В соответствии с (11.147)

$$\overline{x_{\min}^2}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{2\mu D}{\mu^2+\omega^2}-\frac{4\mu^2 D}{A(1+\mu a)^2}\frac{1}{\mu^2+\omega^2}\right\}d\omega=\frac{D}{1+\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\frac{2D}{\mu N}}-1\right)}.$$

Нахождение оптимальной передаточной функции еще не означает, что реальная автоматическая система может быть выполнена оптимальной, так как реализация ее может быть сопряжена с большими трудностями. Оптимальную передаточную функцию, за исключением простейших случаев, следует считать идеальной функцией, к которой по возможности надо стремиться при выполнении реальной автоматической системы. Теория оптимальных систем излагается в работах [22, 88, 89].

Глава 12 МЕТОДЫ СИНТЕЗА СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

§ 12.1. Общие соображения

Под синтезом системы автоматического управления понимается направленный расчет, имеющий конечной целью отыскание рациональной структуры системы и установление оптимальных величин параметров ее отдельных звеньев. По отношению к основе синтеза в настоящее время имеются разные точки зрения.

Синтез можно трактовать как пример вариационной задачи и рассматривать такое построение системы, при котором для данных условий работы (управляющие и возмущающие воздействия, помехи, ограничения по времени работы и т. п.) обеспечивается теоретический минимум ошибки.

Синтез также можно трактовать как инженерную задачу, сводящуюся к такому построению системы, при котором обеспечивается выполнение технических требований к ней. Подразумевается, что из многих возможных решений инженер, проектирующий систему, будет выбирать те, которые являются оптимальными с точки зрения существующих конкретных условий и требований к габаритам, весу, простоте, надежности и т. п.

Иногда в понятие инженерного синтеза вкладывается еще более узкий смысл и рассматривается синтез, имеющий целью определение вида и параметров корректирующих средств, которые необходимо добавить к некоторой неизменяемой части системы (объект с управляющим устройством), чтобы обеспечить требуемые динамические качества.

При инженерном синтезе системы автоматического управления необходимо обеспечить, во-первых, требуемую точность и, во-вторых, приемлемый характер переходных процессов.

Решение первой задачи в большинстве случаев сводится к определению требуемого общего коэффициента передачи разомкнутой системы и, в случае необходимости, — вида корректирующих средств, повышающих точность системы (комбинированное управление, изодромные механизмы и т. п.). Эта задача может решаться при помощи определения ошибок в типовых режимах на основе тех критериев точности, которые были изложены в главе 8. Решение этой задачи, как правило, не сопряжено с трудностями принципиального или вычислительного характера, так как критерии точности достаточно просты для их практического использования. В сложных случаях можно прибегать к помощи моделирования. Решение оказывается сравнительно простым вследствие необходимости установления значений относительно небольшого числа параметров. В простейшем случае необходимо найти только коэффициент передачи разомкнутой системы.

Решение второй задачи — обеспечение приемлемых переходных процессов — оказывается почти всегда более трудным вследствие большого числа варьируемых параметров и многозначности решения задачи демпфирования системы. Поэтому существующие инженерные методы часто ограничиваются решением только второй задачи, так как их авторы считают, что обеспечение требуемой точности может быть достаточно просто сделано на основании использования существующих критериев точности и совершенствования их практически не требуется.

В настоящее время для целей синтеза систем автоматического управления широко используются вычислительные машины, позволяющие производить полное или частичное моделирование проектируемой системы. При таком моделировании становится возможным наиболее полно исследовать влияние различных факторов нелинейности, зависимость параметров от времени и т. п.

Однако моделирование на вычислительных машинах не может заменить расчетных методов проектирования, которые во многих случаях позволяют исследовать вопрос в общем виде и среди многих решений найти оптимальное. Поэтому, несмотря на развитие и распространение машинных методов синтеза, теория должна располагать собственными методами, которые дополняли бы моделирование и являлись бы теоретической базой при отыскании оптимального решения.

§ 12.2. Корневой метод

Наиболее простой корневой метод разработан Т. Н. Соколовым [85]. Сущность его сводится к следующему[1].

Пусть имеется характеристическое уравнение системы

$$p^n + A_1 p^{n-1} + \ldots + A_n = 0. \tag{12.1}$$

[1] В соответствии с изложенным в § 12.1 рассматривается только задача получения приемлемых динамических качеств при заданном значении коэффициента, т. е. последнего члена характеристического уравнения.

