График функции $a^2(\varepsilon\Delta)$ легко представить, если заметить, что она близка к линейной функции $\frac{8}{\omega_0^2} \varepsilon\Delta$, а в «точке» $\varepsilon\Delta = \omega_0^2 - \frac{\mu^2}{h^2}$ равна ей (рис. 36.2). Что касается границ резонансной зоны, то, приравняв нулю правую часть формулы (6), можно убедиться в том, что ширина этой зоны практически совпадает с шириной $4(\omega_0^2 h^2 - \mu^2)^{1/2}$, вычисленной в линейном приближении.

ДИНАМИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

Ранее (например, в гл. I) отмечалась важная роль, которую играет понятие абсолютно твердого тела как тела отсчета. С понятием твердого тела связано также введение эталона длины. Наряду с этим большое значение имеет теория движения твердых тел под действием внешних сил. Эта теория находит самое широкое применение в практике, в частности на основе этой теории решаются задачи о движении гироскопов, о вращении спутников и т. д.

§ 37. Уравнения движения твердого тела

Любое твердое тело можно представить как систему материальных точек, жестко соединенных между собой стержнями постоянной длины и исчезающей массы (см. § 24, стр. 199). Иначе говоря, твердое тело можно рассматривать как систему материальных точек, на которые наложены внутренние идеальные связи. Поэтому число степеней свободы твердого тела меньше, чем число степеней свободы соответствующей системы свободных точек.

Для того чтобы полностью охарактеризовать движение твердого тела относительно некоторой системы отсчета S , достаточно знать закон движения системы S' , жестко связанной с изучаемым твердым телом (см. рис. 16.1 и 16.2); например, закон движения свободного твердого тела (тела, на которое не налагаются внешние связи) определяется шестью скалярными функциями: тремя проекциями радиуса-вектора $\mathbf{r}_O(t)$ начала системы S' и тремя углами Эйлера $\varphi(t)$, $\theta(t)$ и $\psi(t)$.

Заметим, что к свободному твердому телу как системе материальных точек применимы законы изменения импульса и кинетического момента (9.15) и (10.5), причем эти законы (*в силу жесткой связи точек тела друг с другом*) будут полностью описывать движение тела, т. е. будут являться уравнениями движения*). В последнем можно убедиться, показав, что законы (9.15) и (10.5) представляют собой систему шести дифференциальных уравнений второго порядка относительно шести переменных: трех проекций вектора \mathbf{r}_O и углов φ ,

*) Законы изменения импульса и кинетического момента в применении к произвольной системе материальных точек не дают возможности получить полную информацию о движении системы.

θ и ϕ . В самом деле, радиусы-векторы всех точек твердого тела относительно системы S' , жестко связанной с этим телом, являются постоянными относительно S' векторами, а скорости точек тела относительно S' равны нулю, т. е.

$$\mathbf{r}_i = x'_{i0}\mathbf{n}_{x'} + y'_{i0}\mathbf{n}_{y'} + z'_{i0}\mathbf{n}_{z'}, \quad \mathbf{v}_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N), \quad (37.1)$$

где \mathbf{r}_i и \mathbf{v}_i — радиус-вектор и скорость i -й точки тела относительно S' , $\mathbf{n}_{x'}$, $\mathbf{n}_{y'}$, $\mathbf{n}_{z'}$ — декартовы орты этой системы, x'_{i0} , y'_{i0} , z'_{i0} — постоянные проекции вектора \mathbf{r}_i на оси S' , а N — число точек твердого тела. Следовательно, радиусы-векторы и скорости точек твердого тела относительно системы S соответственно равны (см. (1.6), (19.10))

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_{O'} + \mathbf{r}'_i, \quad \mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{O'} + [\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}'_i] \quad (i = 1, 2, \dots, N), \quad (37.2)$$

где $\mathbf{v}_{O'}$ и $\boldsymbol{\omega}$ — соответственно скорость начала системы S' и ее угловая скорость относительно S .

Используя эти выражения, нетрудно убедиться, что импульс тела \mathbf{P} зависит от $\mathbf{v}_{O'}$, углов Эйлера и их производных (см. (9.6), (17.11) и (17.12)), а кинетический момент \mathbf{M} тела, сумма внешних сил \mathbf{F}^e и сумма моментов внешних сил \mathbf{L}^e , кроме указанных величин, могут содержать $\mathbf{r}_{O'}$ (см. (10.2), (9.14) и (10.5)). Таким образом, мы видим, что законы изменения импульса и кинетического момента твердого тела

$$\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{F}^e, \quad \dot{\mathbf{M}} = \mathbf{L}^e \quad (37.3)$$

содержат в качестве неизвестных только функции $\mathbf{r}_{O'}$, φ , θ , ψ и, следовательно, являются уравнениями движения свободного твердого тела.

Если на твердое тело налагаются внешние связи, то уравнения движения тела примут вид (см. (25.5) и (25.6))

$$\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{F}^e + \mathbf{R}^e, \quad \dot{\mathbf{M}} = \mathbf{L}^e + \mathbf{L}_R^e \quad (37.4)$$

где \mathbf{R}^e и \mathbf{L}_R^e — соответственно сумма реакций всех внешних по отношению к телу связей и сумма моментов реакций этих связей (для решения уравнений (37.4) следует добавить уравнения связей, наложенных на тело).

При составлении уравнений движения (37.3) и (37.4) удобно использовать вытекающие из соотношений § 22 общие выражения векторов

$$\mathbf{P} = m\mathbf{v}_{O'} + m[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}'_m], \quad \mathbf{M} = [\mathbf{r}_{O'}\mathbf{P}] + m[\mathbf{r}'_m\mathbf{v}_{O'}] + \mathcal{M}, \quad (37.5)$$

где \mathbf{r}'_m — радиус-вектор центра масс тела относительно S' , а $\mathcal{M} = \sum_{i=1}^N m_i [\mathbf{r}'_i [\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}'_i]]$ является частью кинетического момента, обращаю-

щейся в нуль, если $\omega = 0$ (в связи с этим вектор \mathcal{M} можно назвать кинетическим моментом вращения твердого тела). Здесь следует иметь в виду, что, согласно (37.1), в системе S' , жестко связанной с телом,

$$\mathbf{v}'_m = 0, \quad \mathbf{P}' = 0, \quad \mathbf{M}' = 0. \quad (37.6)$$

Выражения векторов \mathbf{F}^e и \mathbf{L}^e в теории твердого тела имеют такой же вид, как и в общей теории (см. (9.14) и (22.4)):

$$\mathbf{F}^e = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^e, \quad \mathbf{L}^e = [\mathbf{r}_{O'} \mathbf{F}^e] + \mathcal{L}^e, \quad (37.7)$$

где $\mathcal{L}^e = \sum_{i=1}^N [\mathbf{r}'_i \mathbf{F}_i^e]$.

Заметим, что при выводе (37.5) выбор системы S' произволен и сказывается на значении момента \mathcal{L}^e внешних сил *); лишь в частном случае, когда сумма внешних сил равна нулю, момент \mathcal{L}^e внешних сил не зависит от выбора начала O' системы S' , т. е.

$$\mathbf{L}^e = \mathcal{L}^e, \text{ если } \mathbf{F}^e = 0. \quad (37.8)$$

Например, это имеет место, когда к телу приложена пара сил, т. е. две силы, равные по величине и противоположно направленные по различным линиям действия (рис. 37.1); тогда

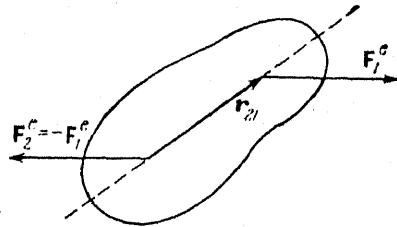


Рис. 37.1.

$$\mathbf{F}^e = \mathbf{F}_1^e + \mathbf{F}_2^e = 0,$$

$$\mathbf{L}^e = [\mathbf{r}_1 \mathbf{F}_1^e] + [\mathbf{r}_2 \mathbf{F}_2^e] = [\mathbf{r}_{21} \mathbf{F}_1^e] = \mathcal{L}^e,$$

поскольку $\mathbf{F}_2^e = -\mathbf{F}_1^e$, а $\mathbf{r}_{21} = \mathbf{r}'_{21}$.

Подчеркнем, что выбор системы S' , который отражает свойства тела и другие условия задачи, может существенно упростить ее решение. В частности, при решении задачи о движении свободного тела начало системы S' целесообразно поместить в центр масс тела, так как при этом

$$\mathbf{r}_{O'} = \mathbf{r}_m, \quad \mathbf{v}_{O'} = \mathbf{v}_m, \quad \mathbf{r}'_m = 0, \quad (37.9)$$

а выражения импульса и кинетического момента примут простой вид

$$\mathbf{P} = m\mathbf{v}_{O'}, \quad \mathbf{M} = [\mathbf{r}_{O'} \mathbf{P}] + \mathcal{M}; \quad (37.10)$$

*) Не зависит от выбора O' только скалярное произведение $\mathcal{L}^e \mathbf{F}^e$, равное, согласно (37.7), произведению $\mathbf{L}^e \mathbf{F}^e$.

здесь \mathcal{M} является кинетическим моментом вращения тела относительно поступательно движущейся системы S_m центра масс (см. (21.6)). В этом случае в качестве уравнений движения свободного тела вместо уравнений (37.3) можно использовать *уравнение движения центра масс тела относительно системы S и закон изменения момента вращения тела относительно системы S_m* (см. (9.14) и (21.11)):

$$m\ddot{\mathbf{r}}_m = \mathbf{F}^e, \quad \dot{\mathcal{M}} = \mathcal{L}^e. \quad (37.11)$$

Если тело имеет одну неподвижную относительно S точку, то начала систем S и S' целесообразно совместить с этой точкой. Тогда

$$\mathbf{r}_{O'} = 0, \quad \mathbf{v}_{O'} = 0, \quad (37.12)$$

а векторы \mathbf{P} , \mathbf{M} и \mathcal{L}^e , согласно (37.5) и (37.7), будут равны

$$\mathbf{P} = m[\omega \mathbf{r}'_m], \quad \mathbf{M} = \mathcal{M}, \quad \mathcal{L}^e = \mathcal{L}^e \quad (37.13)$$

(в этом случае импульс и кинетический момент полностью обусловлены вращением тела относительно системы S).

Если тело движется в однородном поле тяжести, то сумма внешних сил и их момент соответственно равны (см. определение (9.1))

$$\mathbf{F}^e = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{g} = m\mathbf{g}, \quad \mathcal{L}^e = \sum_{i=1}^N [\mathbf{r}_i m_i \mathbf{g}] = [\mathbf{r}_m \mathbf{F}^e]. \quad (37.14)$$

Отсюда видно, что *сумма моментов внешних сил, действующих на тело в однородном поле тяжести, равна моменту суммы внешних сил, «приложенных» к центру масс*. Момент сил относительно центра масс вследствие (37.14) равен нулю, а уравнения движения свободного тела в рассматриваемом поле принимают вид

$$\ddot{\mathbf{r}}_m = \mathbf{g}, \quad \dot{\mathcal{M}} = 0. \quad (37.15)$$

Таким образом, *если свободное твердое тело движется в однородном поле тяжести, то его кинетический момент относительно системы S_m сохраняется* *).

В случае равновесия твердого тела $\mathbf{P} = 0$ и $\mathbf{M} = 0$. Следовательно, силы, действующие на покоящееся тело, и их моменты должны подчиняться уравнениям (см. (37.4))

$$\mathbf{F}^e + \sum_i \mathbf{R}_i^e = 0, \quad \mathcal{L}^e + \sum_i [\mathbf{r}_i \mathbf{R}_i^e] = 0, \quad (37.16)$$

*) Нетрудно заметить, что формулы (37.14) и уравнения (37.15) имеют место для любой свободной механической системы, движущейся в однородном поле тяжести; однако для такой системы уравнения (37.15) не являются уравнениями движения.

где R_i^c — реакции связей на i -ю точку (уравнения (37.16) должны быть дополнены уравнениями связей или некоторыми условиями, определяющими, например, направления реакций).

Все приведенные выше уравнения движения твердого тела могут быть записаны и в форме уравнений Лагранжа. Чтобы составить уравнения Лагранжа второго рода, следует определить кинетическую энергию тела, обобщенный потенциал и диссипативные силы Q^d как функции независимых переменных. Используя соотношения (22.5), (37.6) и учитывая, что $T' = 0$, найдем кинетическую энергию

$$T = \frac{mv_0^2}{2} + mv_{O'} [\omega r'_m] + \mathcal{F}, \quad (37.17)$$

где $mv_0^2/2$ — часть кинетической энергии, обусловленная только поступательным движением тела, $\mathcal{F} = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} [\omega r'_i]^2$ — часть кинетической энергии, обусловленная только вращением твердого тела, а $mv_{O'} [\omega r'_m]$ — «смешанный» член, связанный как с поступательным, так и с вращательным движением тела. Если начало O' совмещено с центром масс тела, то «смешанный» член в любом случае равен нулю, а (37.17) принимает вид (см. (21.8))

$$T = \frac{mv_m^2}{2} + \mathcal{F}, \quad (37.18)$$

где \mathcal{F} равняется кинетической энергии вращения твердого тела относительно системы S_m .

Обобщенный потенциал \mathcal{U} твердого тела равен потенциалу \mathcal{U}^c этого тела во внешних полях, так как внутренняя энергия тела постоянна ввиду неизменности расстояний между точками тела, т. е.

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}^c. \quad (37.19)$$

Соотношения (37.17), (37.19) совместно с (27.20) и (17.11) позволяют составить лагранжиан твердого тела. Если в качестве независимых координат свободного тела выбрать углы Эйлера и проекции вектора $\mathbf{r}_{O'}$ на оси системы S и выразить T , \mathcal{U}^c и Q^d через эти переменные, то из (27.23) найдем

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \right) = Q_j^d \quad (j = 1, \dots, 6), \quad (37.20)$$

где q_1, q_2, q_3 являются проекциями вектора $\mathbf{r}_{O'}$, $q_4 = \varphi$, $q_5 = \theta$, $q_6 = \psi$, а $\mathcal{L} = T - \mathcal{U}^c$. Если же на тело наложены голономные идеальные связи, то получим уравнения вида (37.20), но с меньшим числом степеней свободы.

Пример 37.1. Заряженная двухатомная молекула в постоянном однородном электрическом поле.

Две точки массы m_1 и m_2 с зарядами e_1 и e_2 соединены стержнем исчезающей массы и длины l . Эта «гантель» движется в постоянном однородном электрическом поле напряженности \mathcal{E} . Начальные условия выбраны так, что движение молекулы происходит в неподвижной плоскости, параллельной напряженности поля. Найти уравнения движения молекулы — «гантели» и реакции стержня на материальные точки как функции обобщенных координат и скорости.

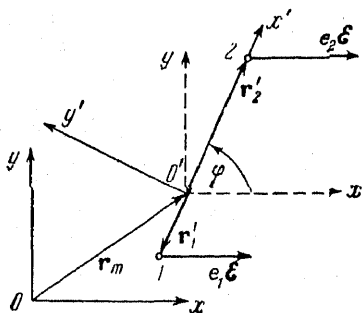


Рис. 37.2.

Сориентируем инерциальную систему S так, чтобы ее ось Ox была направлена вдоль напряженности \mathcal{E} , а плоскость Oxy совпадала с плоскостью движения (рис. 37.2). Начало системы S' , жестко связанной с молекулой, поместим в центр масс

молекулы, ось $O'x'$ направим по оси молекулы, а плоскость $O'x'y'$ совместим с плоскостью Oxy . Проектируя на координатные оси левую и правую части уравнения движения центра масс молекулы (см. (37.11))

$$(m_1 + m_2) \ddot{\mathbf{r}}_m = e_1 \mathcal{E} + e_2 \mathcal{E},$$

получим скалярные уравнения

$$\ddot{x}_m = \frac{e_1 + e_2}{m_1 + m_2} \mathcal{E}, \quad \ddot{y}_m = 0,$$

откуда найдем закон движения центра масс

$$x_m = \frac{e_1 + e_2}{m_1 + m_2} \frac{\mathcal{E}}{2} t^2 + \dot{x}_{m0} t + x_{m0}, \quad y_m = \dot{y}_{m0} t + y_{m0}.$$

Изменение ориентации молекулы определяется законом изменения кинетического момента вращения \mathcal{M} , равного

$$\mathcal{M} = \mu (x\dot{y} - y\dot{x}) \mathbf{n}_z,$$

где μ — приведенная масса. Учитывая, что $x = l \cos \varphi$, $y = l \sin \varphi$ (здесь φ — угол между осями $O'x$ и $O'x'$), преобразуем последнее выражение к виду

$$\mathcal{M} = \mu l^2 \dot{\varphi} \mathbf{n}_z.$$

Принимая во внимание, что

$$\mathcal{L}^e = [\mathbf{r}'_1 e_1 \mathcal{E}] + [\mathbf{r}'_2 e_2 \mathcal{E}] = - \frac{l \mathcal{E}}{m_1 + m_2} (m_1 e_2 - m_2 e_1) \sin \varphi \cdot \mathbf{n}_z,$$

в результате подстановки выражений \mathcal{M} и \mathcal{L}^e в уравнение моментов (см. (37.11)) получим

$$\ddot{\varphi} + \frac{\mathcal{E}}{m_1 m_2 l} (m_1 e_2 - m_2 e_1) \sin \varphi = 0. \quad (1)$$

Отсюда видно, что если начальная кинетическая энергия вращения достаточно мала, а $m_1 e_2 > m_2 e_1$, то молекула будет совершать малые колебания около положения $\varphi_{\text{eq}} = 0$ (вектор $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ в положении равновесия молекулы направлен вдоль вектора \mathcal{E}); если же $m_1 e_2 < m_2 e_1$, то молекула будет колебаться около положения $\varphi_{\text{eq}} = \pi$ (вектор \mathbf{r} в положении равновесия направлен противоположно \mathcal{E}); наконец, если $m_1 e_2 = m_2 e_1$, то молекула будет равномерно вращаться с начальной угловой скоростью $\dot{\varphi}_0$.

Реакцию \mathbf{R}_1 стержня на точку I определим из уравнения ее движения

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = e_1 \mathcal{E} + \mathbf{R}_1.$$

Используя соотношение между ускорениями точки I относительно S и S_m (см. (21.2)) и уравнение движения центра масс, получим, что

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 = \frac{e_1 + e_2}{m_1 + m_2} \mathcal{E} + \ddot{\mathbf{r}}_1',$$

и, следовательно,

$$\mathbf{R}_1 = \frac{m_1 e_2 - m_2 e_1}{m_1 + m_2} \mathcal{E} + m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1'. \quad (2)$$

Разлагая ускорение $\ddot{\mathbf{r}}_1'$, равное $-(m_2/m) \ddot{\mathbf{r}}$, по ортам цилиндрических координат, найдем

$$\ddot{\mathbf{r}}_1' = \frac{m_2}{m} \dot{\varphi}^2 \mathbf{r} - \frac{m_2}{m} l \ddot{\varphi} \mathbf{n}_\varphi \quad (m = m_1 + m_2). \quad (3)$$

Наконец, подставим (3) в (2) и исключим $\ddot{\varphi}$ с помощью (1); тогда получим

$$\mathbf{R}_1 = \left[\frac{m_1 e_2 - m_2 e_1}{(m_1 + m_2) l} \mathcal{E} \cos \varphi + \mu \dot{\varphi}^2 \right] \mathbf{r}. \quad (4)$$

Отсюда видно, что реакция стержня связана не только с различием в действии внешнего поля на заряды I и 2 : при равных удельных зарядах ($e_1/m_1 = e_2/m_2$), так же как и в отсутствие внешнего поля, реакция \mathbf{R}_1 будет связана с вращением тела относительно инерциальной системы отсчета.

Пример 37.2. Заряженная трехатомная линейная молекула в постоянном однородном электрическом поле.

Три точки одинаковой массы m жестко скреплены с прямым стержнем исчезающей массы и длины l : первая и третья на концах

стержня, а вторая — посередине (рис. 37.3). Все точки обладают одинаковым по величине электрическим зарядом: первая и третья — положительным, а вторая — отрицательным. Эта «молекула» движется в неподвижной плоскости, параллельной напряженности \mathcal{E} постоянного

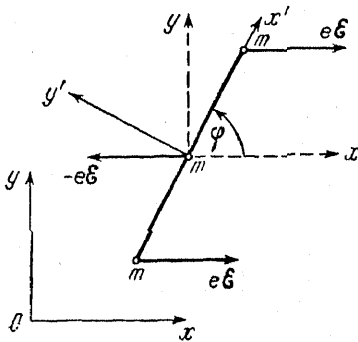


Рис. 37.3.

однородного электрического поля. Найти уравнение движения «молекулы» в независимых координатах и реакции стержня.

Выбирая системы S и S' аналогично тому, как это было сделано в предыдущем примере, для радиуса-вектора центра масс, радиусов-векторов точек и угловой скорости молекулы получим

$$\mathbf{r}_m = \mathbf{r}_3; \quad \mathbf{r}'_1 = -\frac{\mathbf{r}}{2}, \quad \mathbf{r}'_2 = 0, \\ \mathbf{r}'_3 = \frac{\mathbf{r}}{2}, \quad \boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi} \mathbf{n}_z,$$

где $\mathbf{r} = \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1$, а φ — угол между осью молекулы и осью Ox . Кинетическая энергия, ввиду того что начало O' совмещено с центром масс молекулы, равна (см. (37.18))

$$T = \frac{3m}{2} v_m^2 + \frac{m}{2} \dot{\varphi}^2 \cdot \sum_{i=1}^3 [\mathbf{n}_z \mathbf{r}'_i]^2.$$

Если за независимые координаты взять декартовы координаты x_m и y_m центра масс и угол φ , а также учесть, что все векторы \mathbf{r}'_i перпендикулярны \mathbf{n}_z , то для кинетической энергии получим выражение

$$T = \frac{3m}{2} (\dot{x}_m^2 + \dot{y}_m^2) + \frac{ml^2}{4} \dot{\varphi}^2. \quad (1)$$

Потенциальная энергия молекулы в силу однородности поля равна

$$U^e = -\mathcal{E} (e_1 \mathbf{r}_1 + e_2 \mathbf{r}_2 + e_3 \mathbf{r}_3),$$

где $e_1 = e_3 = e$, а $e_2 = -e$. Используя соотношения (21.2) для каждой точки и имея в виду, что $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_m$, а $\mathbf{r}'_1 + \mathbf{r}'_3 = 0$, найдем энергию U^e в независимых координатах

$$U^e = -e\mathcal{E} x_m. \quad (2)$$

Наконец, учитывая (1) и (2), из уравнений Лагранжа получим

$$\ddot{x}_m = \frac{e\mathcal{E}}{3m}; \quad x_m = \frac{e\mathcal{E}}{6m} t^2 + \dot{x}_{m0} t + x_{m0}, \\ \ddot{y}_m = \dot{y}_{m0} t + y_{m0}, \quad \varphi = \dot{\varphi}_0 t + \varphi_0. \quad (3)$$

Отсюда видно, что центр масс молекулы движется равноускоренно в направлении вектора \mathcal{E} , а вся молекула равномерно вращается.

Реакцию стержня R_1 на точку I определим из уравнения движения этой точки

$$m\ddot{\mathbf{r}}_1 = e\mathcal{E} + R_1.$$

Действительно, используя соотношение

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 = \ddot{\mathbf{r}}_m + \ddot{\mathbf{r}}'_1$$

и исключая $\ddot{\mathbf{r}}_m$ с помощью (3), после вычисления $\ddot{\mathbf{r}}'_1$ найдем

$$R_1 = -\frac{2e}{3}\mathcal{E} + \frac{m}{2}\dot{\phi}_0^2\mathbf{r} \quad (4)$$

(как видно, реакция R_1 при наличии внешнего поля не параллельна стержню).

Аналогично вычисляются реакции стержня на точки 2 и 3:

$$R_2 = \frac{4e}{3}\mathcal{E}, \quad R_3 = -\frac{2e}{3}\mathcal{E} - \frac{m}{2}\dot{\phi}_0^2\mathbf{r}. \quad (5)$$

Заметим, что реакции (4) и (5) являются суммарными силами, действующими на точки со стороны всего стержня, причем составляющие реакций, перпендикулярные стержню, связаны с исчезающе малым изгибом бесконечно жесткого стержня. Нетрудно проверить, что сумма реакций и сумма их моментов равняются нулю, так как реакции стержня — это внутренние силы механической системы (см. (9.13) и (10.4)). Сумма действительных и виртуальных работ реакций также равна нулю, поскольку стержень — абсолютно твердое тело (см. (11.13), (24.8) и (37.19)).

Пример 37.3. Равновесие тонкого неоднородного стержня.

Плотность неоднородного тонкого стержня веса mg и длины l линейно зависит от расстояния до одного из его концов. Более легким концом стержень опирается на гладкий выступ высоты h , а более тяжелым — на гладкую горизонтальную опору, причем нижний конец стержня удерживается нитью (рис. 37.4). Определить реакции опор и нити.

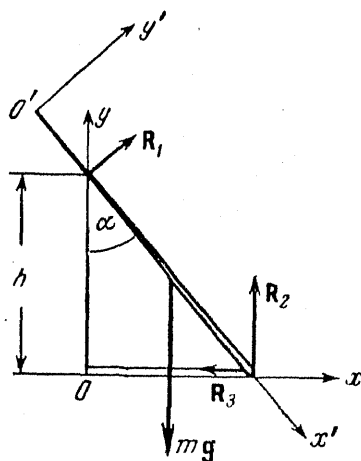


Рис. 37.4.

Напишем уравнения (37.16) с учетом (37.14):

$$\begin{aligned} mg + R_1 + R_2 + R_3 &= 0, \\ [r_m mg] + [r_1 R_1] + [r_2 R_2] + [r_3 R_3] &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Учитывая, что реакция R_1 перпендикулярна стержню, R_2 перпендикулярна горизонтальной опоре, а R_3 направлена по горизонтали, выберем систему координат Oxy так, чтобы большее число компонент сил равнялось нулю. Тогда уравнения (1) можно представить в виде

$$\begin{aligned} R_1 \cos \alpha - R_3 &= 0, & -mgx_m - y_1 R_1 \cos \alpha + x_2 R_3 &= 0, \\ -mg + R_1 \sin \alpha + R_2 &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Используя систему $O'x'y'$ (см. рис. 37.4), определим положение центра масс стержня. С этой целью заменим в (9.1) суммирование по точкам интегрированием по длине; тогда получим

$$y'_m = 0, \quad x'_m = \frac{\int_0^l \rho(x') x' dx'}{\int_0^l \rho(x') dx'} = \frac{2}{3} l,$$

где $\rho(x') = ax'$ — плотность массы стержня (здесь постоянная a выражается через массу стержня и равна $2m/l^2$). Отсюда найдем координату x_m центра масс стержня относительно Oxy :

$$x_m = h \operatorname{tg} \alpha - \frac{l}{3} \sin \alpha. \quad (3)$$

Используя (2) и (3), окончательно получим

$$R_1 = \frac{mgl}{6h} \sin 2\alpha, \quad R_2 = mg - R_1 \sin \alpha, \quad R_3 = R_1 \cos \alpha.$$

§ 38. Тензор инерции

Кинетический момент и энергия твердого тела содержат достаточно сложные выражения \mathcal{M} и \mathcal{T} , связанные с вращением тела (см. (37.5) и (37.17)). Изучим подробнее эти величины, являющиеся соответственно линейной и квадратичной формами от проекций угловой скорости (коэффициенты этих форм зависят от распределения масс в теле). Принимая во внимание известное векторное соотношение

$$[r_i' [\omega r_i']] = (r_i')^2 \omega - r_i' (r_i' \omega),$$

представим кинетический момент вращения в виде

$$\mathcal{M} = \sum_i m_i \{ (r_i')^2 \omega - r_i' (r_i' \omega) \}. \quad (38.1)$$

Поскольку векторы \mathbf{r}_i постоянны лишь относительно системы, жестко связанной с твердым телом, целесообразно использовать проекции момента \mathcal{M} на оси системы S' . Проектируя (38.1), например, на ось $O'x'$, получим

$$\mathcal{M}_{x'} = \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2) \omega_{x'} - \sum_i m_i x_i y_i \omega_{y'} - \sum_i m_i x_i z_i \omega_{z'}.$$

Аналогично определяя $\mathcal{M}_{y'}$ и $\mathcal{M}_{z'}$, убедимся, что все проекции момента можно записать в форме

$$\mathcal{M}_\alpha = \sum_\beta J_{\alpha\beta} \omega_\beta \quad (38.2)$$

здесь индексы α и β являются индексами координатных осей системы S' , а совокупность величин $J_{\alpha\beta}$ представляется матрицей

$$\|J_{\alpha\beta}\| = \begin{vmatrix} \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2) & -\sum_i m_i x_i y_i & -\sum_i m_i x_i z_i \\ -\sum_i m_i y_i x_i & \sum_i m_i (x_i^2 + z_i^2) & -\sum_i m_i y_i z_i \\ -\sum_i m_i z_i x_i & -\sum_i m_i z_i y_i & \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) \end{vmatrix}. \quad (38.3)$$

Вывод соотношения (38.2) полезно повторить, используя тензорные обозначения. Тогда (38.1) будет иметь вид

$$\mathcal{M}_\alpha = \sum_i \sum_\beta m_i \{x_{i\beta} x_{i\beta} \omega_\alpha - x_{i\alpha} x_{i\beta} \omega_\beta\}, \quad (38.4)$$

где α и β пробегает значения 1, 2 и 3, являющиеся индексами осей $O'x'$, $O'y'$, $O'z'$ соответственно (например, значению x_{i2} соответствует проекция y_i радиуса-вектора \mathbf{r}_i). Учитывая, что проекцию угловой скорости ω_α можно представить в виде (см. (16.7))

$$\omega_\alpha = \sum_\beta \delta_{\alpha\beta} \omega_\beta \quad (38.5)$$

(здесь $\delta_{\alpha\beta}$ — символ Кронекера), выражению (38.4) можно придать форму (38.2), в которой коэффициенты $J_{\alpha\beta}$ равны

$$J_{\alpha\beta} = \sum_i m_i \left\{ \sum_\gamma x_{i\gamma} x_{i\gamma} \delta_{\alpha\beta} - x_{i\alpha} x_{i\beta} \right\}. \quad (38.6)$$

Часть кинетической энергии \mathcal{E} , связанную только с вращением тела (см. (37.17)), также можно выразить через величины $J_{\alpha\beta}$. Действительно, учитывая, что

$$[\omega \mathbf{r}_i]^2 = (\mathbf{r}_i)^2 \omega^2 - (\mathbf{r}_i \omega)^2,$$

найдем

$$\sigma = \frac{1}{2} \sum_{i,j} J_{ij} \omega_i \omega_j \quad (38.7)$$

Совокупность величин J_{ij} называется тензором инерции, а его отдельные компоненты — моментами инерции. Кинетический момент вращения M и энергия вращения σ выражаются через моменты инерции J_{ij} и проекции угловой скорости ω . Заметим, что моменты инерции J_{ij} , характеризующие данное твердое тело, являются постоянными величинами, которые зависят только от выбора системы S , жестко связанной с телом, от

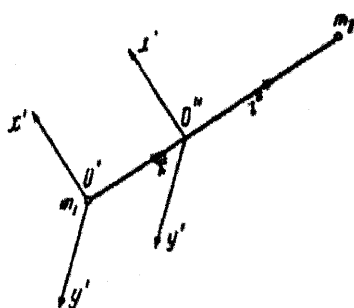


Рис. 38.1.

распределения массы твердого тела и его формы. Тензор инерции является симметричным тензором, т. е. является совокупностью шести моментов инерции: трех «диагональных» моментов $J_{x'x'}$, $J_{y'y'}$, $J_{z'z'}$, которые называются осевыми моментами инерции, и трех «недиагональных» моментов, $J_{x'y'}$, $J_{x'z'}$, $J_{y'z'}$, которые называются центробежными моментами инерции.

Вычислим, например, моменты инерции двухатомной молекулы относительно систем отсчета S_1 и S_2 с началами в точке l и центре масс молекулы соответственно и с одной из координатных осей, направленной по оси молекулы (рис. 38.1). В системе S_1 координаты точек равны

$$x_i = y_i = z_i = 0, \quad x'_i = y'_i = 0, \quad z'_i = l,$$

где l — расстояние между точками. Подставляя эти координаты в (38.3), найдем моменты инерции молекулы в системе S_1

$$\begin{aligned} J_{x'y'} = J_{x'z'} = J_{y'z'} = J_{z'x'} = J_{z'y'} = 0, \\ J_{x'x'} = J_{y'y'} = m_1 z_1'^2 + m_2 z_2'^2 = m l^2. \end{aligned}$$

Вычисления в системе S_2 также приводят к двум равным и отличным от нуля моментам инерции:

$$J_{x'x'} = J_{y'y'} = m_1 z_1'^2 + m_2 z_2'^2 = \mu l^2,$$

где $z_1' = -\frac{m_2}{m} l$, $z_2' = \frac{m_1}{m} l$, $m = m_1 + m_2$, а μ — приведенная масса. Таким образом, тензор инерции молекулы в системах S_1 и S_2

соответственно имеет вид

$$\|J_{\alpha\beta}\| = \begin{vmatrix} m_2 l^2 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 l^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

$$\|J_{\alpha\beta}\| = \begin{vmatrix} \mu l^2 & 0 & 0 \\ 0 & \mu l^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Подчеркнем, что *оси системы S , жестко связанные с твердым телом, всегда можно выбрать так, чтобы все центробежные моменты инерции обратились в нуль.* Действительно, часть \mathcal{F} кинетической энергии является положительно определенной квадратичной формой проекций вектора ω с вещественными симметричными коэффициентами $J_{\alpha\beta}$ (см. (37.17) и (38.7)). И поэтому некоторым преобразованием координат ее всегда можно привести к каноническому виду

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} (J_{x'} \omega_{x'}^2 + J_{y'} \omega_{y'}^2 + J_{z'} \omega_{z'}^2). \quad (38.8)$$

Этому процессу соответствует приведение симметричного тензора с вещественными компонентами к диагональному виду

$$\|J_{\alpha\beta}\| = \begin{vmatrix} J_{x'} & 0 & 0 \\ 0 & J_{y'} & 0 \\ 0 & 0 & J_{z'} \end{vmatrix}. \quad (38.9)$$

Оси, жестко связанные с твердым телом, относительно которых тензор инерции диагонален, называются главными осями инерции. В этом случае «диагональные» моменты называются главными моментами инерции и обозначаются $J_{x'}$, $J_{y'}$, $J_{z'}$. Для каждого начала системы S' , жестко связанной с телом, существуют свои направления главных осей и свои значения главных моментов.

В большинстве случаев при решении конкретных задач оси системы S' целесообразно направлять по главным осям; при таком выборе осей выражение для энергии вращения \mathcal{F} упрощается (ср. (38.8) и (38.7)), упрощается также выражение (38.2) для момента вращения:

$$\mathcal{M}_{x'} = J_{x'} \omega_{x'}, \quad \mathcal{M}_{y'} = J_{y'} \omega_{y'}, \quad \mathcal{M}_{z'} = J_{z'} \omega_{z'}. \quad (38.10)$$

Общей процедурой отыскания главных осей инерции является известный алгебраический процесс приведения квадратичной формы \mathcal{F}

к каноническому виду. Наиболее просто диагонализация \mathcal{J} осуществляется в тех случаях, когда тело обладает симметрией в распределении масс, или, как говорят, материальной симметрией. Пусть, например, тело обладает *осью материальной симметрии* (это означает, что все точки тела можно разбить на пары одинаковых по массе точек, расположенных симметрично относительно данной оси). Тогда, проводя соответствующую перенумерацию точек, для каждой пары симметрично расположенных точек получим

$$\begin{aligned} m_i &= m_{i+1}, & \mathbf{r}_i &= (x_i, y_i, z_i) \\ \mathbf{r}_{i+1} &= (-x_i, -y_i, z_i) \end{aligned} \quad (38.11)$$

(здесь ось Ox' совмещена с осью симметрии). Подставляя (38.11) в (9.1) и суммируя по указанным парам, приходим к выводу, что *центр масс тела находится на оси материальной симметрии*:

$$x_m = 0, \quad y_m = 0, \quad z_m \neq 0; \quad (38.12)$$

а суммируя по тем же парам выражения для моментов инерции (см. (38.3)), убедимся, что $J_{x'x'} = J_{y'y'} = 0$, и, следовательно, тензор инерции имеет вид

$$|J_{\alpha\beta}| = \begin{vmatrix} J_{x'x'} & J_{x'y'} & 0 \\ J_{y'y'} & J_{y'z'} & 0 \\ 0 & 0 & J_{z'z'} \end{vmatrix}. \quad (38.13)$$

Таким образом, *ось материальной симметрии тела является главной осью инерции*.

В предельном случае, когда все точки тела находятся на одной прямой (такое тело называется ротатором), координаты x_i и y_i точек будут равны нулю и, следовательно, $J_{x'y'} = 0$. Поэтому все оси, перпендикулярные оси ротатора, будут главными осями инерции, а главные моменты инерции будут равны

$$J_{x'x'} = J_{y'y'} = \sum_i m_i (z_i)^2 \quad (38.14)$$

(заметьте, что ротатор имеет две вращательные степени свободы, поскольку говорить о вращении ротатора вокруг своей оси бессмысленно).

Пусть теперь тело обладает *плоскостью материальной симметрии*. Тогда, совмещая плоскость $Ox'y'$ с плоскостью симметрии, все точки (вне плоскости) можно разбить на пары, для которых

$$\begin{aligned} m_i &= m_{i+1}, & \mathbf{r}_i &= (x_i, y_i, z_i) \\ \mathbf{r}_{i+1} &= (x_i, y_i, -z_i) \end{aligned} \quad (38.15)$$

Подставляя (38.15) в (9.1), а затем в (38.3), убедимся, что в рассматриваемом случае *центр масс лежит в плоскости материальной симметрии, а любая ось, перпендикулярная этой плоскости, будет главной осью инерции*. Если все точки твердого тела расположены в некоторой плоскости, то наряду с отмеченными результатами найдем, что

$$J_{z'} = J_{x'} + J_{y'}, \quad (38.16)$$

где $J_{x'} = \sum_i m_i y_i'^2$, $J_{y'} = \sum_i m_i x_i'^2$.

Если тело обладает не одним признаком симметрии, то отыскание главных осей инерции еще более упрощается. Покажем это на примере плоского диска с осью материальной симметрии, совпадающей с одним из диаметров этого диска. Помещая начало O' в любую точку оси симметрии (рис. 38.2), нетрудно убедиться, что главными осями будут ось $O'z'$, перпендикулярная плоскости диска, ось $O'y'$ — ось материальной симметрии диска и ось $O'x'$, перпендикулярная первым двум осям.

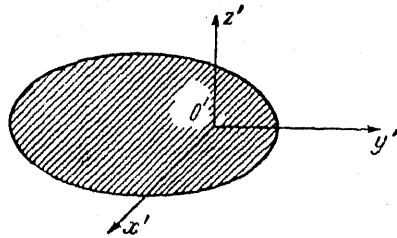


Рис. 38.2.

