## 2. Принцип максимуму. Задача оптимального програмного керування

### 2.1 Принцип максимуму

Необхідні умови екстремуму функціонала для основної задачі оптимального керування були отримані у працях Л.С. Понтрягіна та його учнів. Ці умови називають принципом максимуму.

Розглянемо основну задачу оптимального керування: серед всіх керувань $\overline{u}(t)=\left(u_1(t),u_2(t),...,u_m(t)\right)$, для яких фазова траєкторія $\overline{x}(t)=\left(x_1(t),x_2(t),...,x_n(t)\right)$ задовольняє умови

$$\frac{dx}{dt}=\overline{f}\left(t,\overline{x},\overline{u}\right), \tag{2.1}$$

$$\begin{cases} \overline{x}\left(t_0\right)=\overline{a}=\left(a_1,a_2,...,a_n\right), \\ x\left(t_1\right)=\overline{b}=\left(b_1,b_2,...,b_n\right), \end{cases} \tag{2.2}$$

$$\left|\overline{u}(t)\right|\le u_0=\text{const} \tag{2.3}$$

знайти оптимальне керування $\overline{u}^*(t)$ та відповідну оптимальну фазову траєкторію $\overline{x}^*(t)$, для яких функціонал якості системи керування

$$I=\int_{t_0}^{t_1} f_0\left(t,x_1(t),...,x_n(t),u_1(t),...,u_m(t)\right)dt\to\min. \tag{2.4}$$

Введемо нову фазову змінну

$$x_0(t) = \int_{t_0}^{t} f_0\left(\tau, x_1(\tau), ..., x_n(\tau), u_1(\tau), ..., u_m(\tau)\right) d\tau . \qquad (2.5)$$

При $t = t_0$ $x_0(t_1) = I$. З (2.5) випливає, що

$$\dot{x}_0(t_0) = f_0, \qquad (2.6)$$

$$x_0(t_0) = 0. \qquad (2.7)$$

Нехай $\bar{X} = (x_0, x_1, ..., x_n)$, $\bar{F} = (f_0, f_1, ..., f_n)$. Тоді фазова траєкторія $\bar{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$ задовольняє систему диференціальних рівнянь

$$\frac{d\bar{X}}{dt} = \bar{F}\left(t, \bar{X}, \bar{u}\right) \qquad (2.8)$$

з крайовими умовами

$$\begin{cases} \bar{X}(t_0) = \bar{A} = (0, a_1, a_2, ..., a_n), \\ \bar{X}(t_1) = \bar{B} = (I, b_1, b_2, ..., b_n). \end{cases} \qquad (2.9)$$

Будемо вважати, що оптимальне керування $\bar{u}^*(t)$ та оптимальна фазова траєкторія $\bar{x}^*(t)$ вже визначені. Підставивши їх у частинні похідні $\frac{\partial f_j(t, \bar{x}, \bar{u})}{\partial x_i}$, $i, j = 0,1,...,n$, отримаємо неперервні функції часу $t$.

Введемо вектор-функцію $\bar{\Psi} = \left(\psi_0(t), \psi_1(t), ..., \psi_n(t)\right)$, координати якої задовольняють лінійну однорідну систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{d\psi_i}{dt} = -\sum\limits_{j=0}^{n} \dfrac{\partial f_j\left(t, \bar{x}, \bar{u}\right)}{\partial x_i}, \\ i = 0, 1, \ldots, n. \end{cases} \tag{2.10}$$

При фіксованих початкових значеннях $\bar{\Psi}\left(t_0\right)$ існує єдиний розв'язок системи (2.10).

Функцію

$$H\left(\bar{\psi}, \bar{x}, t, \bar{u}\right) = \bar{F} \cdot \bar{\psi} = \sum_{i=0}^{n} f_i \psi_i \tag{2.11}$$

називають **функцією Гамільтона**.

Якщо зафіксувати значення $\psi_i$, $x_i$, $t$, то скалярний добуток у (2.11) буде залежати лише від компонентів вектора $\bar{u}$.

