

Рис. 8.18

Из рис. 8.18, а видно, что даже при $U_1 \ll 1$, $U_2 \gg 1$ точка b может оказаться вблизи критической точки $(-1, j0)$. Поэтому дополнительно к запасу устойчивости по амплитуде L_3 вводится запас устойчивости по фазе μ_3 :

$$\mu_3 = 180^\circ + \psi_1,$$

Здесь ψ_1 — аргумент (фаза) частотной передаточной функции разомкнутой системы $W(j\omega)$, соответствующий ее модулю $L(\omega)$, равному единице (точка b на рис. 8.18, а):

$$\psi_1 = \psi(\omega)|_{L(\omega)=1}.$$

Запас устойчивости замкнутой системы по фазе тем больше, чем больше μ_3 . В хорошо демпфированных системах он составляет около $30 \div 60^\circ$.

Величины L_3 и μ_3 могут быть определены и при использовании логарифмических частотных характеристик разомкнутой системы.

На рис. 8.18, б изображены л. ч. х., соответствующие рис. 8.18, а. Так как $L(\omega) = 20 \lg |W(j\omega)|$, то в указанных на рис. 8.18, а точках имеем: $L_a < 0$, $\psi_a = -180^\circ$; $L_b = 0$, $-180^\circ < \psi_b < -90^\circ$; $L_c > 0$, $\psi_c = -180^\circ$. При $\omega = \infty$ модуль $L = -\infty$, а фаза $\psi = -270^\circ$. Величины L_1 и L_2 определяются в точках перехода л. ф. х. через ось абсцисс, а величина μ_3 — на частоте среза л. ф. х. $\omega_{ср}$.

Недостатком рассмотренного критерия является то, что для определения запаса устойчивости необходимо задать два числа: L_3 и μ_3 . В этом отношении более удобно определять запас устойчивости по *показателю колебательности*. Показателем колебательности называется максимальное значение ординаты M_{\max} амплитудной характеристики замкнутой системы (см. рис. 8.19) при начальной ординате, равной единице, т. е. относительная высота резонансного пика. Физически эта характеристика представляет собой следующее. Если задающее воздействие меняется по закону

$g = g_{\max} \sin \omega t$, то управляемая величина в режиме установившихся вынужденных колебаний будет меняться по закону $y_{\max} = y_{\max} \sin(\omega t + \psi)$. Отношение амплитуд y_{\max} и g_{\max} определяется модулем частотной передаточной функции замкнутой системы:

$$\frac{y_{\max}}{g_{\max}} = \text{mod} \Phi(j\omega) = \text{mod} \frac{W(j\omega)}{1 + W(j\omega)}, \quad (8.81)$$

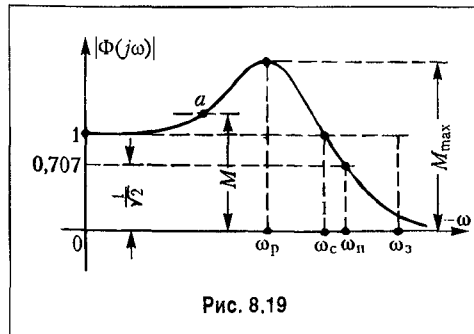


Рис. 8.19

где $W(j\omega)$ – частотная передаточная функция разомкнутой системы.

Максимальное значение этого модуля и представляет собой показатель колебательности (имеется в виду наибольший максимум)

$$M_{\max} = |\Phi(j\omega)|_{\max} = \left| \frac{W(j\omega)}{1+W(j\omega)} \right|_{\max} \quad (8.82)$$

Как видно из этих рассуждений, показатель колебательности определяется посредством задания задающего воздействия $g = g_{\max} \sin \omega t$. В принципе возможно определение показателя колебательности системы посредством задания возмущающего воздействия $f = f_{\max} \sin \omega t$ и отыскания относительной величины резонансного пика.

Чем меньше запас устойчивости, тем больше склонность системы к колебаниям и тем выше резонансный пик. Допустимое значение показателя колебательности определяется на основании опыта эксплуатации систем управления. Считается, что в хорошо демпфированных системах показатель колебательности не должен превосходить значений $1,1 \div 1,5$, хотя в некоторых случаях можно допускать величины до $2 \div 2,5$.

Для отыскания показателя колебательности нет необходимости строить амплитудную частотную характеристику (рис. 8.19) или отыскивать максимум (8.82). Существуют приемы, позволяющие найти показатель колебательности по виду амплитудно-фазовой характеристики разомкнутой системы. Возьмем на амплитудной характеристике (рис. 8.19) некоторую точку a , которой соответствует ордината M , и отобразим эту точку на комплексную плоскость частотной передаточной функции разомкнутой системы. Для этого рассмотрим уравнение

$$\operatorname{mod} \Phi(j\omega) = \left| \frac{W(j\omega)}{1+W(j\omega)} \right| = M.$$

Сделаем подстановки $U = \operatorname{Re} W(j\omega)$ и $V = \operatorname{Im} W(j\omega)$. Тогда

$$\left| \frac{U + jV}{1 + U + jV} \right| = \frac{\sqrt{U^2 + V^2}}{\sqrt{(1+U)^2 + V^2}} = M.$$

Возводя в квадрат правую и левую части и освобождаясь от знаменателя, после алгебраических преобразований получим

$$(U + C)^2 + V^2 = R^2, \quad (8.83)$$

где

$$C = \frac{M^2}{M^2 - 1}, \quad (8.84)$$

$$R = \frac{M}{M^2 - 1}. \quad (8.85)$$

Это есть уравнение окружности с радиусом R и с центром, смещенным влево от начала координат на величину C .