В заключение рассмотрим преобразования тензора инерции в результате преобразований системы S' , жестко связанной с твердым телом. Например, в результате *параллельного переноса* получим две системы, жестко связанные с твердым телом: систему $O'x'y'z'$ и систему $O''x''y''z''$ (оси этих систем параллельны, а начала различны — см. рис. 38.3, а). Обозначая компоненты тензора инерции относительно системы S'' (т. е. системы $O''x''y''z''$) символом $J''_{\alpha\beta}$, согласно (38.6) будем иметь

$$J''_{\alpha\beta} = \sum_i m_i \{(\mathbf{r}_i'')^2 \delta_{\alpha\beta} - (\mathbf{r}_i'')_{\alpha} (\mathbf{r}_i'')_{\beta}\}, \quad (38.17)$$

где \mathbf{r}_i'' — радиус-вектор i -й точки относительно системы S'' , а $(\mathbf{r}_i'')_{\alpha}$ — его проекция на ось с индексом α . Поскольку радиусы-векторы любой точки тела относительно рассматриваемых систем связаны соотношением (см. (1.6))

$$\mathbf{r}_i' = \mathbf{r}_i'' + \mathbf{c}, \quad (38.18)$$

где $\mathbf{c} = \mathbf{r}_{O''O'}$, то, подставляя (38.18) в (38.17) и используя определение центра масс (9.1), найдем

$$J''_{\alpha\beta} = J'_{\alpha\beta} + m(c^2 \delta_{\alpha\beta} - c_{\alpha} c_{\beta}) + m \{2c \mathbf{r}'_m \delta_{\alpha\beta} - (\mathbf{r}'_m)_{\alpha} c_{\beta} - (\mathbf{r}'_m)_{\beta} c_{\alpha}\}, \quad (38.19)$$

где m — масса всего тела, а r_m — радиус-вектор центра масс тела от начала O . Если начало O' поместить в центр масс тела, то $r_m = 0$ и (38.19) сведется к более простому выражению

$$J_{\alpha\beta}^* = J_{\alpha\beta}^m + m(r_{\alpha\beta}^{*0} - c_\alpha c_\beta); \quad (38.20)$$

здесь $J_{\alpha\beta}^m$ — тензор инерции относительно системы S' с началом в центре масс тела. Такой тензор называется **центральным**,

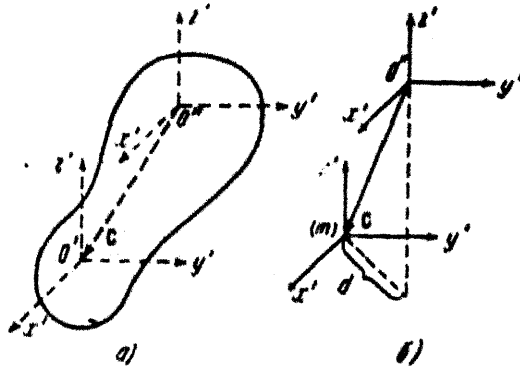


Рис. 38.3.

а главные оси инерции, проходящие через центр масс называются **главными центральными осями**.

Используя (38.20), можно найти **соотношение между осями моментами инерции относительно параллельных осей, одна из которых проходит через центр масс (теорема Штейнера)**. Например, соотношение между моментами $J_{z''z''}^*$ и $J_{z''z''}^m$ имеет вид

$$J_{z''z''}^* = J_{z''z''}^m + md^2, \quad (38.21)$$

где $d = (c_x^2 + c_y^2)^{1/2}$ — расстояние между параллельными осями $O''z''$ и $O'z'$, проходящими через начало O'' и центр масс тела соответственно (см. рис. 38.3, б).

Для того чтобы найти **преобразование тензора при поворотах системы координат**, выберем жестко связанные с твердым телом системы S' и S'' , имеющие общее начало (рис. 38.4). Выразив какую-либо скалярную функцию, зависящую от компонент тензора, сначала через величины, отнесенные к системе S' , а затем через аналогичные величины, отнесенные к системе S'' , можно получить закон преобразования тензора. В частности, выбирая в качестве скалярной функции кинетическую энергию, получим

$$\sum_{\mu, \nu} J_{\mu\nu} \omega_\mu \omega_\nu = \sum_{\alpha, \beta} J_{\alpha\beta} \omega'_\alpha \omega'_\beta, \quad (38.22)$$

где $J_{\mu\nu}$ — компоненты тензора инерции относительно системы S'' , а $J_{\alpha\beta}$ — компоненты тензора инерции относительно S' . Пользуясь законом преобразования векторов при поворотах системы координат (см., например, (16.2) и (16.15)), найдем, что проекции угловой скорости на оси систем S' и S'' связаны между собой соотношениями

$$\omega_\alpha = \sum_{\mu} a_{\alpha\mu} \omega_\mu, \quad (38.23)$$

где $a_{\alpha\mu}$ — косинус угла между осями с индексами α и μ . Подставляя в правую часть равенства (38.22) выражения (38.23) и приравнявая коэффициенты при одинаковых произведениях $\omega_\mu \omega_\nu$, получим

$$J_{\mu\nu} = \sum_{\alpha, \beta} J_{\alpha\beta} a_{\alpha\mu} a_{\beta\nu}, \quad (38.24)$$

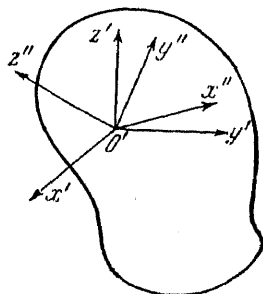


Рис. 38.4.

Такой же вид имеют формулы преобразования любого тензора при поворотах системы координат.

Пример 38.1. Моменты инерции неоднородного тонкого стержня с плотностью массы, линейно зависящей от расстояния до одного из концов стержня.

Найти моменты инерции указанного стержня массы m и длины l относительно главных центральных осей инерции.

Определим моменты инерции относительно главных осей с началом в более легком конце и осью $O'z'$, направленной по стержню. Имея в виду, что плотность стержня определяется функцией (см. пример 37.3)

$$\rho(z') = \frac{2m}{l^3} z',$$

получим следующее значение для двух отличных от нуля моментов инерции:

$$J_{x'} = J_{y'} = \int_0^l \rho(z') (z')^2 dz' = \frac{ml^3}{2}.$$

Главные центральные оси могут быть найдены параллельным переносом уже рассмотренных осей. Применяя теорему (38.21), получаем

$$J_{x''} = J_{x'}^m + m \left(\frac{2}{3} l\right)^2, \quad J_{y''} = J_{y'}^m + m \left(\frac{2}{3} l\right)^2,$$

так как расстояние от более легкого конца стержня до его центра масс равно $2l/3$ (см. пример 37.3). Отсюда находим

$$J_{x''}^m = J_{y''}^m = \frac{ml^3}{18}.$$

Пример 38.2. Главные оси инерции твердого тела, представляющего собой систему четырех точек, расположенных в углах прямоугольника.

Определить направление главных осей инерции с началом в одной из материальных точек твердого тела (рис. 38.5), предполагая, что масса каждой точки равна m , а стороны прямоугольника равны a и b соответственно.

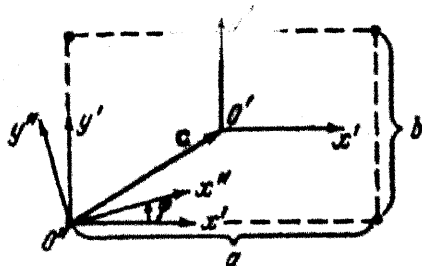


Рис. 38.5

Ось Ox'' перпендикулярна направлению одной из главных осей инерции. Поэтому остается определить положение оси Ox'' в плоскости тела, т. е. определить угол φ , указанный на рис. 38.5.

Прежде чем найти моменты инерции относительно системы с началом в O , вычислим главные

центральные моменты инерции^{*)}. Из соображений материальной симметрии следует, что центр масс находится на пересечении диагоналей прямоугольника, а оси Ox' и Oy' являются главными центральными осями; используя (38.16), найдем моменты инерции относительно этих осей:

$$J_{x'}^m = mb^2, \quad J_{y'}^m = ma^2, \quad J_{z'}^m = m(a^2 + b^2).$$

Затем, применяя преобразование (38.20), получим моменты инерции относительно системы $Ox''y''z''$. Используя преобразование для диагональных элементов

$$J_{x''} = J_{x'}^m + 4m(c^2 - c'^2)$$

и преобразование для недиагональных элементов

$$J_{x''y''} = J_{x'y'}^m - 4mc_xc_y, \quad (\alpha \neq \beta),$$

найдем

$$J_{x''x''} = 2mb^2, \quad J_{y''y''} = 2ma^2, \quad J_{z''z''} = 2m(a^2 + b^2),$$

$$J_{x''y''} = -tab, \quad J_{y''x''} = J_{y''x''} = 0.$$

Отсюда следует, что оси Ox'' и Oy'' не являются главными. Поэтому повернем систему $Ox''y''z''$ вокруг оси Ox'' так, чтобы центробежный момент $J_{x''y''}$ относительно новой системы $Ox'''y'''z'''$ обратился в нуль. При этом поворот интересующий нас компонент преобразуется по закону (см. (38.21))

$$J_{x'''y'''} = J_{x''y''}a_{x''x'''}a_{y''y'''} + J_{y''y''}a_{y''x'''}a_{y''y'''} + J_{z''z''}a_{z''x'''}a_{z''y'''} + J_{x''x''}a_{x''y'''}a_{x''x'''} + J_{y''y''}a_{y''x'''}a_{y''y'''} + J_{z''z''}a_{z''x'''}a_{z''y'''} + J_{x''x''}a_{x''x'''}a_{y''y'''} + J_{y''y''}a_{y''y'''}a_{x''x'''} + J_{z''z''}a_{z''z'''}a_{y''y'''} + J_{x''x''}a_{x''x'''}a_{z''z'''} + J_{y''y''}a_{y''y'''}a_{z''z'''} + J_{z''z''}a_{z''z'''}a_{z''z'''}.$$

^{*)} Такой путь решения не является кратчайшим, но позволяет проиллюстрировать преобразование (38.20).

Учитывая, что $a_{z'x''} = a_{z'y''} = 0$, а остальные $a_{\alpha\beta}$ выражаются через угол φ согласно формулам

$$a_{x'x''} = a_{y'y''} = \cos \varphi, \quad a_{x'y''} = -\sin \varphi, \quad a_{y'x''} = \sin \varphi,$$

и требуя обращения в нуль момента инерции $J_{x''y''}$, получим следующее уравнение относительно угла φ :

$$-J_{x'x'} \cos \varphi \sin \varphi + J_{y'y'} \sin \varphi \cos \varphi + J_{x'y'} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) = 0$$

и его решение в виде

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2J_{x'y'}}{J_{x'x'} - J_{y'y'}} = \frac{ab}{a^2 - b^2}.$$

§ 39. Плоскопараллельное движение твердого тела

Инерционные свойства твердого тела зависят от массы тела и ее распределения по объему тела. В связи с этим движение твердого тела представляет собой достаточно сложное механическое явление.

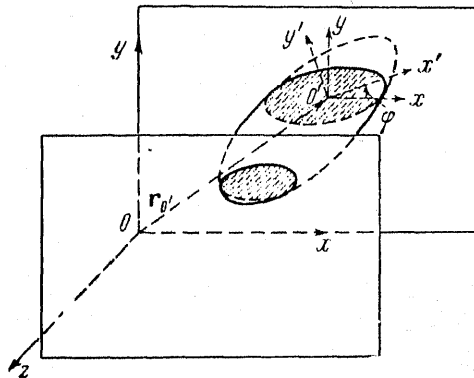


Рис. 39.1.

Начнем его изучение с простейшего случая — плоскопараллельного движения, когда все точки тела движутся в плоскостях, параллельных некоторой неподвижной плоскости (рис. 39.1).

Если движение твердого тела является плоскопараллельным, то систему S' , жестко связанную с телом, всегда можно выбрать так, чтобы плоскость $O'x'y'$ совпала с неподвижной плоскостью Oxy некоторой инерциальной системы S . Тогда оси Oz и $O'z'$ будут оставаться параллельными, а положение тела будет определяться двумя координатами точки O' и одним углом Эйлера φ (если на тело не налагается каких-либо дополнительных связей). Угловая скорость

тела и его момент вращения будут направлены одинаково и соответственно равны (см. (17.10), (38.1) и (38.2))

$$\omega = \dot{\varphi} n, \quad M = J_{c,c'} \dot{\varphi} n, \quad (39.1)$$

а выражение кинетической энергии \mathcal{E} , связанной с вращением тела, примет более простой вид (см. (38.7))

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} J_{c,c'} \dot{\varphi}^2. \quad (39.2)$$

Уравнениями плоскопараллельного движения свободного тела являются три уравнения (см. (37.11)):

$$m \ddot{x}_m = F_x^e, \quad m \ddot{y}_m = F_y^e, \quad J_{c,c'}^m \ddot{\varphi} = \mathcal{L}^e, \quad (39.3)$$

(здесь использованы декартовы координаты центра масс тела, причем центр масс и начало O' совпадают).

Распространением случая плоскопараллельного движения тела с внешними силами является движение физического маятника (так называется твердое тело, связанное с неподвижной

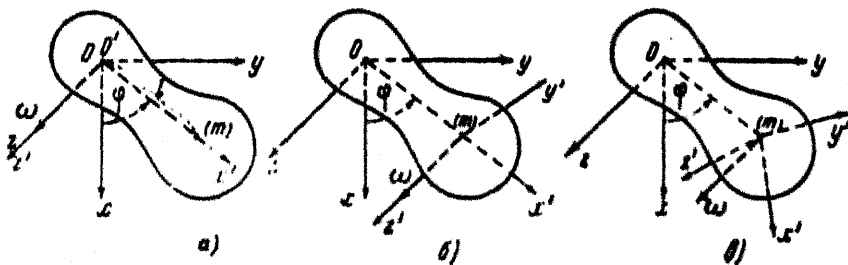


Рис. 39.2.

осью — осью маятника, вокруг которой оно может совершать колебания). В предположении идеальности этой связи задача легко решается в независимых координатах. Совместим одну из декартовых систем с осью маятника, предположив, что она горизонтальна. Другую ось системы координат направим вдоль направления силы тяготения g . В качестве начала O возьмем точку пересечения оси маятника и перпендикулярной к ней прямой, проходящей через центр масс маятника (рис. 39.2). Далее с иллюстративной целью рассмотрим данную задачу при разных выборах системы S' , жестко связанной с твердым телом. Пусть система S выбрана так, что O совпадает с O' , ось $O'z'$ — с осью Oz , а ось $O'x'$ проходит через центр масс. Тогда, выбирая в качестве независимой координаты угол φ между осями Ox и Ox' (рис. 39.2, а), в соответствии с (37.12) и (37.17) найдем, что вся кинетическая энергия маятника будет равна кинетической энергии вращения \mathcal{E} , а в соответствии

с (37.19) и первой из формул (37.14) для потенциальной энергии маятника получим

$$U = -mgr_m = -mgl \cos \varphi,$$

где m — масса маятника, а l — расстояние от центра масс маятника до его оси. Пользуясь выражениями \mathcal{F} (см. (39.2)) и U , с помощью уравнения Лагранжа найдем

$$\ddot{\varphi} + \omega_g^2 \sin \varphi = 0, \quad (39.4)$$

где $\omega_g = (mgl/J_{z'z'})^{1/2}$ — частота линейных колебаний маятника.

Если начало системы S' поместить в центр масс, а ось $O'z'$ направить параллельно оси Oz (рис. 39.2, б), то для кинетической энергии получим выражение (см. (37.9) и (37.18))

$$T = \frac{mv_m^2}{2} + \frac{J_{z'z'}^m}{2} \dot{\varphi}^2,$$

где $v_m = l\dot{\varphi}$. Учитывая, что потенциальная энергия остается той же, приходим к уравнению движения маятника с квадратом частоты линейных колебаний, представленным в виде

$$\omega_g^2 = \frac{mgl}{ml^2 + J_{z'z'}^m}. \quad (39.5)$$

Наконец, совместим начало системы S' с центром масс, а ее оси направим по главным центральным осям инерции (рис. 39.2, в). При таком выборе системы S' проекции угловой скорости ω на оси S' равны:

$$\omega_{x'} = \omega a_{\omega x'}, \quad \omega_{y'} = \omega a_{\omega y'}, \quad \omega_{z'} = \omega a_{\omega z'}, \quad (39.6)$$

где $a_{\omega\alpha}$ — косинусы угла между осью вращения и главной центральной осью с индексом α , а ω — модуль угловой скорости. Подставляя (39.6) в (38.8), получим кинетическую энергию вращения в виде

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} J_\omega \omega^2, \quad (39.7)$$

где $J_\omega = J_{x'}^m a_{\omega x'}^2 + J_{y'}^m a_{\omega y'}^2 + J_{z'}^m a_{\omega z'}^2$ — момент инерции тела относительно оси вращения, а $J_{x'}^m, J_{y'}^m, J_{z'}^m$ — главные центральные моменты. В данном случае J_ω совпадает с $J_{z'z'}^m$ и является постоянной величиной, так как углы между осями S и S' не изменяются*). Указанный выбор системы S' приводит нас к тому же уравнению движения с квадратом частоты линейных колебаний, представленным в виде

$$\omega_g^2 = \frac{mgl}{ml^2 + J_{x'}^m a_{\omega x'}^2 + J_{y'}^m a_{\omega y'}^2 + J_{z'}^m a_{\omega z'}^2}. \quad (39.8)$$

*) Кинетическая энергия, связанная с вращением тела, всегда может быть представлена в виде (39.7). Однако в общем случае J_ω зависит от времени, поскольку положение оси вращения относительно S' изменяется.

Подчеркнем, что закон изменения координаты φ не зависит от выбора системы S' и все полученные выражения для $\ddot{\varphi}$ хотя и имеют разный вид, равны друг другу. Таким образом инерции J_x, J_y, J_z и J_x', J_y', J_z' связаны между собой соотношениями (38.20) и (38.24).

Пример 39.1. Плоскопараллельное движение однородного шара.

Исследовать плоскопараллельное движение шара массы m радиуса R в постоянном однородном электрическом поле напряженности \mathcal{E} , если одна из точек на поверхности шара обла-

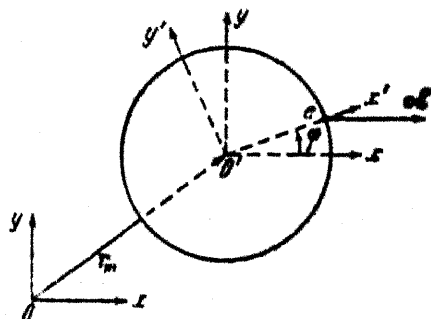


Рис. 39.3.

дает электрическим зарядом e (изменением поля, обусловленным наличием тела, пренебречь).

Выберем инерциальную систему S так, чтобы плоскость Oxy проходила через центр масс шара параллельно вектору \mathcal{E} , а ось Ox была направлена вдоль этого вектора (рис. 39.3). Начало O' системы, жестко связанной с шаром,

поместим в его центр масс, а ось $O'x'$ совместим с прямой, проходящей через центр масс шара и заряда e .

Согласно (37.18) и (39.2) кинетическая энергия шара равна

$$T = \frac{m}{2} (\dot{x}_m^2 + \dot{y}_m^2) + \frac{J_m}{2} \dot{\varphi}^2,$$

где x_m, y_m — декартовы координаты центра масс шара, а φ — угол между осями Ox и $O'x'$. Потенциальная энергия шара в электрическом поле равна

$$U = -e\mathcal{E}r,$$

где r — радиус-вектор заряда. Выражая U через декартовы координаты x_m, y_m и φ , получим

$$U = -e\mathcal{E}(x_m + R \cos \varphi).$$

Затем из уравнений Лагранжа найдем

$$\ddot{x}_m = \frac{e\mathcal{E}}{m} \frac{t^2}{2} + \ddot{x}_{mat} + \ddot{x}_{m0}, \quad \ddot{y}_m = \ddot{y}_{mat} + \ddot{y}_{m0}, \quad \ddot{\varphi} + \frac{e\mathcal{E}R}{J_m} \sin \varphi = 0.$$

Отсюда видно, что центр масс шара движется равноускоренно вдоль напряженности поля и по инерции перпендикулярно к ней. Одновременно шар совершает движение, подобное движению маятника физического

маятника; при малых φ шар будет совершать линейные колебания с частотой

$$\omega_e = \left(\frac{e\mathcal{G}R}{J_{z'}^m} \right)^{1/2}.$$

Момент инерции $J_{z'}^m$ ввиду симметрии шара равен (см. (38.3))

$$J_{z'}^m = \frac{1}{3} (J_{x'}^m + J_{y'}^m + J_{z'}^m) = \frac{2}{3} \int_0^R \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \rho (r')^2 dV',$$

где ρ — плотность массы на единицу объема, $dV' = (r')^2 \sin \theta' \times \times dr' d\theta' d\varepsilon'$ — элемент объема в системе S' в сферических координатах r' , θ' и ε' . Учитывая однородность шара, получим

$$J_{z'}^m = \frac{4\pi\rho}{3} \cdot \frac{2}{5} R^2.$$

Наконец, принимая во внимание, что

$$m = \int_{(V')} \rho dV' = \frac{4\pi\rho}{3} R^3,$$

найдем значение главного центрального момента инерции:

$$J_{z'}^m = \frac{2}{5} mR^2,$$

а также квадрат частоты линейных колебаний шара:

$$\omega_e^2 = \frac{5}{2} \frac{e\mathcal{G}}{mR}.$$

Пример 39.2. Колебания диска.

Найти частоту линейных колебаний однородного диска массы m радиуса R (рис. 39.4) в двух случаях: а) в случае шарнирного соединения диска со стержнем в центре масс диска, б) в случае жесткого скрепления диска со стержнем (стержень невесомый длины l , трением в местах соединения пренебречь).

Выбирая системы S и S' так, как это показано на рис. 39.4, а, и учитывая (37.18) и (39.2), получим кинетическую энергию диска

$$T = \frac{m}{2} l^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{J_{z'}^m}{2} \dot{\varphi}_2^2,$$

где φ_1 — угол между Ox и OO' , φ_2 — угол между $O'x$ и $O'x'$. Учитывая, что потенциальная энергия диска равна

$$U = -mgl \cos \varphi_1,$$

найдем уравнение Лагранжа, соответствующее координате φ_1 , и обобщенную скорость $\dot{\varphi}_1$:

$$\ddot{\varphi}_1 + \omega_1^2 \sin \varphi_1 = 0, \quad \dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}_{10}$$

где $\omega_1^2 = g/l$. Таким образом, в первом случае происходит колебание центра диска и его вращение с постоянной угловой скоростью.

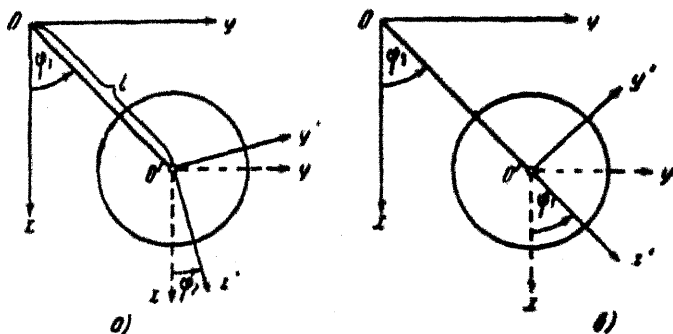


Рис. 39.4

Во втором случае имеем физический маятник, кинетическая энергия которого равна

$$T = \frac{m l^2}{2} \dot{\varphi}_1^2 + \frac{J_0^m}{2} \dot{\varphi}_1^2$$

где $J_0^m = mR^2/2$ — главный центральный момент инерции относительно оси, перпендикулярной диску. Отсюда в соответствии с (39.4) найдем

квадрат частоты линейных колебаний маятника, жестко закрепленного с подвесом:

$$\omega_1^2 = \frac{2gl}{2l^2 + R^2}$$

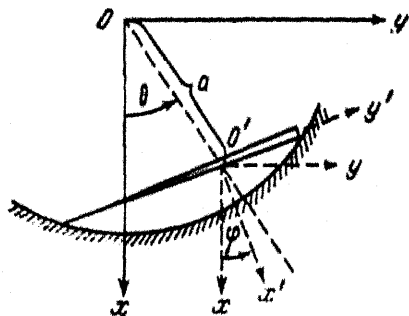


Рис. 39.5.

Пример 89.8. Колебания неоднородного тонкого стержня, опирающегося на обруч.

Найти частоту линейных колебаний неоднородного тонкого стержня массы m длины l , концы которого скользят (рис. 39.5) по расположенному в вертикальной

плоскости гладкому обручу радиуса R (плотность массы стержня линейно зависит от расстояния до одного из его концов).

Выбирая системы координаты так, как это показано на рис. 39.5, получим выражения для кинетической и потенциальной энергии

стержня:

$$T = \frac{ma^2}{2} \dot{\theta}^2 + \frac{J_{z'}^m}{2} \dot{\varphi}^2, \quad U = -mga \cos \theta,$$

где $a = \left(R^2 - \frac{2l^2}{9}\right)^{1/2}$ — расстояние от центра обруча до центра масс стержня (здесь учтено, что центр масс находится на расстоянии $2l/3$ от более легкого конца стержня — см. пример 37.3). Имея в виду, что разность между углами θ и φ постоянна, а главный центральный момент стержня равен $ml^2/18$ (см. пример 38.1), найдем значение квадрата частоты линейных колебаний стержня

$$\omega_g^2 = g \frac{\left(R^2 - \frac{2l^2}{9}\right)^{1/2}}{R^2 - \frac{l^2}{6}}.$$

Пример 39.4. Плоскопараллельное качение неоднородного цилиндра.

По горизонтальной абсолютно шероховатой плоскости катается неоднородный цилиндр массы m и радиуса a (расстояние от его геометрической оси до центра масс равно l , а ось, проходящая через центр масс параллельно оси цилиндра, является главной осью инерции — момент инерции относительно этой оси равен J). Найти частоту

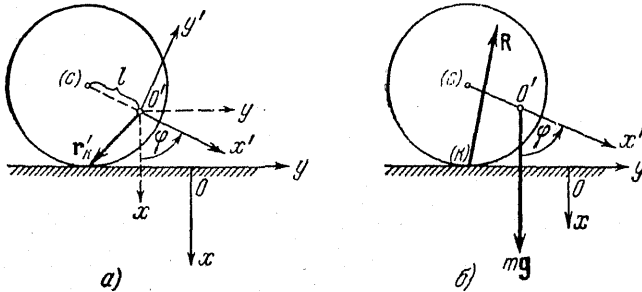


Рис. 39.6.

линейных колебаний цилиндра и реакцию плоскости, если движение цилиндра плоскопараллельно.

Выберем системы S и S' так, как показано на рис. 39.6, а. Качение цилиндра по абсолютно шероховатой плоскости представляет собой движение системы, на которую наложена идеальная связь. Действительно, скорость точки цилиндра, касающейся плоскости, будет в момент касания равна нулю и, следовательно, виртуальное перемещение такой точки равно нулю. Учитывая, что реакция плоскости приложена к точке касания цилиндра, приходим к выводу, что эта реакция не совершает виртуальной работы.

Уравнение рассматриваемой связи можно записать в виде (см. (37.2))

$$\mathbf{v}_k = \mathbf{v}_m + [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}'_k] = 0, \quad (1)$$

где \mathbf{v}_m , $\boldsymbol{\omega}$ — скорость центра масс и угловая скорость цилиндра, \mathbf{v}_k , \mathbf{r}'_k — скорость точки касания относительно S и ее радиус-вектор относительно S' .

Условие (1) в случае плоскопараллельного качения приводит к двум скалярным уравнениям:

$$\dot{x}_m = \omega y'_k, \quad \dot{y}_m = -\omega x'_k, \quad (2)$$

где x_m , y_m — декартовы координаты центра масс цилиндра, x'_k , y'_k — проекции радиуса-вектора \mathbf{r}'_k на оси Ox и Oy . Координаты x'_k и y'_k выражаются через угол φ между осями $O'x$ и $O'x'$ с помощью формул

$$x'_k = a - l \cos \varphi, \quad y'_k = -l \sin \varphi.$$

Таким образом, уравнения (2) можно представить в виде

$$\dot{x}_m = -l\dot{\varphi} \sin \varphi, \quad \dot{y}_m = -\dot{\varphi} (a - l \cos \varphi), \quad (3)$$

а затем проинтегрировать их и тем самым получить x_m и y_m как функции φ :

$$x_m = l \cos \varphi, \quad y_m = -a\varphi + l \sin \varphi \quad (4)$$

(здесь постоянные интегрирования выбраны так, чтобы при $\varphi = 0$ центр масс цилиндра находился в наиниžнем положении). Следовательно, в случае плоскопараллельного качения связь (1) является голономной.

Кинетическая и потенциальная энергии цилиндра как функции независимой координаты φ и обобщенной скорости $\dot{\varphi}$ равны (см. формулы (3) и (4))

$$T = \frac{1}{2} [m(a^2 + l^2 - 2al \cos \varphi) + J] \dot{\varphi}^2, \quad U = -mgl \cos \varphi.$$

Отсюда получим уравнение линейных колебаний цилиндра

$$\ddot{\varphi} + \omega_g^2 \varphi = 0, \quad (5)$$

где

$$\omega_g^2 = \frac{mgl}{m(a-l)^2 + J}.$$

Чтобы найти реакцию плоскости, используем закон изменения импульса цилиндра (см. (37.4)):

$$m\ddot{x}_m = mg + R_x, \quad m\ddot{y}_m = R_y.$$

Подставим сюда проекции скорости центра масс из формулы (3) и пренебрежем членами второго порядка малости и выше по величинам

φ и $\dot{\varphi}$. Тогда, используя уравнение (5), найдем

$$R_x = -mg, \quad R_y = \frac{m^2 g l (a-l)}{m(a-l)^2 + J} \varphi.$$

Отсюда видно, что при малом отклонении $\varphi > 0$ возникает составляющая реакции $R_y > 0$, стремящаяся вернуть центр масс цилиндра к положению устойчивого равновесия; момент всей реакции \mathbf{R} относительно центра масс стремится повернуть цилиндр по часовой стрелке, т. е. опять-таки к положению устойчивого равновесия.

§ 40. Движение твердого тела с одной неподвижной точкой. Уравнения Эйлера

Изменение ориентации тела с одной закрепленной точкой связано с изменением *всех* углов Эйлера, поэтому задача о движении такого тела является более сложной по сравнению с задачей о плоскопараллельном движении.

Для исследования рассматриваемой задачи поместим в неподвижную точку тела как начало O инерциальной системы S , так и начало O' системы S' , жестко связанной с телом, а оси системы S' направим по главным осям инерции относительно неподвижной точки. Тогда векторные уравнения движения (37.4) с учетом (37.13) можно записать в виде

$$\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{F}^e + \mathbf{R}^e, \quad \dot{\mathcal{M}} = \mathcal{L}^e, \quad (40.1)$$

где $\mathbf{P} = m[\omega \mathbf{r}'_m]$ — импульс тела, \mathbf{R}^e — реакция опоры в точке закрепления (момент реакции в силу выбора начала отсчета равен нулю).

Так как оси системы S' направлены по главным осям инерции, то в уравнении моментов (см. (40.1)) необходимо использовать разложение вектора \mathcal{M} по этим осям (см. (38.10)). Однако производная момента вращения по времени в (40.1) берется при постоянных ортах $\mathbf{n}_x, \mathbf{n}_y, \mathbf{n}_z$. Это обстоятельство «автоматически» учитывается в уравнениях Лагранжа второго рода. Вместе с тем движение ортов системы S' можно учесть в общем случае и в векторной форме уравнений движения. Для этого достаточно воспользоваться соотношением (19.16), справедливым для любого вектора, заданного в виде разложения по движущимся ортам. Тогда из (40.1) получим следующее уравнение для кинетического момента вращения:

$$\frac{d' \mathcal{M}}{dt} + [\omega \mathcal{M}] = \mathcal{L}^e, \quad (40.2)$$

где $\frac{d'}{dt}$ — производная по времени при фиксированных ортах $\mathbf{n}_x, \mathbf{n}_y, \mathbf{n}_z$.

Проектируя правую и левую части уравнения (40.2) на оси системы S' , жестко связанной с телом, и учитывая, что проекции производной $\frac{d'om}{dt}$ на оси S' , согласно (38.10), равны

$$J_{x'}\dot{\omega}_{x'}, \quad J_{y'}\dot{\omega}_{y'}, \quad J_{z'}\dot{\omega}_{z'},$$

найдем динамические уравнения Эйлера

$$\begin{aligned} J_{x'}\dot{\omega}_{x'} + (J_{z'} - J_{y'})\omega_{y'}\omega_{z'} &= \mathcal{L}_{x'}^e, \\ J_{y'}\dot{\omega}_{y'} + (J_{x'} - J_{z'})\omega_{z'}\omega_{x'} &= \mathcal{L}_{y'}^e, \\ J_{z'}\dot{\omega}_{z'} + (J_{y'} - J_{x'})\omega_{x'}\omega_{y'} &= \mathcal{L}_{z'}^e. \end{aligned} \quad (40.3)$$

Для решения задачи методом Лагранжа необходимо найти кинетическую энергию как функцию независимых координат φ, θ, ψ и обобщенных скоростей $\dot{\varphi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}$. Это можно сделать, имея в виду, что кинетическая энергия T равна энергии вращения \mathcal{E} (см. (37.17)), а оси системы S' направлены по главным осям инерции (см. (38.8)). Тогда, используя кинематические формулы Эйлера (17.11), получим*)

$$\begin{aligned} T = \frac{J_{x'}}{2} (\dot{\varphi} \sin \psi \sin \theta + \dot{\theta} \cos \psi)^2 + \frac{J_{y'}}{2} (\dot{\varphi} \cos \psi \sin \theta - \dot{\theta} \sin \psi)^2 + \\ + \frac{J_{z'}}{2} (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi})^2. \end{aligned} \quad (40.4)$$

Выражение (40.4) заметно упрощается, если моменты инерции относительно двух главных осей равны друг другу (в этом случае тело называется симметричным волчком). Действительно, направляя по этим главным осям оси $O'x'$ и $O'y'$ и полагая $J_{x'} = J_{y'}$, из (40.4) найдем

$$T = \frac{J_{x'}}{2} (\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{J_{z'}}{2} (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi})^2. \quad (40.5)$$

Отметим известные общие решения задачи о движении тела с одной закрепленной точкой под действием однородного поля тяжести, которые справедливы при произвольных начальных условиях. Такими решениями являются решения: а) задачи Эйлера (случай уравновешенного волчка), когда неподвижная точка и центр масс тела совпадают, б) задачи Лагранжа (случай симметричного неуравновешенного волчка), когда $J_{x'} = J_{y'} \neq J_{z'}$, а центр масс находится на оси Oz' , в) задачи Ковалевской (случай симметричного неуравновешенного волчка), когда $J_{x'} = J_{y'} = 2J_{z'}$, а центр масс находится в плоскости

*) Подставляя (40.4) в (26.20), можно убедиться, что только третье уравнение системы (40.3) является уравнением Лагранжа относительно переменной ψ , а два других уравнения не являются уравнениями Лагранжа относительно φ и θ .

$O'x'y'$ *). Кроме этих случаев существования общих интегралов, известны также некоторые частные интегралы, т. е. интегралы, имеющие место при определенных начальных условиях.

Пример 40.1. Изменение ориентации спутника (свободного симметричного волчка).

Найти закон изменения ориентации спутника Земли относительно гелиоцентрической системы отсчета.

В качестве инерциальной системы S выберем систему с началом в центре Земли и осями, направленными на «неподвижные» звезды (см. пример 20.3). Начало системы S' , жестко связанной со спутником, поместим в его центр масс, а ось $O'z'$ направим по оси материальной симметрии спутника (рис. 40.1).

Уравнения движения спутника относительно S можно записать в виде (37.11)

$$\begin{aligned} m\ddot{\mathbf{r}}_m &= \sum_i m_i \mathbf{g}(\mathbf{r}_i), \\ \dot{\mathcal{M}} &= \sum_i [\mathbf{r}_i m_i \mathbf{g}(\mathbf{r}_i)], \end{aligned} \quad (1)$$

где m — масса спутника, $\mathbf{g}(\mathbf{r}_i) = -\gamma \frac{m_g}{r_i^2} \mathbf{r}_i$ — напряженность поля тя-

готения Земли в точке пространства,

где находится i -я достаточно малая часть спутника с радиусом-вектором \mathbf{r}_i относительно S и радиусом-вектором \mathbf{r}'_i относительно системы S' . Учитывая, что размеры спутника исчезающе малы по сравнению с расстоянием от центра Земли до любой точки спутника, т. е. полагая, что $\mathbf{g}(\mathbf{r}_i) \approx \mathbf{g}(\mathbf{r}_m)$, получим

$$\ddot{\mathbf{r}}_m = \mathbf{g}(\mathbf{r}_m), \quad \dot{\mathcal{M}} = m [\mathbf{r}'_m \mathbf{g}(\mathbf{r}_m)] = 0, \quad (2)$$

где \mathbf{r}_m — радиус-вектор центра масс спутника относительно S , а $\mathbf{r}'_m = 0$ в силу выбора системы S' . Таким образом, задача о движении спутника распадется на две независимые задачи: задачу о движении центра масс, которая была рассмотрена в § 8, и задачу об изменении ориентации спутника относительно поступательно движущейся системы S_m центра масс.

Из (2) видно, что кинетический момент вращения относительно S_m сохраняется. Кроме того, имеет место интеграл полной энергии

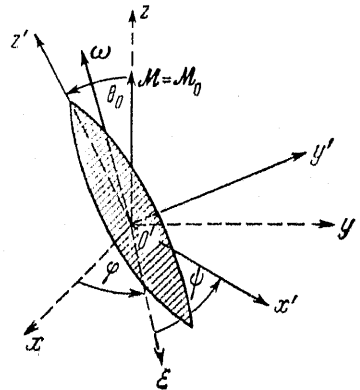


Рис. 40.1.

*) Подробное изложение этих случаев приводится во многих книгах, например см. [9].

спутника относительно системы S (см. (37.18))

$$\frac{mv_m^2}{2} + \mathcal{F} + U = E_0, \quad (3)$$

где $U = -mg(\mathbf{r}_m) \mathbf{r}_m$. Пользуясь уравнением движения центра масс (см. (2)), нетрудно показать, что

$$\frac{mv_m^2}{2} - mg(\mathbf{r}_m) \mathbf{r}_m = \text{const}. \quad (4)$$

Сопоставляя выражения (3) и (4), видим, что кинетическая энергия вращения \mathcal{F} также сохраняется и, следовательно, при решении задачи об изменении ориентации спутника (свободного волчка) можно исходить из двух законов сохранения:

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_0, \quad \mathcal{F} = \mathcal{F}_0. \quad (5)$$

Направляя ось $O'z$ по вектору \mathcal{M}_0 , достигаем того, что \mathcal{M}_ξ — проекция момента на линию узлов — будет равна нулю (см. рис. 16.2). С другой стороны, эта проекция равна выражению

$$\mathcal{M}_\xi = \mathcal{M}_{x'} \cos \psi - \mathcal{M}_{y'} \sin \psi,$$

которое для симметричного волчка можно записать в виде (см. (38.10) и (17.11))

$$\mathcal{M}_\xi = J_{x'} \dot{\theta}.$$

Следовательно, в выбранной системе координат $\theta = \theta_0$, т. е. наклон оси симметрии тела по отношению к \mathcal{M}_0 остается постоянным. Это в свою очередь приводит к сохранению проекции угловой скорости ω на ось симметрии волчка, поскольку (см. рис. 40.1 и (38.10))

$$\mathcal{M}_{z'} = \mathcal{M}_0 \cos \theta_0 = J_{z'} \omega_{z'}.$$

Используя (40.5), запишем интеграл энергии в виде

$$J_{x'}^m (\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + J_{z'}^m (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi})^2 = 2\mathcal{F}_0, \quad (6)$$

где $J_{x'}^m$, $J_{z'}^m$ — главные центральные моменты инерции волчка. Отсюда, учитывая постоянство θ и $\omega_{z'}$, приходим к выводу о постоянстве $\dot{\phi}$, что обуславливает постоянство $\dot{\psi}$ (см. третью из формул (17.11)).

Итак, симметрия волчка и законы сохранения его кинетического момента и кинетической энергии приводят к следующему решению:

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= \dot{\phi}_0, & \dot{\theta} &= 0, & \dot{\psi} &= \dot{\psi}_0, \\ \phi &= \dot{\phi}_0 t + \phi_0, & \theta &= \theta_0, & \psi &= \dot{\psi}_0 t + \psi_0. \end{aligned} \quad (7)$$

Следовательно, свободный симметричный волчок совершает регулярную прецессию (см. пример 17.1). Для этого движения характерно, что ось симметрии волчка и его ось вращения сами вращаются от-

носителю инерциальной системы вокруг постоянного вектора \mathcal{M}_0 с постоянной скоростью прецессии $\dot{\phi}_0$; наклоны этих осей по отношению к вектору \mathcal{M}_0 различны, но постоянны, а угловая скорость ω изменения ориентации волчка, оставаясь по величине постоянной, все время лежит во вращающейся плоскости, образуемой осью симметрии и вектором \mathcal{M}_0 .