С точки зрения скорейшего затухания переходного процесса важно, чтобы вещественные части всех корней характеристического уравнения были наибольшими. Сумма вещественных частей всех корней численно равна первому коэффициенту характеристического уравнения (12.1). Поэтому при заданной величине этого коэффициента наивыгоднейшие результаты получаются при равенстве вещественных частей всех корней. Однако расчеты и исследования построенных систем показывают, что стремление удовлетворить поставленному требованию приводит к совершенно нереальным конструктивным характеристикам отдельных звеньев. Эти расчеты и исследования показывают, что из общего числа корней характеристического уравнения всегда можно выделить два или три корня с меньшей по абсолютному значению вещественной частью, которые и определяют ход основного процесса. Остальные же корни характеризуют быстро затухающие составляющие, оказывающие влияние только на начальной стадии переходного процесса.

Примем, что основной характер переходного процесса определяется двумя корнями. Тогда уравнение (12.1) удобно представить в виде

$$(p^{n-2} + C_1 p^{n-3} + \ldots + C_{n-2})\,(p^2 + B_1 p + B_2) = 0. \tag{12.2}$$

Второй сомножитель (12.2) и будет определять основной характер процесса.

Для уменьшения погрешностей проектируемой системы важно, чтобы коэффициент B_2 в основном множителе имел возможно большую величину. Однако чрезмерное увеличение B_2 приводит к колебательному характеру переходного процесса.

Оптимальное соотношение между коэффициентами B_1 и B_2 определяется из условия получения затухания за один период $\xi = 98\%$, которому соответствует выражение (см. § 8.5)

$$2\pi\frac{\alpha}{\beta} = \ln\frac{1}{1-\xi} = \ln\frac{1}{0{,}02} = 4, \tag{12.3}$$

где α и β — вещественная и мнимая части комплексного корня, характеризующего основной процесс.

Учитывая соотношения:

$$\alpha = \frac{B_1}{2}, \quad \beta = \sqrt{B_2 - \frac{B_1^2}{4}},$$

из (12.3) можно получить

$$B_2 = \frac{\pi^2 + 4}{16} B_1^2 = k_{\text{п}} B_1^2. \tag{12.4}$$

Множитель $k_{\text{п}}$, определяющий соотношение между коэффициентами основного множителя характеристического уравнения, является критерием переходного режима, зависящим от выбранной степени затухания. Формула (12.4) показывает желаемое соотношение между коэффициентами характеристического уравнения, к которому надо стремиться при проектировании системы. Это должно осуществляться введением различных корректирующих средств.

Из (12.3) можно также получить требуемое соотношение между мнимой и вещественной частями корня (колебательность):

$$\mu = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\pi}{2} = 1{,}57. \tag{12.5}$$

В ряде случаев для описания основного переходного процесса оказывается более целесообразным воспользоваться уравнением третьей степени

$$p^3 + B_1 p^2 + B_2 p + B_3 = 0. \tag{12.6}$$

Это уравнение можно представить в виде

$$(p + C_{11})(p^2 + B_{11}p + B_{21}) = 0. \tag{12.7}$$

Между коэффициентами уравнений (12.6) и (12.7) имеют место соотношения:

$$B_1 = C_{11} + B_{11}, \quad B_2 = C_{11}B_{11} + B_{21}, \quad B_3 = C_{11}B_{21}.$$

Положим, что во втором множителе (12.7) по-прежнему

$$B_{21} = \frac{\pi^2 + 4}{16} B_{11}^2. \tag{12.8}$$

Поэтому корни характеристического уравнения (12.6) и (12.7) равны:

$$p_1 = -C_{11}, \tag{12.9}$$

$$p_{2,3} = -\frac{B_{11}}{2} \pm j\frac{B_{11}}{2}\frac{\pi}{2}. \tag{12.10}$$

Так как вещественная часть корней должна быть возможно большей, то целесообразно задать

$$C_{11} = \frac{B_{11}}{2} \tag{12.11}$$

и, следовательно,

$$B_{11} = \frac{2}{3}B_1, \tag{12.12}$$

$$C_{11} = \frac{1}{3}B_1, \tag{12.13}$$

$$B_{21} = \frac{\pi^2 + 4}{36}B_1^2. \tag{12.14}$$

Подставив полученные значения в формулы разложения, находим зависимость между коэффициентами основного уравнения. Если B_1 задано, то

$$B_2 = \frac{\pi^2 + 12}{36} B_1^2, \tag{12.15}$$

$$B_3 = \frac{\pi^2 + 4}{108} B_1^3. \tag{12.16}$$

Эти соотношения должны реализоваться при проектировании системы управления.