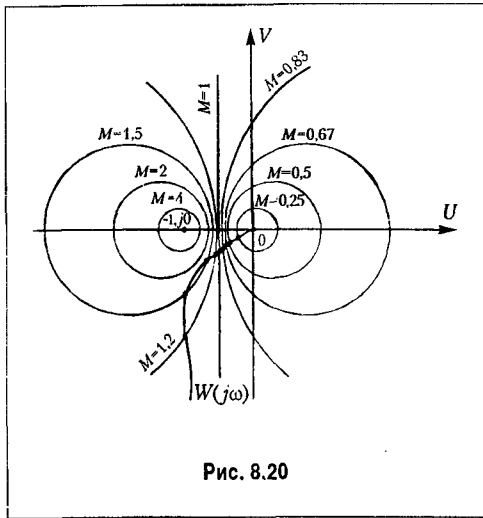


Рис. 8.20

Задавая различные значения M от 1 до ∞ , можно построить семейство таких окружностей (рис. 8.20). На каждой окружности написано значение ординаты амплитудной частотной характеристики. При $M = 1$ окружность вырождается в прямую линию, параллельную оси ординат и проходящую слева от нее на расстоянии 0,5. При $M \rightarrow \infty$ окружность вырождается в точку, совпадающую с точкой $(-1, j0)$.

Для значений ординат амплитудной характеристики, лежащих в пределах $0 < M < 1$, получается семейство окружностей, расположенных справа от линии $M = 1$, симметрично с первым семейством. При $M = 0$ окружность вырождается в точку, совпадающую с началом координат.

Для построения амплитудной характеристики (рис. 8.19) достаточно в тех же координатах, где построены окружности $M = \text{const}$, нанести амплитудно-фазовую характеристику разомкнутой системы. Точки пересечения этой характеристики с окружностями будут определять точки амплитудной характеристики с соответствующими значениями ординат, равными M . Для определения показателя колебательности можно не строить амплитудную характеристику, так как достаточно знать одно максимальное значение ординаты M_{max} , определяемое по наименьшей окружности $M = \text{const}$ ($M \geq 1$), которой коснется амплитудно-фазовая характеристика.

Если при проектировании системы ставится условие, чтобы ее показатель колебательности был не больше некоторого заданного значения, например $M_{\text{max}} = 1,5$, то для выполнения этого необходимо, чтобы амплитудно-фазовая характеристика не заходила в область, ограниченную соответствующей окружностью (рис. 8.21). Амплитудно-фазовая характеристика может только коснуться этой окружности. В этом случае показатель колебательности будет как раз равен заданному значению M_{max} .

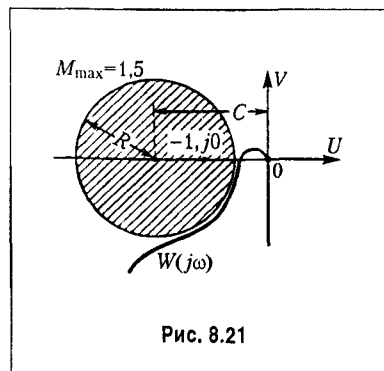


Рис. 8.21

Таким образом, окружность M_{max} ограничивает *запретную зону* для амплитудно-фазовой характеристики разомкнутой системы. Эта зона охватывает точку $(-1, j0)$ и обеспечивает получение заданного запаса устойчивости.

Величина показателя колебательности может быть определена и в случае использования логарифмических частотных характеристик. Для этого отобразим запретную зону (рис. 8.21) на логарифмическую сетку. Рассмотрим отдельно окружность заданного показателя колебательности (рис. 8.22).

На окружности возьмем произвольную точку B и построим вектор, соединяющий эту точку с нача-

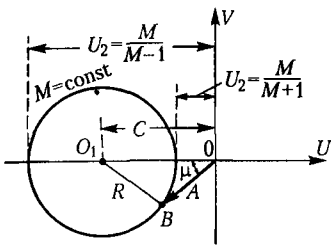


Рис. 8.22

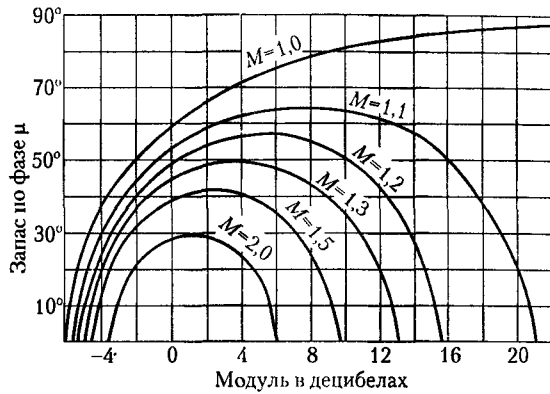


Рис. 8.23

лом координат. Установим для этого вектора связь между его модулем A и запасом по фазе μ . Из треугольника OBO_1 по теореме косинусов находим

$$\cos \mu = \frac{A^2 + C^2 - R^2}{2AC}.$$

Далее можно найти

$$C^2 - R^2 = \left(\frac{M^2}{M^2 - 1} \right)^2 - \left(\frac{M}{M^2 - 1} \right)^2 = \frac{M^2}{M^2 - 1} = C$$