Если в начальный момент ось симметрии совпадала по направлению с вектором \mathcal{M}_0 , то из решения (7) следует, что

$$\theta = \theta_0 = 0, \quad \omega_{x'} = \omega_{y'} = \omega_x = \omega_y = 0, \quad \omega_{z'} = \omega_z = \omega, \quad (8)$$

т. е. в этом случае волчок все время будет вращаться вокруг главной оси инерции, сохраняющей ориентацию относительно инерциальной системы; эта ось по направлению все время будет совпадать с угловой скоростью ω и моментом \mathcal{M}_0 .

Рассмотрим тот же пример методом независимых переменных, в качестве которых возьмем углы Эйлера. Лагранжиан свободного симметричного волчка относительно S_m равен кинетической энергии вращения \mathcal{E} (см. (40.5)), т. е.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} J_{x'}^m (\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + J_{z'}^m (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi})^2. \quad (9)$$

Отсюда, ввиду цикличности времени и углов ϕ и ψ , получим интеграл энергии (6) и два интеграла для проекций момента вращения:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_z &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = J_{x'}^m \dot{\phi} \sin^2 \theta + J_{z'}^m (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}) \cos \theta = \mathcal{M}_{z'0}, \\ \mathcal{M}_{z'} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = J_{z'}^m (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}) = \mathcal{M}_{z'0}. \end{aligned} \quad (10)$$

Направляя ось $O'z$ по вектору \mathcal{M}_0 и используя интегралы (6) и (10), найдем решение задачи.

Если исходить из уравнений Эйлера (40.3), то, учитывая симметрию волчка ($J_{x'} = J_{y'}$) и равенство нулю момента внешних сил относительно S_m , получим

$$\dot{\omega}_{x'} + \Omega \omega_{y'} = 0, \quad \dot{\omega}_{y'} - \Omega \omega_{x'} = 0, \quad \dot{\omega}_{z'} = 0, \quad (11)$$

где $\Omega = \frac{J_{z'} - J_{x'}}{J_{x'}} \omega_{z'0}$. В результате решения этой системы найдем проекции угловой скорости как функции времени

$$\omega_{x'} = C \cos(\Omega t + \alpha), \quad \omega_{y'} = C \sin(\Omega t + \alpha), \quad \omega_{z'} = \omega_{z'0},$$

откуда, используя (17.11), получим решение для углов Эйлера.

Заметим, что регулярная прецессия является сравнительно пространственным видом движения твердого тела. Например, такое движение совершает уравновешенный гироскоп и симметричная молекула

(как твердое тело); ось вращения Земли прецессирует вокруг ее полюсов (это связано с тем, что Земля является не сферой, а слегка сплюснутым у полюсов эллипсоидом, симметричным относительно оси).

Пример 40.2. Симметричный тяжелый быстрый волчок.

Симметричный волчок с одной закрепленной точкой и центром масс, находящимся от нее на расстоянии l , движется в однородном поле тяжести. Найти закон движения волчка, если в начальный момент времени его кинетическая энергия вращения вокруг оси симметрии велика по сравнению с потенциальной энергией.

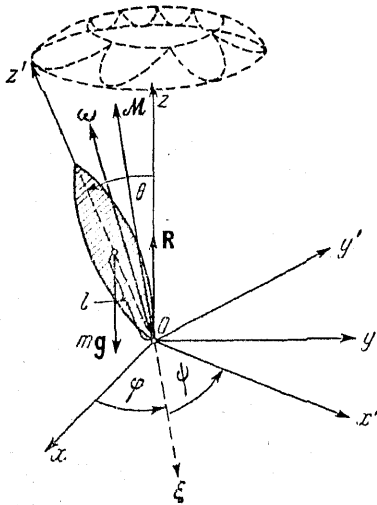


Рис. 40.2.

Выберем системы координат S и S' так, как это показано на рис. 40.2, и рассмотрим сначала качественное решение задачи на основе уравнения моментов (см. (40.1)). Поскольку в начальный момент времени волчок быстро вращается вокруг оси симметрии, допустим, что его угловая скорость в любой момент времени примерно равна $\omega \approx \omega_z \mathbf{n}_{z'}$, т. е. $\omega_{x'} \approx \omega_{y'} \approx 0$. Тогда момент вращения волчка будет равен (см. (38.10))

$$\mathbf{M} \approx J_{z'} \omega_z \mathbf{n}_{z'}, \quad (1)$$

где $J_{z'}$ — момент инерции относительно оси симметрии. Используя (1), а также представляя момент силы тяжести в виде

$$\mathcal{L}^e = [\mathbf{r}_m m \mathbf{g}] = -mgl [\mathbf{n}_z \mathbf{n}_{z'}], \quad (2)$$

из уравнения моментов получим

$$\dot{\mathbf{n}}_{z'} = \frac{mgl}{J_{z'} \omega_z} [\mathbf{n}_z \mathbf{n}_{z'}]. \quad (3)$$

Сопоставляя уравнение (3) с соотношением (19.16), составленным для $\mathbf{n}_{z'}$, приходим к выводу, что вектор $\mathbf{n}_{z'}$ прецессирует вокруг вертикали с угловой скоростью

$$\omega_{\text{пр}} = \frac{mgl}{J_{z'} \omega_z} \mathbf{n}_z, \quad (4)$$

малой по сравнению с ω_z (по условию задачи).

Подставляя $\omega = \omega_z \mathbf{n}_{z'}$ в уравнение импульса (см. (40.1)), получим, что $\mathbf{P} = m[\omega \mathbf{r}_m] = 0$ и соответственно реакция опоры $\mathbf{R} = -m\mathbf{g}$.

Если же принять, что $\omega = \omega_z \mathbf{n}_{z'} + \omega_{\text{пр}} \mathbf{n}_z$, то $\mathbf{P} = m\omega_{\text{пр}} l [\mathbf{n}_z \mathbf{n}_{z'}]$, однако значение реакции будет отличаться от найденного лишь на величину порядка $\omega_{\text{пр}}^2$.

Как видно из формулы (3), ось волчка все время движется в направлении, перпендикулярном силе тяжести, что в действительности возможно лишь при специальном выборе начальных условий. Рассмотрим строгое решение поставленной задачи. Учитывая, что кинетическая энергия волчка равна энергии вращения (см. (37.17)), найдем функцию Лагранжа как функцию углов Эйлера и их производных (см. (40.5)):

$$\mathcal{L} = \frac{J_{x'}}{2} (\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{J_{z'}}{2} (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi})^2 - mgl \cos \theta, \quad (5)$$

где $J_{x'}$, $J_{z'}$ — главные моменты инерции относительно осей $O'x'$ и $O'z'$ с началом в неподвижной точке O' . Поскольку лагранжиан (5) явно не зависит от времени и углов φ и ψ , то имеют место три первых интеграла:

$$\begin{aligned} E &= \frac{J_{x'}}{2} (\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{J_{z'}}{2} (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi})^2 + mgl \cos \theta = E_0, \\ \mathcal{M}_{z'} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = J_{z'} (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}) = \mathcal{M}_{z'0}, \\ \mathcal{M}_z &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = J_{x'} \dot{\varphi} \sin^2 \theta + J_{z'} (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}) \cos \theta = \mathcal{M}_{z0}. \end{aligned} \quad (6)$$

Эти же интегралы можно получить и из других соображений. Действительно, момент силы тяжести перпендикулярен как к вертикали, так и к оси $O'z'$, проходящей через центр масс. Следовательно, проекция момента силы на ось $O'z$ равна нулю, а проекция \mathcal{M}_z момента вращения сохраняется. Проекция момента силы на ось $O'z'$ также равна нулю, однако ввиду подвижности этой оси проекция $\mathcal{M}_{z'}$ сохраняется только в случае симметричного тела (см. третье уравнение Эйлера (40.3)).

Из последних двух интегралов (6) найдем $\dot{\varphi}$ и $\dot{\psi}$ как функции θ :

$$\dot{\varphi} = \frac{\mathcal{M}_{z0} - \mathcal{M}_{z'0} \cos \theta}{J_{x'} \sin^2 \theta}, \quad \dot{\psi} = \frac{\mathcal{M}_{z'0}}{J_{z'}} - \dot{\varphi} \cos \theta. \quad (7)$$

Подставляя эти функции в интеграл энергии, получим дифференциальное уравнение относительно угла θ

$$\frac{J_{x'}}{2} \dot{\theta}^2 + \frac{(\mathcal{M}_{z0} - \mathcal{M}_{z'0} \cos \theta)^2}{2J_{x'} \sin^2 \theta} + \frac{\mathcal{M}_{z'0}^2}{2J_{z'}} + mgl \cos \theta = E_0. \quad (8)$$

В частных случаях это уравнение имеет решение в виде элементарных функций. Например, пусть в начальный момент времени

наклоненный волчок закручен вокруг своей неподвижной оси симметрии, т. е. пусть

$$\theta_0 \neq 0, \quad \dot{\psi}_0 \neq 0, \quad \dot{\phi}_0 = \dot{\theta}_0 = 0. \quad (9)$$

Учитывая, что при этом

$$E_0 = \frac{J_{z'}}{2} \dot{\psi}_0^2 + mgl \cos \theta_0, \quad \mathcal{M}_{z'0} = J_{z'} \dot{\psi}_0, \quad \mathcal{M}_{z0} = J_{z'} \dot{\psi}_0 \cos \theta_0,$$

сведем уравнение (8) к виду

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2mgl}{J_{x'}} (\cos \theta_0 - \cos \theta) - \left(\frac{J_{z'} \dot{\psi}_0}{J_{x'}} \right)^2 \frac{(\cos \theta_0 - \cos \theta)^2}{\sin^2 \theta}, \quad (10)$$

откуда вытекает, что угол θ не может быть меньше θ_0 .

Так как $\dot{\theta}^2 \geq 0$, а по условию задачи кинетическая энергия вращения \mathcal{S}_0 в начальный момент времени велика по сравнению с потенциальной энергией U_0 , т. е.

$$\frac{2mgl \cos \theta_0}{J_{z'} \dot{\psi}_0^2} \ll 1, \quad (11)$$

то из уравнения (10) будет следовать, что θ в любой момент времени близко к θ_0 ($\Delta\theta \ll \theta_0 \neq 0$).

Разлагая правую часть уравнения (10) в «точке» θ_0 и пренебрегая членами третьего и более высокого порядка малости, найдем

$$\left(\frac{d\Delta\theta}{dt} \right)^2 = \frac{2mgl \sin \theta_0}{J_{x'}} \Delta\theta - \left(\frac{J_{z'} \dot{\psi}_0}{J_{x'}} \right)^2 (\Delta\theta)^2 \quad (12)$$

(здесь нельзя пренебречь членом, пропорциональным $(\Delta\theta)^2$, так как он умножается на большую величину). Вводя обозначения

$$\omega_{\text{nut}} = \frac{J_{z'} \dot{\psi}_0}{J_{x'}}, \quad (\Delta\theta)_{\text{max}} = \frac{2mgl J_{x'} \sin \theta_0}{J_{z'}^2 \dot{\psi}_0^2}, \quad (13)$$

запишем уравнение (12) в виде

$$\left(\frac{d\Delta\theta}{dt} \right)^2 = \omega_{\text{nut}}^2 \Delta\theta [(\Delta\theta)_{\text{max}} - \Delta\theta].$$

Решением этого уравнения, удовлетворяющим начальному условию $\theta_0 \neq 0$, $\dot{\theta}_0 = 0$, является функция

$$\Delta\theta = (\Delta\theta)_{\text{max}} \sin^2 \left(\frac{\omega_{\text{nut}}}{2} t \right). \quad (14)$$

Используя (7) и (14), с той же степенью точности получим

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= \frac{2mgl}{J_{z'} \dot{\psi}_0} \sin^2 \left(\frac{\omega_{\text{nut}}}{2} t \right), \\ \dot{\theta} &= \frac{mgl \sin \theta_0}{J_{z'} \dot{\psi}_0} \sin(\omega_{\text{nut}} t), \\ \phi &= \psi_0 \left\{ 1 - \frac{2mgl \cos \theta_0}{J_{z'} \dot{\psi}_0^2} \sin^2 \left(\frac{\omega_{\text{nut}}}{2} t \right) \right\}, \end{aligned} \quad (15)$$

откуда находим углы Эйлера как функции времени:

$$\begin{aligned}\varphi &= \varphi_0 + \frac{mgl}{J_z \dot{\psi}_0} t - \frac{J_{x'} mgl}{J_z^2 \dot{\psi}_0^2} \sin \omega_{\text{nut}} t, \\ \theta &= \theta_0 + \frac{2J_{x'} mgl \sin \theta_0}{J_z^2 \dot{\psi}_0^2} \sin^2 \frac{\omega_{\text{nut}}}{2} t, \\ \psi &= \psi_0 + \dot{\psi}_0 \left(1 - \frac{mgl \cos \theta_0}{J_z \dot{\psi}_0^2} \right) t + \frac{J_{x'} mgl \cos \theta_0}{J_z^2 \dot{\psi}_0^2} \sin \omega_{\text{nut}} t.\end{aligned}\quad (16)$$

Приведем также выражения для угловых скоростей, усредненных по периоду $2\pi/\omega_{\text{nut}}$:

$$\bar{\dot{\varphi}} = \frac{mgl}{J_z \dot{\psi}_0}, \quad \bar{\dot{\theta}} = 0, \quad \bar{\dot{\psi}} = \dot{\psi}_0 \left(1 - \frac{mgl \cos \theta_0}{J_z \dot{\psi}_0^2} \right).\quad (17)$$

Как видно из решения, ось симметрии волчка медленно прецессирует вокруг вертикали со средней угловой скоростью, равной $\bar{\dot{\varphi}}$ (сравнить с формулой (4)); эта скорость тем меньше, чем больше начальная скорость вращения вокруг оси симметрии. Значение скорости прецессии $\dot{\varphi}$ колеблется около своего среднего значения с малой амплитудой и большой частотой ω_{nut} , прямо пропорциональной $\dot{\psi}_0$. Одновременно с этим ось симметрии совершает колебания вокруг линии узлов с большой частотой ω_{nut} и малой амплитудой $\Delta\theta_{\text{max}}$ (см. рис. 40.2, на котором штриховой линией изображена траектория конца орта \mathbf{n}_z). Таким образом, в среднем получаем картину регулярной прецессии вокруг вертикали, а на это усредненное движение налагается дрожание оси с малой амплитудой, т. е. нутация. Такое движение твердого тела называется псевдорегулярной прецессией.

Эта прецессия происходит следующим образом: в начальный момент времени ось волчка опускается под действием тяжести, соответственно потенциальная энергия волчка уменьшается, а кинетическая возрастает; увеличение наклона оси, благодаря собственному вращению тела, приводит к появлению прецессионной скорости $\dot{\varphi}$, пропорциональной $\Delta\theta$. Угловая скорость ω и момент \mathcal{M} тела в этом случае также прецессируют по сравнительно сложному закону вокруг вертикали, отклоняясь друг от друга и от оси волчка на малые величины, пропорциональные отношению U_0/\mathcal{E}_0 .

Заметим, что ряд задач, аналогичных рассмотренной, используется в теории гироскопических навигационных приборов, имеющей большое практическое значение.

Пример 40.3. Симметричный заряженный быстрый волчок в однородном магнитном поле.

Симметричное заряженное тело с покоящимся центром масс и одинаковыми удельными зарядами его точек ($e_i/m_i = \text{const}$) вращается

в однородном постоянном магнитном поле напряженности \mathcal{H} . Определить закон движения волчка, если в начальный момент времени угловая скорость вращения вокруг оси симметрии тела велика по сравнению с частотой Лармора.

Поместим начала систем S и S' в центр масс тела, ось Oz направим по вектору \mathcal{H} , а ось Oz' — по оси симметрии тела. Представляя вектор-потенциал однородного магнитного поля в виде

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} [\mathcal{H} \mathbf{r}], \quad (1)$$

где \mathbf{r} — радиус-вектор точки пространства, и учитывая, что электростатическая энергия твердого тела постоянна, с помощью (27.20) получим

$$\mathcal{U} = -\frac{1}{2c} \sum_i e_i [\mathcal{H} \mathbf{r}_i] \mathbf{v}_i.$$

Здесь \mathbf{r}_i , \mathbf{v}_i — радиус-вектор и скорость i -й точки тела, обладающей зарядом e_i . Так как по условию удельный заряд e_i/m_i для всех точек одинаков, то, полагая его равным e/m , для обобщенного потенциала найдем следующее выражение:

$$\mathcal{U} = -\frac{e}{2mc} \mathcal{M} \mathcal{H}, \quad (2)$$

где \mathcal{M} — кинетический момент вращения тела. Используя разложение момента вращения по осям S' (см. (38.10)), запишем скалярное произведение $\mathcal{M} \mathcal{H}$ в виде

$$\mathcal{M} \mathcal{H} = J_{x'} (\omega_{x'} \mathcal{H}_{x'} + \omega_{y'} \mathcal{H}_{y'}) + J_{z'} \omega_{z'} \mathcal{H}_{z'},$$

затем выразим проекции напряженности \mathcal{H} на оси S' через углы Эйлера:

$$\mathcal{H}_{x'} = \mathcal{H} \sin \theta \sin \phi, \quad \mathcal{H}_{y'} = \mathcal{H} \sin \theta \cos \phi, \quad \mathcal{H}_{z'} = \mathcal{H} \cos \theta.$$

В результате найдем лагранжиан волчка

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{J_{x'}}{2} (\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{J_{z'}}{2} (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi})^2 + \\ & + \omega_L (J_{x'} \sin^2 \theta + J_{z'} \cos^2 \theta) \dot{\phi} + \omega_L J_{z'} \dot{\psi} \cos \theta, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\omega_L = \frac{e \mathcal{H}}{2mc}$ — частота Лармора. Отсюда видно, что обобщенная энергия, равная в данном случае кинетической энергии вращения, и обобщенные импульсы p_ϕ и p_ψ сохраняются:

$$\begin{aligned} J_{x'} (\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + J_{z'} (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi})^2 &= 2\mathcal{T}_0, \\ (J_{x'} \sin^2 \theta + J_{z'} \cos^2 \theta) \dot{\phi} + J_{z'} \dot{\psi} \cos \theta + \omega_L (J_{x'} \sin^2 \theta + J_{z'} \cos^2 \theta) &= p_{\phi 0}, \\ J_{z'} \dot{\psi} \cos \theta + J_{z'} \dot{\psi} + \omega_L J_{z'} \cos \theta &= p_{\psi 0}, \end{aligned} \quad (4)$$

Из последних двух интегралов получим $\dot{\phi}$ и $\dot{\psi}$ как функции θ :

$$\dot{\phi} = \frac{p_{\varphi 0} - p_{\psi 0} \cos \theta}{J_{x'} \sin^2 \theta} - \omega_L, \quad \dot{\psi} = \frac{p_{\psi 0}}{J_{z'}} - \frac{p_{\varphi 0} - p_{\psi 0} \cos \theta}{J_{x'} \sin^2 \theta} \cos \theta. \quad (5)$$

Подставляя эти функции в интеграл энергии, найдем уравнение для θ :

$$\dot{\theta}^2 + \frac{1}{J_{x'} \sin^2 \theta} (p_{\varphi 0} - p_{\psi 0} \cos \theta - \omega_L J_{x'} \sin^2 \theta)^2 + \frac{1}{J_{x'} J_{z'}} (p_{\psi 0} - \omega_L J_{z'} \cos \theta)^2 = \frac{2\mathcal{E}_0}{J_{x'}}. \quad (6)$$

Это уравнение упрощается, если начальные условия заданы так же, как в предыдущем примере. Действительно, выражая с помощью (4) постоянные $p_{\varphi 0}$, $p_{\psi 0}$, \mathcal{E}_0 через $\dot{\psi}_0$ и θ_0 :

$$J_{z'} \dot{\psi}_0 \cos \theta_0 + \omega_L (J_{x'} \sin^2 \theta_0 + J_{z'} \cos^2 \theta_0) = p_{\varphi 0},$$

$$J_{z'} (\dot{\psi}_0 + \omega_L \cos \theta_0) = p_{\psi 0}, \quad \frac{J_{z'}}{2} \dot{\psi}_0^2 = \mathcal{E}_0,$$

и располагая члены в уравнении (6) по степеням $\dot{\psi}_0$ и ω_L , получим

$$\begin{aligned} \dot{\theta}^2 = & \frac{2J_{z'}}{J_{x'}} \dot{\psi}_0 \omega_L (\cos \theta - \cos \theta_0) \left[\frac{\sin^2 \theta_0}{\sin^2 \theta} + \frac{J_{z'} \cos \theta_0}{J_{x'} \sin^2 \theta} (\cos \theta_0 - \cos \theta) \right] - \\ & - \omega_L^2 \left\{ \frac{1}{J_{x'}^2 \sin^2 \theta} [J_{z'} \cos \theta_0 (\cos \theta_0 - \cos \theta) + J_{x'} (\sin^2 \theta_0 - \sin^2 \theta)]^2 + \right. \\ & \left. + \frac{J_{z'}}{J_{x'}} (\cos \theta_0 - \cos \theta)^2 \right\} - \frac{J_{z'}^2}{J_{x'}^2} \dot{\psi}_0^2 \frac{(\cos \theta_0 - \cos \theta)^2}{\sin^2 \theta}. \quad (7) \end{aligned}$$

Из этого уравнения следует (см. стр. 360), что $\Delta\theta = \theta - \theta_0$ должно быть малой величиной, поскольку скорость $\dot{\psi}_0$ собственного вращения велика по сравнению с частотой Лармора ω_L . Полагая для определенности $e < 0$, а $\dot{\psi}_0 > 0$, и оставляя в уравнении (7) только члены порядка $\frac{\omega_L}{\dot{\psi}_0} \Delta\theta$ и порядка $(\Delta\theta)^2$, получим

$$\left(\frac{d\Delta\theta}{dt} \right)^2 = \omega_{\text{nut}}^2 \Delta\theta [(\Delta\theta)_{\text{max}} - \Delta\theta], \quad (8)$$

где

$$\omega_{\text{nut}} = \frac{J_{z'}}{J_{x'}} \dot{\psi}_0, \quad (\Delta\theta)_{\text{max}} = \frac{2J_{z'}}{J_{z'}} \sin \theta_0 \cdot \left| \frac{\omega_L}{\dot{\psi}_0} \right|.$$

Отсюда (см. стр. 360) найдем решение

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= 2 |\omega_L| \sin^2 \left(\frac{\omega_{\text{nut}}}{2} t \right), \\ \dot{\theta} &= |\omega_L| \sin \theta_0 \sin (\omega_{\text{nut}} t), \\ \dot{\psi} &= \dot{\psi}_0 \left\{ 1 - \frac{2 |\omega_L|}{\dot{\psi}_0} \cos \theta_0 \sin^2 \left(\frac{\omega_{\text{nut}}}{2} t \right) \right\}. \end{aligned} \quad (9)$$

Следовательно, ось симметрии заряженного быстрого волчка медленно прецессирует вокруг направления напряженности однородного магнитного поля со средней угловой скоростью, равной частоте Лармора. Кроме того, ось волчка быстро нутирует с малой амплитудой и частотой порядка угловой скорости ψ_0 собственного вращения волчка. Таким образом, рассматриваемое движение заряженного тела в однородном магнитном поле аналогично псевдорегулярной прецессии волчка в поле тяжести.

§ 41. Линейные неголономные связи

В заключение этой главы кратко рассмотрим уравнения движения механической системы с неголономными связями. Пусть на систему N точек наложено k_1 голономных связей и k_2 неголономных связей, линейных относительно скоростей точек. Тогда движение системы будет подчинено уравнениям Лагранжа (сравнить с уравнениями (23.6))

$$\begin{aligned} m_i \ddot{\mathbf{r}}_i &= \mathbf{F}_i + \mathbf{R}_i \quad (i = 1, 2, \dots, N), \\ f_\alpha(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t) &= 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, k_1), \\ \sum_{i=1}^N \mathbf{a}_{\beta i} \mathbf{v}_i + \alpha_\beta &= 0 \quad (\beta = 1, 2, \dots, k_2), \end{aligned} \quad (41.1)$$

где все коэффициенты $\mathbf{a}_{\beta i}$ и α_β могут быть функциями координат и времени. Допустим, что число связей $k = k_1 + k_2 < 3N$, а все связи идеальны, тогда число уравнений и неизвестных в системе (41.1) совпадает. Действительно, линейные неголономные связи налагают на виртуальные перемещения точек ограничения вида

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{a}_{\beta i} \delta \mathbf{r}_i = 0 \quad (\beta = 1, 2, \dots, k_2). \quad (41.2)$$

Применяя метод неопределенных множителей Лагранжа к условию идеальности связей (24.7) и к уравнениям для виртуальных перемещений (24.6) и (41.2), найдем соотношения между реакциями связей и уравнениями связей (сравнить с выводом соотношений (25.3))

$$\mathbf{R}_i = \sum_{\alpha=1}^{k_1} \lambda_\alpha \nabla_i f_\alpha + \sum_{\beta=1}^{k_2} \mu_\beta \mathbf{a}_{\beta i} \quad (i = 1, 2, \dots, N), \quad (41.3)$$

где все λ_α и μ_β — неизвестные скалярные функции. Подставляя (41.3) в (41.1), получим систему $3N + k_1 + k_2$ уравнений с $3N + k_1 + k_2$ неизвестными: \mathbf{r}_i ($i = 1, 2, \dots, N$), λ_α ($\alpha = 1, 2, \dots, k_1$), μ_β ($\beta = 1, 2, \dots, k_2$). Как легко убедиться, эта система эквивалентна общему

уравнению механики с уравнениями связей (см. (26.1)—(26.3) и примечание на стр. 211):

$$\sum_{i=1}^N \{m_i \ddot{\mathbf{r}}_i - \mathbf{F}_i\} \delta \mathbf{r}_i = 0,$$

$$f_\alpha(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t) = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, k_1), \quad (41.4)$$

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{a}_{\beta i} \mathbf{v}_i + a_\beta = 0 \quad (\beta = 1, 2, \dots, k_2).$$

Найдем эквивалентную системе (41.4) систему уравнений Лагранжа в обобщенных координатах. С этой целью, используя голономные связи, введем $s_1 = 3N - k_1$ обобщенных координат q (см. (26.4) и (26.6)). Затем, выражая (41.4) через координаты q и повторяя вычисления, проведенные на стр. 213—215, получим

$$\sum_{j=1}^{s_1} \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right\} \delta q_j = 0, \quad (41.5)$$

$$\sum_{j=1}^{s_1} A_{\beta j} \dot{q}_j + A_\beta = 0 \quad (\beta = 1, 2, \dots, k_2),$$

где

$$A_{\beta j} = \sum_{i=1}^N \mathbf{a}_{\beta i} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \dot{q}_j}, \quad A_\beta = \sum_{i=1}^N \mathbf{a}_{\beta i} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} + a_\beta.$$

Заметим, что выражения, стоящие в фигурных скобках, нельзя приравнять нулю, поскольку неголономные связи налагают на вариации обобщенных координат условия

$$\sum_{j=1}^{s_1} A_{\beta j} \delta q_j = 0 \quad (\beta = 1, 2, \dots, k_2) \quad (41.6)$$

и, следовательно, координаты q в данном случае не являются независимыми.

Чтобы получить дифференциальные уравнения движения, применим к первому из уравнений (41.5) и уравнениям (41.6) метод неопределенных множителей Лагранжа. В результате придем к уравнениям Лагранжа в обобщенных координатах для систем с голономными и линейными неголономными связями

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j + \sum_{\beta=1}^{k_2} \lambda_\beta A_{\beta j} \quad (j = 1, 2, \dots, s_1), \quad (41.7)$$

$$\sum_{j=1}^{s_1} A_{\beta j} \dot{q}_j + A_\beta = 0 \quad (\beta = 1, 2, \dots, k_2);$$

эти $3N - k_1 + k_2$ уравнений содержат $3N - k_1 + k_2$ неизвестных: q_j, x_β ($j = 1, 2, \dots, s_1; \beta = 1, 2, \dots, k_2$).

Одной из известных систем с неголономной связью является шар, катящийся по абсолютно шероховатой твердой плоскости. Ввиду отсутствия скольжения скорость точки шара, касающейся плоскости, равна нулю. В связи с этим условие качения можно записать в виде (см. (19.10), (37.1) и формулу (1) примера 39.4)

$$\mathbf{v}_m + [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}_k] = 0, \quad (41.8)$$

где \mathbf{v}_m — скорость центра масс шара, $\boldsymbol{\omega}$ — его угловая скорость, \mathbf{r}_k — радиус-вектор точки касания относительно системы S' , жестко связанной с шаром. Если шар однородный, то начало системы S' лучше поместить в центр шара. Тогда, направляя ось Oz системы S , связанной с плоскостью, перпендикулярно к ней и проектируя (41.8) на оси S , получим уравнения связи в виде (см. (17.12))

$$\begin{aligned} \dot{x}_m &= R(\dot{\theta} \sin \varphi - \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi), \\ \dot{y}_m &= -R(\dot{\theta} \cos \varphi + \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi), \end{aligned}$$

где R — радиус шара. В общем случае это, очевидно, неинтегрируемая (или неголономная) связь. Однако в частном случае плоскопараллельного качения шара ($\varphi = \psi = 0$) эта связь становится интегрируемой (т. е. голономной), так как при этом

$$\dot{x}_m = 0, \quad \dot{y}_m = -R\dot{\theta},$$

или

$$x_m = x_{m0}, \quad y_m = y_{m0} - R(\theta - \theta_0).$$

Пример 41.1. Движение конька по горизонтальной плоскости.

Пусть однородный тонкий стержень (конек) массы m движется так, что скорость его центра масс все время направлена вдоль стержня. Найти закон движения стержня (конька) по горизонтальной плоскости и ее реакцию.

Совместим координатную плоскость Oxy с горизонтальной плоскостью, по которой движется стержень. Тогда положение стержня определится двумя координатами x_m, y_m его центра масс и углом φ между стержнем и осью Ox . Кинетическая энергия стержня в этих координатах равна

$$T = \frac{m}{2} (\dot{x}_m^2 + \dot{y}_m^2) + \frac{J_z^m}{2} \dot{\varphi}^2,$$

где J_z^m — центральный момент инерции относительно оси Oz . Условие того, что скорость центра масс стержня в любой момент времени направлена вдоль стержня, запишем в виде

$$\frac{\dot{y}_m}{\dot{x}_m} = \operatorname{tg} \varphi. \quad (1)$$

Учитывая, что $s_1 = 3$, $\beta = 1$, а все обобщенные силы Q равны нулю, получим систему четырех уравнений (см. (41.7))

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_m &= x \sin \varphi, \\ m\ddot{y}_m &= -x \cos \varphi, \\ J_z^m \ddot{\varphi} &= 0, \\ \dot{x}_m \sin \varphi - \dot{y}_m \cos \varphi &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

с четырьмя неизвестными функциями времени: x_m , y_m , φ и x . Из третьего уравнения системы (2) найдем, что

$$\varphi = \dot{\varphi}_0 t + \varphi_0. \quad (3)$$

Из уравнения неголономной связи следует, что проекции скорости центра масс стержня (конька) имеют вид

$$\dot{x}_m = a \cos \varphi, \quad \dot{y}_m = a \sin \varphi, \quad (4)$$

а из первых двух уравнений системы (2) и уравнения связи (1) вытекает, что ускорение центра масс w_m перпендикулярно его скорости v_m , в связи с чем величина a должна быть постоянной. Таким образом, используя начальные условия, найдем

$$\dot{x}_m = v_{m0} \cos \varphi, \quad \dot{y}_m = v_{m0} \sin \varphi, \quad (5)$$

где v_{m0} — величина скорости центра масс в начальный момент времени, а угол φ определен формулой (3). Интегрируя (5) по времени и определяя постоянные интегрирования, получим

$$\begin{aligned} x_m &= \frac{v_{m0}}{\dot{\varphi}_0} (\sin \varphi - \sin \varphi_0) + x_{m0}, \\ y_m &= \frac{v_{m0}}{\dot{\varphi}_0} (\cos \varphi_0 - \cos \varphi) + y_{m0}. \end{aligned} \quad (6)$$

Отсюда следует, что центр масс стержня (конька) движется по окружности

$$(x_m - x_c)^2 + (y_m - y_c)^2 = \frac{v_{m0}^2}{\dot{\varphi}_0^2} \quad (7)$$

радиуса $(v_{m0}/\dot{\varphi}_0)$ с центром в точке

$$x_c = x_{m0} - \frac{v_{m0}}{\dot{\varphi}_0} \sin \varphi_0, \quad y_c = y_{m0} - \frac{v_{m0}}{\dot{\varphi}_0} \cos \varphi_0,$$

причем движение по окружности происходит с постоянной по величине скоростью. Наконец, дифференцируя (5), получим выражения $m\ddot{x}_m$ и $m\ddot{y}_m$, определяющие реакцию плоскости; величина этой реакции постоянна и равна

$$R = mv_{m0}\dot{\varphi}_0. \quad (8)$$

УРАВНЕНИЯ ГАМИЛЬТОНА

Как уже отмечалось, уравнения Лагранжа представляют собой систему s дифференциальных уравнений *второго* порядка относительно s обобщенных координат q как функций времени. Этим уравнениям можно сопоставить эквивалентную систему $2s$ уравнений *первого* порядка, где в качестве неизвестных взяты $2s$ функций времени: s обобщенных координат q и s обобщенных импульсов p . Переменные q, p называются каноническими, а соответствующая система $2s$ уравнений движения называется каноническими уравнениями Гамильтона.

Исследование свойств уравнений Гамильтона привело к формулировке ряда эффективных методов решения динамических задач. Кроме того, оказалось, что известная равноправность обобщенных импульсов и координат, имеющая место в уравнениях Гамильтона, является таким свойством, которое можно использовать при построении статистической и квантовой механики.

§ 42. Канонические уравнения

Движение механической системы с *голономными идеальными связями, обобщенно-потенциальными и диссипативными заданными силами* подчинено уравнениям Лагранжа (27.23). Конкретный вид этих уравнений определяется лагранжианом как функцией переменных q, \dot{q} и t . Что касается уравнений Гамильтона, то, как будет показано ниже, их конкретный вид определяется обобщенной энергией H (см. (28.10)) как функцией переменных q, p и t . Эта функция, равная по определению

$$H(q, p, t) = \left. \left\{ \sum_{i=1}^s p_i \dot{q}_i - \mathcal{L} \right\} \right|_{\dot{q} \rightarrow \dot{q}(q, p, t)}, \quad (42.1)$$

называется функцией Гамильтона (или гамильтонианом); здесь обобщенные скорости \dot{q} как функции канонических переменных определяются из системы уравнений (28.4) (детерминант этой системы отличен от нуля — см. (27.6)). Например, функция Гамильтона свободной точки в потенциальном поле (в декартовых, цилиндрических и сферических координатах) равна (см. стр. 230 и

формулы (1) и (4) примера 26.4)

$$H = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + U(x, y, z), \quad (42.2)$$

$$H = \frac{1}{2m} \left(p_\rho^2 + \frac{p_\varphi^2}{\rho^2} + p_z^2 \right) + U(\rho, \varphi, z), \quad (42.3)$$

$$H = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2 \sin^2 \theta} \right) + U(r, \theta, \varphi). \quad (42.4)$$

Подставляя в (42.1) функцию Лагранжа (см. (27.11))

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} v^2 + \frac{e}{c} \mathbf{A} \mathbf{v} - e\varphi$$

свободного заряда, движущегося в заданном электромагнитном поле с потенциалами \mathbf{A} и φ , и переходя к обобщенному импульсу, равному

$$\mathbf{p} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}} = m\mathbf{v} + \frac{e}{c} \mathbf{A}, \quad (42.5)$$

получим гамильтониан такого заряда:

$$H = \frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 + e\varphi. \quad (42.6)$$

Функция Лагранжа свободной точки относительно произвольной инерциальной системы S' определяется кинетической энергией точки относительно S' , обобщенным потенциалом сил инерции (29.4) и потенциалом сил взаимодействия U :

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} (v')^2 + m[\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}'] v' - m\mathbf{w}_O \mathbf{r}' + \frac{m}{2} [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}']^2 - U,$$

где \mathbf{r}' и \mathbf{v}' — радиус-вектор и скорость точки относительно S' ; \mathbf{w}_O и $\boldsymbol{\omega}$ — ускорение начала системы S' и ее угловая скорость относительно инерциальной системы S . Определяя отсюда обобщенный импульс

$$\mathbf{p}' = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}'} = m(\mathbf{v}' + [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}']) \quad (42.7)$$

и обобщенную энергию (см. (28.11))

$$H = \frac{m}{2} (v')^2 + m\mathbf{w}_O \mathbf{r}' - \frac{m}{2} [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}']^2 + U,$$

находим функцию Гамильтона

$$H = \frac{1}{2m} (\mathbf{p}' - m[\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}'])^2 + m\mathbf{w}_O \mathbf{r}' - \frac{m}{2} [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}']^2 + U. \quad (42.8)$$

Упрощая (42.8), окончательно получим

$$H = \frac{1}{2m} (\mathbf{p}')^2 + \omega [\mathbf{p}'\mathbf{r}'] + m\omega_0 \mathbf{r}' + U. \quad (42.9)$$

Теперь выведем уравнения Гамильтона. С этой целью возьмем дифференциал от функции H , один раз как от известной функции q , p и t , а другой раз исходя из определения (42.1). Тогда получим

$$dH = \sum_i \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt, \quad (42.10)$$

$$dH = \sum_i q_i dp_i + \sum_i p_i dq_i - \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} dq_i - \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt. \quad (42.11)$$

Сопоставляя здесь отдельные члены и используя определение обобщенного импульса (см. (28.1)), найдем соотношения

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \quad (i=1, 2, \dots, s). \quad (42.12)$$

Выражая далее с помощью уравнений движения (27.23) каждую производную $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$ через производную соответствующего обобщенного импульса p_i по времени, получим систему уравнений

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} + Q_i^d \quad (i=1, 2, \dots, s), \quad (42.13)$$

которые называются *каноническими уравнениями Гамильтона*.