Корни основного уравнения

$$p_1 = -\frac{1}{3} B_1, \tag{12.17}$$

$$p_{2,3} = -\frac{1}{3} B_1 \pm j\frac{\pi}{6} B_1. \tag{12.18}$$

Выбор уравнения для описания основной составляющей переходного процесса зависит от структурной схемы проектируемой системы.

Рассмотрим теперь связь между основной и дополнительной составляющими переходного процесса для заданного затухания ζ (8.40). Для этой цели полезно представить характеристическое уравнение (12.1) в таком виде:

$$p^n A_1 \Omega_0 p^{n-1} + A_2 \Omega_0^2 p^{n-2} + \ldots + \Omega_0^n = 0, \tag{12.19}$$

где Ω_0 — произвольно выбранный среднегеометрический корень, A_1, ..., A_{n-1} — безразмерные коэффициенты.

Записанное в такой форме уравнение третьей степени принимает вид

$$p^3 + A_1 \Omega_0 p^{n-1} + A_2 \Omega_0^2 p + \Omega_0^3 = 0. \tag{12.20}$$

Разлагая его на множители, находим

$$(p + C_1)\,(p^2 + B_1 p + B_2) = 0.$$

Соотношения для коэффициентов:

$$A_1 \Omega_0 = C_1 + B_1, \tag{12.21}$$

$$A_2 \Omega_0^2 = B_2 + C_1 B_1, \tag{12.22}$$

$$\Omega_0^3 = C_1 B_2. \tag{12.23}$$

Введем коэффициент a и положим

$$B_1 = a\, A_1 \Omega_0. \tag{12.24}$$

Тогда

$$C_1 = (1 - a)\, A_1 \Omega_0, \tag{12.25}$$

$$B_2 = k_п B_1^2 = k_п a^2 A_1^2 \Omega_0^2. \tag{12.26}$$

Подставив полученные значения коэффициентов в формулы (12.22) и (12.23), можем записать:

$$A_2 \Omega_0^2 = [1 - a(1 - k_п)]\, a A_1^2 \Omega_0^2, \quad \Omega_0^3 = k_п (1 - a)\, a^2 A_1^3 \Omega_0^3,$$

откуда

$$A_1 = \sqrt[3]{\frac{1}{k_п (1 - a) a^2}}, \tag{12.27}$$

$$A_2 = [1 - a\,(1 - k_п)]\, a A_1^2. \tag{12.28}$$

Таким образом, безразмерные коэффициенты A_1 и A_2 являются функциями критерия переходного процесса $k_п$, зависящего от желаемой степени затухания и коэффициента разложения a, определяющего соотношение постоянных времени затухания отдельных составляющих.

При $a = \frac{2}{3}$ имеем $\frac{C_1}{B_1} = \frac{1-a}{a} = \frac{1}{2}$, т. е. $C_1 = \frac{B_1}{2}$, и отношение постоянных времени $T_C = \frac{1}{C_1}$ и $T_\alpha = \frac{B_1}{2}$ будет $\frac{T_C}{T_\alpha} = \frac{B_1}{2C_1} = 1$.

Следовательно, обе составляющие переходного процесса затухают с одинаковой скоростью.

Аналогичным образом можно получить выражения для коэффициентов характеристического уравнения четвертой, пятой и более высоких степеней [85].

Синтез системы управления начинается с того, что для выбранной структурной схемы и введенных корректирующих средств находится характеристическое уравнение. Затем варьируются параметры основного канала и корректирующих средств таким образом, чтобы получить требуемые значения коэффициентов характеристического уравнения (12.1) или (12.20).

Этот метод оказывается достаточно эффективным в случае сравнительно невысокой степени характеристического уравнения ($n = 2 \div 4$). В более сложных случаях обеспечить требуемые значения коэффициентов характеристического уравнения оказывается затруднительно, так как некоторые параметры системы и корректирующих средств могут влиять сразу на несколько коэффициентов характеристического уравнения.

Недостатком этого метода является также то, что необходимо задаваться видом корректирующих средств. Поэтому получаемое решение будет во многом зависеть от опытности проектанта.

§ 12.3. Метод корневых годографов

Качество системы управления с точки зрения быстродействия и запаса устойчивости может характеризоваться расположением корней числителя и знаменателя передаточной функции замкнутой системы, т. е. расположением нулей и полюсов передаточной функции (§ 8.5).

Зная эти корни, можно изобразить их расположение на комплексной плоскости корней. При расчете системы целесообразно проследить, как меняется общая картина расположения корней при изменении отдельных параметров, например коэффициента передачи разомкнутой системы, постоянных времени корректирующих цепей и т. п., с целью установления оптимальных значений этих параметров.