и окончательно

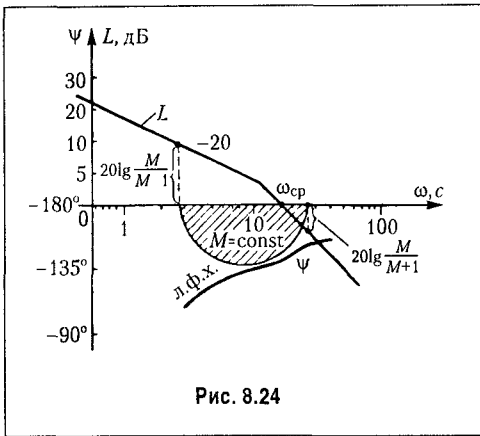
$$\mu = \arccos \frac{A^2 + C}{2AC}. \tag{8.86}$$

Из рис. 8.22 нетрудно видеть, что зависимость (8.86) существует только для модулей, лежащих в пределах

$$\frac{M}{M+1} < A < \frac{M}{M-1}. \tag{8.87}$$

В случае, когда $A < \frac{M}{M+1}$ или $A > \frac{M}{M-1}$, запас по фазе может быть любым, так как в этом случае конец вектора не может попасть в запретную зону (рис. 8.22).

Задаваясь различными значениями показателя $M = \text{const}$, а следовательно, и $C = \text{const}$ (8.84), по выражению (8.86) можно построить графики $\mu = f(A)$, которые носят название μ -кривых. Эти графики строятся обычно таким образом, что модуль A откладывается в децибелах (рис. 8.23).



Из выражения (8.86) можно найти, в частности, максимальный запас по фазе обычным методом отыскания максимума:

$$\mu_{\max} = \arccos \frac{1}{\sqrt{C}} = \arccos \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{M}. \quad (8.88)$$

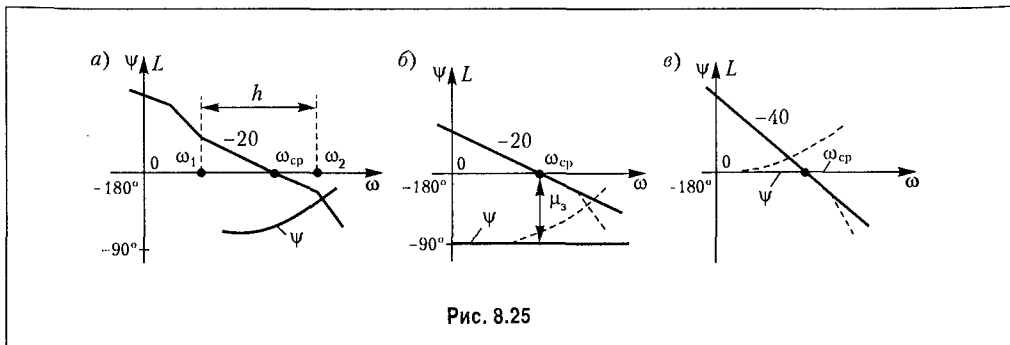
Этот максимум получается, когда модуль $A = \sqrt{C}$. Если имеется построенная л. а. х. (рис. 8.24), то по имеющимся μ -кривым и при заданном значении M можно построить требуемое значение запаса по фазе для каждого значения модуля. Это построение должно делаться для модулей, лежащих

в пределах (8.87). В результате будет получена запретная область для фазовой характеристики. Чтобы показатель колебательности был не больше заданного значения, фазовая характеристика не должна заходить в эту область. Нетрудно видеть, что определение качественного показателя, характеризующего запас устойчивости, делается здесь одновременно с определением устойчивости.

Удобство показателя колебательности определяется также тем, что запас устойчивости характеризуется здесь одним числом, имеющим для достаточно широкого класса систем сравнительно узкие пределы (1,1+1,5).

Если в полиноме числителя передаточной функции разомкнутой системы $W(p)$ нет корней с положительной вещественной частью, то возможность получения требуемого запаса устойчивости замкнутой системы может быть предварительно установлена непосредственно по виду л. а. х. разомкнутой системы. Такая возможность существует, если л. а. х. в окрестностях частот среза $\omega_{ср}$ (рис. 8.25, а) или вблизи нее (рис. 8.24) имеет асимптоту с наклоном -20 дБ/дек (или с нулевым наклоном, что встречается гораздо реже). На рис. 8.25, а протяженность этой асимптоты $h = \omega_2/\omega_1$. Чем больше h , тем больше ожидаемый запас устойчивости. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим два предельных случая.