Эти уравнения, как следует из вывода, эквивалентны уравнениям Лагранжа (27.23). Однако уравнения Гамильтона по сравнению с уравнениями Лагранжа имеют более симметричную форму, что в особенности видно из сопоставления этих уравнений в отсутствие диссипативных сил:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0 \quad (i=1, 2, \dots, s), \end{array} \right\} \quad (42.14)$$

$$\left. \begin{array}{l} \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i=1, 2, \dots, s). \end{array} \right\} \quad (42.15)$$

Приведем в качестве примера уравнения Гамильтона свободной точки в обычном потенциальном поле (в декартовых и цилиндрических координатах) и в обобщенно-потенциальном поле (в декартовых

координатах) (см. (42.2), (42.3) и (42.6)):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m}, & \dot{p}_x &= -\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial x}, \\ \dot{y} &= \frac{\partial H}{\partial p_y} = \frac{p_y}{m}, & \dot{p}_y &= -\frac{\partial H}{\partial y} = -\frac{\partial U}{\partial y}, \\ \dot{z} &= \frac{\partial H}{\partial p_z} = \frac{p_z}{m}, & \dot{p}_z &= -\frac{\partial H}{\partial z} = -\frac{\partial U}{\partial z}, \\ \dot{p} &= \frac{p_p}{m}, & \dot{p}_p &= \frac{p_\varphi^2}{m\rho^3} - \frac{\partial U}{\partial \rho}, \end{aligned} \quad (42.16)$$

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= \frac{p_\varphi}{m\rho^2}, & \dot{p}_\varphi &= -\frac{\partial U}{\partial \varphi}, \\ \dot{z} &= \frac{p_z}{m}, & \dot{p}_z &= -\frac{\partial U}{\partial z}; \end{aligned} \quad (42.17)$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}} &= \frac{1}{m} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right), \\ \dot{p}_x &= \frac{e}{mc} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} - e \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \\ \dot{p}_y &= \frac{e}{mc} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} - e \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \\ \dot{p}_z &= \frac{e}{mc} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z} - e \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \end{aligned} \quad (42.18)$$

Закон сохранения обобщенного импульса в канонических переменных формулируется аналогично (28.2). Действительно, из соотношений (42.12) видно, что частные производные \mathcal{L} и H по координатам обращаются в нуль только одновременно. Следовательно, если какая-либо координата является циклической в отношении функции Лагранжа, то она будет циклической и в отношении функции Гамильтона. Таким образом, уравнения (42.13) приводят к следующей форме закона сохранения обобщенного импульса:

$$p_j = p_{j0}, \quad \text{если} \quad \frac{\partial H}{\partial q_j} = 0 \quad \text{и} \quad Q_j^d = 0. \quad (42.19)$$

Частные производные от H и \mathcal{L} по времени обращаются в нуль также одновременно (см. (42.12)). Эта «циклическость» времени приводит к сохранению функции H . Действительно, из уравнения (28.9) и последнего из соотношений (42.12) получим закон изменения функции Гамильтона

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \sum_{j=1}^s Q_j^d \dot{q}_j \quad (42.20)$$

из которого следует соответствующий закон сохранения

$$H = H_0, \text{ если } \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \text{ и } Q_j^d = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, s) \quad (42.21)$$

(в этом случае система называется обобщенно-консервативной).

Преобразование, с помощью которого из уравнений Лагранжа получены уравнения Гамильтона, называется преобразованием Лежандра (это преобразование широко используется в теоретической физике, в частности в термодинамике). Используя преобразование Лежандра, получим уравнения Рауса, т. е. уравнения движения, которые относительно одной части переменных имеют вид уравнений Лагранжа, а относительно другой части переменных — вид уравнений Гамильтона. Действительно, возьмем переменные t, q_i, \dot{q}_i ($i = 1, 2, \dots, m$), q_α, p_α ($\alpha = m + 1, \dots, s$; $m < s$) и введем функцию этих переменных — функцию Рауса:

$$R = \left\{ \sum_{\alpha=m+1}^s p_\alpha \dot{q}_\alpha - \mathcal{L} \right\}_{\dot{q}_\alpha \rightarrow \dot{q}_\alpha(q, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_m, p, t)}. \quad (42.22)$$

Рассматривая дифференциалы этой функции, аналогичные дифференциалам (42.10) и (42.11), и используя уравнения (27.23), придем к уравнениям Рауса

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial R}{\partial q_i} &= -Q_i^d \quad (i = 1, 2, \dots, m), \\ \dot{q}_\alpha &= \frac{\partial R}{\partial p_\alpha}, \quad \dot{p}_\alpha = -\frac{\partial R}{\partial q_\alpha} + Q_\alpha^d \quad (\alpha = m + 1, \dots, s). \end{aligned} \quad (42.23)$$

Если все координаты q_α ($\alpha = m + 1, \dots, s$) являются циклическими координатами, а все $Q^d = 0$, то функция Рауса будет иметь вид

$$R = R(q_1, \dots, q_m; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_m; p_{m+1}, \dots, p_s, 0),$$

поскольку справедливы соотношения $\frac{\partial R}{\partial q_\alpha} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_\alpha} = 0$, а импульсы p_α постоянны ($\alpha = m + 1, \dots, s$). Таким образом, в этом случае задача сводится к решению уравнений Лагранжа относительно координат q_1, \dots, q_m .

Пример 42.1. Функция Гамильтона и интегралы канонических уравнений в задаче двух тел.

Функция Лагранжа двух материальных точек с потенциальной энергией взаимодействия U может быть представлена в виде

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} v_m^2 + \frac{\mu}{2} v^2 - U(r),$$

где m — сумма масс обеих точек, μ — их приведенная масса, \mathbf{v}_m — скорость центра масс точек, $v = |\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1|$ — модуль разности скоростей точек, а r — расстояние между ними. Выбирая в качестве обобщенных импульсов проекции импульса системы $\mathbf{P}_m = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}_m}$ и обобщенные импульсы p_r, p_θ и p_φ , характеризующие движение точек

относительно центра масс, для функции Гамильтона получим выражение

$$H = \frac{p_m^2}{2m} + \frac{1}{2\mu} \left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2 \sin^2 \theta} \right) + U(r).$$

Отсюда видно, что проекции радиуса-вектора центра масс \mathbf{r}_m и угол φ являются циклическими координатами. Это приводит к интегралам

$$\mathbf{P}_m = m\mathbf{v}_m = \mathbf{P}_{m0}, \quad p_\varphi = \mu r^2 \sin^2 \theta \cdot \dot{\varphi} = p_{\varphi 0}.$$

Первый из этих интегралов соответствует сохранению импульса системы, а второй — сохранению кинетического момента относительно полярной оси, проходящей через центр масс. В силу произвольности выбора оси ее можно направить вдоль вектора \mathbf{r}_0 . Тогда полярный угол $\theta_0 = 0$ и, следовательно, $p_{\varphi 0} = 0$. Рассматривая общий случай, когда в последующие моменты времени угол θ отличен от нуля, приходим к выводу, что $\dot{\varphi} = 0$ в любой момент времени, т. е. движение точки относительно центра масс происходит в плоскости, сохраняющей свою ориентацию. Функция Гамильтона, описывающая движение системы в этой плоскости, будет иметь вид

$$H = \frac{1}{2\mu} \left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} \right) + U(r).$$

Эта функция не зависит явно от времени и координаты θ , что приводит к двум интегралам

$$\frac{1}{2\mu} \left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} \right) + U(r) = E_0, \quad p_\theta = p_{\theta 0}.$$

Получая с помощью найденного гамильтониана канонические уравнения

$$\dot{r} = \frac{p_r}{\mu}, \quad \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{\mu r^2}$$

и используя приведенные выше интегралы движения, нетрудно решить задачи двух тел привести к известным квадратурам (см. (12.18)).

Пример 42.2. Функция Гамильтона и интегралы канонических уравнений для тяжелого симметричного волчка. Самовосстанавливающийся гироскоп.

Функция Лагранжа тяжелого симметричного волчка имеет вид (см. пример 40.2)

$$\mathcal{L} = \frac{J_{x'}}{2} (\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{J_{z'}}{2} (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi})^2 - mgl \cos \theta. \quad (1)$$

Соответственно обобщенные импульсы как функции скоростей $\dot{\varphi}$, $\dot{\psi}$ и $\dot{\theta}$ будут равны

$$\begin{aligned} p_\varphi &= (J_{x'} \sin^2 \theta + J_{z'} \cos^2 \theta) \dot{\varphi} + J_{z'} \cos \theta \cdot \dot{\psi}, \\ p_\psi &= J_{z'} \cos \theta \cdot \dot{\varphi} + J_{z'} \dot{\psi}, \quad p_\theta = J_{x'} \dot{\theta}. \end{aligned} \quad (2)$$

Разрешая эту систему относительно обобщенных скоростей, найдем первую группу уравнений Гамильтона (см. (42.13))

$$\begin{aligned}\dot{\phi} &= \frac{p_{\phi} - \cos \theta \cdot p_{\psi}}{J_{x'} \sin^2 \theta}, & \dot{\theta} &= \frac{p_{\theta}}{J_{x'}}, \\ \dot{\psi} &= \frac{(J_{x'} \sin^2 \theta + J_{z'} \cos^2 \theta) p_{\psi} - J_{z'} \cos \theta \cdot p_{\phi}}{J_{x'} J_{z'} \sin^2 \theta}.\end{aligned}\quad (3)$$

Используя определение (42.1), а также функции (1) и (3) настоящего примера, получим функцию Гамильтона для тяжелого симметричного волчка

$$H = \frac{1}{2J_{x'} \sin^2 \theta} (p_{\phi} - p_{\psi} \cos \theta)^2 + \frac{p_{\psi}^2}{2J_{z'}} + \frac{p_{\theta}^2}{2J_{x'}} + mgl \cos \theta. \quad (4)$$

Отсюда на основании законов сохранения найдем первые интегралы канонических уравнений

$$p_{\phi} = p_{\phi_0}, \quad p_{\psi} = p_{\psi_0}, \quad H = H_0. \quad (5)$$

Из последнего интеграла (интеграла энергии) можно получить уравнение с разделяющимися переменными (см. (5), (4) и (2))

$$\frac{J_{x'}}{2} \dot{\theta}^2 = H_0 - U_{\text{eff}}(\theta), \quad (6)$$

где

$$H_0' = H_0 - \frac{p_{\psi_0}^2}{2J_{z'}}, \quad U_{\text{eff}} = \frac{1}{2J_{x'} \sin^2 \theta} (p_{\phi_0} - p_{\psi_0} \cos \theta)^2 + mgl \cos \theta.$$

Рассмотрим интересный частный случай так называемого самовосстанавливающегося гироскопа (такой гироскоп может быть использован в качестве элемента автоматической системы *)). Выберем начальные условия так, чтобы постоянные в уравнении (6) удовлетворяли требованиям

$$H_0' = mgl, \quad p_{\phi_0} = p_{\psi_0} \neq 0. \quad (7)$$

Тогда уравнение (6) принимает вид

$$\frac{J_{x'}}{2} \dot{\theta}^2 = mgl - \frac{p_{\psi_0}^2}{2J_{x'}} \frac{(1 - \cos \theta)^2}{\sin^2 \theta} - mgl \cos \theta$$

и с помощью подстановки $s = \cos \theta$ сводится к форме

$$\dot{s}^2 = \alpha (1 - s)^2 (s - s_1), \quad (8)$$

где $\alpha = \frac{2mgl}{J_{x'}}$, $s_1 = \frac{p_{\psi_0}^2}{2J_{x'} mgl} - 1$. Из этого уравнения следует, что

*) См. [28], стр. 538.

$s \geq s_1$, причем $s_1 > -1$, так как $p_{\varphi_0} \neq 0$. Таким образом, s и s_1 удовлетворяют неравенствам

$$+1 \geq s \geq s_1 > -1, \quad (9)$$

и, следовательно, $s_1 < +1$, т. е.

$$4J_x' mgl > p_{\varphi_0}^2. \quad (10)$$

Интегрируя (8) с помощью подстановки $s = s_1 + u^2$, найдем решение в виде

$$\cos \theta = s_1 + (1 - s_1) \operatorname{th}^2 \left(\pm \frac{\sqrt{\alpha(1 - s_1)}}{2} t + \operatorname{Arth} \sqrt{\frac{\cos \theta_0 - s_1}{1 - s_1}} \right). \quad (11)$$

Отсюда следует, что ось симметрии гироскопа при любых начальных условиях, удовлетворяющих требованиям (7) и (10), стремится занять вертикальное положение (при $t \rightarrow \infty$ квадрат гиперболического тангенса стремится к единице). Заметим, что угол отклонения оси гироскопа в зависимости от начальных условий может либо сразу убывать до нуля, либо сначала возрастать от начального значения θ_0 до $\theta_{\max} < \pi$ ($\cos \theta_{\max} = s_1$), а затем убывать до нуля. Этим двум возможностям соответствуют два знака в решении (11).

§ 43. Фазовое пространство и теорема Лиувилля

Одним из важнейших положений, на которых основывается статистическая механика, является теорема Лиувилля о сохранении фазового объема. Эта теорема связана с понятием о фазовом пространстве. Фазовым пространством называется воображаемое пространство $2s$ измерений, по координатным осям которого «откладываются» обобщенные координаты q_j и импульсы p_j механической системы ($j = 1, 2, \dots, s$; s — число степеней свободы). Состояние механической системы в данный момент времени изображается в фазовом пространстве одной фазовой точкой. С течением времени эта точка движется по фазовой траектории.

Если заданы гамильтониан механической системы, диссипативные силы и начальные условия q_{j_0}, p_{j_0} ($j = 1, 2, \dots, s$), то с помощью уравнений Гамильтона можно определить скорости изменения координат и импульсов в начальный момент времени t_0 :

$$\dot{q}_{j_0} = \left. \frac{\partial H}{\partial p_j} \right|_{q_0, p_0, t_0}, \quad \dot{p}_{j_0} = - \left. \frac{\partial H}{\partial q_j} \right|_{q_0, p_0, t_0} + Q_j^d \Big|_{q_0, p_0, t_0} \quad (j = 1, 2, \dots, s) \quad (43.1)$$

(здесь, как и ранее, под q и p понимается совокупность всех координат и импульсов). Через каждую точку фазового пространства проходит лишь одна фазовая траектория данной механической системы

(ввиду единственности решения уравнений Гамильтона). Этим свойством не обладает, например, пространство конфигураций, «точки» которого задаются совокупностью обобщенных координат q .

Рассмотрим *бесконечную совокупность одинаковых механических систем, отличающихся друг от друга только начальными условиями*. Иначе говоря, рассмотрим бесконечное множество точных копий данной реальной системы (для всех этих систем задан одинаковый гамильтониан, одни и те же диссипативные силы, но начальные условия этих систем различны). Такая виртуальная совокупность систем называется ансамблем Гиббса.

Пусть в начальный момент времени t_0 ансамбль заполняет область (Γ_0) фазового пространства, причем фазовый объем этой области равен

$$\Gamma_0 = \int \dots \int_{(\Gamma_0)} \delta q_{10} \dots \delta q_{s0}, \delta p_{10} \dots \delta p_{s0}. \quad (43.2)$$

В момент времени t ансамбль займет другую область (Γ) с фазовым объемом

$$\Gamma = \int \dots \int_{(\Gamma)} \delta q_1 \dots \delta q_s, \delta p_1 \dots \delta p_s \quad (43.3)$$

(см. рис. 43.1, на котором изображено перемещение некоторого ансамбля систем в двумерном фазовом пространстве *)).

Найдем соотношение между величинами Γ и Γ_0 или закон изменения фазового объема ансамбля Гиббса. Учитывая, что действительное перемещение каждой системы ансамбля подчинено уравнениям движения, а следовательно, переменные q, p в момент t являются функциями этих же переменных, взятых в начальный момент времени, запишем фазовый объем Γ в виде интеграла по области (Γ_0) :

$$\Gamma = \int \dots \int_{(\Gamma_0)} D \delta q_{10} \dots \delta q_{s0}, \delta p_{10} \dots \delta p_{s0}, \quad (43.4)$$

где $D = \frac{\partial(q, p)}{\partial(q_0, p_0)}$ — якобиан преобразования от переменных q, p к значениям этих переменных q_0, p_0 в начальный момент времени, а функции

$$q = q(q_0, p_0, t), \quad p = p(q_0, p_0, t)$$

являются решениями уравнений движения.

*) Дж. В. Гиббс, Основные принципы статистической механики, Гостехиздат, 1946, гл. I.

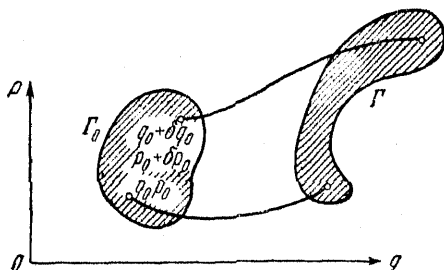


Рис. 43.1.

Из сопоставления (43.4) и (43.2) видно, что задача об отыскании закона изменения Γ сводится к отысканию закона изменения якобиана D . В связи с этим найдем значение D и его производной по времени в произвольно выбранный момент времени t_0 , учитывая, что значения координат и импульсов в момент времени $t_0 + \Delta t$ равны

$$q_i = q_{i0} + \dot{q}_{i0} \Delta t, \quad p_i = p_{i0} + \dot{p}_{i0} \Delta t \quad (i = 1, 2, \dots, s). \quad (43.5)$$

(Несмотря на то, что эти соотношения верны лишь с точностью до первой степени малого приращения Δt включительно, приближенность (43.5) не налагает каких-либо ограничений на окончательный вывод, поскольку в процессе доказательства необходимо перейти к пределу $\Delta t \rightarrow 0$.) Используя (43.5), получим элементы якобиана с той же точностью

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_i}{\partial q_{j0}} &= \delta_{ij} + \frac{\partial \dot{q}_{i0}}{\partial q_{j0}} \Delta t, & \frac{\partial q_i}{\partial p_{j0}} &= \frac{\partial \dot{q}_{i0}}{\partial p_{j0}} \Delta t, \\ \frac{\partial p_i}{\partial q_{j0}} &= \frac{\partial \dot{p}_{i0}}{\partial q_{j0}} \Delta t, & \frac{\partial p_i}{\partial p_{j0}} &= \delta_{ij} + \frac{\partial \dot{p}_{i0}}{\partial p_{j0}} \Delta t \end{aligned} \quad (43.6)$$

$$(i, j = 1, 2, \dots, s).$$

Подставляя (43.6) в выражение для якобиана D , находим точное значение $D(t_0)$ и приближенное значение $D(t_0 + \Delta t)$

$$D(t_0) = 1, \quad D(t_0 + \Delta t) = 1 + \sum_{i=1}^s \left(\frac{\partial \dot{q}_{i0}}{\partial q_{i0}} + \frac{\partial \dot{p}_{i0}}{\partial p_{i0}} \right) \Delta t \quad (43.7)$$

(здесь следует иметь в виду, что члены порядка Δt появляются только за счет диагональных элементов якобиана). Отсюда, переходя к пределу, находим производную якобиана при $t = t_0$

$$\dot{D}|_{t_0} = \sum_{i=1}^s \left(\frac{\partial \dot{q}_{i0}}{\partial q_{i0}} + \frac{\partial \dot{p}_{i0}}{\partial p_{i0}} \right). \quad (43.8)$$

Поскольку движение систем ансамбля подчинено уравнениям Гамильтона (42.13), постольку каждое слагаемое в правой части (43.8) будет равно (см. (43.1))

$$\frac{\partial \dot{q}_{i0}}{\partial q_{i0}} + \frac{\partial \dot{p}_{i0}}{\partial p_{i0}} = \frac{\partial Q_i^d}{\partial p_{i0}} \quad (i = 1, 2, \dots, s). \quad (43.9)$$

Используя (43.9) и имея в виду произвольность t_0 , получим выражение для производной якобиана D , справедливое в любой момент времени:

$$\dot{D} = \sum_{i=1}^s \frac{\partial Q_i^d}{\partial p_i}. \quad (43.10)$$

Следовательно, производная фазового объема Γ равна (см. (43.4))

$$\dot{\Gamma} = \int \dots \int_{(\Gamma_0)} \sum_{i=1}^s \frac{\partial Q_i^d}{\partial p_i} \delta q_{i0} \dots \delta q_{s0} \delta p_{10} \dots \delta p_{s0}. \quad (43.11)$$

Отсюда вытекает закон сохранения фазового объема (теорема Луивилля). Согласно этому закону *фазовый объем механических систем с обобщенно-потенциальными силами и голономными идеальными связями в отсутствие диссипативных сил сохраняется*, т. е.

$$\Gamma = \Gamma_0, \quad \text{если } Q_i^d = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, s). \quad (43.12)$$

В этом случае $\dot{D} = 0$ и, следовательно, величина якобиана в любой момент времени равна (см. (43.7))

$$D = 1. \quad (43.13)$$

Соотношения (43.12) и (43.13) справедливы при *любом* числе точек в системе и поэтому могут служить основой для изучения систем с большим количеством частиц, т. е. систем, которые изучаются статистической механикой.

Пример 43.1. Сохранение фазового объема ансамбля систем с одной степенью свободы.

Рассмотрим движение точки по линии пересечения неподвижной сферы и колеблющейся горизонтальной плоскости (см. пример 25.3).

В этом случае лагранжиан, обобщенный импульс и функция Гамильтона соответственно равны

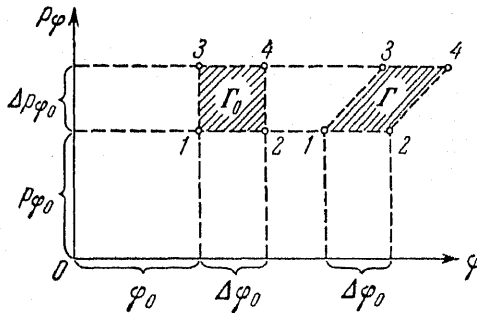


Рис. 43.2.

$$\mathcal{L} = \frac{ma^2}{2} \dot{\phi}^2 \cos^2 \omega t,$$

$$p_\phi = ma^2 \dot{\phi} \cos^2 \omega t,$$

$$H = p_\phi \dot{\phi} - \mathcal{L} = \frac{p_\phi^2}{2ma^2 \cos^2 \omega t}$$

(в выражениях \mathcal{L} и H опущены, как несущественные, члены, зависящие только от времени; см. (51.11')).

Отсюда получаем канонические уравнения

$$\dot{\phi} = \frac{\partial H}{\partial p_\phi} = \frac{p_\phi}{ma^2 \cos^2 \omega t}, \quad \dot{p}_\phi = 0$$

и их решение

$$\varphi = \frac{p_{\varphi 0}}{m a^2 \omega} \operatorname{tg} \omega t + \varphi_0, \quad p_{\varphi} = p_{\varphi 0}.$$

Фазовое пространство в данном случае двумерно, а фазовыми траекториями являются прямые, параллельные оси φ (рис. 43.2).

Изучим движение воображаемой совокупности материальных точек, отличающихся друг от друга только начальными условиями $p_{\varphi 0}$ и φ_0 (в остальном точки, силы и связи тождественны). Пусть в начальный момент времени фазовый объем этого ансамбля равен $\Gamma_0 = \Delta\varphi_0 \cdot \Delta p_{\varphi 0}$ (область (Γ_0) ограничивают прямые, соединяющие точки 1—4). С течением времени этот прямоугольник деформируется, но величина его фазового объема (в данном случае фазовой «площади») сохраняется, о чем свидетельствует прямое вычисление якобиана:

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi_0} & \frac{\partial \varphi}{\partial p_{\varphi 0}} \\ \frac{\partial p_{\varphi}}{\partial \varphi_0} & \frac{\partial p_{\varphi}}{\partial p_{\varphi 0}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \frac{\operatorname{tg} \omega t}{m a^2 \omega} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Что касается деформации «прямоугольника», то ее можно определить, рассматривая законы движения точек 1—4 в фазовом пространстве:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{p_{\varphi 0}}{m a^2 \omega} \operatorname{tg} \omega t + \varphi_0, & (p_{\varphi})_1 &= p_{\varphi 0}, \\ \varphi_2 &= \frac{p_{\varphi 0}}{m a^2 \omega} \operatorname{tg} \omega t + \varphi_0 + \Delta\varphi_0, & (p_{\varphi})_2 &= p_{\varphi 0}, \\ \varphi_3 &= \frac{(p_{\varphi 0} + \Delta p_{\varphi 0})}{m a^2 \omega} \operatorname{tg} \omega t + \varphi_0, & (p_{\varphi})_3 &= p_{\varphi 0} + \Delta p_{\varphi 0}, \\ \varphi_4 &= \frac{(p_{\varphi 0} + \Delta p_{\varphi 0})}{m a^2 \omega} \operatorname{tg} \omega t + \varphi_0 + \Delta\varphi_0, & (p_{\varphi})_4 &= p_{\varphi 0} + \Delta p_{\varphi 0}. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что

$$\begin{aligned} \varphi_2 - \varphi_1 &= \Delta\varphi_0 = \varphi_4 - \varphi_3, \\ \varphi_3 - \varphi_1 &= \frac{\Delta p_{\varphi 0}}{m a^2 \omega} \operatorname{tg} \omega t = \varphi_4 - \varphi_2, \end{aligned}$$

и, следовательно, с течением времени «прямоугольник» деформируется во все более косою «параллелограмм», «площадь» которого равна «площади» «прямоугольника».

§ 44. Скобки Пуассона

Движение механической системы с обобщенным потенциалом \mathcal{U} и голономными идеальными связями в отсутствие диссипативных сил подчиняется уравнениям Гамильтона (42.15). Найдем *необходимое и достаточное условие того, чтобы некоторая функция $f(q, p, t)$*

сохраняла постоянное значение с течением времени:

$$f(q, p, t) = \text{const}, \quad (44.1)$$

т. е. представляла собой первый интеграл уравнений (42.15).

Пусть (44.1) имеет место; тогда полная производная по времени от функции f равна нулю, т. е.

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{j=1}^s \left\{ \frac{\partial f}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial f}{\partial p_j} \dot{p}_j \right\} = 0.$$

Используя уравнения (42.15), получим интересующее нас необходимое условие в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} + [f, H] = 0, \quad (44.2)$$

где

$$[f, H] = \sum_{j=1}^s \left\{ \frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial H}{\partial q_j} \right\}.$$

Обратные рассуждения убеждают в достаточности условия (44.2).

Это условие записано с помощью дифференциального выражения, обозначенного символом $[f, H]$. Вообще для двух функций канонических переменных можно составить выражение

$$[f_1, f_2] = \sum_{j=1}^s \left\{ \frac{\partial f_1}{\partial q_j} \frac{\partial f_2}{\partial p_j} - \frac{\partial f_1}{\partial p_j} \frac{\partial f_2}{\partial q_j} \right\}, \quad (44.3)$$

которое называется скобками Пуассона. Оно обладает свойством антисимметрии, так как

$$[f_1, f_1] = 0, \quad [f_1, f_2] = -[f_2, f_1], \quad (44.4)$$

и рядом других столь же очевидных свойств, вытекающих из определения (44.3):

$$[f_1, (f_2 + f_3)] = [f_1, f_2] + [f_1, f_3], \quad (44.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} [f_1, f_2] = \left[\frac{\partial f_1}{\partial t}, f_2 \right] + \left[f_1, \frac{\partial f_2}{\partial t} \right], \quad (44.6)$$

$$[f_1, (f_2, f_3)] = [f_1, f_2] f_3 + [f_1, f_3] f_2. \quad (44.7)$$

Более громоздко доказательство тождества Пуассона*)

$$[f_1, [f_2, f_3]] + [f_2, [f_3, f_1]] + [f_3, [f_1, f_2]] = 0. \quad (44.8)$$

*) Из определения (44.3) нетрудно видеть, что левая часть (44.8) должна представлять собой сумму членов вида: вторая производная от одной из функций f_1, f_2 или f_3 , умноженная на некоторый коэффициент. Поэтому, чтобы убедиться в справедливости тождества, достаточно показать, что левая часть (44.8) не содержит ни одной второй производной. Ввиду сим-

С помощью этого тождества нетрудно доказать теорему Пуассона, в которой утверждается: *если функции $f_1(q, p, t)$ и $f_2(q, p, t)$ являются первыми интегралами канонических уравнений (42.15), то и $[f_1, f_2]$ также будет интегралом этих уравнений, т. е.*

$$[f_1, f_2] = C. \quad (44.9)$$

Действительно, из условий теоремы и в силу (44.2) имеем

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + [f_1, H] = 0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial t} + [f_2, H] = 0. \quad (44.10)$$

Составляя далее тождество Пуассона для функций f_1 , f_2 и H и исключая из него с помощью (44.10) скобки $[f_1, H]$ и $[f_2, H]$, получим тождество

$$- \left[f_1, \frac{\partial f_2}{\partial t} \right] + \left[f_2, \frac{\partial f_1}{\partial t} \right] + [H, [f_1, f_2]] = 0,$$

которое сводится (см. (44.4) и (44.6)) к условию (44.2) для функции $[f_1, f_2]$:

$$\frac{\partial [f_1, f_2]}{\partial t} + [[f_1, f_2], H] = 0, \quad (44.11)$$

что и доказывает теорему.

Пусть, например, функция Гамильтона явно от времени не зависит, а $f(q, p, t)$ является интегралом системы (42.15). Тогда на основании условия (44.2) и теоремы Пуассона, примененной к функциям f и H , можно утверждать, что частные производные $\frac{\partial f}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$, ... являются интегралами канонических уравнений, т. е.

$$\frac{\partial f}{\partial t} = C_1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = C_2, \quad \dots \quad (44.12)$$

Эти интегралы могут оказаться новыми интегралами, независимыми от исходного. Однако если f явно от времени не зависит, то вместо (44.12) придем к тривиальному тождеству $[fH] \equiv 0$. Это обстоятельство нужно иметь в виду, применяя теорему Пуассона^{*)}.

метрии тождества относительно f_1 , f_2 и f_3 проверку можно сделать лишь для одной функции, например для f_3 . Замечая, что вторые производные от f_3 могут входить лишь в сумму

$$[f_1, [f_2, f_3]] + [f_2, [f_3, f_1]],$$

непосредственно убедимся, что эти производные в данной сумме уничтожаются.

*) Действительно, может случиться, что скобки Пуассона от функций f_1 и f_2 , являющихся интегралами уравнений (42.15), либо тождественно равны нулю (постоянной), либо представляют собой функцию от f_1 и f_2 . В этих случаях метод Пуассона не приводит к новым независимым интегралам.

С помощью скобок Пуассона можно записать ряд соотношений, имеющих важные аналогии в квантовой механике. Например, фундаментальные скобки Пуассона, т. е. скобки от самих канонических переменных:

$$[q_i, q_j] = 0, \quad [p_i, p_j] = 0, \quad [q_i, p_j] = \delta_{ij}, \quad (44.13)$$

являются классическими аналогами *перестановочных соотношений Гейзенберга* *).

Получим еще два легко проверяемых результата, имеющих квантовомеханические аналогии. Используя определение момента импульса одной точки, нетрудно показать, что между проекциями момента импульса в декартовых координатах имеют место соотношения

$$[M_x, M_y] = M_z, \quad [M_y, M_z] = M_x, \quad [M_z, M_x] = M_y. \quad (44.14)$$

Следовательно, две компоненты момента импульса не могут одновременно играть роль канонических переменных, так как канонические переменные должны удовлетворять фундаментальным соотношениям (44.13) (этому утверждению, справедливому в классической механике, соответствует квантовомеханическое утверждение о том, что две компоненты момента не могут быть одновременно точно вычислены). Вместе с тем квадрат момента и любая компонента момента могут одновременно играть роль обобщенных импульсов (в квантовомеханической теории этому соответствует возможность одновременного точного вычисления M^2 и M_α , $\alpha = x, y, z$). Действительно, используя тождества (44.5) и (44.7), найдем

$$[M_\alpha, M^2] = \sum_{\beta} [M_\alpha, M_\beta^2] = 2 \sum_{\beta} [M_\alpha, M_\beta] M_\beta \quad (\alpha, \beta = x, y, z).$$

Отсюда, используя (44.14), получим для любой компоненты

$$[M_\alpha, M^2] = 0 \quad (\alpha = x, y, z). \quad (44.15)$$

Наконец, покажем, как с помощью скобок Пуассона формулируется одно из основных уравнений статистической механики. Вероятность пребывания механической системы в элементарном фазовом объеме $\delta\Gamma$ определяется как отношение числа $\delta\omega^N$ систем ансамбля Гиббса, находящихся в $\delta\Gamma$, к постоянному числу ω^N всех систем этого ансамбля, наверняка находящихся в некотором фиксированном фазовом объеме $\Delta\Gamma$. Соответственно плотность вероятности \mathcal{D} определяется как отношение вероятности к соответствующему

*) См., например, А. А. Соколов, Ю. М. Лоскутов, И. М. Тернов, Квантовая механика, «Просвещение», 1965; А. С. Давыдов, Квантовая механика, Физматгиз, 1963.

фазовому объему $\delta\Gamma$, т. е.

$$\mathcal{D} = \frac{\delta \mathcal{N}'}{\mathcal{N}' \delta\Gamma} \quad (44.16)$$

плотность вероятности является функцией $2s + 1$ переменных q, p и t .

Рассматривая $\delta \mathcal{N}'$ определенных систем, занимающих в моменты времени t_0 и t фазовые объемы $(\delta\Gamma)_{t_0}$ и $(\delta\Gamma)_t$ соответственно, получим очевидное равенство $(\delta \mathcal{N}')_{t_0} = (\delta \mathcal{N}')_t$, которое, согласно определению (44.16), можно записать в виде

$$\mathcal{D}_{t_0} (\delta\Gamma)_{t_0} = \mathcal{D}_t (\delta\Gamma)_t;$$

здесь \mathcal{D}_{t_0} — плотность вероятности пребывания системы в момент времени t_0 в фазовой точке, находящейся в объеме $(\delta\Gamma)_{t_0}$, а \mathcal{D}_t — плотность вероятности в момент t в точке, находящейся в объеме $(\delta\Gamma)_t$. Учитывая, что величины фазовых объемов $(\delta\Gamma)_{t_0}$ и $(\delta\Gamma)_t$ равны между собой (см. (43.12)), получим $\mathcal{D}_t = \mathcal{D}_{t_0}$. Таким образом, плотность вероятности оказывается интегралом канонических уравнений и, следовательно, подчиняется уравнению

$$\frac{d\mathcal{D}}{dt} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t} + [\mathcal{D}, H] = 0. \quad (44.17)$$

Это уравнение представляет собой одно из основных уравнений статистической механики.

Закон (44.17) изменения плотности вероятности в фазовом пространстве аналогичен уравнению непрерывности несжимаемой жидкости. Действительно, плотность ρ жидкости, являющаяся функцией положения \mathbf{r} частицы жидкости и времени, для данной частицы несжимаемой жидкости сохраняет постоянное значение; поэтому ее полная производная по времени равна нулю:

$$\frac{d\rho}{dt} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\nabla \rho) \mathbf{v} = 0,$$

где $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ — скорость частицы жидкости. Сравнение этого уравнения непрерывности с уравнением (44.17) показывает, что можно провести некоторую аналогию между плотностью вероятности и плотностью жидкости, между $2s$ -мерным градиентом плотности вероятности с компонентами $\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial q_i}, \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial p_i}$ ($i = 1, 2, \dots, s$) и градиентом $\nabla \rho$ плотности жидкости, между $2s$ -мерной «скоростью» фазовой «частицы» с компонентами \dot{q}_i, \dot{p}_i ($i = 1, 2, \dots, s$) и скоростью \mathbf{v} частицы жидкости. Следовательно, движение ансамбля систем, подчиненных уравнениям (42.15), можно представить себе как движение «несжимаемой фазовой жидкости».

Пример 44.1. Скобки Пуассона для проекций радиуса-вектора, импульса и момента импульса точки.

Найти скобки Пуассона для проекций радиуса-вектора, импульса, момента импульса точки и показать, что в центрально-симметричном поле соответствующие скобки Пуассона приводят к интегралам момента.

Выберем в качестве независимых координат свободной материальной точки ее декартовы координаты. Обобщенными импульсами при этом будут проекции импульса точки p_x , p_y и p_z . Составляя скобки Пуассона для x и $M_x = yp_z - zp_y$, а затем для p_x и M_x и т. д., нетрудно убедиться, что при произвольном потенциальном внешнем поле будут иметь место следующие равенства:

$$\begin{aligned} [x, M_x] &= [y, M_y] = [z, M_z] = 0, \\ [x, M_y] &= z, \quad [y, M_z] = x, \quad [z, M_x] = y, \\ [y, M_x] &= -z, \quad [z, M_y] = -x, \quad [x, M_z] = -y; \\ [p_x, M_x] &= [p_y, M_y] = [p_z, M_z] = 0, \\ [p_x, M_y] &= p_z, \quad [p_y, M_z] = p_x, \quad [p_z, M_x] = p_y, \\ [p_y, M_x] &= -p_z, \quad [p_z, M_y] = -p_x, \quad [p_x, M_z] = -p_y \end{aligned}$$

(Эти результаты полезно сравнить с соответствующими квантово-механическими соотношениями).

Если точка движется в центрально-симметричном поле, то, вычисляя скобку

$$[M_x, H] = \frac{\partial M_x}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial p_x} - \frac{\partial M_x}{\partial p_x} \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial M_x}{\partial y} \frac{\partial H}{\partial p_y} - \frac{\partial M_x}{\partial p_y} \frac{\partial H}{\partial y} + \frac{\partial M_x}{\partial z} \frac{\partial H}{\partial p_z} - \frac{\partial M_x}{\partial p_z} \frac{\partial H}{\partial z},$$

где $H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + U(r)$ и $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$, получим

$$[M_x, H] = p_z \frac{p_y}{m} + z \frac{\partial U}{\partial r} \frac{y}{r} - p_y \frac{p_z}{m} - y \frac{\partial U}{\partial r} \frac{z}{r} = 0.$$

Последнее условие совпадает с условием (44.2), поскольку M_x явно от времени не зависит. Следовательно, M_x является интегралом движения канонических уравнений. Составляя скобку Пуассона $[M_y, H]$, аналогично убедимся, что и $M_y = M_{y0}$. Что касается проекции M_z , то она, как нетрудно подсчитать, равна скобке $[M_x, M_y]$ и, согласно теореме Пуассона, также сохраняется.

§ 45. Уравнение Гамильтона—Якоби

Наряду с уравнениями движения Лагранжа и Гамильтона, которые являются обыкновенными дифференциальными уравнениями, существует уравнение в частных производных, описывающее движение механической системы в поле обобщенно-потенциальных сил при наличии голономных идеальных связей. Этому уравнению, называемому уравнением Гамильтона—Якоби, подчиняется функция действия

$$S = \int_{t_0}^t \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) dt, \quad (45.1)$$

с помощью которой оказывается возможным находить решение канонических уравнений Гамильтона. Прежде чем убедиться в этом, покажем, как по известному решению канонических уравнений определяется функция действия, и изучим ее основные свойства.

Пусть известны все независимые интегралы канонических уравнений (42.15) или их решение:

$$q = q(q_0, p_0, t_0, t), \quad (45.2)$$

$$p = p(q_0, p_0, t_0, t). \quad (45.3)$$

Дифференцируя (45.2) по времени, получим обобщенные скорости в виде

$$\dot{q} = \dot{q}(q_0, p_0, t_0, t). \quad (45.4)$$

Подставляя (45.2) и (45.4) в (45.1), найдем действие S как функцию начальных условий и времени:

$$S = S(q_0, p_0, t_0, t). \quad (45.5)$$

Можно найти действие как функцию координат и времени, а также начального положения и начального момента времени. Действительно, предполагая, что

$$\det \left(\frac{\partial q_i}{\partial p_{j_0}} \right) \neq 0, \quad (45.6)$$

и выражая начальные импульсы p_0 с помощью (45.2) через q, t, q_0 и t_0 , получим

$$p_0 = p_0(q, t, q_0, t_0), \quad (45.7)$$

а подставляя эти функции в (45.5), найдем

$$S = S(q, t, q_0, t_0). \quad (45.8)$$

Пользуясь (45.7) и (45.3), можно найти обобщенные импульсы как функции координат и времени, начального положения и начального момента t_0 :

$$p = p(q, t, q_0, t_0). \quad (45.9)$$

Покажем, что «поле импульсов», определяемое функциями (45.9), потенциально, а его потенциалом является функция действия (45.8). С этой целью найдем вариацию действия при фиксированных моментах времени t и t_0 (эту вариацию удобно сначала записать в виде вариации от интеграла (45.1)):

$$\delta S = \int_{t_0}^t \delta \mathcal{L} dt = \int_{t_0}^t \sum_{j=1}^s \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j \right\} dt. \quad (45.10)$$

Используя коммутативность операций дифференцирования по времени и варьирования при фиксированном времени, т. е. используя равенства

$$\delta \dot{q}_j = \delta \frac{dq_j}{dt} = \frac{d}{dt} \delta q_j \quad (j=1, 2, \dots, s), \quad (45.11)$$

часть членов (45.10) можно будет представить в виде

$$\int_{t_0}^t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{d}{dt} \delta q_j \right) dt = - \int_{t_0}^t \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j dt + \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \right) \Big|_{t_0}^t. \quad (45.12)$$

Тогда вместо (45.10) получим

$$\delta S = \sum_{j=1}^s \int_{t_0}^t \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) \right\} \delta q_j dt + \sum_{j=1}^s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \Big|_{t_0}^t. \quad (45.13)$$

Учитывая, что между измененными начальным и конечным положениями система движется по действительной траектории в соответствии с уравнениями движения (42.15) (или (42.14)), приравняем нулю выражения в фигурных скобках и тем самым найдем, что

$$\delta S = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \Big|_{t_0}^t. \quad (45.14)$$

Переходя в (45.14) к каноническим импульсам (см. (28.1)), окончательно найдем

$$\delta S = \sum_{j=1}^s p_j \delta q_j - \sum_{j=1}^s p_{j0} \delta q_{j0}, \quad (45.15)$$

откуда следует, что

$$p_j = \frac{\partial S}{\partial q_j}, \quad p_{j0} = - \frac{\partial S}{\partial q_{j0}} \quad (j=1, 2, \dots, s), \quad (45.16)$$

где $S = S(q, t, q_0, t_0)$. Таким образом, действие как функция начального и конечного положений является потенциалом «поля импульсов», а первая и вторая группы функций (45.16) представляют

собой решение канонических уравнений, записанное в виде (45.9) и (45.7) соответственно.