Нехай $M\left(\bar{\Psi}, \bar{x}, t\right) = \max\limits_{\bar{u} \in U} H\left(\bar{\Psi}, \bar{x}, t, \bar{u}\right)$ при фіксованих значеннях $\bar{\Psi}$, $\bar{x}, t$, $U$ – множина допустимих значень керувань: $U = \left\{\bar{u}\left(t\right) : \left|\bar{u}\left(t\right)\right| \le U_0\right\}$. Наведено без доведення принцип максимуму, що виражає необхідну умову мінімуму функціоналу якості у основній задачі оптимального керування.

**Теорема 2.1 (принцип максимуму).** Нехай $\bar{u}^*\left(t\right)$, $\bar{x}^*\left(t\right)$ – оптимальне керування та відповідний йому оптимальний фазовий вектор у задачі оптимального керування (2.1) – (2.4). Існує ненульовий розв'язок $\bar{\Psi}^*\left(t\right)$ системи (2.10), такий, що у будь-який момент часу $t \in \left[t_0; t_1\right]$ функція Гамільтона $H\left(\bar{\Psi}^*, \bar{x}^*, t, \bar{u}\right)$ аргументу $\bar{u}$ досягає максимуму за всіма $\bar{u} \in U$ при $\bar{u} = \bar{u}^*$, тобто

$$H\left(\bar{\Psi}^*, \bar{x}^*, t, \bar{u}^*\right) = M\left(\bar{\Psi}^*, \bar{x}^*, t\right). \tag{2.12}$$

виконуються співвідношення

$$\psi_0(t) = \text{const} \le 0, \tag{2.13}$$

$$M\left(\bar{\Psi}^*(t), \bar{x}^*(t), t\right) = -\int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=0}^{n} \frac{\partial f_j\left(t, \bar{x}^*(t), \bar{u}^*(t)\right)}{\partial t} \cdot \psi_j(t) dt. \tag{2.14}$$

Для задачі з фіксованим часом рівність (2.14) не виконується.

Основний зміст принципу максимуму складає рівність (2.12), згідно з якою оптимальне керування $\bar{u}^*(t)$ у будь-який момент часу t повинен надавати найбільшого значення функції Гамільтона. Тому з рівності (2.12) можна визначити $\bar{u}^*(t)$ як функцію змінних $\bar{\Psi}^*, \bar{x}^*, t$. Підставивши її у рівняння (2.8) та (2.11), отримаємо систему $2n+2$ рівнянь з $2n+2$ невідомими функціями $x_0^*(t)$, $x_1^*(t), \ldots, x_n^*(t)$, $\psi_0^*(t), \ldots, \psi_n^*(t)$. Невідомі сталі інтегрування у розв'язку цієї системи знаходять з крайових умов (2.9).

## 2.2 Постановка задачі оптимального програмного керування

Керування, що діє на об'єкт, називають **програмним**, якщо воно явно залежить лише від часу: $\bar{u} = \bar{u}^*(t)$.

Нехай стан об'єкта керування моделюється системою звичайних диференціальних рівнянь, що у векторній формі має наступний вигляд:

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \bar{f}\left(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)\right). \tag{2.15}$$

Тут $\bar{x}(t)=(x_1(t),...,x_n(t))$ – фазовий вектор, $\bar{u}(t)=(u_1(t),...,u_m(t))$ – вектор керування, $\bar{u}(t)\in U$, де $U$ – задана множина допустимих значень керування, час $t\in[t_0;t_1]$, $\bar{f}=(f_1(t,\bar{x},\bar{u}),...,f_n(t,\bar{x},\bar{u}))$.