Пусть л. а. х. состоит только из одной асимптоты с наклоном -20 дБ/дек (рис. 8.25, б), что соответствует передаточной функции $W(p) = K/p$. Тогда замкну-



тая система очень хорошо демпфирована, так как запас устойчивости по амплитуде $L_{\omega} = \infty$, по фазе $\mu_{\omega} = 90^\circ$, а показатель колебательности (см. рис. 8.23) $M = 1$. При наличии дополнительного излома (показано пунктиром на рис. 8.25, б, а также см. рис. 8.24) запас устойчивости уменьшается.

Пусть теперь л. а. х. состоит из одной асимптоты с наклоном -40 дБ/дек (рис. 8.25, в), что соответствует передаточной функции $W(p) = K/p^2$. Нетрудно убедиться, что в этом случае замкнутая система находится на колебательной границе устойчивости, а при наличии дополнительного излома (показано пунктиром) становится неустойчивой.

Таким образом, если л. а. х. разомкнутой системы не имеет асимптоты с наклоном -20 дБ/дек (или с нулевым наклоном), то не обеспечивается даже устойчивость замкнутой системы.

Более детально связь между запасом устойчивости и протяженностью h будет рассмотрена в §12.6.

Оценка быстродействия может производиться по частотным характеристикам замкнутой и разомкнутой системы. При рассмотрении замкнутой системы обычно используется амплитудная частотная характеристика (рис. 8.19).

Для оценки быстродействия по этой характеристике могут использоваться следующие величины:

ω_p — резонансная частота, соответствующая пику а. ч. х.;

ω_n — частота, соответствующая полосе пропускания замкнутой системы и определяемая из условия $A(\omega_n) = 0,707$;

ω_c — частота среза, соответствующая условию $A(\omega_c) = 1$;

ω_{Σ} — эквивалентная полоса пропускания замкнутой системы, определяемая по выражению

$$\omega_{\Sigma} = \int_0^{\infty} |\Phi(j\omega)|^2 d\omega, \quad (8.89)$$

где $|\Phi(j\omega)| = A(\omega)$.

Эквивалентная полоса пропускания представляет собой основание прямоугольника (рис. 8.19), высота которого равна единице, а площадь равна площади под кривой квадратов модуля $\Phi(j\omega)$.

В отличие от показателя колебательности, который является некоторой безразмерной характеристикой и лежит в сравнительно узких пределах, приведенные выше характерные частоты, определяющие быстродействие системы, имеют размерность и их допустимые значения могут сильно меняться в зависимости от типа и назначения системы. Здесь наблюдается полная аналогия с критериями качества, основанными на рассмотрении кривых переходного процесса. Допустимое значение перерегулирования σ % (рис. 8.3) лежит в сравнительно узких пределах для систем самого различного назначения, а допустимое время переходного процесса t_n может меняться от долей секунды до нескольких часов и более.

Допустимые значения ω_p , ω_n , ω_c или ω_{Σ} должны устанавливаться для каждой конкретной системы на основе изучения условий ее эксплуатации. При этом харак-

теризовать быстродействие системы может как вся совокупность указанных выше величин, так и каждая из них в отдельности.

При определении быстродействия по частотной передаточной функции $W(j\omega)$ разомкнутой системы может использоваться частота среза $\omega_{ср}$, которая определяется из условия $\text{mod } W(j\omega_{ср}) = 1$ или $L(\omega_{ср}) = 0$. Эта частота показана, например, на рис. 8.2 и 8.24.

Определение частоты среза разомкнутой системы может быть сделано на диаграмме, изображенной на рис. 8.18, по точке пересечения а. ф. х. с окружностью единичного радиуса, центр которой расположен в начале координат.

Резонансная частота замкнутой системы ω_p близка к частоте колебаний системы в переходном процессе. Значение ω_p может быть приближенно определено по точке а. ф. х. (рис. 8.18), которая ближе всего расположена к точке $(-1, j0)$.

Частота среза $\omega_{ср}$ во многих случаях близка к резонансной частоте системы ω_p .

Удобной и наглядной мерой быстродействия системы является также частота ω_k (рис. 8.2), при которой задающее воздействие вида $g = g_{\text{max}} \sin \omega_k t$ обрабатывается системой с амплитудой ошибки не более x_{max} .

Хотя приведенные выше частотные критерии запаса устойчивости и быстродействия могут рассматриваться независимо от свойств системы во временной области, представляется полезным провести некоторое приближенное сопоставление частотных и временных характеристик.

Если показатель колебательности $M > 1$, то замкнутую систему можно аппроксимировать колебательным звеном (см. § 4.5). Тогда передаточная функция замкнутой системы может быть представлена в виде

$$\Phi(p) = \frac{1}{1 + 2\zeta T p + T^2 p^2}. \quad (8.90)$$

Для этой передаточной функции сравнительно просто найти, как зависят величины, которые определяют запас устойчивости: перерегулирование $\sigma\%$, показатель колебательности M и запас устойчивости по фазе μ_s , от параметра затухания ζ . Соответствующие кривые приведены на рис. 8.26, а.

На рис. 8.26, б дается зависимость между перерегулированием $\sigma\%$ и показателем колебательности M для той же передаточной функции (8.90).

Кривые, приведенные на рис. 8.26, в некоторой мере характеризуют связь между показателями качества и в более сложных случаях, чем выражение (8.90).