Найдем функцию действия и определяемые ею импульсы для твердого тела, вращающегося вокруг одной из главных осей инерции. Лагранжиан такого тела равен кинетической энергии $\frac{J}{2} \dot{\varphi}^2$, где φ — угол поворота тела вокруг оси вращения, а J — соответствующий момент инерции. Очевидно, что здесь обобщенный импульс p_φ , равный $J\dot{\varphi}$, сохраняется, а решением уравнения движения является функция

$$\varphi = \frac{p_{\varphi 0}}{J} (t - t_0) + \varphi_0.$$

Используя это решение, получим действие в виде (45.5)

$$S = \frac{p_{\varphi 0}^2}{2J} (t - t_0),$$

а затем в виде (45.8)

$$S = \frac{J(\varphi - \varphi_0)^2}{2(t - t_0)},$$

откуда следует, что

$$p_\varphi = \frac{\partial S}{\partial \dot{\varphi}} = J \frac{\varphi - \varphi_0}{t - t_0}, \quad p_{\varphi 0} = - \frac{\partial S}{\partial \varphi_0} = J \frac{\varphi - \varphi_0}{t - t_0}.$$

Итак, зная решение канонических уравнений, можно найти функцию действия и с ее помощью записать решение в форме (45.16). Более интересной и практически важной задачей является отыскание функции действия в том случае, когда решение канонических уравнений заранее не известно. Для выполнения этой задачи следует прежде всего найти уравнение, которому должна удовлетворять функция действия. Учитывая, что, с одной стороны, согласно (45.1)

$$\frac{dS}{dt} = \mathcal{L}, \quad (45.17)$$

а, с другой стороны,

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_{j=1}^s \frac{\partial S}{\partial q_j} \dot{q}_j \quad (45.18)$$

найдем, что функция S как функция координат и времени подчинена уравнению

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \sum_{j=1}^s p_j \dot{q}_j - \mathcal{L} = 0. \quad (45.19)$$

Это уравнение с помощью определения (42.1) и соотношений (45.16) можно представить в виде

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(q_1, q_2, \dots, q_s; \frac{\partial S}{\partial q_1}, \frac{\partial S}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_s}; t) = 0, \quad (45.20)$$

где $H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t\right)$ — гамильтониан системы, куда вместо обобщенных импульсов подставлены частные производные функции S по соответствующим координатам. Полученное уравнение в частных производных, которому удовлетворяет функция действия, называется *уравнением Гамильтона—Якоби*.

Рассмотрим полный интеграл уравнения Гамильтона—Якоби, т. е. такое решение этого уравнения

$$S = S(q_1, \dots, q_s, t; \alpha_1, \dots, \alpha_s), \quad (45.21)$$

которое зависит от s произвольных постоянных α и удовлетворяет условию *)

$$\det \left(\frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial \alpha_j} \right) \neq 0. \quad (45.22)$$

Из определения (45.21) и (45.22) видно, что функция действия (45.8) является полным интегралом уравнения Гамильтона—Якоби. В самом деле, эта функция удовлетворяет уравнению (45.20), а ввиду допущения (45.6) и соотношений (45.16) обладает свойством

$$\det \left(\frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial q_j} \right) \neq 0 \quad (45.23)$$

(поскольку к функции S всегда можно прибавить произвольную постоянную, то некоторая комбинация из $s+1$ постоянных q_0 и t_0 войдет в S аддитивным образом). Так как функция действия может быть определена по известному решению канонических уравнений, то из вышесказанного следует, что с помощью этого решения можно найти полный интеграл уравнения Гамильтона—Якоби.

Большое практическое значение имеет обратное утверждение, основанное на теореме Якоби, которая дает возможность по известному полному интегралу уравнения Гамильтона—Якоби находить независимые интегралы канонических уравнений (42.15). Согласно этой теореме, *если некоторая функция $S(q, t, \alpha)$ является полным интегралом уравнения Гамильтона—Якоби, то решение канонических уравнений Гамильтона (42.15) определяется следующими соотношениями:*

$$\text{а) } p_j = \frac{\partial S}{\partial q_j}, \quad \text{б) } \beta_j = \frac{\partial S}{\partial \alpha_j} \quad (j = 1, 2, \dots, s), \quad (45.24)$$

где α и β — произвольные постоянные. Соотношения (45.24, а) определяют функции вида $p = p(q, t, \alpha)$, т. е. определяют обобщенные

*) Поскольку уравнение (45.20) не содержит саму неизвестную функцию, а только ее производные, постольку $s+1$ -я произвольная постоянная будет аддитивным образом входить в полный интеграл.

импульсы как функции координат и времени. Соотношения (45.24, б) представляют собой вторые интегралы канонических уравнений вида $\beta = \beta(q, t, \alpha)$. Разрешая эти интегралы относительно q , найдем решение в виде $q(t, \alpha, \beta)$, т. е. найдем координаты системы как функции времени и $2s$ произвольных постоянных.

Для доказательства теоремы Якоби нужно убедиться в том, что решение (45.24) тождественно удовлетворяет каноническим уравнениям Гамильтона (42.15). С этой целью будем исходить из очевидного тождества

$$\frac{\partial S(q, t, \alpha)}{\partial t} + H\left(q, \frac{\partial S(q, t, \alpha)}{\partial q}, t\right) = 0, \quad (45.25)$$

дифференцируя которое можно получить ряд новых тождеств. Например, дифференцируя (45.25) по всем α , получим

$$\frac{\partial^2 S(q, t, \alpha)}{\partial \alpha_j \partial t} + \sum_{i=1}^s \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial^2 S(q, t, \alpha)}{\partial \alpha_j \partial q_i} = 0 \quad (j=1, 2, \dots, s), \quad (45.26)$$

а вычисляя полную производную по времени от каждого из интегралов (45.24, б), найдем

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial S(q, t, \alpha)}{\partial \alpha_j} \right) = \frac{\partial^2 S(q, t, \alpha)}{\partial t \partial \alpha_j} + \sum_{i=1}^s \dot{q}_i \frac{\partial^2 S(q, t, \alpha)}{\partial q_i \partial \alpha_j} = 0 \quad (j=1, 2, \dots, s). \quad (45.27)$$

Системы (45.26) и (45.27) являются системами неоднородных линейных уравнений относительно величин $\frac{\partial H}{\partial p_i}$ и \dot{q}_i соответственно. Коэффициенты этих систем одинаковы, а определители равны и, согласно (45.22), отличны от нуля. Следовательно, корни этих систем тождественно равны, т. е.

$$\dot{q}_i \equiv \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (i=1, 2, \dots, s), \quad (45.28)$$

что означает тождественное удовлетворение первой группы канонических уравнений (42.15).

Дифференцируя тождество (45.25) по всем q и вычисляя полную производную по времени от обеих частей всех равенств (45.24, а), получим две системы уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 S(q, t, \alpha)}{\partial q_j \partial t} + \frac{\partial H}{\partial q_j} + \sum_{i=1}^s \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial^2 S(q, t, \alpha)}{\partial q_j \partial q_i} &= 0 \quad (j=1, 2, \dots, s), \\ \frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial^2 S(q, t, \alpha)}{\partial t \partial q_j} + \sum_{i=1}^s \frac{\partial^2 S(q, t, \alpha)}{\partial q_i \partial q_j} \dot{q}_i & \quad (j=1, 2, \dots, s), \end{aligned} \quad (45.29)$$

первую из которых с помощью (45.28) можно записать в виде

$$\frac{\partial^2 S(q, t, \alpha)}{\partial q_j \partial t} + \sum_{i=1}^s \frac{\partial^2 S(q, t, \alpha)}{\partial q_j \partial q_i} \dot{q}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \quad (j=1, 2, \dots, s). \quad (45.30)$$

Сравнивая между собой (45.29) и (45.30), убеждаемся в том, что вторая группа уравнений (42.15) также тождественно удовлетворяется:

$$\dot{p}_j \equiv -\frac{\partial H}{\partial q_j} \quad (j=1, 2, \dots, s). \quad (45.31)$$

Таким образом, теорема доказана.

Основываясь на теореме Якоби, можно применять следующий метод решения задач о движении механических систем с обобщенно-потенциальными силами и голономными идеальными связями. Этот метод заключается в составлении уравнения Гамильтона—Якоби по известной функции Гамильтона и в отыскании полного интеграла этого уравнения с последующим использованием соотношений (45.24).

Например, составим уравнения Гамильтона—Якоби для свободной точки в потенциальном поле в декартовых, цилиндрических и сферических координатах (см. (42.2) — (42.4)):

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m} \left\{ \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z} \right)^2 \right\} + U(x, y, z) = 0, \quad (45.32)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m} \left\{ \left(\frac{\partial S}{\partial \rho} \right)^2 + \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial S}{\partial \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z} \right)^2 \right\} + U(\rho, \varphi, z) = 0, \quad (45.33)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m} \left\{ \left(\frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial S}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left(\frac{\partial S}{\partial \varphi} \right)^2 \right\} + U(r, \theta, \varphi) = 0, \quad (45.34)$$

и рассмотрим решение уравнения Гамильтона—Якоби для свободной точки, движущейся относительно инерциальной системы в отсутствие силовых полей. В этом простейшем случае все переменные в уравнении Гамильтона—Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m} \left\{ \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z} \right)^2 \right\} = 0$$

разделяются, а его полный интеграл имеет вид

$$S = -E_0 t + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z + \alpha_4.$$

Определяя с помощью подстановки этого выражения в уравнение Гамильтона—Якоби связь между постоянными (число независимых неаддитивных постоянных должно равняться числу независимых переменных), найдем полный интеграл

$$S = -\frac{1}{2m} (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2) t + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z + \alpha_4.$$

Отсюда на основании (45.24, а) убеждаемся, что все обобщенные импульсы сохраняются:

$$p_x = \frac{\partial S}{\partial x} = \alpha_1, \quad p_y = \frac{\partial S}{\partial y} = \alpha_2, \quad p_z = \frac{\partial S}{\partial z} = \alpha_3,$$

а приравнивая производные $\frac{\partial S}{\partial \alpha}$ произвольным постоянным β (см. 45.24, б), находим вторые интегралы:

$$\beta_1 = \frac{\partial S}{\partial \alpha_1} = -\frac{\alpha_1}{m} t + x,$$

$$\beta_2 = \frac{\partial S}{\partial \alpha_2} = -\frac{\alpha_2}{m} t + y,$$

$$\beta_3 = \frac{\partial S}{\partial \alpha_3} = -\frac{\alpha_3}{m} t + z.$$

Наконец, используя начальные условия и переобозначая постоянные, получим решение канонических уравнений

$$p_x = p_{x0}, \quad p_y = p_{y0}, \quad p_z = p_{z0},$$

$$x = x_0 + \frac{p_{x0}}{m} (t - t_0), \quad y = y_0 + \frac{p_{y0}}{m} (t - t_0), \quad z = z_0 + \frac{p_{z0}}{m} (t - t_0).$$

В заключение подчеркнем, что физические допущения, лежащие в основе канонических уравнений (42.15) и уравнения Гамильтона—Якоби (45.20), одинаковы*). Однако преимуществом уравнения Гамильтона—Якоби является то, что основной метод решения этого уравнения — метод разделения переменных — включает в себя как частный случай метод циклических координат Лагранжа (см. § 46). Кроме того, при рассмотрении уравнения Гамильтона—Якоби наиболее естественно вскрывается глубокая аналогия между механикой точки и волновым процессом, которая играет важную роль при обсуждении волнового аспекта квантовомеханических явлений.

§ 46. Метод разделения переменных

В ряде случаев гамильтониан системы обладает свойствами, которые приводят к разделению переменных в уравнении Гамильтона—Якоби.

Рассмотрим *обобщенно-консервативную систему*, гамильтониан которой явно от времени не зависит (см. (42.21)), а уравнение Гамильтона—Якоби имеет вид

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q_1, \dots, q_s; \frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_s}\right) = 0. \quad (46.1)$$

*) О математической эквивалентности уравнения в частных производных и системы уравнений с обыкновенными производными см. В. В. Степанов, Курс дифференциальных уравнений, «Наука», 1966, гл. IX, № 6, п. 1.

Этому уравнению удовлетворяет полный интеграл

$$S = -H_0 t + W(q_1, \dots, q_s; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{s-1}, H_0), \quad (46.2)$$

линейно зависящий от времени; здесь роль s -й неаддитивной постоянной играет постоянная обобщенной энергии H_0 , а «укороченное» действие W удовлетворяет уравнению

$$H(q_1, \dots, q_s; \frac{\partial W}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial W}{\partial q_s}) = H_0. \quad (46.3)$$

В последнем нетрудно убедиться, подставляя (46.2) в (46.1) и имея в виду, что

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -H_0, \quad \frac{\partial S}{\partial q_j} = \frac{\partial W}{\partial q_j} \quad (j = 1, 2, \dots, s). \quad (46.4)$$

Если полный интеграл уравнения (46.3) известен, то, применяя теорему Якоби, можно получить решение канонических уравнений. Действительно, учитывая последние s равенств (46.4), а также равенства

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_j} = \frac{\partial W}{\partial \alpha_j} \quad (j = 1, 2, \dots, s-1), \quad \frac{\partial S}{\partial H_0} = -t + \frac{\partial W}{\partial H_0}, \quad (46.5)$$

согласно (45.24), найдем

$$\begin{aligned} \text{а) } p_j &= \frac{\partial W}{\partial q_j} \quad (j = 1, 2, \dots, s), \\ \text{б) } \beta_j &= \frac{\partial W}{\partial \alpha_j} \quad (j = 1, 2, \dots, s-1), \\ \text{в) } \beta_s &= -t + \frac{\partial W}{\partial H_0}. \end{aligned} \quad (46.6)$$

Поскольку W явно от времени не зависит, то «поле импульсов» (46.6, а) стационарно, $s-1$ интегралов (46.6, б) определяют совокупность «траекторий» системы в пространстве конфигураций, а последний интеграл (46.6, в) определяет закон движения системы.

При наличии *циклических координат* также имеет место разделение переменных в уравнении Гамильтона—Якоби. В самом деле, если $s-m$ независимых координат являются циклическими, то уравнение (45.20) принимает вид

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(q_1, \dots, q_m; \frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_s}, t) = 0, \quad (46.7)$$

а его решение будет *линейным относительно всех циклических координат*:

$$S = V(q_1, \dots, q_m; \alpha_1, \dots, \alpha_s; t) + \sum_{j=m+1}^s \alpha_j q_j. \quad (46.8)$$

Подставляя (46.8) в (46.7) и учитывая, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial t} &= \frac{\partial V}{\partial t}, & \frac{\partial S}{\partial q_j} &= \frac{\partial V}{\partial q_j} & (j=1, 2, \dots, m), \\ \frac{\partial S}{\partial q_j} &= \alpha_j & (j=m+1, \dots, s) \end{aligned} \quad (46.9)$$

(из последних $s - m$ равенств следует постоянство импульсов, соответствующих циклическим координатам), получим уравнение для функции V

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H\left(q_1, \dots, q_m; \frac{\partial V}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial V}{\partial q_m}, \alpha_{m+1}, \dots, \alpha_s; t\right) = 0. \quad (46.10)$$

Зная полный интеграл этого уравнения и используя теорему Якоби можно найти решение канонических уравнений.

Наконец, рассмотрим такой случай разделяющихся переменных, когда функция Гамильтона имеет форму

$$H = H\{q_1, \dots, q_m; p_1, \dots, p_m; f_{m+1}(q_{m+1}, p_{m+1}), \dots, f_s(q_s, p_s), t\}, \quad (46.11)$$

где каждая из функций f_j зависит только от соответствующей одной пары канонических переменных q_j, p_j . Тогда решение уравнения Гамильтона—Якоби будет иметь вид

$$S = V(q_1, \dots, q_m; \alpha_1, \dots, \alpha_s; t) + \sum_{j=m+1}^s W_j(q_j; \alpha_1, \dots, \alpha_s), \quad (46.12)$$

где W_j — аддитивная часть действия, зависящая только от координаты q_j и постоянных α . Подставляя (46.12) в уравнение Гамильтона—Якоби, соответствующее гамильтониану (46.11), и используя очевидные равенства

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial t} &= \frac{\partial V}{\partial t}, & \frac{\partial S}{\partial q_j} &= \frac{\partial V}{\partial q_j} & (j=1, \dots, m), \\ \frac{\partial S}{\partial q_j} &= \frac{\partial W_j}{\partial q_j} & (j=m+1, \dots, s), \end{aligned} \quad (46.13)$$

найдем уравнение для функций V и W_j ($j=m+1, \dots, s$):

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} + H\left\{q_1, \dots, q_m; \frac{\partial V}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial V}{\partial q_m}; f_{m+1}\left(q_{m+1}, \frac{\partial W_{m+1}}{\partial q_{m+1}}\right); \dots \right. \\ \left. \dots f_s\left(q_s, \frac{\partial W_s}{\partial q_s}\right); t\right\} = 0. \end{aligned} \quad (46.14)$$

Если (46.12) является решением исходного уравнения, то уравнение (46.14) должно обращаться в тождество при любых значениях координат q_{m+1}, \dots, q_s . Это возможно только в том случае, когда все функции f_j будут постоянными, так как при изменении данной координаты q_i изменяется лишь функция f_i . Таким образом, уравнение

(46.14) распадается на следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H \left\{ q_1, \dots, q_m; \frac{\partial V}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial V}{\partial q_m}; \alpha_{m+1}, \dots, \alpha_s; t \right\} = 0, \quad (46.15)$$

$$f_j \left(q_j, \frac{\partial W_j}{\partial q_j} \right) = \alpha_j \quad (j = m+1, \dots, s), \quad (46.16)$$

из которых $s - m$ последних уравнений являются обыкновенными дифференциальными уравнениями. Если полный интеграл V уравнения (46.15) и решения уравнений (46.16) могут быть найдены, то, используя (46.13) и теорему Якоби, получим решение исходного уравнения в виде

$$p_j = \frac{\partial V}{\partial q_j} \quad (j = 1, \dots, m), \quad p_j = \frac{\partial W_j}{\partial q_j} \quad (j = m+1, \dots, s), \quad (46.17)$$

$$\beta_j = \frac{\partial S}{\partial \alpha_j} \quad (j = 1, \dots, s).$$

Рассматриваемый случай разделяющихся переменных включает в себя, в частности, случай циклических координат. Действительно, если в (46.11) положить $f_j = p_j$, то система (46.16) примет вид

$$\frac{dW_j}{dq_j} = \alpha_j \quad (j = m+1, \dots, s) \quad (46.18)$$

и, таким образом, полный интеграл (46.12) совпадет с интегралом (46.8).

Заметим, что в методе разделения переменных, как и в методе циклических координат, очень большую роль играет выбор переменных. Например, в задаче двух тел полярные координаты допускают разделение, а декартовы не допускают. Может также случиться, что в одной и той же задаче несколько систем переменных допускают разделение, а может случиться, что разделение переменных вообще провести нельзя, как, например, в задаче трех тел.

└ Пример 46.1. Движение заряда в поле электрического диполя.

Как известно, потенциальная энергия заряда e в поле неподвижного электрического диполя с моментом \mathbf{a} равна *)

$$U = e \frac{\mathbf{a}\mathbf{r}}{r^3}.$$

Найти общее решение уравнения движения заряда **).

Гамильтониан заряда в сферических координатах с началом в диполе и полярной осью, направленной по вектору \mathbf{a} , имеет вид (см. (42.4))

$$H = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2 \sin^2 \theta} \right) + \frac{ea \cos \theta}{r^2}.$$

*) См. [31], стр. 51, [30], стр. 68.

***) См. [14], гл. III.

Поскольку полная энергия заряда сохраняется, то «укороченное» действие W , зависящее от координат r , θ и φ , подчиняется уравнению (см. (46.3))

$$\frac{1}{2m} \left\{ \left(\frac{\partial W}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial W}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left(\frac{\partial W}{\partial \varphi} \right)^2 \right\} + \frac{ea \cos \theta}{r^2} = E_0.$$

Замечая, что φ является циклической координатой, а r и θ разделяются, полный интеграл последнего уравнения будем искать в виде (см. (46.12))

$$W = W_r(r, \alpha_1, \alpha_2, E_0) + W_\theta(\theta, \alpha_1, \alpha_2, E_0) + \alpha_2 \varphi.$$

В результате уравнение для «укороченного» действия распадается на обыкновенные дифференциальные уравнения

$$\left(\frac{dW_r}{dr} \right)^2 r^2 - 2mE_0 r^2 = -\alpha_1, \quad \left(\frac{dW_\theta}{d\theta} \right)^2 + \frac{\alpha_2^2}{\sin^2 \theta} + 2mea \cos \theta = \alpha_1,$$

решения которых легко записать в квадратурах. Таким образом, находим полный интеграл исходного уравнения

$$W = \int \left(2mE_0 - \frac{\alpha_1}{r^2} \right)^{1/2} dr + \int \left(\alpha_1 - \frac{\alpha_2^2}{\sin^2 \theta} - 2mea \cos \theta \right)^{1/2} d\theta + \alpha_2 \varphi, \quad (1)$$

с помощью которого нетрудно получить вторые интегралы (см. (46.6))

$$\beta_1 = -\frac{1}{2} \int \frac{dr}{r^2 \left(2mE_0 - \frac{\alpha_1}{r^2} \right)^{1/2}} + \frac{1}{2} \int \frac{d\theta}{\left(\alpha_1 - \frac{\alpha_2^2}{\sin^2 \theta} - 2mea \cos \theta \right)^{1/2}}, \quad (2)$$

$$\beta_2 = -\alpha_2 \int \frac{d\theta}{\sin^2 \theta \left(\alpha_1 - \frac{\alpha_2^2}{\sin^2 \theta} - 2mea \cos \theta \right)^{1/2}} + \varphi, \quad (3)$$

$$\beta_3 + t = \int \frac{m dr}{\left(2mE_0 - \frac{\alpha_1}{r^2} \right)^{1/2}}. \quad (4)$$

Первые два из этих интегралов определяют траекторию заряда, а третий легко берется и представляет собой закон движения заряда:

$$r = \left[\frac{2E_0}{m} (t + \beta_3)^2 + \frac{\alpha_1}{2mE_0} \right]^{1/2}. \quad (5)$$

Производя в (3) замену констант

$$\alpha_1 \rightarrow 2mE_0 l^2, \quad \frac{ea}{l^2} \rightarrow -mg \quad (6)$$

и учитывая, что $\alpha_2 = p_{\varphi 0} = M_{z0}$, получим (формулу (4) примера 28.1. Следовательно, проекция точки на сферу постоянного радиуса (с центром в диполе) будет описывать траекторию, совпадающую с траекторией подобранного соответствующим образом сферического маятника.

Первые интегралы Якоби (см. (46.6, а)) представляют собой обобщенные импульсы заряда как функции координат:

$$p_r^2 r^2 = -\alpha_1 + 2mE_0 r^2, \quad (7)$$

$$p_\theta^2 = \alpha_1 - \frac{M_{z_0}^2}{\sin^2 \theta} + 2m|e|a \cos \theta, \quad (8)$$

$$p_\varphi = M_{z_0} \quad (9)$$

(здесь вместо постоянной α_2 введена равная ей константа M_{z_0} и для определенности выбран заряд $e < 0$). Из соотношений (7) и (8) вытекают неравенства, определяющие области изменения координат r и θ :

$$2mE_0 r^2 \geq \alpha_1, \quad (10)$$

$$\alpha_1 \geq \frac{M_{z_0}^2}{\sin^2 \theta} - 2m|e|a \cos \theta, \quad (11)$$

а на основании интеграла (9) можно заключить, что при $M_{z_0} \neq 0$ заряд вращается вокруг полярной оси все время в одном направлении (знак $\dot{\varphi}$ совпадает со знаком $\dot{\varphi}_0$); если же $M_{z_0} = 0$, то заряд либо совершает плоское движение ($\dot{\varphi} = 0$), либо движется вдоль полярной оси ($\theta = 0$).

Рассмотрим различные частные случаи. Пусть, например, $E_0 < 0$, тогда $\alpha_1 < 0$ (см. (7)) и имеют место неравенства (см. (10))

$$0 \leq r^2 \leq r^2_{\max} = \frac{|\alpha_1|}{2m|E_0|},$$

т. е. траектория финитна. Если при этом $M_{z_0} = 0$, а $\theta_0 \neq 0$, то из (11) вытекает, что заряд будет двигаться в секторе меридиональной плоскости с углом раствора $2\theta_{\max}$, где

$$\theta_{\max} = \arccos \frac{|\alpha_1|}{2m|e|a}.$$

Если же $M_{z_0} \neq 0$, то траектория заряда будет расположена между двумя конусами; соответственно θ будет изменяться в пределах

$$0 < \theta_{\min} \leq \theta \leq \theta_{\max}$$

(θ_{\min} и θ_{\max} определяются из уравнения (11)). В рассматриваемом случае полной отрицательной энергии время движения заряда от $r = r_{\max}$ до $r = 0$ равно $\frac{|\alpha_1|^{1/2}}{2|E_0|}$ (см. (5)).

Пусть $E_0 = 0$ и $\alpha_1 = 0$, тогда из интеграла (7) вытекает, что $p_r^2 = 0$; следовательно, заряд движется по сфере конечного радиуса $r = r_0$ ($p_r = m\dot{r} = 0$). Если при этом $M_{z_0} = 0$, то из неравенства (11) видно, что θ изменяется от 0 до $\pi/2$, т. е. заряд описывает полукруг в некоторой меридиональной плоскости. Если же $M_{z_0} \neq 0$, то движение заряда будет аналогично соответствующему движению сферического маятника.

Отметим специальный подбор начальных условий, при котором заряд совершает равномерное движение по окружности, перпендикулярной полярной оси, что соответствует тому случаю движения сферического маятника, когда $E_0 = (U_{\text{эф}})_{\text{min}}$ (см. пример 28.1). Используя связь констант (6) и условие (5) примера 28.1, найдем соотношение

$$\frac{\cos \theta}{\sin^4 \theta} = \frac{m |e| a}{M_{z_0}^2};$$

с другой стороны, согласно (10),

$$\frac{M_{z_0}^2}{\sin^2 \theta} = 2m |e| a \cos \theta.$$

Таким образом, получим, что

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{3}, \quad M_{z_0}^2 = \frac{4}{3\sqrt{3}} m |e| a,$$

причем из последнего выражения нетрудно найти

$$\phi_0 = 3^{1/4} \sqrt{\frac{|e| a}{m r_0^3}}.$$

Из этих результатов видно, что все круговые траектории лежат на одном и том же конусе, раствор которого не зависит ни от заряда и его массы, ни от момента диполя, а момент импульса заряда относительно оси диполя не зависит от расстояния заряда до диполя.

В случае $E_0 = 0$, а $\alpha_1 < 0$ движение инфинитно и будет происходить между конусами, растворы которых определяются соотношением (11), при этом r^2 будет линейно зависеть от времени.

В случае $E_0 > 0$ движение инфинитно как при $\alpha_1 < 0$, так и при $\alpha_1 > 0$, причем, если $\alpha_1 > 0$, то

$$r^2 \geq r_{\text{min}}^2 = \frac{\alpha_1}{2mF_0},$$

т. е. заряд не может упасть на диполь.

Пример 46.2. Обобщенно-консервативная система с одной степенью свободы.

Рассмотрим задачу о точке, движущейся по гладкому вращающемуся стержню (см. пример 28.3), и ее решение методом Гамильтона—Якоби.

По известной функции Лагранжа определим гамильтониан точки

$$H = \frac{p_r^2}{2m} - \frac{m\omega^2}{2} r^2 \sin^2 \theta_0 + mgr \cos \theta_0$$

(здесь $p_r = m\dot{r}$), а затем получим уравнение Гамильтона—Якоби (см. (46.1))

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 - \frac{m\omega^2}{2} r^2 \sin^2 \theta_0 + mgr \cos \theta_0 = 0.$$

Так как функция H явно от времени не зависит и, следовательно, обобщенная энергия сохраняется ($H = H_0$), то полный интеграл этого уравнения имеет вид (см. (46.2))

$$S = -H_0 t + W(r; H_0),$$

а «укороченное» действие W подчиняется уравнению (см. (46.3))

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{dW}{dr} \right)^2 - \frac{m\omega^2}{2} r^2 \sin^2 \theta_0 + mgr \cos \theta_0 = H_0.$$

Достаточно привести решение этого обыкновенного дифференциального уравнения в квадратуре

$$W = \pm \int (2mH_0 - 2m^2gr \cos \theta_0 + m^2\omega^2 r^2 \sin^2 \theta_0)^{1/2} dr,$$

чтобы, используя теорему Якоби в форме (46.6), получить импульс p_r как функцию положения точки:

$$p_r = \frac{\partial W}{\partial r} = \pm (2mH_0 - 2m^2gr \cos \theta_0 + m^2\omega^2 r^2 \sin^2 \theta_0)^{1/2},$$

и закон движения точки в форме

$$t + \beta = \frac{\partial W}{\partial H_0} = \pm \int \frac{m dr}{(2mH_0 - 2m^2gr \cos \theta_0 + m^2\omega^2 r^2 \sin^2 \theta_0)^{1/2}}.$$

Вид этого закона будет несколько различным в зависимости от знака величины

$$\Delta = 8m^3\omega^2 \sin^2 \theta_0 \left(H_0 - \frac{m}{2} \frac{g^2 \cos^2 \theta_0}{\omega^2 \sin^2 \theta_0} \right),$$

который в свою очередь зависит от соотношения постоянных H_0 и $(U_{\text{off}})_{\text{max}}$ (см. пример 28.3 и рис. 28.4).

Пример 46.3. Неконсервативная система с двумя степенями свободы.

Рассмотрим методом Гамильтона — Якоби решение задачи о движении точки по расширяющейся цилиндрической поверхности (см. примеры 25.2 и 26.3).

Составляя уравнение Гамильтона — Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m\varphi^2(t)} \left(\frac{\partial S}{\partial \varphi} \right)^2 + \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S}{\partial z} \right)^2 + mgz = 0$$

(здесь $\rho = \dot{\rho}_0 t + \rho_0$) и замечая, что координата φ является циклической, а координата z входит в H только в качестве аргумента функции

$$f_z(z, p_z) = \frac{p_z^2}{2m} + mgz,$$

представим полный интеграл исходного уравнения в виде (см. (46.8) и (46.12))

$$S = V(t; \alpha_1, \alpha_2) + \alpha_1 \varphi + W_z(z; \alpha_1, \alpha_2).$$

Тогда уравнение Гамильтона — Якоби сведется к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dV}{dt} + \frac{\alpha_1^2}{2m\rho^2(t)} + \alpha_2 = 0, \quad \frac{1}{2m} \left(\frac{dW_z}{dz} \right)^2 + mgz = \alpha_2.$$

Используя решения этих уравнений, найдем необходимый полный интеграл

$$S = \frac{\alpha_1^2}{2m\dot{\rho}_0} \frac{t}{\rho(t)} - \alpha_2 t + \alpha_1 \varphi \pm \int (2m\alpha_2 - 2m^2gz)^{1/2} dz,$$

откуда (см. (45.24)) получим

$$p_\varphi = \frac{\partial S}{\partial \varphi} = \alpha_1, \quad \beta_1 = \frac{\partial S}{\partial \alpha_1} = \frac{\alpha_1}{m\dot{\rho}_0} \frac{1}{\rho(t)} + \varphi,$$

$$p_z = \frac{\partial S}{\partial z} = \pm \sqrt{2m\alpha_2 - 2m^2gz}, \quad \beta_2 = \frac{\partial S}{\partial \alpha_2} = -t \pm \int \frac{m dz}{\sqrt{2m\alpha_2 - 2m^2gz}}$$

(выбор знака перед радикалом производится в соответствии с тем, возрастает или убывает функция в рассматриваемом интервале изменения аргумента; этот выбор должен быть сделан при анализе решения, поэтому в дальнейшем, где нет надобности, знак «минус» перед радикалами будет опущен).

Чтобы сопоставить это решение с решением, полученным в примере 25.2, выразим постоянные α_1 , α_2 , β_1 , β_2 через начальные скорости $\dot{\varphi}_0$, \dot{z}_0 и начальные координаты φ_0 , z_0 , взятые при $t_0 = 0$; тогда найдем

$$\alpha_1 = p_{\varphi_0} = m\rho_0^2 \dot{\varphi}_0, \quad \beta_1 = \varphi_0 + \frac{\rho_0 \dot{\varphi}_0}{\dot{\rho}_0},$$

$$\alpha_2 = \frac{m\dot{z}_0^2}{2} + mgz_0, \quad \beta_2 = \frac{\dot{z}_0}{g}.$$

С помощью этих формул окончательно получим решение в виде

$$\dot{\varphi} = \frac{\rho_0 \dot{\varphi}_0}{\rho^2(t)}, \quad \varphi = \varphi_0 + \frac{\rho_0 \dot{\varphi}_0}{\rho(t)} t,$$

$$\dot{z}^2 = [\dot{z}_0^2 + 2g(z_0 - z)], \quad z = -\frac{g}{2} t^2 + \dot{z}_0 t + z_0.$$

§ 47. Движение материальной точки и волновой процесс

В § 45 (см. стр. 391) обращалось внимание на весьма интересную аналогию, которую можно провести между механикой точки и теорией волнового процесса. Проанализируем эту аналогию на примере свободной материальной точки, движущейся в стационарном

потенциальном поле $U(\mathbf{r})$, и монохроматической волны, распространяющейся в оптически неоднородной среде. Движение точки подчиняется уравнению Гамильтона — Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}(\nabla S)^2 + U(\mathbf{r}) = 0, \quad (47.1)$$

где S — функция \mathbf{r} и t . Так как функция Гамильтона H в рассматриваемом случае сохраняет постоянное значение, равное полной энергии E_0 , то решение для S следует искать в виде (см. (46.2))

$$S = -E_0 t + W(\mathbf{r}). \quad (47.2)$$

Подставляя (47.2) в (47.1), получим уравнение для «укороченного» действия

$$(\nabla W)^2 = 2m[E_0 - U(\mathbf{r})]. \quad (47.3)$$

Заметим, что поверхности $W = \text{const}$ стационарны, поскольку W не зависит явно от времени, а поверхности равного действия

$$S = -E_0 t + W(\mathbf{r}) = \text{const} \quad (47.4)$$

движутся, причем в любой момент времени любая поверхность равного действия S совпадает с некоторой поверхностью «укороченного» действия. Например, поверхность $S = C$ в момент времени t совпадает с поверхностью $W = C_1$, если параметр семейства этих поверхностей C_1 равен $C + E_0 t$ (рис. 47.1). Поверхность $S = C$ в момент $t + dt$ будет совпадать с другой поверхностью $W = C_1 + E_0 dt$.

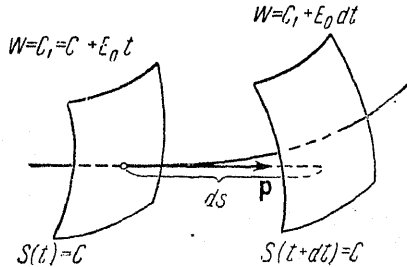


Рис. 47.1.

Можно найти выражение для скорости u , с которой движется поверхность равного действия. В данной точке поверхности $S = C$

эта скорость равна $\frac{ds}{dt}$, где ds — расстояние, которое поверхность проходит за время dt в направлении, перпендикулярном к самой себе в рассматриваемой точке. Вместе с тем из предыдущего вытекает, что изменение dW при передвижении поверхности $S = C$ за время dt равно $E_0 dt$. С другой стороны, как известно, $dW = |\nabla W| ds$. Следовательно (см. также (47.3)),

$$u = \frac{E_0}{|\nabla W|} = \frac{E_0}{\sqrt{2mT}} = \frac{E_0}{mv}, \quad (47.5)$$

где v — модуль скорости материальной точки (следует иметь в виду,

что скорость u определена лишь с точностью до произвольной постоянной).

Одновременно с движением поверхности равного действия S материальная точка движется по траектории, перпендикулярной как к поверхности S , так и к поверхности W , поскольку импульс p точки, согласно (46.4) и (46.6, а), равен

$$p = \nabla S = \nabla W. \quad (47.6)$$

Вид траектории точки определяется уравнением (47.3), которое с формальной точки зрения совпадает с известным в геометрической оптике уравнением эйконала

$$(\nabla l)^2 = n^2(\mathbf{r}), \quad (47.7)$$

где l — так называемый эйконал, n — показатель преломления, равный отношению скорости света c в вакууме к скорости света в данной среде, а \mathbf{r} — радиус-вектор точки пространства.

Уравнение эйконала может быть получено из волнового уравнения

$$\nabla^2 \varphi - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0, \quad (47.8)$$

где φ является любой из компонент напряженности электрического или магнитного поля. Если считать n постоянным, то одним из решений уравнения (47.8) будет функция

$$\varphi = a e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}, \quad (47.9)$$

где a — постоянная амплитуда, ω — заданная частота, а \mathbf{k} — волновой вектор, направленный по лучу, т. е. по нормали к волновой поверхности (по величине $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{n\omega}{c}$, где λ — длина волны). Если же n является медленно меняющейся функцией \mathbf{r} , то решение уравнения (47.8) естественно искать в виде

$$\varphi = a(\mathbf{r}) e^{i[k_0 l(\mathbf{r}) - \omega t]}, \quad (47.10)$$

где $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0} = \frac{\omega}{c}$ — волновое число в вакууме, а l — эйконал. Подставляя (47.10) в (47.8) и приравнявая действительную и мнимую части полученного выражения нулю, придем к уравнениям для амплитуды a и эйконала l

$$\nabla^2 a + a k_0^2 [n^2 - (\nabla l)^2] = 0, \quad (47.11)$$

$$a \nabla^2 l + 2(\nabla a)(\nabla l) = 0. \quad (47.12)$$

Используя предположение о том, что изменением показателя преломления n на расстояниях порядка длины волны можно пренебречь (это предположение эквивалентно тому, что длина волны исчезающе мала по сравнению с линейным размером неоднородности среды),

совершим в уравнении (47.11) предельный переход $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0} \rightarrow \infty$. Тогда получим основное уравнение геометрической оптики (47.7)*. В этом предельном случае поверхности

$$k_0 l(\mathbf{r}) - \omega t = \text{const} \quad (47.13)$$

являются поверхностями равной фазы и определяют фронт волны, а световые лучи ортогональны к фронту волны и направлены по волновому вектору \mathbf{k} , равному (см. определения \mathbf{k} и k_0 в (47.9) и (47.10))

$$\mathbf{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\nabla l}{|\nabla l|} = k_0 \nabla l. \quad (47.14)$$

Сопоставляя (47.4) и (47.13), (47.6) и (47.14), (47.3) и (47.7), приходим к аналогии между следующими величинами:

$$\begin{aligned} S &\sim k_0 l - \omega t, & W &\sim k_0 l, & E_0 &\sim \omega, \\ p &\sim \mathbf{k}, & 2m(E_0 - U) &\sim n^2. \end{aligned} \quad (47.15)$$

Итак, аналогом фронта волны является поверхность равного действия; роль эйконала играет «укороченное» действие W ; волновой вектор можно сопоставить импульсу точки; роль лучей играют траектории точки, а показатель преломления аналогичен величине $[2m(E_0 - U)]^{1/2}$ **).