Момент $t_0$ початку процесу керування задано, момент $t_1$ завершення процесу визначається першим моментом досягнення точкою $(t,\bar{x}(t))$ деякої заданої поверхні $\Gamma\subset\mathbb{R}^{n+1}$,

$$\Gamma=\{(t_1,\bar{x}(t_1)):h_i(t_1,\bar{x}(t_1))=0,\, i=1,...,l\}. \tag{2.16}$$

Тут $h_i(t_1,\bar{x}(t_1)),\, i=1,...,l$ – задані функції. Отже, правий кінець фазової траєкторії $\bar{x}(t)$ може рухатися по заданій поверхні $\Gamma$ і у момент часу $t_1$ повинна виконуватися умова $h_i(t_1,\bar{x}(t_1))=0,\, i=1,...,l$, $l\le n+1$. Початкова умова $\bar{x}(t_0)=\bar{x}_0$ визначає початковий стан об’єкту керування. Множина $U$ допустимих керувань складається з кусково-неперервних функцій $\bar{u}(t)$. У точках їх розриву значення керування визначається як права границя.

Під **множиною допустимих процесів керування** розуміють множину $D$ допустимих наборів $d=(t_1,\bar{x}(t),\bar{u}(t))$. Тут функція $\bar{x}(t)$ є неперервною, кусково-диференційовною, вона задовольняє рівняння (2.15), початкову умову та умову (2.16). На множині $D$ допустимих процесів керування досліджують на екстремум функціонал якості керування

$$I=\int_{t_0}^{t_1} f_0(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t))dt+g(t_1,x(t_1)), \tag{2.17}$$

де $f_0$ та $g$ – задані неперервно диференційовні функції своїх аргументів. Доданок $g(t_1,x(t_1))$ називають **термінальним членом**.

Потрібно визначити оптимальний процес керування $d^* = \left(t_1^*, \bar{x}^*(t), \bar{u}^*(t)\right)$, що надає екстремум функціоналу (2.17). Далі розглядатимемо задачу дослідження функціонала якості на мінімум.

Задачу мінімізації функціонала (2.17) при $g \neq 0$ називають **задачею Больца.** Якщо у функціоналі термінальний член відсутній, то маємо **задачу Лагранжа**. Якщо у функціоналі якості відсутній інтегральний член ( $f_0 \equiv 0$), то отримуємо **задачу Майєра**. Шукані функції у задачі оптимального програмного керування: $\bar{u}^*(t)$ – **оптимальне керування**, $\bar{x}^*(t)$ – **оптимальна фазова траєкторія**, величина $t_1^*$ – **оптимальний час завершення процесу**.

## 2.3 Необхідна умова оптимальності

**Теорема 2.2 (принцип максимуму для задачі оптимального програмного керування)**. Нехай на наборі $d^* = \left(t_1^*, \bar{x}^*(t), \bar{u}^*(t)\right)$ досягається мінімум функціонала (2.17). Тоді існує така вектор-функція $\bar{\psi}(t) = \left(\psi_1(t), \psi_2(t), \ldots, \psi_n(t)\right)$, що:

1) у кожній точці неперервності керування $\bar{u}(t)$ функція Гамільтона

$$H(t, \bar{\psi}, \bar{x}, \bar{u}) = \sum_{j=1}^{n} \psi_j(t)\, f_j(t, \bar{x}, \bar{u}) - f_0(t, \bar{x}, \bar{u}) \tag{2.18}$$

досягає максимуму по керуванню, тобто

$$\max_{\bar{u} \in U} H(t, \bar{\psi}, \bar{x}, \bar{u}) = H\left(t, \bar{\psi}, \bar{x}^*, \bar{u}^*\right); \tag{2.19}$$

2) виконується **умова трансверсальності**

$$\delta g\left(t_1^*\right)-H\left(t_1^*\right)\delta t_1+\sum_{j=1}^{n}\psi_j\left(t_1^*\right)\delta x_{j1}=0 \tag{2.20}$$

для будь-яких варіацій $\delta t_1$ та $\delta x_{j1}$, що задовольняють систему

$$\begin{cases} h_i\left(t_1^*,\overline{x}^*\left(t_1^*\right)\right)=0, \\ \delta h_i\left(t_1^*,\overline{x}^*\left(t_1^*\right)\right)=0, \\ i=1,2,\ldots,l. \end{cases} \tag{2.21}$$

У рівностях (2.20) та (2.21) варіації $\delta g$ та $\delta h_i$ у точці $t_1^*$ визначаються за формулами;

$$\delta g=\frac{\partial g}{\partial t_1}+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial g}{\partial x_j}\delta x_{j1}\,, \tag{2.22}$$

$$\delta h_i=\frac{\partial h_i}{\partial t_1}+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial h_i}{\partial x_j}\delta x_{j1}\,; \tag{2.23}$$

Вирази (2.22) та (2.23) обчислюються у точці $t_1^*$.