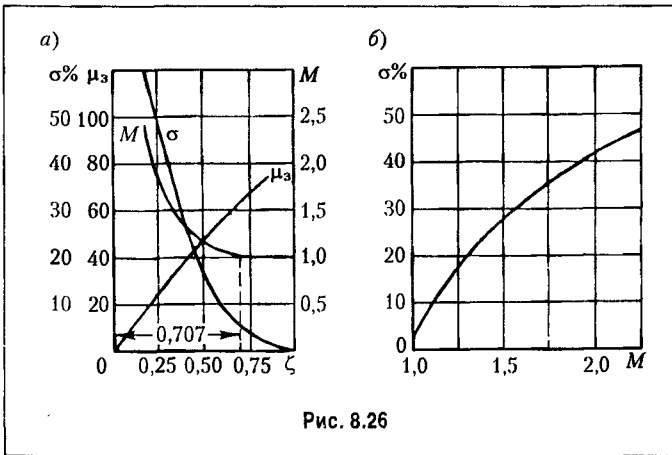


Рис. 8.26

Так как резонансная частота ω_p приблизительно соответствует частоте колебаний замкнутой системы в переходном процессе, то время достижения первого максимума t_M на переходной характеристике (рис. 8.3) может быть определено по приближенной зависимости

$$t_M \approx \frac{\pi}{\omega_p} \approx \frac{\pi}{\omega_{cp}}. \quad (8.91)$$

Если переходный процесс в системе заканчивается за 1–2 колебания, то время переходного процесса можно определить по приближенной зависимости

$$t_{II} \approx (1+2) \frac{2\pi}{\omega_p} \approx (1+2) \frac{2\pi}{\omega_{cp}}. \quad (8.92)$$

Сравнение формул (8.71) и (8.89) показывает, что эквивалентная полоса пропускания ω_s совпадает с точностью до постоянного множителя с интегральной квадратичной оценкой I' , определяемой формулами (8.67) и (8.68). Совпадение будет полным, если рассматривать всю эквивалентную полосу пропускания от $-\omega_s = -2\pi f_s$ до $+\omega_s = 2\pi f_s$ и измерять ее в Герцах. Тогда получаем

$$\Delta f_s = 2f_s = \frac{2\omega_s}{2\pi} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |\Phi(j\omega)|^2 d\omega = I'. \quad (8.93)$$

§ 8.9. Чувствительность систем управления

Действительные значения параметров системы управления практически всегда отличаются от расчетных. Это может вызываться неточностью изготовления отдельных элементов, изменением параметров в процессе хранения и эксплуатации, изменением внешних условий и т. д.

Изменение параметров может привести к изменению статических и динамических свойств системы. Это обстоятельство желательно учесть заранее в процессе проектирования и настройки системы.

Степень влияния изменения отдельных параметров на различные характеристики системы оценивается посредством чувствительности. *Чувствительностью* называется некоторый показатель, характеризующий свойство системы изменять режим работы при отклонении того или иного ее параметра от номинального или исходного значения. В качестве оценки чувствительности используются так называемые *функции чувствительности*, представляющие собой частные производные i -й координаты системы по вариации j -го параметра.

$$u_{ij} = \left(\frac{\partial x_i}{\partial \alpha_j} \right)^0, \quad (8.94)$$

или частные производные от используемого критерия качества I по j -му параметру,

$$U_j = \left(\frac{\partial I}{\partial \alpha_j} \right)^0. \quad (8.95)$$

Нулевым индексом сверху отмечено то обстоятельство, что частные производные должны приниматься равными значениям, соответствующим номинальным (расчетным) параметрам.

Функции чувствительности временных характеристик. Посредством этих функций чувствительности оценивается влияние малых отклонений параметров системы от расчетных значений на временные характеристики системы (переходную функцию, функцию веса и др.).

Исходной системой называют систему, у которой все параметры равны расчетным значениям и не имеют вариаций. Этой системе соответствует так называемое *основное движение*.

Варьированной системой называют такую систему, у которой произошли вариации параметров. Движение ее называют *варьированным движением*.

Дополнительным движением называют разность между варьированным и основным движением.

Пусть исходная система описывается совокупностью нелинейных уравнений первого порядка

$$\frac{dx_i}{dt} = F_i(x_1, \dots, x_n, \alpha_1, \dots, \alpha_m) \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (8.96)$$

Рассмотрим мгновенные вариации параметров $\Delta\alpha_j$ ($j = 1, \dots, m$), так что параметры приняли значения $\alpha_j + \Delta\alpha_j$. Если изменения параметров не вызывают изменения порядка дифференциального уравнения, то варьированное движение будет описываться совокупностью уравнений

$$\frac{d\tilde{x}_i}{dt} = \tilde{F}_i(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n, \alpha_1 + \Delta\alpha_1, \dots, \alpha_m + \Delta\alpha_m) \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (8.97)$$

Для дополнительного движения можно записать

$$\Delta x_i(t) = \tilde{x}_i(t) - x_i(t). \quad (8.98)$$

При условии дифференцируемости $\tilde{x}_i(t)$ и $x_i(t)$ по параметрам α_j ($j = 1, \dots, m$) дополнительное движение можно разложить в ряд Тейлора.