В связи с указанной аналогией возникает вопрос о механическом уравнении, соответствующем волновому уравнению не только в области коротких волн, а и в области длинных волн, т. е. вопрос, на который отвечает квантовая механика.

Пример 47.1. Движение точки в однородном поле тяжести и распространение светового луча.

Точка массы m движется в поле тяжести с напряженностью \mathbf{g} . Найти показатель преломления такой оптической среды, в которой луч света будет двигаться по кривым, совпадающим с траекторией материальной точки в поле тяжести.

*) При этом в (47.11) следует пренебречь первым членом, что приводит к требованию $\nabla^2 a \ll a (4\pi^2/\lambda_0^2)$, характеризующему достаточно малое изменение амплитуды на расстоянии порядка длины волны. Что касается уравнения (47.12), то оно с точностью до постоянного множителя представляет собой закон сохранения энергии, имеющий место при распространении рассматриваемой волны. В этом нетрудно убедиться, записывая (47.12) в виде $\nabla(a^2 \nabla l) = 0$ и учитывая, что поток энергии в волне направлен по вектору $\mathbf{k} \sim \nabla l$, а величина этого потока пропорциональна a^2 .

**) Для системы точек можно указать на ту же аналогию, однако она будет иметь место уже не в трехмерном пространстве, а в s -мерном пространстве конфигураций.

Совмещая плоскость Oxy с плоскостью движения точки и направляя оси Ox и Oy соответственно по горизонтали и вертикали (рис. 47.2), найдем функцию Гамильтона точки

$$H = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2) + mgy.$$

Следовательно, решение уравнения Гамильтона — Якоби

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2 + 2m^2gy = 2mE_0 \quad (1)$$

нужно искать в виде

$$W = \alpha x + W_y(y). \quad (2)$$

Подставляя (2) в (1), найдем полный интеграл

$$W = \alpha x - \frac{1}{3g} \sqrt{\frac{8}{m}} \left(E_0 - \frac{\alpha^2}{2m} - mgy\right)^{3/2}, \quad (3)$$

а затем интересующий нас геометрический интеграл (см. (46.6, 6))

$$\beta = \frac{\partial W}{\partial \alpha} = x + \frac{\alpha}{g} \sqrt{\frac{2}{m^3}} \left(E_0 - \frac{\alpha^2}{2m} - mgy\right)^{1/2}. \quad (4)$$

Отсюда, используя начальные условия, получим уравнение семейства траекторий точки (парабол)

$$y = y_0 + \frac{p_{y0}^2}{2m^2g} - \frac{m^2g}{2p_{x0}^2} (x - \beta)^2, \quad (5)$$

а приравняв W постоянной C , найдем уравнение семейства ортогональных к траекториям кривых (полукубических парабол)

$$\frac{p_{y0}^2}{2m} + mg(y_0 - y) = \frac{(9mg^2)^{1/3}}{2} (C - p_{x0}x)^{2/3}. \quad (6)$$

Полагая в (5) и (6) для простоты $x_0 = 0$, $p_{y0} = 0$, придем к следующим функциям:

$$\begin{aligned} y &= y_0 - \frac{m^2g}{2p_{x0}^2} x^2, \\ y &= y_0 - \frac{1}{2} \left(\frac{9}{m^2g}\right)^{1/3} (C - p_{x0}x)^{2/3}, \end{aligned} \quad (7)$$

графики которых изображены на рис. 47.2 (график кривой $W=C$ при различных значениях C может быть получен сдвигом вдоль оси Ox полукубической параболы, соответствующей, например, значению $C=0$).

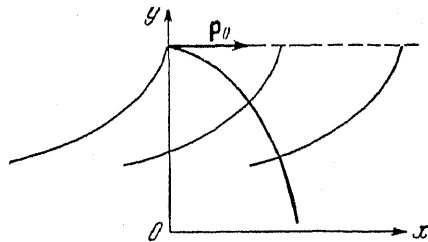


Рис. 47.2.

Подбирая показатель преломления оптической среды в соответствии с уравнением (1) (см. (47.15)):

$$n \sim \sqrt{p_{x_0}^2 + 2m^2 g(y_0 - y)},$$

придем к выводу, что луч света в такой среде будет двигаться по параболе, а фронт волны последовательно совпадать с поверхностями семейства полукубических парабол.

§ 48. Интегральный инвариант Пуанкаре—Картана

Как неоднократно отмечалось, важную роль в аналитической механике играют общие теоремы о сохранении и инвариантности различных величин. Большое значение имеет инвариант Пуанкаре—Картана.

Чтобы убедиться в существовании этого инварианта, воспользуемся так называемой полной вариацией действия (45.8), когда варьируются не только начальное и конечное положения системы, но и начальный и конечный моменты времени. Используя уравнение (45.1), для полной вариации действия найдем выражение (ср. с (45.10))

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1} \delta \mathcal{L} dt + \mathcal{L}_1 \delta t_1 - \mathcal{L}_0 \delta t_0, \quad (48.1)$$

где \mathcal{L}_1 — значение функции \mathcal{L} в момент t_1 , \mathcal{L}_0 — значение \mathcal{L} в момент t_0 , а δt_1 и δt_0 — вариации конечного и начального моментов времени. Повторяя вычисления, проведенные на стр. 386, и учитывая, что между измененными по-

ложениями система движется по действительным траекториям в соответствии с уравнениями Гамильтона (42.15) или уравнениями Лагранжа (42.14), вместо (45.15) получим полную вариацию в виде

$$\delta S = \sum_{j=1}^s p_{j1} \delta q_j(t_1) - \sum_{j=1}^s p_{j0} \delta q_j(t_0) + \mathcal{L}_1 \delta t_1 - \mathcal{L}_0 \delta t_0, \quad (48.2)$$

здесь p_{j1} и p_{j0} — импульсы в моменты времени t_1 и t_0 соответственно, а $\delta q_j(t_1)$ и $\delta q_j(t_0)$ являются вариациями функций $q_j(t)$ в моменты времени t_1 и t_0 (еще раз подчеркнем, что эти вариации связаны только с изменением вида функций $q_j(t)$ и в отличие от полных вариаций берутся при фиксированном времени t).

Найдем соотношения между вариациями функций $\delta q_j(t_0)$, $\delta q_j(t_1)$ и вариациями начального и конечного положений δq_{j0} и δq_{j1} , причем для простоты ограничимся случаем системы с одной

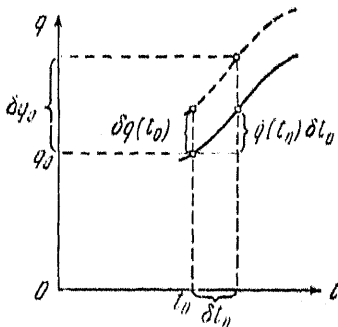


Рис. 48.1.

степенью свободы (см. рис. 48.1, на котором изображены две «траектории» системы в пространстве q, t ; одна из этих «траекторий» проходит через «точку» q_0, t_0 , а вторая — через $q_0 + \delta q_0, t_0 + \delta t_0$). Нетрудно видеть, что вариация начального положения δq_0 с точностью до бесконечно малых высшего порядка складывается из вариации $\delta q(t)$, взятой в момент времени t_0 , и члена $\dot{q}(t_0)\delta t_0$, т. е.

$$\delta q_0 = \delta q(t_0) + \dot{q}(t_0)\delta t_0; \tag{48.3}$$

аналогично для вариации конечного положения будем иметь

$$\delta q_1 = \delta q(t_1) + \dot{q}(t_1)\delta t_1 \tag{48.4}$$

(из выражений (48.3) и (48.4) следует, что *полные вариации, связанные с изменением как вида функции, так и ее аргумента, не коммутативны с операцией дифференцирования по времени*). Наконец, используя определение функции Гамильтона (42.1), а также соотношения (48.3) и (48.4) для каждой координаты q_j , из (48.2) найдем *полную вариацию действия*

$$\delta S = \sum_{j=1}^s p_j \delta q_j - H_1 \delta t_1 - \sum_{j=1}^s p_{j0} \delta q_{j0} + H_0 \delta t_0, \tag{48.5}$$

где H_1 и H_0 — значения гамильтониана H в моменты времени t_1 и t_0 соответственно.

Теперь введем понятие о «расширенном» фазовом пространстве, по координатным осям которого «откладываются» величины q, p, t , и выберем *ансамбль механических систем с начальными состояниями q_0, p_0 и t_0 , образующими в указанном пространстве некоторый замкнутый контур C_0* ; этот контур зададим с помощью функций

$$\begin{aligned} q_{j0} &= q_{j0}(\alpha), & p_{j0} &= p_{j0}(\alpha), \\ t_0 &= t_0(\alpha) \end{aligned} \tag{48.6}$$

$$(j = 1, \dots, s; \quad 0 \leq \alpha \leq \alpha_0),$$

где значениям $\alpha = 0$ и $\alpha = \alpha_0$ соответствует одна и та же «точка» контура C_0 (см. рис. 48.2, выполненный для случая $s = 1$). Через

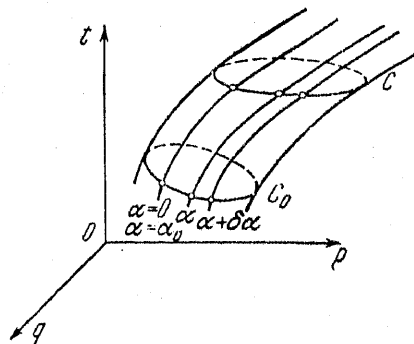


Рис. 48.2.

каждую «точку» контура C_0 проходит единственная действительная «траектория» системы, а совокупность этих «траекторий» образует «трубку». Каждой образующей этой трубки соответствует определенное значение α (только одной образующей соответствуют значения

$\alpha = 0$ и $\alpha = \alpha_0$). Выберем на данной трубке замкнутый контур C_1 так, чтобы каждая образующая трубки проходила только через одну точку контура C_1 ; контур C_1 также можно задать с помощью функций

$$q_{j1} = q_{j1}(\alpha), \quad p_{j1} = p_{j1}(\alpha), \quad t_1 = t_1(\alpha) \quad (48.7)$$

$$(j = 1, \dots, s; \quad 0 \leq \alpha \leq \alpha_0).$$

Вычислим действие S на фазовой траектории, которая проходит через соответствующие определенному значению параметра α точки контуров C_0 и C_1 . Ввиду (48.6) и (48.7) это значение действия зависит от параметра α :

$$S(\alpha) = \int_{t_0(\alpha)}^{t_1(\alpha)} \mathcal{L} dt.$$

Интегрируя полную вариацию функции $S(\alpha)$, найдем

$$\int_0^{\alpha_0} \delta S(\alpha) = S(\alpha_0) - S(0) = 0, \quad (48.8)$$

поскольку $S(\alpha_0) = S(0)$. Используя (48.5), равенство (48.8) можно записать в виде

$$\oint_{C_1} \left[\sum_{j=1}^s p_j \delta q_j - H \delta t \right] = \oint_{C_0} \left[\sum_{j=1}^s p_j \delta q_j - H \delta t \right], \quad (48.9)$$

где в подынтегральные выражения подставлены функции (48.7) и (48.6) соответственно, а контурными интегралами обозначены интегралы по переменной α в пределах от 0 до α_0 .

Подчеркнем, что при выводе свойства (48.9) было использовано выражение вариации δS , справедливое для систем, движение которых подчинено уравнениям (42.14) или (42.15). Поэтому можно утверждать, что для механической системы с обобщенно-потенциальными силами и голономными идеальными связями величина интеграла

$$I = \oint \left\{ \sum_{j=1}^s p_j \delta q_j - H \delta t \right\} \quad (48.10)$$

не зависит от выбора замкнутого контура, охватывающего данную трубку фазовых действительных траекторий в $2s+1$ -мерном пространстве (q, p, t) (лишь бы каждая фазовая траектория данной трубки проходила только через одну точку контура). Интеграл (48.10) называется интегральным инвариантом Пуанкаре—Картана (или основным интегральным инвариантом механики) (см. [12], гл. I; [23], гл. III).

Справедливо и обратное утверждение: пусть движение системы подчиняется уравнениям вида

$$\dot{q}_j = \Phi_j(q, p, t), \quad \dot{p}_j = \Psi_j(q, p, t) \quad (j = 1, \dots, s) \quad (48.11)$$

(в этом случае движение однозначно определяется по начальным условиям), а интеграл Пуанкаре — Картана является инвариантом относительно выбора замкнутого контура, охватывающего любую данную трубку действительных фазовых траекторий в пространстве (q, p, t) ; тогда уравнения (48.11) будут каноническими уравнениями Гамильтона с функцией H , входящей в интеграл Пуанкаре — Картана.

С помощью дополнительного к системе (48.11) уравнения

$$\frac{dt}{d\mu} = \gamma \quad (48.12)$$

(здесь γ — произвольная функция от q, p и t), введем вспомогательный параметр μ . Пронтегрировав систему уравнений (48.11) и (48.12), найдем ее общее решение

$$\begin{aligned} q_j &= q_j(\mu, q_0, p_0, t_0), \\ p_j &= p_j(\mu, q_0, p_0, t_0), \\ t &= t(\mu, q_0, p_0, t_0) \quad (j=1, \dots, s). \end{aligned} \quad (48.13)$$

Выберем из этого общего решения только те частные решения, которые соответствуют фазовым траекториям, проходящим через точки данного (произвольно выбранного) контура C_0 . Задавая контур C_0 уравнениями (48.6) и подставляя (48.6) в (48.13), найдем уравнения действительных траекторий, проходящих через точки контура C_0 :

$$\begin{aligned} q_j &= q_j(\mu, \alpha), \quad p_j = p_j(\mu, \alpha), \quad t = t(\mu, \alpha) \\ (j &= 1, \dots, s; \quad 0 \leq \alpha \leq \alpha_0). \end{aligned} \quad (48.14)$$

Здесь определенному значению α соответствует определенная фазовая траектория (значениям $\alpha=0$ и $\alpha=\alpha_0$ соответствует одна траектория), а определенному значению μ соответствует определенная точка каждой траектории и замкнутый контур, составленный из таких точек.

Подставляя (48.14) в интеграл (48.10), запишем условие инвариантности этого интеграла в виде

$$dI = \oint_{C_0} \left[\sum_{j=1}^s dp_j \cdot \delta q_j + \sum_{j=1}^s p_j d\delta q_j - dH \cdot \delta t - H d\delta t \right] = 0, \quad (48.15)$$

где символом d обозначено бесконечно малое приращение, связанное с изменением μ , а символом δ — приращение, связанное с изменением α . Поскольку параметры μ и α независимы, то операции d и δ коммутативны. Используя это свойство, из (48.15) получим

$$\oint_{C_0} \left\{ \sum_{j=1}^s dp_j \cdot \delta q_j + \sum_{j=1}^s p_j \delta d q_j - dH \cdot \delta t - H d\delta t \right\} = 0. \quad (48.16)$$

Учитывая, что интеграл по замкнутому контуру C_0 является интегралом по α в пределах от 0 до α_0 , а значения подынтегральной функции при $\alpha=0$ и $\alpha=\alpha_0$ совпадают, найдем, что

$$\oint_{C_0} H \delta dt + \oint_{C_0} \delta H dt = \oint_{C_0} \delta (H dt) = H dt \Big|_0^{\alpha_0} = 0, \quad (48.17)$$

и, следовательно,

$$\oint_{C_0} H \delta dt = - \oint_{C_0} \delta H dt. \quad (48.18)$$

Аналогично получим

$$\oint_{C_0} \sum_{j=1}^s p_j \delta dq_j = - \oint_{C_0} \sum_{j=1}^s dq_j \delta p_j. \quad (48.19)$$

Подставляя (48.18) и (48.19) в (48.16), найдем

$$\oint_{C_0} \left\{ \sum_{j=1}^s dp_j \delta q_j - \sum_{j=1}^s dq_j \delta p_j - dH \delta t + \delta H dt \right\} = 0, \quad (48.20)$$

а отсюда, используя вариацию δH , получим

$$\begin{aligned} \oint_{C_0} \left\{ \sum_{j=1}^s \left(dp_j + \frac{\partial H}{\partial q_j} dt \right) \delta q_j + \sum_{j=1}^s \left(-dq_j + \frac{\partial H}{\partial p_j} dt \right) \delta p_j + \right. \\ \left. + \left(-dH + \frac{\partial H}{\partial t} dt \right) \delta t \right\} = 0 \end{aligned} \quad (48.21)$$

(следует иметь в виду, что от α зависят все аргументы функции H , см. (48.14)). Это условие инвариантности интеграла Пуанкаре — Картана с учетом (48.11) и (48.12) принимает форму

$$\begin{aligned} \oint_{C_0} \gamma \left\{ \sum_{j=1}^s \left(\Psi_j + \frac{\partial H}{\partial q_j} \right) \delta q_j + \sum_{j=1}^s \left(-\Phi_j + \frac{\partial H}{\partial p_j} \right) \delta p_j + \right. \\ \left. + \left(-\frac{dH}{dt} + \frac{\partial H}{\partial t} \right) \delta t \right\} = 0. \end{aligned} \quad (48.22)$$

Ввиду произвольности функции γ , т. е. произвольности контура, охватывающего данную трубку действительных траекторий, подынтегральное выражение в (48.22) должно равняться нулю, а ввиду произвольного выбора этих трубок (см. (48.14)) коэффициенты при всех δq_j , δp_j и δt также должны быть равны нулю, т. е.

$$\Phi_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad \Psi_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \quad (j=1, \dots, s), \quad \frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}, \quad (48.23)$$

и, следовательно, уравнения (48.11) будут каноническими уравнениями Гамильтона.

Таким образом, инвариантность интеграла Пуанкаре — Картана является необходимым и достаточным условием того, чтобы механическая система подчинялась каноническим уравнениям Гамильтона (42.15), т. е. была гамильтоновой системой.

Если в равенстве (48.9) интегрирование произвести по контурам C_{t_1} и C_{t_0} , все точки которых будут представлять состояния системы в фиксированные моменты времени t_1 и t_0 соответственно, то вместо (48.9) получим

$$\oint_{C_{t_1}} \sum_{j=1}^s p_j \delta q_j = \oint_{C_{t_0}} \sum_{j=1}^s p_j \delta q_j; \quad (48.24)$$

контур C_{t_1} и C_{t_0} можно задать с помощью функций (48.7) и (48.6) с фиксированными t_1 и t_0 . Интеграл

$$I_1 = \oint_{C_t} \sum_{j=1}^s p_j \delta q_j, \quad (48.25)$$

взятый по контуру C_t , точки которого представляют собой различные состояния системы в один и тот же момент времени t , называется интегралом Пуанкаре. Утверждение (48.24) удобнее интерпретировать в $2s$ -мерном фазовом пространстве (q, p) , в котором «точки» данного контура C_{t_0} через интервал времени $t_1 - t_0$ занимают соответствующее положение на контуре C_{t_1} . На основании (48.24) можно утверждать, что для механической системы с обобщенно-потенциальными силами и голономными идеальными связями значение интеграла Пуанкаре, взятого по произвольному замкнутому контуру в пространстве (q, p) , с течением времени сохраняется.

Интеграл Пуанкаре является, как говорят, универсальным инвариантом, поскольку он в вышеуказанном смысле сохраняет постоянное значение для любой гамильтоновой системы.

В заключение рассмотрим важную теорему об единственности интегрального инварианта Пуанкаре, согласно которой любой универсальный интегральный инвариант вида

$$I' = \oint \sum_{i=1}^s [A_i(q, p, t) \delta q_i + B_i(q, p, t) \delta p_i]$$

отличается от интеграла Пуанкаре лишь постоянным множителем*). Полагая для простоты $s = 1$, запишем условие сохранения I'

*) Теорема об единственности всех универсальных инвариантов в пространстве (q, p) доказана в работе Hwa — Chung Lee, см. Proc. Roy. Soc. Edinburgh, ser. A, v. LXII, 1947, p. 237—247; см. также [23], § 22.

в виде

$$\frac{dI}{dt} = \frac{d}{dt} \oint [A(q, p, t) \delta q + B(q, p, t) \delta p] = 0. \quad (48.26)$$

Здесь в подынтегральное выражение вместо q и p следует подставить решение канонических уравнений (42.15)

$$q = q(q_0, p_0, t), \quad p = p(q_0, p_0, t), \quad (48.27)$$

куда в свою очередь вместо начальных условий q_0 и p_0 нужно подставить функции, определяющие произвольный замкнутый контур C_{t_0} в момент времени t_0 , т. е. функции

$$q_0 = q_0(\alpha), \quad p_0 = p_0(\alpha), \quad (48.28)$$

где параметр α изменяется в пределах $0 \leq \alpha \leq \alpha_0$, а его значениям $\alpha = 0$ и $\alpha = \alpha_0$ соответствует одна и та же точка контура C_{t_0} .

Заменяя порядок дифференцирования по времени и интегрирования по α , а также порядок дифференцирования по t и α , из (48.26) получим

$$\oint \left[\frac{dA}{dt} \delta q + A \delta \frac{dq}{dt} + \frac{dB}{dt} \delta p + B \delta \frac{dp}{dt} \right] = 0. \quad (48.29)$$

Интегрируя здесь по частям второй и четвертый члены, найдем

$$\oint \left[\frac{dA}{dt} \delta q - \delta A \frac{dq}{dt} + \frac{dB}{dt} \delta p - \delta B \frac{dp}{dt} \right] = 0. \quad (48.30)$$

Наконец, используя выражения полных производных и вариаций от A и B как функций q , p и t , получим условие сохранения I' в виде

$$\oint \left[\left(Z\dot{p} + \frac{\partial A}{\partial t} \right) \delta q + \left(-Z\dot{q} + \frac{\partial B}{\partial t} \right) \delta p \right] = 0, \quad (48.31)$$

где

$$Z = \frac{\partial A}{\partial p} - \frac{\partial B}{\partial q}. \quad (48.32)$$

Поскольку контур интегрирования в (48.31) произволен, то подынтегральное выражение должно быть полным дифференциалом относительно переменных q и p , т. е.

$$\frac{\partial}{\partial p} \left(Z\dot{p} + \frac{\partial A}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial q} \left(-Z\dot{q} + \frac{\partial B}{\partial t} \right).$$

Отсюда, используя уравнения Гамильтона (42.15), найдем

$$-\frac{\partial Z}{\partial p} \frac{\partial H}{\partial q} + \frac{\partial Z}{\partial q} \frac{\partial H}{\partial p} + \frac{\partial Z}{\partial t} = 0. \quad (48.33)$$

Это требование ввиду универсальности исходного инварианта должно удовлетворяться при любом H . Поэтому все частные производные

функции Z будут равны нулю, а сама функция будет равна постоянной: $Z = c$. Таким образом,

$$\frac{\partial A}{\partial p} - \frac{\partial B}{\partial q} = c \quad \text{или} \quad \frac{\partial (A - cp)}{\partial p} = \frac{\partial B}{\partial q}.$$

Из этого условия вытекает существование такой функции $\Phi(q, p, t)$, вариация которой равна

$$\delta\Phi = (A - cp)\delta q + B\delta p. \quad (48.34)$$

Интегрируя обе части этого равенства по замкнутому контуру, окончательно найдем, что исходный инвариант I' равен

$$I' = cI_1, \quad (48.35)$$

где I_1 — инвариант Пуанкаре.

§ 49. Канонические преобразования

Каноническими преобразованиями называются такие преобразования канонических переменных, которые не изменяют общей формы уравнений (42.15) для любой гамильтоновой системы. Эти преобразования дают возможность свести задачу о движении системы с данным гамильтонианом к задаче о системе с более простым гамильтонианом, в связи с чем метод канонических преобразований имеет большое значение. Итак, преобразование

$$\begin{aligned} Q_j &= Q_j(q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s, t), \\ \mathcal{P}_j &= \mathcal{P}_j(q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s, t) \end{aligned} \quad (j=1, \dots, s), \quad (49.1)$$

$$\frac{\partial (Q_1, \dots, Q_s; \mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_s)}{\partial (q_1, \dots, q_s; p_1, \dots, p_s)} \neq 0$$

называется каноническим, если оно преобразует уравнения Гамильтона с любой функцией H

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \quad (j=1, \dots, s) \quad (49.2)$$

также в канонические уравнения с другой, вообще говоря, функцией Гамильтона:

$$\dot{Q}_j = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathcal{P}_j}, \quad \dot{\mathcal{P}}_j = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q_j} \quad (j=1, \dots, s). \quad (49.3)$$

Найдем условие каноничности преобразования (49.1). Из определения канонических преобразований следует, что как в «старых» переменных q, p , так и в «новых» переменных Q, \mathcal{P} уравнения движения должны иметь каноническую форму. Следовательно, и в

«старых», и в «новых» переменных должны выполняться условия инвариантности интеграла Пуанкаре — Картана (48.9)

$$\oint_{\tilde{C}_1} \left(\sum_{j=1}^s p_j \delta q_j - H \delta t \right) = \oint_{\tilde{C}_0} \left[\sum_{j=1}^s p_j \delta q_j - H \delta t \right], \quad (49.4)$$

$$\oint_{\tilde{C}_1} \left[\sum_{j=1}^s \mathcal{P}_j \delta Q_j - \mathcal{H} \delta t \right] = \oint_{\tilde{C}_0} \left[\sum_{j=1}^s \mathcal{P}_j \delta Q_j - \mathcal{H} \delta t \right],$$

где, согласно (49.1), контуры C_1 и C_0 преобразуются в контуры \tilde{C}_1 и \tilde{C}_0 соответственно. Пользуясь произвольностью контура C_0 , составим его из фазовых точек расширенного пространства (q, p, t) , соответствующих «одновременному состоянию» $t = t_0$. Тогда контур \tilde{C}_0 будет состоять из «точек» пространства (Q, \mathcal{P}, t) , для которых также $t = t_0$, поскольку канонические преобразования не преобразуют время t . При таком выборе контура C_0 вместо (49.4) получим

$$\oint_{\tilde{C}_1} \left[\sum_j p_j \delta q_j - H \delta t \right] = \oint_{C_{t_0}} \sum_j p_j \delta q_j, \quad (49.5)$$

$$\oint_{\tilde{C}_1} \left[\sum_j \mathcal{P}_j \delta Q_j - \mathcal{H} \delta t \right] = \oint_{C_{t_0}} \sum_j \mathcal{P}_j \delta Q_j.$$

Учитывая, что интеграл $\oint_{C_{t_0}} \sum_j \mathcal{P}_j \delta Q_j$, преобразованный к «старым» переменным, согласно теореме об единственности интегрального инварианта Пуанкаре (см. (48.35)), равен

$$\oint_{C_{t_0}} \sum_{j=1}^s \mathcal{P}_j \delta Q_j \Big|_{\substack{Q(q, p, t) \\ \mathcal{P}(q, p, t)}} = c \oint_{C_{t_0}} \sum_{j=1}^s p_j \delta q_j, \quad (49.6)$$

из (49.5) найдем

$$\oint_{\tilde{C}_1} \left\{ \sum_{j=1}^s \mathcal{P}_j \delta Q_j - \mathcal{H} \delta t - c \left[\sum_{j=1}^s p_j \delta q_j - H \delta t \right] \right\} = 0, \quad (49.7)$$

где «новые» переменные должны быть выражены через «старые» с помощью (49.1). Ввиду произвольности контура C_1 подынтегральное выражение в (49.7) будет полным дифференциалом — $\delta\Phi$ некоторой функции $2s + 1$ переменных q, p и t , т. е.

$$\left(\sum_{j=1}^s \mathcal{P}_j \delta Q_j - \mathcal{H} \delta t \right) - c \left(\sum_{j=1}^s p_j \delta q_j - H \delta t \right) = -\delta\Phi. \quad (49.8)$$

Подчеркнем, что исходные равенства (49.4) являются необходимыми и достаточными условиями того, чтобы уравнения движения в переменных q, p и переменных Q, \mathcal{P} были каноническими. Следовательно, *тождественное удовлетворение равенства (49.8) данным преобразованием (49.1) при некоторой функции Φ и постоянной c является необходимым и достаточным условием каноничности этого преобразования.* Иначе говоря, если дано каноническое преобразование, то оно обращает (49.8) в тождество при некоторой функции Φ и постоянной c ; и, наоборот, если дана произвольная функция Φ и постоянная c , то преобразование вида (49.1), обращающее (49.8) в тождество, является каноническим.

В связи с отмеченной ролью функция Φ называется производящей функцией. Эта функция является функцией $2s+1$ независимых переменных, в число которых входит время t и $2s$ координат и импульсов, причем они могут быть выбраны произвольно из $4s$ «старых» и «новых» координат и импульсов, связанных между собой соотношениями (49.1). Например, при выводе условия (49.8) функция Φ считалась функцией q, p и t . Допуская, что

$$\det \left(\frac{\partial Q_i}{\partial p_j} \right) \neq 0, \quad (49.9)$$

и выражая с помощью (49.1) «старые» импульсы через «старые» и «новые» координаты

$$p_j = p_j(q, Q, t) \quad (j=1, \dots, s), \quad (49.10)$$

представим производящую функцию в виде

$$\Phi(q, p(q, Q, t), t) = \Phi_1(q, Q, t). \quad (49.11)$$

Рассмотрим наиболее распространенный случай канонических преобразований, когда $c=1$, а в качестве аргументов производящей функции взяты одни из следующих наборов переменных*):

$$q, Q; \quad q, \mathcal{P}; \quad p, Q; \quad p, \mathcal{P}. \quad (49.12)$$

Если аргументами являются «старые» и «новые» координаты, то, *записывая основное тождество (49.8) в виде*

$$\delta \Phi_1(q, Q, t) = \sum_{j=1}^s p_j \delta q_j - \sum_{j=1}^s \mathcal{P}_j \delta Q_j - (H - \mathcal{H}') \delta t, \quad (49.13)$$

получим формулы, определяющие каноническое преобразование:

$$p_j = \frac{\partial \Phi_1}{\partial q_j}, \quad \mathcal{P}_j = -\frac{\partial \Phi_1}{\partial Q_j} \quad (j=1, \dots, s), \quad (49.14)$$

*) Подробное изложение теории произвольных канонических преобразований см. в [23], гл. IV.

а также соотношение между «новой» и «старой» функциями Гамильтона

$$\mathcal{K} = H + \frac{\partial \Phi_1}{\partial t}. \quad (49.15)$$

Действительно, записывая (49.14) в виде (см. (49.11))

$$p_j = p_j(q, Q, t), \quad \mathcal{P}_j = \mathcal{P}_j(q, Q, t) \quad (j = 1, \dots, s) \quad (49.16)$$

и выражая с помощью s первых соотношений «новые» координаты Q через q и p , в результате подстановки $Q(q, p, t)$ в функции $\mathcal{P}(q, Q, t)$ получим все формулы канонического преобразования (49.1). При этом следует иметь в виду, что определение Q как функций q , p и t возможно лишь при отличном от нуля якобиане с элементами

$$+ \frac{\partial p_j}{\partial Q_i} = \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial Q_i \partial q_j} = - \frac{\partial \mathcal{P}_i}{\partial q_j} \quad (i, j = 1, \dots, s). \quad (49.17)$$

Если в качестве аргументов производящей функции выбрать вторую группу переменных из (49.12), то вместо Φ_1 следует взять производящую функцию (ср. с (42.1) и (42.22))

$$\Phi_2(q, \mathcal{P}, t) = \Phi_1 + \sum_{j=1}^s \mathcal{P}_j Q_j \quad (49.18)$$

(преобразование от q, Q к q, \mathcal{P} является преобразованием Лежандра). Тогда условие каноничности (49.13) перейдет в условие

$$\delta \Phi_2(q, \mathcal{P}, t) = + \sum_{j=1}^s p_j \delta q_j + \sum_{j=1}^s Q_j \delta \mathcal{P}_j - (H - \mathcal{K}) \delta t, \quad (49.19)$$

а формулы, определяющие каноническое преобразование, и соотношение между функциями Гамильтона \mathcal{K} и H примут вид

$$p_j = + \frac{\partial \Phi_2}{\partial q_j}, \quad Q_j = + \frac{\partial \Phi_2}{\partial \mathcal{P}_j} \quad (j = 1, \dots, s), \quad (49.20)$$

$$\mathcal{K} = H + \frac{\partial \Phi_2}{\partial t}; \quad (49.21)$$

при этом функция $\Phi_2(q, \mathcal{P}, t)$ должна удовлетворять требованию, аналогичному (49.17): якобиан с элементами

$$+ \frac{\partial p_j}{\partial \mathcal{P}_i} = \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial \mathcal{P}_i \partial q_j} = + \frac{\partial Q_i}{\partial q_j} \quad (i, j = 1, \dots, s) \quad (49.22)$$

должен отличаться от нуля.

Переход к третьей группе переменных (см. (49.12)), выполняемый с помощью функции

$$\Phi_3(p, Q, t) = \Phi_1 - \sum_{j=1}^s p_j q_j, \quad (49.23)$$

приводит к основному тождеству в виде

$$\delta\Phi_3(p, Q, t) = - \sum_{j=1}^s q_j \delta p_j - \sum_{j=1}^s \mathcal{P}_j \delta Q_j - (H - \mathcal{H}') \delta t, \quad (49.24)$$

а также к формулам канонического преобразования

$$q_j = - \frac{\partial \Phi_3}{\partial p_j}, \quad \mathcal{P}_j = - \frac{\partial \Phi_3}{\partial Q_j} \quad (j = 1, \dots, s) \quad (49.25)$$

и соотношению для функций Гамильтона

$$\mathcal{H}' = H + \frac{\partial \Phi_3}{\partial t}; \quad (49.26)$$

при этом якобиан с элементами

$$- \frac{\partial q_j}{\partial Q_i} = \frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial Q_i \partial p_j} = - \frac{\partial \mathcal{P}_i}{\partial p_j} \quad (i, j = 1, \dots, s) \quad (49.27)$$

должен отличаться от нуля. Заметим, что формулы канонического преобразования в переменных q, \mathcal{P} и Q, p по существу эквивалентны, так как наименования «старые» координаты и «новые» импульсы или «новые» координаты и «старые» импульсы относительны.

Наконец, используя производящую функцию

$$\Phi_4(p, \mathcal{P}, t) = \Phi_1 - \sum_{j=1}^s p_j q_j + \sum_{j=1}^s \mathcal{P}_j Q_j, \quad (49.28)$$

получим основное тождество, формулы преобразования и соотношение для функций Гамильтона в виде

$$\delta\Phi_4(p, \mathcal{P}, t) = - \sum_{j=1}^s q_j \delta p_j + \sum_{j=1}^s Q_j \delta \mathcal{P}_j - (H - \mathcal{H}') \delta t; \quad (49.29)$$

$$q_j = - \frac{\partial \Phi_4}{\partial p_j}, \quad Q_j = \frac{\partial \Phi_4}{\partial \mathcal{P}_j} \quad (j = 1, \dots, s), \quad (49.30)$$

$$\mathcal{H}' = H + \frac{\partial \Phi_4}{\partial t} \quad (49.31)$$

при условии неравенства нулю якобиана с элементами

$$- \frac{\partial q_j}{\partial \mathcal{P}_i} = \frac{\partial^2 \Phi_4}{\partial \mathcal{P}_i \partial p_j} = + \frac{\partial Q_i}{\partial p_j} \quad (i, j = 1, \dots, s). \quad (49.32)$$

Заметим, что якобиан канонического преобразования равен единице. В самом деле, используя известное свойство якобианов, его можно записать, например, в виде такой дроби:

$$\frac{\partial(Q, \mathcal{P}^s)}{\partial(q, p)} = \frac{\partial(Q, \mathcal{P}^s)}{\partial(q, \mathcal{P}^s)} / \frac{\partial(q, p)}{\partial(q, \mathcal{P}^s)}, \quad (49.33)$$

где числитель и знаменатель соответственно равны

$$\frac{\partial(Q, \mathcal{P}^s)}{\partial(q, \mathcal{P}^s)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial Q_1}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial Q_1}{\partial q_s} & | & 0 \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots & | & \dots \\ \frac{\partial Q_s}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial Q_s}{\partial q_s} & | & 0 \dots 0 \\ \hline \frac{\partial \mathcal{P}_1^s}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial \mathcal{P}_1^s}{\partial q_s} & | & 1 \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots & | & \dots \\ \frac{\partial \mathcal{P}_s^s}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial \mathcal{P}_s^s}{\partial q_s} & | & 0 \dots 1 \end{vmatrix} = \frac{\partial(Q)}{\partial(q)}, \quad (49.34)$$

$$\frac{\partial(q, p)}{\partial(q, \mathcal{P}^s)} = \begin{vmatrix} 1 \dots 0 & | & \frac{\partial q_1}{\partial \mathcal{P}_1^s} & \dots & \frac{\partial q_1}{\partial \mathcal{P}_s^s} \\ \dots & | & \dots & \dots & \dots \\ 0 \dots 1 & | & \frac{\partial q_s}{\partial \mathcal{P}_1^s} & \dots & \frac{\partial q_s}{\partial \mathcal{P}_s^s} \\ \hline 0 \dots 0 & | & \frac{\partial p_1}{\partial \mathcal{P}_1^s} & \dots & \frac{\partial p_1}{\partial \mathcal{P}_s^s} \\ \dots & | & \dots & \dots & \dots \\ 0 \dots 0 & | & \frac{\partial p_s}{\partial \mathcal{P}_1^s} & \dots & \frac{\partial p_s}{\partial \mathcal{P}_s^s} \end{vmatrix} = \frac{\partial(p)}{\partial(\mathcal{P}^s)}. \quad (49.35)$$

Отсюда, учитывая, что, согласно (49.22), последние два якобиана равны между собой, получим (ср. с (43.13))*)

$$\frac{\partial(Q, \mathcal{P}^s)}{\partial(q, p)} = 1. \quad (49.36)$$

В качестве примера простейшего канонического преобразования приведем тождественное преобразование

$$p_j = \mathcal{P}_j^s, \quad Q_j = q_j \quad (j = 1, \dots, s), \quad (49.37)$$

определяемое производящей функцией вида (см. (49.20))

$$\Phi_2 = \sum_{j=1}^s q_j \mathcal{P}_j^s. \quad (49.38)$$

*) Аналогично, используя (49.17), (49.27) или (49.32), придем к такому же результату.

В заключение рассмотрим бесконечно малые канонические преобразования и преобразования, совершаемые с помощью функции действия.

Бесконечно малые канонические преобразования определяют как преобразования, при которых канонические переменные изменяются на бесконечно малые величины. Производящая функция такого преобразования будет бесконечно мало отличаться от производящей функции тождественного преобразования, т. е. будет иметь вид

$$\Phi_2 = \sum_{j=1}^s q_j \mathcal{P}_j + \varepsilon \varphi(q, \mathcal{P}, t), \quad (49.39)$$

где ε — бесконечно малый параметр. Отсюда, используя (49.20), найдем

$$p_j = \mathcal{P}_j + \varepsilon \frac{\partial \varphi(q, \mathcal{P}, t)}{\partial q_j}, \quad Q_j = q_j + \varepsilon \frac{\partial \varphi(q, \mathcal{P}, t)}{\partial \mathcal{P}_j} \quad (j = 1, \dots, s). \quad (49.40)$$

Здесь во всех членах, пропорциональных ε , можно произвести замену $\mathcal{P}_j \rightarrow p_j$, поскольку новые импульсы отличаются от старых на бесконечно малые величины. После такой замены получим бесконечно малое каноническое преобразование

$$\begin{aligned} Q_j &= q_j + \varepsilon \frac{\partial \varphi(q, p, t)}{\partial p_j} \\ \mathcal{P}_j &= p_j - \varepsilon \frac{\partial \varphi(q, p, t)}{\partial q_j} \end{aligned} \quad (j = 1, \dots, s); \quad (49.41)$$

при этом «новый» гамильтониан с той же точностью будет равен (см. (49.21))

$$\mathcal{K} = H + \varepsilon \frac{\partial \varphi(q, p, t)}{\partial t}. \quad (49.42)$$

Если функция φ является первым интегралом канонических уравнений (42.15), то (49.42) можно записать в виде (см. (44.2))

$$\mathcal{K} = H + \varepsilon [H\varphi]. \quad (49.43)$$

В частности, если первый интеграл явно от времени не зависит, то $[H\varphi] = 0$ и, следовательно, функция Гамильтона не изменится при таком бесконечно малом каноническом преобразовании.