3) Функції $\overline{x}^*\left(t\right)$ та $\overline{\psi}^*\left(t\right)$ задовольняють систему рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{dx_j}{dt}=\dfrac{\partial H}{\partial \psi_j}=f_j\left(t,\overline{x},\overline{u}\right), \\ \dfrac{d\psi_j}{dt}=-\dfrac{\partial H}{\partial x_j}, \\ j=1,2,\ldots,n. \end{cases} \tag{2.24}$$

Функції $\psi_1, \psi_2, ..., \psi_n$ називають **допоміжними змінними**, а систему (2.24) – **системою канонічних рівнянь**. Рівняння $\frac{d\psi_j}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_j}$, $j = 1, 2, ..., n$, утворюють **спряжену систему рівнянь.**

Компоненти вектор-функції $\overline{x}^*(t)$ – функції $x_j^*(t)$ повинні задовольняти крайові умови:

$$x_j^*(t_0) = x_{j0}, \ j = 1, 2, ..., n. \tag{2.25}$$

Якщо момент $t_0$ початку процесу керування та початковий стан $\overline{x}(t_0)$ не задані, а разом з кінцевим станом $\overline{x}(t_1)$ визначаються співвідношеннями

$$h_i\left(t_0, \overline{x}(t_0), t_1, \overline{x}(t_1)\right) = 0, i = 1, 2, ..., l, \tag{2.26}$$

то термінальний член функціонала якості звичайно задають у вигляді різниці

$$g_1\left(t_1, \overline{x}(t_1)\right) - g_0\left(t_0, \overline{x}(t_0)\right). \tag{2.27}$$

Умова трансверсальності набуває вигляду:

$$\begin{gathered}\left(\delta g_1\left(t_1^*\right) - H\left(t_1^*\right)\delta t_1^* + \sum_{j=1}^{n}\psi_j\left(t_1^*\right)\delta x_{j1}\right) - \\ -\left(\delta g_0\left(t_0^*\right) - H\left(t_0^*\right)\delta t_0^* + \sum_{j=1}^{n}\psi_j\left(t_0^*\right)\delta x_{j0}\right) = 0.\end{gathered} \tag{2.28}$$

У рівностях (2.28) $x_{j0} = x_j(t_0), x_{j1} = x_j(t_1)$. При $t = t_0^*$ та $t = t_1^*$ виконуються також умови:

$$\begin{cases} \delta h_i\left(t_0^*, \overline{x}^*\left(t_0^*\right), t_1^*, \overline{x}^*\left(t_1^*\right)\right) = 0, \\ h_i\left(t_0^*, \overline{x}^*\left(t_0^*\right), t_1^*, \overline{x}^*\left(t_1^*\right)\right) = 0, \\ i = 1, 2, ..., l. \end{cases} \tag{2.29}$$

Розв’язком задачі тут є набір $\left(t_0^*, t_1^*, \overline{x}^*\left(t\right), \overline{u}^*\left(t\right)\right)$, що містить оптимальні моменти початку та завершення процесу керування, а також оптимальну фазову траєкторію та оптимальне керування.

Якщо для керування $\overline{u}$ обмеження відсутні, то максимум функції Гамільтона шукають з допомогою необхідних та достатніх умов безумовного екстремуму функції.

Якщо модель об’єкта керування описується лінійними диференціальними рівняннями, а функціонал якості є квадратичним, то принцип максимуму є необхідною та достатньою умовою оптимальності процесу керування.