Для малых вариаций параметров допустимо ограничиться линейными членами разложения. Тогда получим уравнения первого приближения для дополнительного движения

$$\Delta x_i(t, \Delta\alpha_1, \dots, \Delta\alpha_m) = \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial x_i}{\partial \alpha_j} \right)^0 \Delta\alpha_j = \sum_{j=1}^m u_{ij} \Delta\alpha_j. \quad (8.99)$$

Частные производные, находящиеся в скобках, должны быть равны их значениям при $\Delta\alpha_j = 0$.

Таким образом, первое приближение для дополнительного движения может быть найдено при известных функциях чувствительности. Заметим, что использование функций чувствительности удобнее для нахождения дополнительного движения по сравнению с прямой формулой (8.98), так как последняя во многих случаях может дать большие ошибки вследствие необходимости вычитать две близкие величины.

При значительных вариациях $\Delta\alpha_j$ может оказаться необходимым использование второго приближения с удерживанием в ряде Тейлора, кроме линейных, также и квадратичных членов.

Дифференцирование исходных уравнений (8.96) по α_j приводит к так называемым *уравнениям чувствительности*

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_j} \left(\frac{dx_i}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_i}{\partial \alpha_j} \right) = \frac{du_{ij}}{dt} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_k} u_{kj} + \frac{\partial F_i}{\partial \alpha_j} \quad (8.100)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m).$$

Решение этих уравнений дает функции чувствительности u_{ij} . Однако уравнения (8.100) оказываются сложными и решение их затруднительно. Более целесообразен путь структурного построения модели, используемой для нахождения функций чувствительности [40, 82].

Обратимся теперь к линейным системам. Не снижая общности рассуждений, можно рассматривать случай изменения одного j -го параметра.

В некоторых случаях функции чувствительности получаются дифференцированием известной функции времени на выходе системы. Так, если передаточная функция системы соответствует апериодическому звену второго порядка, то (см. табл. 4.2)

$$y(t) = \frac{1}{(1+T_3p)(1+T_4p)} \cdot g(t).$$

При поступлении на вход ступенчатой функции $g(t) = g_0 \cdot 1(t)$ на выходе будет

$$y(t) = g_0 \left(1 - \frac{T_3}{T_3 - T_4} e^{-\frac{t}{T_3}} + \frac{T_4}{T_3 - T_4} e^{-\frac{t}{T_4}} \right) \cdot 1(t).$$

Пусть, например, вариацию претерпевает постоянная времени T_3 . Тогда дифференцирование последнего выражения по T_3 даст функцию чувствительности по этому параметру

$$u(t) = \frac{\partial y(t)}{\partial T_3} = \frac{[(T_3 - T_4)t - T_3 T_4] e^{-\frac{t}{T_3}} - T_3 T_4 e^{-\frac{t}{T_4}}}{T_3 (T_3 - T_4)^2} \cdot g_0 \cdot 1(t).$$

Дополнительное движение при этом будет $\Delta y(t) = u(t) \Delta T_3$, где ΔT_3 — вариация постоянной времени T_3 .

Пусть рассматриваемая система описывается совокупностью уравнений первого порядка

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k + \sum_{q=1}^l b_{iq} f_q(t) \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (8.101)$$

где a_{ik} и b_{iq} — постоянные коэффициенты, x_i — фазовые координаты, а $f_q(t)$ — внешние воздействия. Начальные условия в системе: при $t = 0$ $x_i = x_i^0$ ($i = 1, \dots, n$). Уравнения чувствительности получаются из (8.101) дифференцированием по варьируемому параметру α_j , от которого могут зависеть коэффициенты a_{ik} и b_{iq} :

$$\frac{du_{ij}}{dt} = \sum_{k=1}^n a_{ik} u_{kj} + \sum_{k=1}^n c_{ik} x_k + \sum_{q=1}^l d_{iq} f_q(t) \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (8.102)$$

где $c_{ik} = \frac{\partial a_{ik}}{\partial \alpha_j}$ и $d_{iq} = \frac{\partial b_{iq}}{\partial \alpha_j}$ — частные производные от коэффициентов системы уравнений (8.101) по варьируемому параметру α_j . Уравнениям (8.102) соответствуют начальные значения $u_{ij}^0 = \frac{\partial x_i^0}{\partial \alpha_j}$ ($i = 1, \dots, n$). Если начальные значения x_i^0 не зависят от

параметра α_j , то уравнениям (8.102) соответствуют нулевые начальные условия.

Для решения (8.102) необходимо предварительно решить совокупность уравнений (8.101) и определить походное движение $x_i(t)$ ($i = 1, \dots, n$).

Для нахождения функций чувствительности и дополнительного движения удобно использовать передаточные функции системы. Пусть, например, управляемая величина $y(t, \alpha_j)$ связана с задающим воздействием зависимостью

$$y(t, \alpha_j) = L^{-1}[Y(p, \alpha_j)] = L^{-1}[\Phi(p, \alpha_j) G(p)], \quad (8.103)$$

где $G(p)$ — изображение задающего воздействия.