При плавном изменении значения какого-либо параметра корни будут перемещаться на плоскости корней, прочерчивая некоторую кривую, которую будем называть *корневым годографом* или *траекторией корней*. Построив траектории всех корней, можно выбрать такое значение варьируемого параметра, которое соответствует наилучшему расположению корней.

Первый способ построения траекторий корней заключается в следующем. Пусть имеется дифференциальное уравнение замкнутой системы (5.3), записанное для управляемой величины при наличии задающего воздействия:

$$D(p)\,y(t) = B(p)\,g(t),$$

где

$$D(p) = a_0p^n + a_1p^{n-1} + \ldots + a_n, \qquad B(p) = b_0p^m + b_1p^{m-1} + \ldots + b_m.$$

Это уравнение записано здесь для случая равенства нулю возмущающих воздействий. Оно может быть записано также для любого возмущающего воздействия. Это не изменит его формы и не отразится на дальнейших рассуждениях.

Передаточная функция замкнутой системы

$$\Phi(p) = \frac{b_0p^m + b_1p^{m-1} + \ldots + b_m}{a_0p^n + a_1p^{n-1} + \ldots + a_n}. \tag{12.29}$$

Полюсы передаточной функции, т. е. корни знаменателя, обозначим через $p_1, p_2, \ldots, p_n$, а ее нули (корни числителя) — через $p_1^0, p_2^0, \ldots, p_m^0$.

Коэффициенты числителя и знаменателя (12.29) определенным образом выражены через параметры объекта, управляющего устройства и корректирующих устройств. Если нужно выбрать величину какого-либо параметра β (постоянная времени, коэффициент усиления и т. п.), входящего как угодно в коэффициенты (12.29), то необходимо принять некоторые постоянные значения для всех остальных параметров, а для искомого параметра β задавать различные числовые значения $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ внутри реально возможных пределов изменения этого параметра в данной системе. Для каждого из этих вариантов необходимо затем вычислить корни числителя и знаменателя (12.29). Результаты вычислений можно свести в таблицу, на основании которой легко строятся все траектории корней.

Если нужно выбрать два или несколько параметров системы, то такого рода вычисления нужно проделать несколько раз, меняя каждый раз один из параметров при заданных значениях всех остальных.

Вычисление корней при этом можно производить при помощи стандартных программ для цифровых машин с выводом траектории корней на экран дисплея. Другой способ построения траекторий корней рассмотрен в [91].

§ 12.4. Метод стандартных переходных характеристик

Для получения необходимых значений коэффициентов передаточной функции разомкнутой системы можно воспользоваться стандартными переходными характеристиками. Для большей общности эти характеристики строятся в нормированном виде. В этом случае по оси времени откладывается относительное время $\tau = \Omega_0 t$, где Ω_0 – среднегеометрический корень характеристического уравнения, определяющий быстродействие системы.

При построении стандартных переходных характеристик необходимо задаться определенным распределением корней характеристического уравнения.

Ниже приводятся стандартные характеристики и соответствующие передаточные функции [44].

Для систем с астатизмом первого порядка корни приняты вещественными, причем они составляют арифметическую прогрессию. В табл. 12.1 приведены передаточные функции разомкнутой системы для различных порядков характеристического уравнения $n = 2 \div 4$, получающиеся при этом значения перерегулирования $\sigma\%$ и добротности по скорости K_v.

Нормированные переходные характеристики для каждого случая приведены на рис. 12.1, *а*.

Для систем с астатизмом второго порядка корни также приняты вещественными, причем они составляют геометрическую прогрессию. Соответствующие передаточные функции приведены в табл. 12.2, а переходные характеристики – на рис. 12.1, *б*.

Таблица 12.1. **Стандартные передаточные функции разомкнутой системы с астатизмом первого порядка при $n = 2 \div 4$**

n	$\sigma\%$	K_v	$W(p)$
2	5	$\dfrac{\Omega_0}{1{,}4}$	$\dfrac{\Omega_0^2}{p^2 + 1{,}4\Omega_0 p}$
3	8	$\dfrac{\Omega_0}{2}$	$\dfrac{\Omega_0^3}{p^3 + 2\Omega_0 p^2 + 2\Omega_0^2 p}$
5	10	$\dfrac{\Omega_0}{2{,}6}$	$\dfrac{\Omega_0^4}{p^4 + 2{,}6\Omega_0 p^3 + 3{,}4\Omega_0^2 p^2 + 2{,}6\Omega_0^3 p}$