Если в (49.41) произвести специальный выбор функции φ и параметра ε :

$$\varphi \rightarrow H(q, p, t), \quad \varepsilon \rightarrow dt, \quad (49.44)$$

то получим преобразование

$$Q_j = q_j + \frac{\partial H}{\partial p_j} dt, \quad \mathcal{P}_j = p_j - \frac{\partial H}{\partial q_j} dt \quad (j = 1, \dots, s),$$

которое с помощью уравнений Гамильтона (42.15) можно записать в виде

$$Q_j = q_j + \dot{q}_j dt, \quad \mathcal{P}_j = p_j + \dot{p}_j dt \quad (j = 1, \dots, s). \quad (49.45)$$

Таким образом, в результате этого преобразования функции $q_j(t)$ и $p_j(t)$ принимают значения $q_j(t + dt)$ и $p_j(t + dt)$ и, следовательно, движение механической системы можно рассматривать как непрерывное осуществление цепочки бесконечно малых канонических преобразований, производящая функция которых

$$\Phi_2 = \sum_{j=1}^s q_j \mathcal{P}_j + H dt \quad (49.46)$$

определяется гамильтонианом H . Отсюда вытекает, что постоянство фазового объема ансамбля Гиббса во времени является частным случаем инвариантности фазового объема по отношению к каноническим преобразованиям (см. (49.36)).

Из предыдущего также следует, что движение системы на конечных интервалах времени может быть описано с помощью некоторого канонического преобразования. Действительно, сравнивая интегралы Якоби (45.24), а также уравнение Гамильтона — Якоби (45.20), с формулами канонического преобразования (49.20) и (49.21), приходим к выводу, что действие S является производящей функцией Φ_2 , если в качестве «новых» координат и импульсов выбрать соответственно постоянные β и α , а «новый» гамильтониан положить равным нулю, т. е.

$$S = \Phi_2, \text{ если } \beta_j = Q_j, \alpha_j = \mathcal{P}_j \quad (j = 1, \dots, s), \mathcal{K} = 0. \quad (49.47)$$

В соответствии с этим уравнения Гамильтона в новых переменных принимают вид

$$\dot{Q}_j = 0, \quad \dot{\mathcal{P}}_j = 0 \quad (j = 1, \dots, s). \quad (49.48)$$

Пример 49.1. Простейшие канонические преобразования.

1. Производящая функция вида

$$\Phi_1 = \sum_{j=1}^s q_j Q_j$$

определяет (см. (49.14)) преобразование

$$p_j = Q_j, \quad \mathcal{P}_j = -q_j \quad (j = 1, \dots, s),$$

которое по существу эквивалентно переобозначению импульсов и координат.

2. Функция

$$\Phi_2 = - \sum_{j=1}^s q_j \mathcal{P}_j$$

определяет (см. (49.20)) преобразование инверсии в фазовом пространстве

$$Q_j = -q_j, \quad \mathcal{P}_j = -p_j \quad (j = 1, \dots, s).$$

3. Линейное преобразование переменных q, p

$$Q = \alpha q + \beta p, \\ \mathcal{P} = \gamma q + \nu p$$

для системы с одной степенью свободы будет каноническим, если постоянные α, β, γ и ν удовлетворяют условию (см. (49.36))

$$\alpha\nu - \beta\gamma = 1.$$

Пользуясь условием каноничности (49.13) в виде

$$\delta\Phi = p\delta q - \mathcal{P}\delta Q,$$

найдем производящую функцию рассматриваемого преобразования. Подставляя сюда исходные функции и учитывая, что якобиан преобразования равен единице, получим

$$\delta\Phi = -\beta\gamma\delta(pq) - \frac{\alpha\gamma}{2}\delta(q^2) - \frac{\beta\nu}{2}\delta(p^2),$$

откуда следует, что

$$\Phi = -\beta\gamma pq - \frac{1}{2}\alpha\gamma q^2 - \frac{1}{2}\beta\nu p^2 \quad (\alpha\nu - \beta\gamma = 1).$$

Если $\alpha = \nu$, а $\beta = -\gamma$, то преобразование, условие его каноничности и производящая функция принимают вид

$$\begin{aligned} Q &= \alpha q + \beta p, \\ \mathcal{P} &= -\beta q + \alpha p, \quad (\alpha^2 + \beta^2 = 1) \\ \Phi &= \beta^2 pq + \frac{1}{2}\alpha\beta(q^2 - p^2) \end{aligned}$$

(например, преобразование этого типа используется при анализе явления сверхпроводимости металлов).

Пример 49.2. Точечные преобразования.

1. Согласно формулам канонических преобразований «новые» координаты, вообще говоря, зависят как от «старых» координат, определяющих положение системы, так и от «старых» импульсов. Поэтому с помощью «новых» координат нельзя задать положения системы, и только совокупность всех «новых» переменных Q и \mathcal{P} определяет положения и скорости точек механической системы. Однако в частном случае канонических преобразований с производящей функцией

$$\Phi_2(q, \mathcal{P}, t) = \sum_{j=1}^s \varphi_j(q, t) \mathcal{P}_j \quad (1)$$

(здесь φ_j — произвольные независимые функции) «новые» координаты будут определять положение системы. Действительно, используя (1) и (49.20), получим точечные преобразования (см. (29.1))

$$Q_j = \varphi_j(q, t) \quad (j = 1, \dots, s). \quad (2)$$

2. Если производящая функция имеет вид

$$\Phi_2 = \sum_{i=1}^s \varphi_i \mathcal{P}_i,$$

где $\varphi_i = \sum_{j=1}^s a_{ij} q_j$, а постоянные коэффициенты a_{ij} удовлетворяют

условию ортогональности

$$\sum_{i=1}^s a_{ij} a_{ik} = \delta_{jk},$$

то, используя формулы (49.20), найдем

$$p_i = \sum_{j=1}^s a_{ij} p_j \mathcal{P}_j = \sum a_{ij} \mathcal{P}_j. \quad (1)$$

$$Q_i = \sum_j a_{ij} p_j \quad (i=1, \dots, s). \quad (2)$$

Умножая каждое из s уравнений (1) на a_{ij} и суммируя результаты по j , получим

$$\sum_j a_{ij} p_j = \sum_{j,k} a_{ij} a_{ik} \mathcal{P}_k = \sum_k \delta_{jk} \mathcal{P}_k.$$

Следовательно, рассматриваемое каноническое преобразование представляет собой совокупность точечного ортогонального преобразования (2) и ортогонального преобразования обобщенных импульсов

$$\mathcal{P}_i = \sum_j a_{ij} p_j \quad (i=1, \dots, s). \quad (3)$$

Преобразование от декартовых координат точки к ее цилиндрическим координатам можно осуществить с помощью производящей функции

$$\Phi_3 = \sum_{i=1}^3 J_i(Q) p_i,$$

которая также приводит к точечным преобразованиям (см. (49.25)). Положим, что «старые» координаты x, y и z равны декартовым координатам точки x, y и z , а «новые» координаты Q_1, Q_2, Q_3 равны цилиндрическим координатам точки ρ, φ и z . Тогда, используя формулы

$$\Phi_3 = -p_x \rho \cos \varphi - p_y \rho \sin \varphi - p_z \cdot z$$

в (49.25), найдем формулы преобразования координат и обобщенных импульсов

$$\begin{aligned} x &= -\frac{\partial \Phi_3}{\partial p_x} = \rho \cos \varphi, & p_\rho &= -\frac{\partial \Phi_3}{\partial \rho} = p_x \cos \varphi + p_y \sin \varphi, \\ y &= -\frac{\partial \Phi_3}{\partial p_y} = \rho \sin \varphi, & p_\varphi &= -\frac{\partial \Phi_3}{\partial \varphi} = -p_x \rho \sin \varphi + p_y \rho \cos \varphi, \\ z &= -\frac{\partial \Phi_3}{\partial p_z} = z, & p_z &= -\frac{\partial \Phi_3}{\partial z} = p_z. \end{aligned} \quad (1)$$

Замечая, что производящая функция Φ_3 явно от времени не зависит, и преобразуя с помощью формул (1) «старый» гамильтониан

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + U(x, y, z)$$

к новым переменным, получим

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2m}(p_\rho^2 + \frac{p_\varphi^2}{\rho^2} + p_z^2) + U(\rho, \varphi, z).$$

Используя производящую функцию

$$\Phi_2 = \mathcal{F}_r \sqrt{\rho^2 + z^2} + \mathcal{F}_\theta \operatorname{arctg} \left(\frac{\rho}{z} \right) + \mathcal{F}_\varphi \cdot \varphi,$$

перейдем от цилиндрических координат к сферическим координатам r, θ, φ . Тогда, согласно (49.20), найдем

$$\begin{aligned} p_\rho &= \mathcal{F}_r \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} + \mathcal{F}_\theta \frac{z}{\rho^2 + z^2}, & r &= \sqrt{\rho^2 + z^2}, \\ p_\varphi &= \mathcal{F}_\varphi, & \theta &= \operatorname{arctg} \frac{\rho}{z}, \\ p_z &= \mathcal{F}_r \frac{z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} - \mathcal{F}_\theta \frac{\rho}{\rho^2 + z^2}, & \varphi &= \varphi, \end{aligned} \quad (2)$$

а, учитывая (49.21) и преобразование (2), вместо «старого» гамильтониана получим гамильтониан в сферических переменных

$$\mathcal{K}' = \frac{1}{2m} \left(\mathcal{F}_r^2 + \frac{\mathcal{F}_\theta^2}{r^2} + \frac{\mathcal{F}_\varphi^2}{r^2 \sin^2 \theta} \right) + U(r, \theta, \varphi).$$

Пример 49.3. Неизотропный пространственный осциллятор.

Пусть на точку действует сила, проекции которой на декартовы оси равны

$$F_x = -\kappa_1 x, \quad F_y = -\kappa_2 y, \quad F_z = -\kappa_3 z.$$

Найти общее решение уравнения движения точки методом канонических преобразований.

Запишем гамильтониан рассматриваемого осциллятора в декартовых координатах:

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + \frac{1}{2}(\kappa_1 x^2 + \kappa_2 y^2 + \kappa_3 z^2) \quad (1)$$

и совершим каноническое преобразование к «новым» переменным Q \mathcal{P} с помощью функции

$$\Phi_1 = \sum_{i=1}^3 k_i q_i^2 \operatorname{ctg} Q_i, \quad (2)$$

где k_l — постоянные, которые соответствующим образом подберем ниже, а $q_1 = x$, $q_2 = y$, $q_3 = z$. Каноническое преобразование будет определяться формулами (49.14)

$$p_l = 2k_l q_l \operatorname{ctg} Q_l, \quad \mathcal{P}_l = \frac{k_l q_l}{\sin^2 Q_l} \quad (l = 1, 2, 3) \quad (3)$$

(здесь символами p_1, p_2, p_3 обозначены проекции импульса p_x, p_y, p_z соответственно). Записывая (3) в виде

$$q_l = \sqrt{\frac{\mathcal{P}_l}{k_l}} \sin Q_l, \quad p_l = 2\sqrt{k_l \mathcal{P}_l} \cos Q_l \quad (4)$$

и подставляя (4) в (1), найдем гамильтониан осциллятора в «новых» переменных

$$\mathcal{H} = \sum_{l=1}^3 \left(\frac{2k_l}{m} \cos^2 Q_l + \frac{\mathcal{P}_l}{2k_l} \sin^2 Q_l \right) \mathcal{P}_l. \quad (5)$$

Полагая здесь $2k_l = \sqrt{x_l/m}$, сведем (5) к функции

$$\mathcal{H} = \sum_{l=1}^3 \omega_l \mathcal{P}_l \quad \left(\omega_l = \sqrt{\frac{x_l}{m}} \right), \quad (6)$$

которая не зависит от координат Q . Составляя уравнения Гамильтона в «новых» переменных Q, \mathcal{P} , получим

$$\dot{Q}_l = 0, \quad \dot{\mathcal{P}}_l = 0 \quad (l = 1, 2, 3), \quad (7)$$

откуда найдем решение в виде

$$Q_l = \omega_l t + Q_{l0}, \quad \mathcal{P}_l = \mathcal{P}_{l0} \quad (l = 1, 2, 3), \quad (8)$$

Решение в «старых» (декартовых) переменных

$$\left. \begin{aligned} q_l &= \sqrt{\frac{\mathcal{P}_{l0}}{k_l}} \sin(\omega_l t + Q_{l0}), \\ p_l &= \sqrt{2m\omega_l \mathcal{P}_{l0}} \cos(\omega_l t + Q_{l0}) \end{aligned} \right\} \quad (l = 1, 2, 3) \quad (9)$$

можно получить, используя (4) и (8).

§ 50. Переменные «действие — угол» и адиабатические инварианты

При исследовании систем, совершающих движения, близкие к периодическим, особую роль играет метод канонических преобразований. В этом параграфе мы сможем получить в явном виде характеристические функции для движений, совершающихся по законам движения системы.

Допустим, что механическая система является обобщенно-консервативной, а хотя бы один набор канонических переменных разделяется, причем либо каждая из соответствующих переменных q_i, p_i является периодической функцией времени с одинаковым периодом, либо каждый импульс p_i является периодической функцией координаты q_i , в то время как сама координата не является периодической функцией времени. Движение первого типа обычно называется либрацией, а второго типа — вращением. Примером либрации могут служить колебания неизоотропного осциллятора (см. пример 49.3), а примером вращения — движение математического маятника при достаточно большом значении начальной энергии. В самом деле, получая из интеграла энергии маятника обобщенный импульс

$$p_\theta = \sqrt{2ml^2(E_0 + mgl \cos \theta)}$$

как функцию угла θ отклонения маятника от вертикали, убедимся, что при $E_0 > mgl$ (когда осуществляется вращение маятника) импульс p_θ изменяется периодически, в то время как θ неограниченно растет.

Решение уравнения Гамильтона — Якоби

$$H\left\{f_1\left(q_1, \frac{\partial W}{\partial q_1}\right), \dots, f_s\left(q_s, \frac{\partial W}{\partial q_s}\right)\right\} = H_0 \quad (50.1)$$

для рассматриваемых систем (см. (46.3) и (46.11)) имеет вид (см. (46.12))

$$W(q_1, \dots, q_s; \alpha_1, \dots, \alpha_s) = \sum_{i=1}^s W_i(q_i; \alpha_i, \dots, \alpha_s). \quad (50.2)$$

Подставляя (50.2) в (50.1), сведем решение задачи к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений (см. (46.16))

$$f_i\left(q_i, \frac{dW_i}{dq_i}\right) = \alpha_i \quad (i = 1, \dots, s), \quad (50.3)$$

где постоянные α связаны соотношением

$$H(\alpha_1, \dots, \alpha_s) = H_0. \quad (50.4)$$

Разрешая систему (50.3) относительно производных dW_i/dq_i , найдем каждый импульс p_i как функцию координаты q_i :

$$p_i = \frac{\partial W_i(q_i; \alpha_1, \dots, \alpha_s)}{\partial q_i} \quad (i = 1, \dots, s) \quad (50.5)$$

(по условию эти функции являются периодическими функциями соответствующих координат).

Идея излагаемого метода решения поставленной задачи заключается в применении канонического преобразования от переменных q, p к таким переменным, где роль новых импульсов играют специальным образом выбранные постоянные, являющиеся функциями

постоянных α , а «новый» гамильтониан зависит только от «новых» импульсов. В качестве таких импульсов вводятся величины, равные

$$I_i = \frac{1}{2\pi} \oint p_i dq_i \quad (i = 1, \dots, s), \quad (50.6)$$

где интегралы берутся по полным периодам изменения импульсов p_i как функций соответствующих координат q_i . Эти величины называются «переменными действия» и являются независимыми функциями постоянных α :

$$I_i = I_i(\alpha_1, \dots, \alpha_s) \quad (i = 1, \dots, s), \quad (50.7)$$

что следует из независимости функций (50.5). В случае, когда обе соответствующие переменные p_i и q_i являются периодическими функциями времени с одинаковым периодом, переменная действия I_i равна

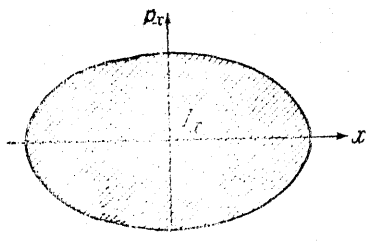


Рис. 50.1.

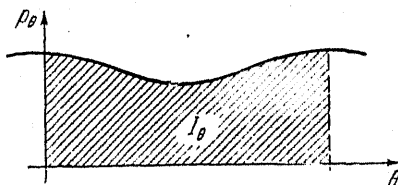


Рис. 50.2.

«площади» фигуры, ограниченной проекцией фазовой траектории на плоскость p_i, q_i (эта проекция будет замкнутой кривой). Если же функция $p_i(q_i)$ периодическая, а q_i неограниченно возрастает, то I_i равна «площади» фигуры, ограниченной кривой $p_i(q_i)$, осью q_i и двумя ординатами, соответствующими полному периоду этой функции (см. рис. 50.1 и рис. 50.2, на которых изображены проекции фазовых траекторий неизотропного осциллятора на плоскость (p_x, x) и математического маятника в случае вращения на плоскость (p_θ, θ) соответственно).

Разрешая систему (50.7) относительно α , получим

$$\alpha_i = \alpha_i(I_1, \dots, I_s) \quad (i = 1, \dots, s), \quad (50.8)$$

а подставляя эти функции в полный интеграл (50.2), определенный с помощью уравнений (50.3), найдем W как функцию «старых» координат и «новых» импульсов — переменных действия:

$$W = W(q_1, \dots, q_s; I_1, \dots, I_s). \quad (50.9)$$

Используя это «укороченное» действие в качестве производящей

функции указанного выше канонического преобразования, найдем (см. (49.20))

$$p_i = \frac{\partial W(q, I)}{\partial q_i}, \quad \varphi_i = \frac{\partial W(q, I)}{\partial I_i} \quad (i = 1, \dots, s), \quad (50.10)$$

где величины φ_i являются «новыми» координатами и называются угловыми переменными. Принимая во внимание, что W явно от времени не зависит, в результате подстановки функций (50.8) в функцию Гамильтона (см. (50.4)) найдем

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(I_1, \dots, I_s). \quad (50.11)$$

Поскольку гамильтониан в переменных «действие — угол» зависит лишь от импульсов, канонические уравнения в новых переменных примут вид

$$\dot{\varphi}_i = \frac{\partial \mathcal{H}(I)}{\partial I_i}, \quad \dot{I}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial I_i} = 0 \quad (i = 1, \dots, s), \quad (50.12)$$

откуда следует, что угловые переменные являются линейными функциями времени:

$$\varphi_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial I_i} t + \varphi_{i0} \quad (i = 1, 2, \dots, s). \quad (50.13)$$

Угловые переменные обладают еще одним важным свойством, заключающимся в том, что величина $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial I_i}$ является частотой изменения импульса p_i . Чтобы убедиться в этом, найдем приращение $\Delta\varphi_i$ за полный период изменения функции $p_j(q_j)$ при условии постоянства всех координат, кроме q_j , т. е. найдем

$$\Delta\varphi_i = \oint \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_j} dq_j. \quad (50.14)$$

Представляя это приращение в виде (см. (50.10))

$$\Delta\varphi_i = \oint \frac{\partial^2 W}{\partial q_j \partial I_i} dq_j \quad (50.15)$$

и учитывая, что переменной интегрирования здесь является координата q_j , получим

$$\Delta\varphi_i = \frac{\partial}{\partial I_i} \oint \frac{\partial W}{\partial q_j} dq_j.$$

Отсюда (см. (50.10) и (50.6)) следует, что приращение угловой переменной равно

$$\Delta\varphi_i = 2\pi \frac{\partial I_j}{\partial I_i} = \begin{cases} 2\pi, & j = i, \\ 0, & j \neq i. \end{cases} \quad (50.16)$$

С другой стороны, согласно (50.13), имеем

$$\Delta\varphi_i = -\frac{\partial H}{\partial I_i} T_i \quad (50.17)$$

где T_i — полный период изменения импульса p_i . Сопоставление (50.16) и (50.17) показывает, что частота ω_i изменения импульса p_i действительно равна $\frac{\partial H}{\partial I_i}$.

Итак, для вычисления частот ω_i нужно определить функции

$$p_i = p_i(q_i, \alpha_1, \dots, \alpha_s),$$

затем найти переменные действия как функции α (см. (50.7)), определить гамильтониан как функцию переменных действия и, наконец, с помощью уравнений (50.12) найти

$$\omega_i = \frac{\partial \mathcal{H}(I_1, \dots, I_s)}{\partial I_i} \quad (i=1, \dots, s). \quad (50.18)$$

Проиллюстрируем изложенный метод на примере неизотропного осциллятора, для которого уравнение Гамильтона — Якоби в декартовых координатах имеет вид (см. формулу (1) примера 49.3)

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2 + m\kappa_1 x^2 + m\kappa_2 y^2 + m\kappa_3 z^2 = 2mH_0.$$

Это уравнение, согласно (50.1) — (50.3), сводится к трем уравнениям

$$p_x^2 + m\kappa_1 x^2 = \alpha_1, \quad p_y^2 + m\kappa_2 y^2 = \alpha_2, \quad p_z^2 + m\kappa_3 z^2 = \alpha_3,$$

где $p_x = \frac{dW_1}{dx}$, $p_y = \frac{dW_2}{dy}$, $p_z = \frac{dW_3}{dz}$, а постоянные α связаны с постоянной H_0 соотношением (см. (50.4))

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 2mH_0.$$

Переменная действия I_x осциллятора будет равна

$$\begin{aligned} I_x &= \frac{1}{2\pi} \oint p_x dx = \frac{1}{2\pi} 2\sqrt{m\kappa_1} \int_{-a}^{+a} \sqrt{a^2 - x^2} dx = \\ &= \frac{\alpha_1}{2\sqrt{m\kappa_1}} \quad \left(a = \sqrt{\frac{\alpha_1}{m\kappa_1}}\right), \end{aligned}$$

поскольку p_x совершает полный цикл изменения при изменении x от $-a$ до $+a$ и обратно до $-a$ (величину I_x можно подсчитать как площадь эллипса, по которому движется проекция фазовой точки на плоскость (p_x, x) — см. рис. 50.1). Аналогично вычисляются переменные действия I_y и I_z :

$$I_y = \frac{\alpha_2}{2\sqrt{m\kappa_2}}, \quad I_z = \frac{\alpha_3}{2\sqrt{m\kappa_3}}.$$

Принимая во внимание (50.4) и (50.8), получим гамильтониан в переменных действия (сравнить с формулой (6) примера 49.3)

$$\mathcal{H} = \sqrt{\frac{x_1}{m}} I_x + \sqrt{\frac{x_2}{m}} I_y + \sqrt{\frac{x_3}{m}} I_z,$$

откуда, согласно (50.18), найдем частоты неизотропного осциллятора

$$\omega_x = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial I_x} = \sqrt{\frac{x_1}{m}}, \quad \omega_y = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial I_y} = \sqrt{\frac{x_2}{m}}, \quad \omega_z = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial I_z} = \sqrt{\frac{x_3}{m}}.$$

Если эти частоты несоизмеримы, то траектория точки будет незамкнутой и, следовательно, точка никогда не займет повторно того положения, которое она уже занимала, хотя через достаточно большой интервал времени точка как угодно близко подойдет к этому положению (такое движение является примером условно-периодического движения).

Если же частоты соизмеримы, т. е. подчиняются условиям вида

$$\sum_{i=1}^3 n_i \omega_i = 0 \quad (50.19)$$

(здесь n_i — целые числа), то говорят, что движение вырождено. В том случае, когда частоты подчиняются двум независимым соотношениям вида (50.19), говорят, что движение полностью вырождено; при этом фазовая траектория системы становится замкнутой, а движение строго периодическим.

Очень важным свойством переменных действия является их адiabатическая инвариантность. Это свойство заключается в том, что *переменные действия сохраняют постоянные значения при достаточно медленном изменении параметров системы* (изменения параметров за время, сравнимое с периодами системы $T_i = 2\pi/\omega_i$, весьма малы*). Для доказательства рассмотрим систему, которая в каждый момент времени близка по свойствам к изученной выше обобщенно-консервативной системе с разделяющимися и периодически изменяющимися со временем переменными. Гамильтониан такой системы явно зависит от медленно меняющихся со временем параметров λ , т. е. имеет вид

$$H = H\{f_1(q_1, p_1, \lambda_1), \dots, f_s(q_s, p_s, \lambda_s)\}, \quad (50.20)$$

где каждый импульс p_i является периодической функцией соответствующей координаты q_i при постоянном λ_i . Система с гамильтонианом (50.20) неконсервативна, однако решение уравнения Гамильтона — Якоби можно искать в виде, близком к (46.2):

$$S = -H_0(\alpha_1, \dots, \alpha_s) t + W(q_1, \dots, q_s; \alpha_1, \dots, \alpha_s; \lambda_1, \dots, \lambda_s), \quad (50.21)$$

*) См. J. M. Burgers, Ann. d. Physik 52, 195 (1917); М. Борн, Лекции по атомной механике, т. 1, ОНТИ, 1934; [21], § 50.

где параметры λ , а следовательно, и величины α и H_0 являются медленно меняющимися функциями времени. Используя (50.21) и пренебрегая в уравнении Гамильтона — Якоби (по сравнению с H_0) членами, пропорциональными $\dot{\lambda}$, найдем уравнение «нулевого приближения» рассматриваемого метода:

$$H \left\{ f_1 \left(q_1, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \lambda_1 \right), \dots, f_s \left(q_s, \frac{\partial W}{\partial q_s}, \lambda_s \right) \right\} = H_0(\alpha_1, \dots, \alpha_s). \quad (50.22)$$

Это уравнение отличается от уравнения (50.1) зависимостью от λ , но, согласно условию, его следует решать так, как будто бы все λ постоянны, а в решении λ считать заданными функциями времени. Поэтому формулы (50.3), (50.5) — (50.10) справедливы и для рассматриваемой системы, однако во все эти соотношения войдут параметры λ ; например, обобщенные импульсы будут функциями вида

$$p_i = p_i(q_i; \alpha; \lambda) \quad (i = 1, \dots, s). \quad (50.23)$$

Подставляя (50.23) в (50.6) и интегрируя при постоянных λ и α (поскольку за период изменения импульса p_i функции λ и α остаются практически неизменными), вместо (50.7) получим

$$I_i = I_i(\alpha, \lambda). \quad (50.24)$$

Эти величины оказываются постоянными, несмотря на изменение α и λ со временем. Чтобы убедиться в этом, выберем в качестве «новых» импульсов переменные действия (50.24) и произведем соответствующее каноническое преобразование. Выражая с помощью (50.24) α через I и λ и исключая α из $W(q, \alpha, \lambda)$, найдем производящую функцию интересующего нас преобразования:

$$W = W(q_1, \dots, q_s; I_1, \dots, I_s; \lambda_1, \dots, \lambda_s). \quad (50.25)$$

Эта функция определяет каноническое преобразование к переменным действие — угол (см. (49.20) и (50.10))

$$p_i = \frac{\partial W(q, I, \lambda)}{\partial q_i}, \quad \varphi_i = \frac{\partial W(q, I, \lambda)}{\partial I_i} \quad (i = 1, \dots, s); \quad (50.26)$$

новыми уравнениями движения при этом будут уравнения (ср. с (50.12))

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial I_i}, \quad \dot{I}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \varphi_i} \quad (i = 1, \dots, s), \quad (50.27)$$

где (см. (49.21))

$$\mathcal{H} = H + \frac{\partial W}{\partial t}. \quad (50.28)$$

Используя (50.28), найдем выражение гамильтониана \mathcal{H} в «новых» переменных φ , I и t (см. (50.4), (50.24) и (50.26))

$$\mathcal{H} = H(I_1, \dots, I_s; \lambda) + \sum_{i=1}^s \frac{\partial W(q(\varphi, I, \lambda), I, \lambda)}{\partial I_i} \dot{I}_i; \quad (50.29)$$

при этом «новые» уравнения движения (50.27) примут вид

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}_i &= \frac{\partial H(I, \lambda)}{\partial I_i} + \sum_{j=1}^s \frac{\partial^2 W(q(\varphi, I, \lambda), I, \lambda)}{\partial I_i \partial \lambda_j} \dot{\lambda}_j, \\ \dot{I}_i &= - \sum_{j=1}^s \frac{\partial^2 W(q(\varphi, I, \lambda), I, \lambda)}{\partial \varphi_i \partial \lambda_j} \dot{\lambda}_j \quad (i=1, \dots, s).\end{aligned}\tag{50.30}$$

Усредним вторую группу этих уравнений по интервалу времени, достаточно малому по сравнению со временем заметного изменения параметров λ и достаточно большому по сравнению с периодами системы T_i . Допущение о малости интервала усреднения позволяет считать величины λ и $\dot{\lambda}$ постоянными при усреднении; следовательно,

$$\bar{I}_i = - \sum_{j=1}^s \frac{\overline{\partial^2 W}}{\partial \varphi_i \partial \lambda_j} \dot{\lambda}_j \quad (i=1, \dots, s).\tag{50.31}$$

Функция W , входящая в уравнения (50.31), является неоднозначной функцией координат. Действительно, эта функция, равная сумме интегралов (см. (50.2) и (50.5))

$$W = \sum_{i=1}^s \int p_i dq_i,\tag{50.32}$$

за полный период изменения координаты q_i (при прочих постоянных координатах) получает приращение (см. (50.6))

$$\Delta W_i = \oint p_i dq_i = 2\pi I_i.\tag{50.33}$$

Однако частные производные $\frac{\partial W}{\partial \lambda_j}$ будут однозначными функциями координат, так как неоднозначность W вызывается добавлением величин, кратных $2\pi I_i$ и исчезающих при дифференцировании по λ . Производные $\frac{\partial W(q(\varphi, I, \lambda), I, \lambda)}{\partial \lambda}$ являются периодическими функциями угловых переменных φ , поскольку координаты q в свою очередь являются периодическими функциями φ (при полном цикле изменения координаты q_i угловая переменная φ_i получает приращение, равное 2π — см. (50.16)). Так как производные $\frac{\partial W}{\partial \lambda}$ являются однозначными периодическими функциями φ , то они могут быть разложены в ряды Фурье с коэффициентами, зависящими от I и λ . Поэтому ряды Фурье для производных $\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial W}{\partial \lambda} \right)$ не будут содержать постоянных членов и, следовательно, при усреднении по достаточно большому интервалу времени все производные $\frac{\partial^2 W}{\partial \varphi_i \partial \lambda_j}$ обратятся в нуль, что и доказывает

адиабатическую инвариантность переменных действия:

$$\bar{I}_i = 0 \quad (i = 1, \dots, s). \quad (50.34)$$

Наконец, пренебрегая в уравнениях (50.30) членами, пропорциональными $\dot{\lambda}_j$, найдем приближенные выражения для частот

$$\omega_i(t) = \frac{\partial H(I; \lambda(t))}{\partial I_i} \quad (i = 1, \dots, s), \quad (50.35)$$

с которыми изменяются импульсы p_i (в свою очередь сами частоты являются медленно меняющимися функциями времени).

Пример 50.1. Адиабатическое изменение длины математического маятника.

Определить изменение амплитуды линейных колебаний математического маятника при адиабатическом изменении длины его подвеса.

Уравнение (50.22) для случая линейных колебаний маятника имеет вид

$$\left(\frac{dW}{d\theta}\right)^2 + m^2 g l^3 \theta^2 = 2 m l^2 E,$$

где E — медленно меняющаяся полная энергия маятника. Интегрируя это уравнение при постоянных l и E , найдем полный интеграл

$$W = \sqrt{m^2 g l^3} \left\{ \frac{\theta}{2} \sqrt{\frac{2E}{mgl} - \theta^2} + \frac{E}{mgl} \arcsin \frac{\theta}{\sqrt{\frac{2E}{mgl}}} \right\},$$

который является неоднозначной функцией θ . Приращение функции W за полный цикл изменения θ в пределах $\pm \sqrt{2E/mgl}$ равно (см. (50.6) и (50.33))

$$\Delta W = 2\pi \frac{E}{\omega} = 2\pi I,$$

где $\omega = \sqrt{g/l}$, а I — переменная действия. Поскольку I является адиабатическим инвариантом, то полная энергия маятника будет пропорциональна медленно изменяющейся частоте маятника:

$$E(t) = I\omega(t). \quad (1)$$

В соответствии с доказательством инвариантности действия I энергия в формуле (1) является энергией, усредненной по некоторому интервалу времени, иначе говоря, она равна

$$\bar{E} = \frac{m l^2}{2} \bar{\theta}^2 + m g l \frac{\bar{\theta}^2}{2} \quad (2)$$

(здесь мы пренебрегли членом, пропорциональным \dot{l}^2 , и вынесли адиабатически изменяющиеся функции за знак усреднения). Учитывая, что маятник совершает гармоническое колебание с медленно меняющейся амплитудой $\theta_0(t)$ и частотой $\omega(t)$, в результате усреднения получим

$$\overline{\theta^2} = \frac{\theta_0^2}{2}, \quad \overline{\dot{\theta}^2} = \frac{\theta_0^2}{2} \omega^2,$$

и, таким образом, вместо (2) найдем

$$\overline{E} = \frac{mg}{2} l \theta_0^2. \quad (3)$$

Наконец, из формул (1) и (3) получим соотношение

$$l^{3/4} \theta_0 = \text{const}, \quad (4)$$

согласно которому при бесконечно медленном удлинении подвеса маятника его угловая амплитуда θ_0 уменьшается, а линейная амплитуда $l\theta_0$ увеличивается; при этом энергия маятника (согласно (1)) уменьшается обратно пропорционально \sqrt{l} .

Пример 50.2. Переменные «действие — угол» в задаче двух тел.

Найти переменные «действие — угол» в случае финитного движения двух тел с приведенной массой μ и энергией взаимодействия $U = -\alpha/r$.

Гамильтониан двух точек относительно системы их центра масс равен (см. пример 42.1)

$$H = \frac{1}{2\mu} \left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} \right) - \frac{\alpha}{r}.$$

Составляя уравнение Гамильтона — Якоби

$$\frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial W}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{2\mu r^2} \left(\frac{\partial W}{\partial \varphi} \right)^2 - \frac{\alpha}{r} = E$$

и отыскивая его решение в виде

$$W = W_r(r, E, M) + W_\varphi(\varphi, E, M),$$

получим уравнения для функций W_r и W_φ

$$\left(\frac{dW_r}{dr} \right)^2 = -2\mu |E| + \frac{2\mu\alpha}{r} - \frac{M^2}{r^2}, \quad \frac{dW_\varphi}{d\varphi} = M,$$

где $|E| = -E$ в силу финитности движения. Эти уравнения (см. (50.5)) определяют функции $p_r(r, E, M)$ и $p_\varphi(M)$, которые необходимы для

вычисления переменных действия:

$$I_r = \frac{1}{2\pi} \oint p_r dr = \frac{1}{2\pi} \oint \sqrt{-2\mu |E| + \frac{2\mu\alpha}{r} - \frac{M^2}{r^2}} dr,$$

$$I_\varphi = \frac{1}{2\pi} \oint p_\varphi d\varphi = \frac{M}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi = M.$$

В силу очевидной периодичности движения первый интеграл можно представить в виде удвоенного интеграла от r_{\min} до r_{\max} . Тогда, используя формулы (8.5) и (8.2), а также учитывая замену (12.17), находим, что

$$I_r = -I_\varphi + \alpha \sqrt{\frac{\mu}{2|E|}},$$

откуда получаем гамильтониан в переменных действия

$$H = E = -\frac{\mu\alpha^2}{2(I_r + I_\varphi)^2}. \quad (1)$$

Отсюда следует, что частоты ω_r и ω_φ совпадают друг с другом (см. (50.18)):

$$\omega = \frac{\partial H}{\partial I_r} = \frac{\partial H}{\partial I_\varphi} = \frac{\mu\alpha^2}{(I_r + I_\varphi)^3}, \quad (2)$$

т. е. имеет место вырождение (см. (50.19)). Заметим также, что последние два соотношения приводят к третьему закону Кеплера (см. (8.12)). Наконец, используя формулы для параметра и эксцентриситета эллипса (см. (8.2)), найдем

$$p = \frac{I_\varphi^2}{\mu\alpha}, \quad \varepsilon^2 = 1 - \left(\frac{I_\varphi}{I_\varphi + I_r}\right)^2. \quad (3)$$

В классической механике непрерывному изменению начальных условий соответствует непрерывное изменение постоянных I_r и I_φ , а также энергии E и момента M ; при таком изменении эллиптические орбиты обеих точек будут изменяться непрерывным образом. Другая картина имеет место в квантовой механике. В частности, в теории Бора, сыгравшей большую роль в становлении квантовой механики, постулировалась дискретность постоянных I_r и I_φ , т. е. постулировалось, что

$$I_r = n_r \hbar, \quad I_\varphi = n_\varphi \hbar, \quad (4)$$

где \hbar — «квант действия» (постоянная Планка), а n_r и n_φ — целые числа. В этом случае энергия системы (см. (1)) будет дискретной; например, для атома водорода ($\alpha = e^2$) было найдено, что

$$E = -\frac{\mu e^4}{2\hbar^2 n^2}, \quad (5)$$

где $n = n_r + n_\varphi = 1, 2, \dots$ *).

* См., например, [13], § 45.

§ 51. Уравнения движения и интегральные вариационные принципы

Как мы видели, движение механических систем можно описать с помощью различных дифференциальных уравнений: уравнений Ньютона, уравнений Лагранжа с реакциями связей, уравнений Лагранжа в обобщенных координатах, канонических уравнений Гамильтона и уравнения Гамильтона—Якоби.

Уравнения движения определяют действительное изменение механического состояния системы за бесконечно малый элемент времени и тем самым (если заданы начальные условия) определяют изменение состояния системы на конечном интервале времени. В связи с этим становится возможным отыскание, как говорят, интегральных принципов, характеризующих движение механической системы на таких конечных интервалах. Примером интегрального принципа может служить утверждение об инвариантности интеграла Пуанкаре—Картана; инвариантность этого интеграла была установлена с помощью полной вариации функции действия. При этом по существу производилось сопоставление значений функции действия на различных *действительных* траекториях механической системы. Однако возможно соответствующее сопоставление значения какой-либо функции на *действительной* траектории с ее значениями на *виртуальных* траекториях. Такое сопоставление, как будет видно из дальнейшего, также приводит к некоторому интегральному принципу.