Функция чувствительности может быть получена из (8.103) дифференцированием по параметру α_j :

$$u_j(t) = \frac{\partial y(t, \alpha_j)}{\partial \alpha_j} = L^{-1} \left[\frac{\partial Y(p, \alpha_j)}{\partial \alpha_j} \right] = L^{-1} \left[\frac{\partial \Phi(p, \alpha_j)}{\partial \alpha_j} G(p) \right] = L^{-1} [S_j(p) G(p)]. \quad (8.104)$$

Здесь введена функция чувствительности передаточной функции

$$S_j(p) = \left[\frac{\partial \Phi(p, \alpha_j)}{\partial \alpha_j} \right]^0, \quad (8.105)$$

которая определяет первое приближение дополнительной передаточной функции, равной разности варьируемой и исходной передаточных функций при вариации параметра α_j :

$$\Delta \Phi_j(p, \alpha_j) = \tilde{\Phi}(p, \alpha_j) - \Phi(p, \alpha_j) = S_j(p) \Delta \alpha_j. \quad (8.106)$$

Эти зависимости справедливы в том случае, когда вариация параметра α_j не меняет порядка характеристического уравнения системы.

Может также использоваться так называемая *логарифмическая функция чувствительности*

$$\sigma_j(p) = \frac{\partial \Phi(p, \alpha_j)}{\Phi(p, \alpha_j)} \cdot \frac{\partial \alpha_j}{\alpha_j} = \frac{\partial \ln \Phi(p, \alpha_j)}{\partial \ln \alpha_j} = \frac{\alpha_j}{\Phi(p, \alpha_j)} S_j(p). \quad (8.107)$$

Формула (8.107), строго говоря, может использоваться в тех случаях, когда $\Phi(p, \alpha_j)$ и α_j представляют собой безразмерные величины. Если эти величины размерны, то их логарифмирование возможно, если использовать прием, указанный в § 4.4.

Найдем дополнительную передаточную функцию для случая, когда исходная передаточная функция может быть представлена в виде отношения двух полиномов:

$$\begin{aligned} \Delta \Phi_j(p) &= S_j(p) \Delta \alpha_j = \frac{\partial \Phi(p, \alpha_j)}{\partial \alpha_j} \Delta \alpha_j = \frac{\partial R(p, \alpha_j)}{\partial \alpha_j} \Delta \alpha_j = \\ &= \frac{1}{D(p, \alpha_j)} [\Delta R(p) - \Phi(p, \alpha_j) \Delta D(p)], \end{aligned} \quad (8.108)$$

где $\Delta R(p)$ и $\Delta D(p)$ — вариации полиномов числителя и знаменателя передаточной функции.

Формула (8.108) позволяет составить структурную схему модели чувствительности в виде, изображенном на рис. 8.27. Эта схема может быть использована для нахождения функции дополнительного движения $\Delta y(t)$ или функции чувствительности $u(t) = \Delta y(t) : \Delta \alpha_j$ расчетным путем или моделированием на ЭВМ.

Составим, например, модель чувствительности для передаточной функции замкнутой системы

$$\Phi(p) = \frac{K(1 + \tau p)}{K + K\tau p + p^2} \quad (8.109)$$

при вариации параметра τ . В соответствии с изложенным находим $\Delta R(p) = \Delta D(p) = = K_p \Delta \tau$. Равенство приращений числителя и знаменателя $\Phi(p)$ позволяет упростить схему модели. Она изображена на рис. 8.28, а в исходном, а на рис. 8.28, б — в преобразованном виде.

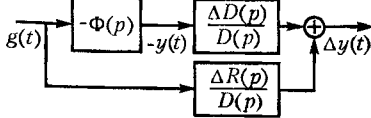


Рис. 8.27

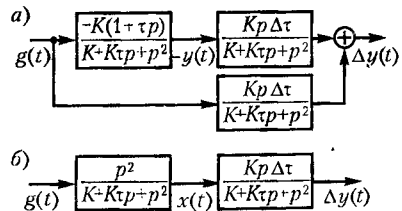


Рис. 8.28

В общем случае, когда передаточная функция зависит от ряда варьируемых параметров, дополнительная передаточная функция

$$\Delta\Phi(p, \alpha_1, \dots, \alpha_m) \approx \sum_{j=1}^m \left[\frac{\partial\Phi(p, \alpha_1, \dots, \alpha_m)}{\partial\alpha_j} \right]^0 \Delta\alpha_j = \sum_{j=1}^m S_j(p) \Delta\alpha_j. \quad (8.110)$$

Если к системе приложено несколько внешних воздействий $[g(t), f_1(t), \dots, f_l(t)]$, то следует найти дополнительные передаточные функции для всех исходных передаточных функций, определенных для каждого внешнего воздействия.

Функции чувствительности критериев качества. Если в системе произошли изменения ряда параметров $\Delta\alpha_j (j = 1, \dots, m)$, то результирующее изменение некоторой используемой оценки качества

$$\Delta I = \tilde{I} - I, \quad (8.111)$$

где \tilde{I} — варьированное значение оценки качества, а I — ее исходное значение, можно подсчитать по формуле полного дифференциала

$$\Delta I \approx \sum_{j=1}^m U_j \Delta\alpha_j. \quad (8.112)$$

Так как в большинстве случаев известны только вероятностные оценки вариаций $\Delta\alpha_j$, то целесообразно использование вероятностных методов. Так, если известны максимальные возможные отклонения $\Delta\alpha_{j\max}$, то при их независимости друг от друга можно найти среднеквадратичный максимум отклонения оценки качества

$$\Delta I_{\max} = \sqrt{\sum_{j=1}^m (U_j \Delta\alpha_{j\max})^2} \quad (8.113)$$

и среднеквадратичный относительный максимум

$$\Delta_{\max} = \frac{\Delta I_{\max}}{I}. \quad (8.114)$$

Если заданы дисперсии отклонений параметров $D_j = M [(\Delta\alpha_j)^2]$ и отклонения независимы, то можно найти дисперсию оценки качества

$$D_I = \sum_{j=1}^m U_j^2 D_j. \quad (8.115)$$

В качестве критериев оценки качества системы могут использоваться, например, максимум ошибки, коэффициенты ошибок, оценки запаса устойчивости и быстродействия, интегральные оценки и т. п.

Пример. Пусть передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$W(p) = \frac{K}{p(1+Tp)}$$

Требуется определить среднеквадратичный максимум отклонения показателя колебательности, если $K = 100 \pm 10 \text{ с}^{-1}$ и $T = 0,03 \pm 0,01 \text{ с}$, причем изменения параметров независимы.

Определим вначале исходное значение показателя колебательности. Для этого необходимо найти максимум модуля частотной передаточной функции замкнутой системы

$$M = \left| \frac{W(j\omega)}{1+W(j\omega)} \right|_{\max} = \frac{K}{|K + j\omega + T(j\omega)^2|}$$

Исследование на максимум дает: при $KT \leq 2$ показатель колебательности $M = 1$, при $KT > 2$ показатель колебательности

$$M = \frac{2KT}{\sqrt{4KT-1}} = \frac{2 \cdot 100 \cdot 0,03}{\sqrt{4 \cdot 100 \cdot 0,03 - 1}} = 1,8.$$

Функции чувствительности, если $\alpha_1 = K$ и $\alpha_2 = T$,

$$U_1 = \left(\frac{\partial M}{\partial K} \right)^0 = \left[\frac{2T(2KT-1)}{(4KT-1)^{\frac{3}{2}}} \right]^0 = 0,005 \text{ с},$$

$$U_2 = \left(\frac{\partial M}{\partial T} \right)^0 = \left[\frac{2K(2KT-1)}{(4KT-1)^{\frac{3}{2}}} \right]^0 = 16,7 \text{ с}^{-1}.$$

Среднеквадратичный максимум отклонения (8.113)

$$\Delta M_{\max} = \sqrt{(0,005 \cdot 10)^2 + (16,7 \cdot 0,01)^2} = 0,175.$$

Таким образом, в рассматриваемой системе показатель колебательности $M = 1,8 \pm 0,175$.

Глава 9

ПОВЫШЕНИЕ ТОЧНОСТИ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

§ 9.1. Общие методы

К числу общих методов повышения точности систем автоматического управления относятся:

- 1) увеличение коэффициента передачи разомкнутой системы;
- 2) повышение порядка астатизма;
- 3) применение управления по производным от ошибки.

Увеличение коэффициента передачи разомкнутой системы является наиболее универсальным и эффективным методом. Увеличить коэффициент передачи можно обычно за счет введения в систему усилителей. Однако в некоторых случаях удается достичь этого увеличения за счет повышения коэффициентов передачи отдельных звеньев, например чувствительных элементов, редукторов и т. д.

Увеличение коэффициента передачи благоприятно сказывается в смысле уменьшения ошибок практически во всех типовых режимах. Это вытекает, в частности, из того, что он входит в качестве делителя во все коэффициенты ошибок (см. пример, рассмотренный в § 8.3).

Однако увеличение коэффициента передачи ограничивается устойчивостью системы. При повышении коэффициента передачи, как правило, система приближается к колебательной границе устойчивости. При некотором предельном его значении в системе возникают незатухающие колебания. В этом сказывается противоречие между требованиями к точности и требованиями к устойчивости системы управления.

В связи с этим повышение коэффициента передачи до значения, при котором обеспечивается выполнение требований к точности, обычно может производиться только при одновременном повышении запаса устойчивости системы, что осуществляется при помощи так называемых корректирующих средств, рассматриваемых в следующей главе.

Повышение порядка астатизма. Повышение порядка астатизма используется для устранения установившихся ошибок в различных типовых режимах: в неподвижном положении, при движении с постоянной скоростью, при движении с постоянным ускорением и т. д. Формально это сводится к тому, чтобы сделать равными нулю первые коэффициенты ошибки системы, например, $c_0 = 0$ при астатизме первого порядка, или $c_0 = c_1 = 0$ при астатизме второго порядка, или $c_0 = c_1 = c_2 = 0$ при астатизме третьего порядка и т. д. Физически повышение порядка астатизма осуществляется за счет введения в канал системы интегрирующих звеньев. В качестве таких звеньев могут, например, использоваться звенья, изображенные на рис. 4.18.

Структурная схема системы с введенным интегрирующим звеном изображена на рис. 9.1. Передаточная функция интегрирующего звена

$$W_n(p) = \frac{k_n}{p},$$