Рассмотрим, например, в пространстве конфигураций близкие друг к другу действительную и виртуальную траектории системы, предполагая, что в начальный и конечный моменты времени обе траектории пересекаются. Действительная траектория определяется функциями $\mathbf{r}_i(t)$, удовлетворяющими уравнениям движения и уравнениям связей, в то время как виртуальные траектории определяются функциями $\mathbf{r}_i(t, \varepsilon)$, подчиненными только уравнениям связей. Полагая, что $\mathbf{r}_i(t, \varepsilon)|_{\varepsilon=0} = \mathbf{r}_i(t)$, зададим виртуальные перемещения точек системы в виде

$$\delta \mathbf{r}_i(t, \varepsilon) = \mathbf{r}_i(t, \varepsilon) - \mathbf{r}_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, N). \quad (51.1)$$

Действительное и виртуальное положения системы совпадут друг с другом в начальный и конечный моменты времени, если потребовать, чтобы

$$\delta \mathbf{r}_i(t_0) = 0, \quad \delta \mathbf{r}_i(t_1) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N). \quad (51.2)$$

В каждой точке действительной траектории удовлетворяется общее уравнение механики, являющееся необходимым и достаточным условием движения системы в соответствии с уравнениями движения, а виртуальное «движение» отличается от действительного тем, что для него не удовлетворяется общее уравнение механики. Преобразуем

общее уравнение механики (26.3) к виду, более удобному для дальнейшего исследования. Используя очевидные соотношения

$$\ddot{\mathbf{r}}_i \delta \mathbf{r}_i = \frac{d}{dt} (\dot{\mathbf{r}}_i \delta \mathbf{r}_i) - \dot{\mathbf{r}}_i \frac{d}{dt} \delta \mathbf{r}_i$$

и коммутативность дифференцирования по времени и варьирования по параметру ε (см. (45.11)), получим

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \delta \mathbf{r}_i = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i \delta \mathbf{r}_i - \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i \delta \dot{\mathbf{r}}_i. \quad (51.3)$$

Учитывая, что $\sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i \delta \dot{\mathbf{r}}_i$ равна вариации δT кинетической энергии системы, представим общее уравнение механики в следующей форме:

$$\delta T + \delta A' = \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i \delta \mathbf{r}_i \right), \quad (51.4)$$

где δA — виртуальная работа заданных сил. Интегрируя обе части (51.4) по времени и учитывая (51.2), получим интегральное условие

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta T + \delta A) dt = 0 \quad (\delta \mathbf{r}_i(t_0) = \delta \mathbf{r}_i(t_1) = 0, i = 1, 2, \dots, N), \quad (51.5)$$

которое вместе с уравнениями связей (см., например, (41.4))

$$\begin{aligned} f_\alpha(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t) &= 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, k_1), \\ \sum_{i=1}^N a_{\beta i} \mathbf{v}_i + a_\beta &= 0 \quad (\beta = 1, 2, \dots, k_2) \end{aligned} \quad (51.6)$$

описывает движение механической системы. Действительно, если имеют место уравнения движения (41.1) совместно с (41.3), то удовлетворится система (41.4), а следовательно, удовлетворится и (51.5) совместно с (51.6). Исходя из этих последних уравнений и выполняя все вычисления в обратном порядке, нетрудно убедиться в справедливости уравнений (41.1) совместно с (41.3). Таким образом, можно утверждать, что условие (51.5) (вместе с уравнениями связей (51.6)) представляет собой *интегральный вариационный принцип для систем с любыми заданными силами и идеальными (голономными и линейными неголономными) связями*. Используя обобщенные координаты (обращающие уравнения голономных связей в тождества), этот

принцип можно записать в виде

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta T + \delta A) dt = 0, \quad (51.7)$$

$$\sum_{j=1}^{s_1} A_{\beta j} \dot{q}_j + A_{\beta} = 0 \quad (\beta = 1, 2, \dots, k_2),$$

$$\delta q_j(t_0) = \delta q_j(t_1) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, s_1; s_1 = 3N - k_1).$$

Полагая здесь все $A_{\beta j}$ и A_{β} равными нулю, найдем *интегральный вариационный принцип для механических систем с идеальными голономными связями*:

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta T + \delta A) dt = 0, \quad \delta q_j(t_0) = \delta q_j(t_1) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, s), \quad (51.8)$$

где s — число степеней свободы. Этому принципу можно придать еще более компактную форму, если допустить, что заданными силами являются обобщенно-потенциальные силы. Действительно, используя выражение для виртуальной работы таких сил (см. (26.18) и (27.16))

$$\delta A = \sum_{j=1}^s \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial q_j} \right\} \delta q_j \quad (51.9)$$

и соотношения

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \right) - \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial q_j} \frac{d}{dt} \delta q_j \quad (j = 1, \dots, s),$$

найдем, что

$$\delta A = \sum_{j=1}^s \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \right) - \delta \mathcal{U}, \quad (51.10)$$

а подставляя (51.10) в интеграл (51.8), получим:

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1} (\delta T - \delta \mathcal{U}) dt = - \sum_{j=1}^s \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \Big|_{t_0}^{t_1}.$$

Отсюда, учитывая определения функции Лагранжа \mathcal{L} и действия S и то, что $\delta q_j(t_0) = \delta q_j(t_1) = 0$, найдем *интегральный вариационный принцип для систем с обобщенно-потенциальными силами и идеальными голономными связями* (принцип Гамильтона — Остроградского):

$$\delta S = 0, \quad \delta q_j(t_0) = \delta q_j(t_1) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, s). \quad (51.11)$$

Согласно этому принципу функция действия на действительной траектории имеет экстремальное значение по сравнению с ее значениями на виртуальных траекториях, точки которых в начальный и конечный моменты времени совпадают соответственно с начальными и конечными положениями системы.

Из принципа (51.11) следует, что действие и лагранжиан данной механической системы определяются неоднозначно: к действию можно прибавить любую постоянную, а к лагранжиану — полную производную по времени от любой функции координат и времени. Действительно, вычисляя действие с помощью функции Лагранжа

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \frac{d}{dt} f(q, t), \quad (51.11')$$

получим

$$S' = S + f(q_1, t_1) - f(q_0, t_0).$$

Таким образом, условие $\delta S' = 0$ эквивалентно условию $\delta S = 0$, и, следовательно, уравнения движения в обоих случаях совпадают.

Можно убедиться в том, что для сравнительно малых интервалов времени $t_1 - t_0$ вторая вариация $\delta^2 S > 0$ и, следовательно, на действительных траекториях имеет место минимум действия. В самом деле, вторая вариация функции действия равна

$$\delta^2 S = \int_{t_0}^{t_1} \delta^2 \mathcal{L} dt, \quad (51.12)$$

где

$$\delta^2 \mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{j, k} \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_k} \delta \dot{q}_j \delta \dot{q}_k + \sum_{j, k} \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j \partial q_k} \delta \dot{q}_j \delta q_k + \frac{1}{2} \sum_{j, k} \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial q_j \partial q_k} \delta q_j \delta q_k.$$

Используя оценку вариаций координат*)

$$|\delta q_j(t)| = \left| \int_{t_0}^t \delta \dot{q}_j dt \right| < (t - t_0) \max |\delta \dot{q}_j| \quad (51.13)$$

($j = 1, 2, \dots, s, t_0 < t < t_1$) и пренебрегая в (51.12) всеми членами, линейными и квадратичными относительно малого интервала $t_1 - t_0$, получим

$$\delta^2 S \approx \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \sum_{j, k} \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_k} \delta \dot{q}_j \delta \dot{q}_k dt. \quad (51.14)$$

Так как

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_k} = a_{jk} \quad (51.15)$$

(см. (27.2) и (27.24)), то подынтегральное выражение в (51.14) будет положительно определенной формой вариаций скоростей, что и дока-

*) См. А. И. Лурье, Аналитическая механика, Физматгиз, 1961, гл. 12.

зывает положительность $\delta^2 S$ на сравнительно малых интервалах времени. Таким образом, из принципа Гамильтона—Остроградского следует, что *разность между усредненными по времени кинетической энергией и обобщенным потенциалом на действительных траекториях достигает минимума* $\min(\bar{T} - \bar{U})$.

Рассмотрим другую форму принципа наименьшего действия для обобщенно-консервативных систем с идеальными голономными связями. С этой целью рассмотрим совокупность траекторий, проходящих через фиксированную «точку» q_0 в различные начальные моменты времени и через фиксированную «точку» q_1 в различные

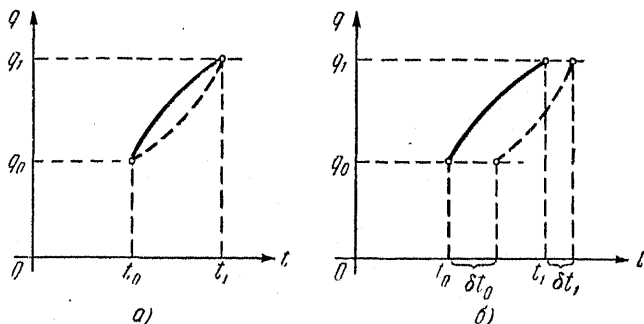


Рис. 51.1.

конечные моменты времени (сравните этого способа варьирования с варьированием, применяемым в принципе Гамильтона—Остроградского см. на рис. 51.1). Для таких траекторий полные вариации начального и конечного положений равны

$$\delta q_{j_0} = \delta q_{j_1} = 0 \quad (j = 1, \dots, s), \quad (51.16)$$

и, следовательно, между вариациями координат в начальный и конечный моменты времени и вариациями начального и конечного моментов времени будут иметь место соотношения (см. (48.3) и (48.4))

$$\delta q_j(t_0) = -\dot{q}_{j_0} \delta t_0, \quad \delta q_j(t_1) = -\dot{q}_{j_1} \delta t_1 \quad (j = 1, 2, \dots, s). \quad (51.17)$$

Пользуясь (51.16), для полной вариации действия (см. (48.5)) получим выражение

$$\delta S = -H \delta t \Big|_{t_0}^{t_1}. \quad (51.18)$$

Далее, учитывая консервативность системы ($H = H_0$), а также то, что

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} dt = \delta t_1 - \delta t_0,$$

из (51.18) найдем

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (\mathcal{L} + H) dt = 0. \quad (51.19)$$

Затем примем во внимание, что, согласно (42.1),

$$\mathcal{L} + H = \sum_j p_j \dot{q}_j,$$

а, согласно (46.2), для обобщенно-консервативных систем имеет место равенство

$$\int_{t_0}^{t_1} (\mathcal{L} + H) dt = S + H_0(t_1 - t_0) = W.$$

Таким образом, полная вариация «укороченного» действия

$$W = \int_{t_0}^{t_1} \sum_j p_j \dot{q}_j dt \quad (51.20)$$

равна

$$\delta W = 0 \quad (51.21)$$

при

$$H = H_0, \quad \delta q_{j0} = \delta q_{j1} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, s).$$

Требование (51.21) представляет собой принцип наименьшего действия Мопертюи.

Для систем с *обычными потенциальными силами и стационарными связями* этот принцип примет вид

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} T dt = 0 \quad (51.22)$$

при $E = E_0$, $\delta q_{j0} = \delta q_{j1} = 0$ ($j = 1, 2, \dots, s$). Действительно, в этом случае обобщенный потенциал \mathcal{U} сводится к потенциальной энергии $\mathcal{U}^{(0)}$, зависящей только от координат (см. (27.21)), а кинетическая энергия равна однородной квадратичной форме $T^{(2)}$ (см. (27.1) — (27.3)); следовательно, действие W становится равным

$$W = 2 \int_{t_0}^{t_1} T dt, \quad (51.23)$$

а функция Гамильтона совпадает с полной энергией E .

Если в (51.22) с помощью интеграла энергии

$$\frac{1}{2} \sum_{j,k} a_{jk} \frac{dq_j dq_k}{(dt)^2} + U = E_0$$

исключить элемент времени dt , то можно получить принцип

наименьшего действия в форме Якоби

$$\delta \int_{(q_0)}^{(q_1)} \sqrt{E_0 - U} ds = 0, \quad (51.24)$$

где $ds = \left(\sum_{j,k} a_{jk} dq_j dq_k \right)^{1/2}$. Поскольку в (51.24) время исключено, постольку принцип в форме Якоби дает возможность определять траекторию системы. Покажем это на примере свободной материальной точки. В этом случае (51.24) можно записать в виде

$$\int_{(r_0)}^{(r_1)} \left\{ \sqrt{E_0 - U} \delta ds - \frac{\nabla U \delta \mathbf{r}}{2\sqrt{E_0 - U}} ds \right\} = 0,$$

где $(ds)^2 = (d\mathbf{r})^2$ и, следовательно, $ds \cdot \delta ds = d\mathbf{r} \cdot \delta d\mathbf{r}$ (\mathbf{r} — радиус-вектор точки). Отсюда, заменяя $\delta d\mathbf{r}$ на $d\delta\mathbf{r}$ и учитывая, что $\delta\mathbf{r}$ в начальном и конечном положениях точки обращается в нуль, после интегрирования по частям получим

$$\int_{(r_0)}^{(r_1)} \left\{ \frac{d}{ds} \left[\sqrt{E_0 - U} \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right] + \frac{\nabla U}{2\sqrt{E_0 - U}} \right\} ds \delta\mathbf{r} = 0.$$

Это интегральное условие ввиду произвольности вариации $\delta\mathbf{r}$ приводит к дифференциальному уравнению траектории

$$\frac{d}{ds} \left[\sqrt{E_0 - U} \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right] + \frac{1}{2\sqrt{E_0 - U}} \nabla U = 0, \quad (51.25)$$

Заметим, что в (51.25) с помощью интеграла энергии

$$\frac{\sqrt{E_0 - U}}{ds} = \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{1}{dt}$$

можно перейти к дифференцированию по времени и тем самым получить уравнение Ньютона

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\nabla U.$$

Итак, основываясь на дифференциальных уравнениях движения, можно получить соответствующие интегральные вариационные принципы, а полагая в основу эти принципы, можно прийти к эквивалентным им уравнениям движения; те и другие основаны на фундаментальных физических допущениях, изложенных в первой главе.

Приложение 51.1. Теорема Нетер.

Большое значение этой теоремы в развитии современной теоретической физики обусловлено тем, что в ней устанавливается весьма общая связь между преобразованиями, оставляющими действие инвариантным, и законами сохранения.

Теорема Нетер в наиболее простом случае сводится к утверждению о том, что *любому непрерывному обратимому преобразованию координат, при котором функция действия данной гамильтоновой системы остается инвариантной, соответствует первый интеграл уравнений Лагранжа этой системы**.

Пусть задано непрерывное обратимое преобразование

$$q'_j = q'_j(q, t, \varepsilon) \quad (j = 1, 2, \dots, s), \quad (1)$$

которое зависит от некоторого параметра ε ; причем если $\varepsilon = 0$, то преобразование переходит в тождественное, т. е.

$$q'_j|_{\varepsilon=0} = q_j \quad (j = 1, 2, \dots, s). \quad (2)$$

Следовательно, вариации координат q , соответствующие преобразованию (1), равны

$$\delta q_j = \left(\frac{\partial q'_j}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} \varepsilon \quad (j = 1, 2, \dots, s) \quad (3)$$

(здесь ε — бесконечно малая величина). Используя (3) и выражение (45.14) для вариации действия на действительной траектории, найдем, что

$$\delta S = \varepsilon \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{\partial q'_j}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} \Big|_{t_0}^{t_1}. \quad (4)$$

Эта вариация должна равняться нулю, поскольку действие S по условию инвариантно относительно (1). Поэтому

$$\sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{\partial q'_j}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} \Big|_{t_1} = \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{\partial q'_j}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} \Big|_{t_0}, \quad (5)$$

откуда ввиду произвольности t_0 и t_1 вытекает, что преобразованию (1) соответствует первый интеграл уравнений Лагранжа:

$$\sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{\partial q'_j}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} = \text{const.} \quad (6)$$

Теорема доказана.

В частности, получим законы сохранения для замкнутой свободной системы, лагранжиан которой относительно инерциальной системы отсчета имеет вид

$$\mathcal{L} = \sum_i \frac{m_i}{2} v_i^2 - \sum_{i < j} U_{ij}(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|). \quad (7)$$

Этот лагранжиан (а следовательно, и функция действия) инвариантен относительно произвольного бесконечно малого параллельного переноса ε меха-

*) См. Э. Нетер, «Инвариантные вариационные задачи», в сборнике статей «Вариационные принципы механики», Физматгиз, 1959; см. также Н. Н. Боголюбов и Д. В. Ширков, «Введение в теорию квантованных полей», Гостехиздат, 1957, где изложено доказательство теоремы применительно к теории полей.

ической системы (в этом проявляется однородность пространства, см. стр. 102). Направляя \mathbf{e} вдоль оси Ox , получим рассматриваемое преобразование координат точек системы в виде

$$x'_i = x_i + \varepsilon, \quad y'_i = y_i, \quad z'_i = z_i \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (8)$$

и соответствующий этому преобразованию интеграл движения

$$\sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} \left(\frac{\partial x'_i}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} = \sum_i m_i \dot{x}_i = P_{x_0}. \quad (9)$$

Используя произвольность вектора \mathbf{e} , аналогично убедимся в сохранении проекций импульса системы на оси Oy и Oz . Таким образом, импульс замкнутой системы сохраняется (см. (9.18)).

Нетрудно убедиться в инвариантности лагранжиана (7) относительно бесконечно малого произвольного поворота \mathbf{e} механической системы (в этом проявляется изотропия пространства, см. стр. 102). Направляя \mathbf{e} вдоль оси Oz (т. е. рассматривая поворот вокруг Oz), получим преобразование координат точек системы в виде (см. (17.6))

$$\begin{aligned} x'_i &= x_i - \varepsilon y_i, \\ y'_i &= y_i + \varepsilon x_i, \\ z'_i &= z_i \end{aligned} \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (10)$$

и соответствующий интеграл движения

$$\sum_i \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} \left(\frac{\partial x'_i}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}_i} \left(\frac{\partial y'_i}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} \right] = \sum_i m_i (x_i \dot{y}_i - y_i \dot{x}_i) = M_{z_0}. \quad (11)$$

Аналогично найдем остальные интегралы и тем самым убедимся в сохранении кинетического момента системы (см. (10.8)).

Наконец, функция (7), как не зависящая явно от времени, инвариантна относительно бесконечно малого «смещения» системы во времени, т. е. инвариантна относительно преобразования

$$t' = t + \varepsilon \quad (12)$$

(в этом проявляется однородность времени). Поскольку в данном случае вариация времени отлична от нуля и равна $\delta t = t' - t = \varepsilon$, постольку нужно воспользоваться полной вариацией действия (48.5). Тогда, учитывая, что $\delta t_0 = \delta t_1 = \varepsilon$, $\delta q_0 = \delta q_1 = 0$, а также то, что для рассматриваемой системы функции Гамильтона и полная энергия совпадают, найдем

$$\delta S = (E_0 - E_1) \varepsilon = 0, \quad (13)$$

откуда вытекает сохранение полной энергии системы:

$$\sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} + \sum_{i < j} U_{ij} = E_0. \quad (14)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Галилей Г., Диалог о двух главнейших системах мира, Гостехиздат, 1948.
2. Галилей Г., Беседы и математические доказательства, касающиеся двух новых отраслей науки, относящихся к механике и местному движению, Гостехиздат, 1934.
3. Ньютон И., Математические начала натуральной философии (русский перевод в собрании сочинений акад. А. Н. Крылова), 1936.
4. Эйлер Л., Основы динамики точки, ОНТИ, 1938.
5. Д'Аламбер Ж., Динамика, перевод с франц., Гостехиздат, 1950.
6. Лагранж Ж., Аналитическая механика, т. 1—2, перевод с франц., Гостехиздат, 1950.
7. Якоби К., Лекции по динамике, перевод с нем., ГОНТИ, 1936.
8. Аппель П., Теоретическая механика, т. I и II, перевод с франц., Физматгиз, 1960.
9. Суслов Г. К., Теоретическая механика, Гостехиздат, 1946.
10. Планк М., Введение в общую механику, Госиздат, 1927.
11. Жуковский Н. Е., Теоретическая механика, Гостехиздат, 1952.
12. Картан Э., Интегральные инварианты, перевод с франц., Гостехиздат, 1940.
13. Зоммерфельд А., Механика, перевод с нем., ИЛ, 1947.
14. Богуславский С. А., Избранные труды по физике, Физматгиз, 1961.
15. Френкель Я. И., Аналитическая механика, Ленинградский индустриальный ин-т, 1935.
16. Лойцянский Л. Г. и Лурье А. И., Курс теоретической механики, т. I и II, Гостехиздат, 1955—1957.
17. Стрелков С. П., Механика, «Наука», 1965.
18. Хайкин С. Э., Физические основы механики, Физматгиз, 1962.
19. Боголюбов Н. Н. и Митропольский Ю. А., Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Физматгиз, 1963.
20. Гольдштейн Г., Классическая механика, перевод с англ., Гостехиздат, 1957.
21. Ландау Л. Д. и Лифшиц Е. М., Механика, Физматгиз, 1958.
22. Невзглядов В. Г., Теоретическая механика, Физматгиз, 1959.
23. Гантмахер Ф. Р., Лекции по аналитической механике, Физматгиз, 1960.
24. Лич Дж. У., Классическая механика, перевод с англ., ИЛ, 1961.
25. Синг Дж. Л., Классическая динамика, перевод с англ., Физматгиз, 1963.
26. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М., Фейнмановские лекции по физике, выпуски 1—2, «Мир», 1965.
27. Greenwood D., Principles of Dynamics, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New-Jersey, 1965.
28. Добролюбов В. В., Никитин Н. Н., Дворников А. Л., Курс теоретической механики, «Высшая школа», 1966.
29. Бухгольц Н. Н., Основной курс теоретической механики, части I и II, «Наука», 1967—1969.
30. Власов А. А., Макроскопическая электродинамика, Гостехиздат, 1955.
31. Тамм И. Е., Основы теории электричества, «Наука», 1966.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Абсолютно гладкая поверхность** 199
— шероховатая поверхность 201, 366
Автоколебания 311
Адиабатическая инвариантность 427 и д.
Адиабатический инвариант математического маятника 430
Аксиально-симметричное поле 69, 236
Амплитуда вынужденных колебаний 293
— комплексная 293
— собственных гармонических колебаний 42, 250
Амплитудная характеристика 293
Аналогия между силой Лоренца и силами инерции 242
Ансамбль Гиббса 376
Аперриодическое движение 249, 283
Апогей 84
Апсида 72
- Бесконечно малый поворот** 150, 151
- Вариация координат** 201
— радиуса-вектора 198
Вертикаль 169
Вес тела 169, 173
Виртуальная работа 199, 434
Виртуальное перемещение 198
Внутренняя потенциальная энергия 99
Возможное перемещение 197
Возмущение эллиптической орбиты 190 и д.
Время 8, 12
Вынужденное колебание линейное 292
— — —, его полная энергия 295
— — — нелинейное 313 и д.
Вырожденное движение 427
- Гамильтонов (см. функция Гамильтона)** 368
Гамильтонова система 409
Гармоническое колебание 42 и д.
— — —, его полная энергия 250
Гашение колебаний 299
Гироскопическая сила 65
— — —, антисимметрия коэффициентов 65
Главная нормаль к траектории 17
Главные (нормальные) колебания 265
— — — координаты 265
Главные моменты инерции 339
— оси инерции 339, 345
— центральные оси инерции 342, 344
Голономная (интегрируемая) связь 195
Гравитационная масса 32
— постоянная 31
- Движение тела переменной массы** 92
— центра масс в неоднородном поле 90 и д.
— — — в однородном поле 90
Действительное перемещение 197
Декартовы координаты 10, 14
- Диаграмма импульсов** 115
— скоростей 114, 115 и д.
Динамика 35
Динамические уравнения Эйлера 354
Диссиплятивная функция Рэлея 228
— — — вблизи положения устойчивого равновесия 280
— — —, симметрия коэффициентов 228
Дифференциальное сечение рассеяния 129, 130
— — — абсолютно упругих шариков 135 и д.
— — — частиц с электростатическим взаимодействием 131 и д.
— — — частиц, энергия взаимодействия которых обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними 136 и д.
Дифференциальное уравнение траектории 439
Дрейф заряда 52 и д.
- Евклидово пространство** 11
Естественное задание движения 16
Естественный трехгранник 16
- Задача двух тел** 104
— — — в неинерциальной системе 188 и д.
— — — в случае гравитационного и электростатического взаимодействия 108, 109
— — —, общее решение 107
— — —, функция Гамильтона 373
— — —, — Лагранжа 372
Задача Циолковского 93
Закон всемирного тяготения Ньютона 31
— движения материальной точки 13
— — — твердого тела 327
Закон изменения импульса 56, 88, 101
— — —, кинетического момента и энергии в неинерциальной системе 184, 185, 187
— — — кинетического момента 94, 101
— — — кинетической энергии 60, 97, 98
— — — момента импульса точки 57
— — — обобщенной энергии 232
— — — полной энергии 66, 100, 101
— — — функции Гамильтона 371
Закон инерции Галилея — Ньютона 34
Закон сохранения импульса 57, 89, 102
— — —, кинетического момента и энергии в неинерциальной системе 188
— — — и превращения энергии всех форм движения материи 101
— — — кинетического момента 95, 102
— — — момента импульса точки 59
— — — — —, распространённые случаи 53
— — — обобщенного импульса 230, 371
— — — обобщенной энергии 233
— — — полной энергии 67, 100—102
Законы изменения импульса, кинетического момента и энергии при наличии связей 205
— Кеплера 21, 79
— Ньютона 34—36
Замкнутая (изолированная) система 88

- Заряд в аксиально-симметричных полях 69, 70, 236 и д.
 — в однородных постоянных полях 47 и д.
 Заряд в переменном поле 40
 — в поле электрического диполя 394 и д.
 Заряженная молекула в электрическом поле 332—335
 Затухающие колебания 248, 232
 Захват частиц 110
- Идеальная связь 199 и д.
 Изменение ориентации (вращение) 147
 Измерение масс 31, 32, 169
 — сил 27
- Изолированная материальная точка 32
 Изотропия пространства 102, 441
 Импульс (количество движения) материальной точки 56
 — механической системы 86
 — — в разных системах отсчета 174, 133
 — твердого тела 328—330
 Инвариант Пуанкаре 409
 — Пуанкаре — Картана 406
 Инерциальная система отсчета 33
 — —, ее преимущественность 166
 Инерция 35
 Интеграл движения первый 56
 — второй 56
 — площадей 59, 95
 — энергии 67
 Интегральный вариационный принцип 434 и д.
 Инфинитное движение 75
- Канонические переменные 363
 — преобразования 411
 — бесконечно малые 417
 — инверсии 418
 — —, производящая функция 413 и д.
 — — тождественные 416
 — —, якобиан преобразования 416
 — уравнения Гамильтона 363, 370, 371
 Касательная к траектории 16
 Качение тел 201, 351, 366
 Килограмм 36
 Кинематические задачи 18
 — формулы Эйлера 153, 154
 Кинетическая энергия 60, 98
 — вблизи положений устойчивого равнове-
 сия 247, 262
 — — в декартовых, цилиндрических и сфери-
 ческих координатах 221, 230
 — — в разных системах отсчета 175, 133
 — — вращения твердого тела 331, 346
 — —, симметрия коэффициентов 223
 — — твердого тела 331
 Кинетический момент 94
 — — в разных системах отсчета 174, 133
 — — вращения твердого тела 329, 346
 — — твердого тела 328
- Классическая механика 7
 Колебания вынужденные 292 и д.
 — —, их энергия 295
 — гармонические 42 и д.
 — —, их энергия 250
 — — главные (нормальные) 265
 — — двухатомной молекулы 273 и д.
 — — — вращающейся 283 и д.
 — затухающие 248, 232
 — линейные 247
 — малые 245
 — нелинейные 302 и д.
 — симметричной трехатомной молекулы 275
 — слабо нелинейные 304 и д.
 — собственные (свободные) 247 и д.
- Комбинационные частоты 314
 Консервативная система 100
 Координаты главные (нормальные) 265
 — — декартовы 10, 14
 Координаты независимые 212
 — — обобщенные 212, 365
 — — сферические 16
 — — циклические 216
 — — цилиндрические 14
 Кориолисово (поворотное) ускорение 161
 Космическая скорость первая 82
 — — вторая 82
 Коэффициент затухания 249
- Лагранжиан (см. *функция Лагранжа*) 227
 Либрация 423
 Линейная скорость 13
 Линейные колебания 247
 — — маятников 270, 272, 283
 — — системы двух точек 268 и д.
 — — твердых тел 349, 350, 352
 — — точки 250, 251, 259, 260, 267
 Линия действия силы 53
 — узлов 144
 «Любовой» удар 114
 Л-система (лабораторная система отсчета) 110
- Малые колебания 245
 Масса гравитационная (тяжелая) 32
 — инертная 31
 Математический маятник 209
 Материальная точка 8
 — — в однородном поле тяжести 43 и д.
 — — в центрально-симметричном поле 70 и д.
 — — — —, условие замкнутости траекто-
 рии 75
 — —, движение по баллистической траектории 83 и д.
 — — под действием силы, обратно пропорцио-
 нальной квадрату расстояния до центра силы 75 и д.
 Маятник математический 209
 — сферический 193, 233
 — физический 346
 — циклоидальный 218
 Мгновенная ось вращения 151
 Мера инерции 35
 Метод Крылова — Боголюбова 304 и д., 314 и д.
 — неопределенных множителей Лагранжа 202
 — разделения переменных 391—394
 Метр 9
 Момент импульса 57
 — — в разных системах отсчета 133
 Моменты инерции 333
 — — главные 339
 — — осевые 338
 — — центробежные 338
 Мощность силы 60
 — — в разных системах отсчета 133
 — — гироскопической 65
 — — диссипативной 66
- Напряженность поля 61
 Начальные условия 24, 39
 Неголономная связь 196
 Независимые координаты 212
 Ненерциальная система отсчета 33
 Нелинейные колебания 302
 — — математического маятника 308, 309, 323
 — — материальной точки, подвешенной на
 пружине 318

Нестационарная связь 196
 Нормальные (главные) колебания 205
 — — координаты 265
 Нугация 361
 Ньютон (сила) 36

Обобщенная сила 215, 216
 — скорость 214
 — энергия 232
 Обобщенное ускорение 224
 Обобщенно-консервативная система 372
 Обобщенно-потенциальная сила 225
 — —, антисимметрия коэффициентов 231
 — — вблизи положения устойчивого равнове-
 сия 231
 Обобщенные координаты 212, 365
 Обобщенный импульс 230
 — потенциал 225
 — — вблизи положения устойчивого равнове-
 сия 231
 — — заряда в электромагнитном поле 225, 227
 Общие уравнения механики 211
 Однородное поле 43, 47 и д.
 Однородность времени 102, 441
 — пространства 102, 441
 Оптико-механическая аналогия 402
 Орбита точки 75
 Ортогональное преобразование 143
 — —, его матрица 143, 146
 — — обратное 146
 — — простейшее 145
 Осциллятор заряженный в магнитном поле 236
 — неизотропный 421
 — пространственный 41

Падение точки на центр силового поля 74
 — частиц друг на друга 116
 Параметр орбиты 77
 Параметрический резонанс 323 и д.
 — —, условия возникновения 325, 326
 Пара сил 329
 Перемешные действие — угол 424, 425
 — — в задаче двух тел 431, 432
 Переносная сила инерции 165
 — скорость 159
 Переносное ускорение 161
 Перигей 81
 Периодический процесс 12
 Плоскопараллельное движение 345, 343
 Поле 7
 — аксиально-симметричное 69, 236
 — силовое 61
 — центрально-симметричное 70
 Полная вариация 404, 405
 Полное сечение захвата 131, 133
 — — рассеяния 129, 130
 Положение равновесия 217
 — точки в разных системах отсчета 167
 — — — —, преобразование координат
 153
 — устойчивого равновесия 246, 254
 Поступательно движущаяся система центра
 масс (см. *ц-система*) 104, 110, 173
 — — — —, законы изменения кинетиче-
 ского момента и кинетической энергии 175,
 176
 Поступательное движение 147
 Потенциальная энергия 62, 99
 — — вблизи положения устойчивого равнове-
 сия, симметрия коэффициентов 232
 — — в однородном поле 63 и д., 251 и д.
 — — в поле переносной силы инерции 137
 Потенциальный барьер 63

Преобразование Галилея 37
 — Лежандра 372
 — тензора инерции при параллельном пере-
 носе системы координат 341, 342
 — — при повороте системы координат 343
 Прецессия псевдорегулярная 361
 — регулярная 154, 155, 356
 «Приведенная» масса 106
 Принцип виртуальных перемещений 217
 — наименьшего действия Гамильтона — Остро-
 градского 435
 — — — Мопертюи 433
 — — — Якоби 439
 — относительности Галилея 37
 Прицельное расстояние 110
 Производные вектора по времени в разных
 системах отсчета 160, 161
 Производящая функция канонических преобра-
 зований 413 и д.
 Пространство 7, 10, 11
 — евклидово 11
 — конфигураций 376
 — фазовое 375
 — — «растянуто» 405

Работа силы (см. *элементарная работа
 силы*) 60
 Равновесие 217
 — твердого тела 330, 335
 —, условное равновесие 218
 Радиус-вектор точки 9
 Радиус кривизны траектории 17
 Разложение движения твердого тела на посту-
 пательное и вращательное 155 и д.
 Распад частиц 138 и д.
 — —, общее решение 139
 Распределение распадных частиц по направле-
 ниям 141
 Рассеяние абсолютно упругих шариков 124 и д.
 — двух частиц, одна из которых до рассеяния
 покоится 116 и д.
 — — —, скорости которых до рассеяния про-
 тивоположны 120 и д.
 Рассеяние частиц 109
 — — с электростатическим взаимодействием
 122 и д.
 Реакция голономной связи 202
 — связи 194
 Регулярная прецессия 151, 155, 356
 Резонанс линейных колебаний 294
 — — — —, главных 313, 314
 — — — —, параметрический 323
 Ротатор 340

Свободная материальная точка 24
 — система 55
 Связь 194
 — голономная 195
 — идеальная 199
 — неголономная 196
 — нестационарная 196
 — неудерживающая 196
 — стационарная 196
 — удерживающая 196
 Секторная скорость 14
 Секторное ускорение 14
 Секунда 12
 Сила 26, 27
 — активная 205
 — внешняя 87
 — внутренняя 87
 — гироскопическая 65
 — гравитационного притяжения 31

- Сила диссипативная 65
 — заданная 193
 — инерции 165
 — — Кориолиса 165
 — — переносная 165
 — — центробежная 165
 — Лоренца 28
 — нестационарная 64
 — обобщенная 215
 — лассивная 205
 — потенциальная 60, 61
 — сопротивления среды 29
 — стационарная 64
 — упругая 28
 — центральная 68
 — электростатического воздействия 28
- Символ Кронекера 143
- Симметричный волчок 354
 — заряженный волчок в магнитном поле 361 и д.
 — свободный волчок 355 и д.
 — тяжелый быстрый волчок 358 и д.
- Симметрия материальная 340
 — поля аксиальная 69, 236
 — — центральная 70
 — связи 206, 207, 216, 217
 — силового поля 206, 216, 217
 — траектории 72, 113
- Система взаимодействующих точек в однородном поле тяжести 177
 — материальных точек 8
- Система отсчета 10
 — — инерциальная 33
 — — Коперника 10
 — — лабораторная 110
 — — локально-инерциальная 173
 — — неинерциальная 33
 — — неускоренно движущаяся 37
 — — ускоренно движущаяся 165
 — центра масс 104, 110, 128
- Скобки Пуассона 380
 — — для проекции радиуса-вектора, импульса и момента импульса точки 382, 384
 — — фундаментальные 382
- Скорость материальной точки 13
 — — в декартовых, цилиндрических и сферических координатах 14, 15, 16
 — — в разных системах отсчета 158, 159
 — — —, разложение по «естественным» ортам 18
- Слабо нелинейные колебания 304
- Собственные (свободные) колебания 247, 265
 — частоты системы 249, 263
- Состояние неустойчивости 172, 173
- Срыв амплитуды нелинейных колебаний 322, 323
- Статика 217
- Стационарная связь 196
- Сферические координаты 16
- Сферический маятник 193, 233
- Твердое тело 9
 — — в однородном поле тяжести 330
 — — с одной неподвижной точкой 353
- Тензор инерции 338
 — — центральный 342
- Теорема Ляпунова 228
 — — Лушвилля о сохранении фазового объема 378
 — — Нетер 439
 — — о единственности инварианта Пуанкаре 409
 — — Пуассона 381
 — — Штейнера 342
 — — Эйлера 149
 — — Якоби 388
- Тождество Пуассона 380
- Точечное преобразование 241
- Точка поворота 72
- Траектория точки 13
- Угловая скорость вращения (замещения орпелтаци) 152
- Углы Эйлера 144
- Угол рассеяния 113 и д.
 «Укороченное» действие 392
- Упругое рассеяние 112
- Уравнение Гамильтона — Якоби 387, 388
 — — —, его полный интеграл 388
 — — Д'Аламбера — Лагранжа 211
 — — движения точки 35
 — — — в декартовых, цилиндрических и сферических координатах 40, 42, 44, 48 и д., 221, 222
 — — — в неинерциальной системе 165
 — — — относительно Земли 167, 168
 — — Мещерского 93
 — — связи 194
- Уравнения движения механической системы 36
 — — Лагранжа вблизи положения устойчивого равновесия 247, 262, 282
 — — в главных координатах 265, 279
 — — в независимых координатах (уравнения второго рода) 209, 215, 216, 227, 370
 — — в неинерциальной системе 242
 — — в обобщенных координатах (для неголономных систем) 365
 — —, их ковариантность 241
 — — с реакциями связей (уравнения первого рода) 204
 — — — — — для голономных систем 204
 — — — — — для неголономных систем 364
 — — Рауса 372
- Ускорение материальной точки 13
 — — в декартовых, цилиндрических и сферических координатах 14, 15, 222
 — — — в разных системах отсчета 161
- Условно-периодическое движение 427
- Устойчивое равновесие 246, 254
 — —, достаточный признак 254 и д.
- Фаза колебаний 42, 265, 293
- Фазовая точка 375
 — траектория 375
 — характеристика 293
- Фазовое пространство 375
 — — «расширенное» 405
- Физический маятник 346
- Финитное движение 75
- Фокусировка зарядов 50, 52
- Формула Бине 22
- Резерфорда 132
- Функция Гамильтона 368
 — — в задаче двух тел 373
 — — в неинерциальной системе 369, 370
 — — свободного заряда 369
 — — — в поле электрического диполя 394
 — — свободной точки в декартовых, цилиндрических и сферических координатах 369
 — — симметричного тяжелого полчка 374
- Функция действия 385
 — — заряда в поле электрического диполя 395
 — — свободной точки 390
 — — точки в однородном поле тяжести 403
- Функция Лагранжа 227
 — — в главных координатах 266
 — — в задаче двух тел 372
 — — в неинерциальной системе 369

- — Функция Лагранжа заряда в аксиально-симметричных полях 237
- — — в поле ядра и магнитном поле 229
- — осциллятора 230
- — свободного заряда 369
- — симметричного тяжелого волчка 373
- — сферического маятника 234
- — твердого тела 331
- Рауса 372

- Характеристическое уравнение 247, 263

- Центрально-симметричное поле 70
- Центр масс (центр инерции) 86
 - силы 58
- Центробежная сила инерции 165
- Циклические координаты 216
- Циклотронная частота 44
- Цилиндрические координаты 14
- ц-система (см. система центра масс)* 110

- Частота колебаний 29, 246
 - Лармора 229
- Число степеней свободы 212
 - — — свободного твердого тела 327

- Эквипотенциальная поверхность 63
- Эксцентриситет орбиты 77
- Элементарная работа силы \mathbf{K}
 - — — на виртуальном перемещении (см. виртуальная работа) 194
 - — — на действительном перемещении 60, 199
 - — — нестационарной 64
 - — — потенциальной стационарной 61
- Энергия кинетическая 60, 93
 - полная 66, 100
 - потенциальная 62
 - — внутренняя 99
 - — во внешних полях 99
 - — в поле переносных сил инерции 147
 - распада частицы 139
 - «Эффективная» потенциальная энергия 71

Игорь Иванович Ольховский

Курс теоретической механики для физиков
М., 1970 г., 448 стр. с илл.

Редактор *Ю. М. Лоскутов*

Техн. редактор *И. Ш. Аксельрод*

Корректоры *О. А. Сегал, Т. А. Панькова*

Сдано в набор 28/VI 1969 г. Подписано к печати 18/IV 1970 г. Бумага 60×90^{1/16}. Физ. печ. л. 28. Условн. печ. л. 28. Уч.-изд. л. 27,3. Тираж 49 500 экз. Т-15960. Цена книги 1 р. 06 к. Заказ № 1196.

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы

Ордена Трудового Красного Знамени Ленинградская типография № 1 «Печатный Двор» имени А. М. Горького Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров СССР, г. Ленинград, Гатчинская ул., 26.