

# РАЗДЕЛ III

## ЛИНЕЙНЫЕ ДИСКРЕТНЫЕ СИСТЕМЫ

### Глава 14

### ИМПУЛЬСНЫЕ СИСТЕМЫ

#### § 14.1. Общие сведения

Линейной импульсной системой называется такая система автоматического управления, которая кроме звеньев, описываемых линейными дифференциальными уравнениями, содержит *импульсный элемент*, преобразующий непрерывное входное воздействие в последовательность импульсов (рис. 14.1, а). Примеры импульсных систем рассмотрены в главе 1.

В общем случае можно изобразить обобщенную структурную схему импульсной системы так, как показано на рис. 14.1, б, где все непрерывные звенья сведены в один блок — непрерывную часть системы ПЧ. Последняя может иметь какую угодно структуру (любой сложности, с обратными связями и т. п.).

Импульсный элемент может представлять собой самостоятельное функциональное устройство (см., например, рис. 1.25) или являться составной частью цифро-аналоговых преобразователей, входящих в систему управления с цифровыми управляющими машинами (ЦВМ). Более подробно системы с ЦВМ будут рассмотрены ниже.

В процессе преобразования непрерывного сигнала в дискретный импульсный элемент (рис. 14.1, а) выполняет две операции: квантование по времени и импульсную модуляцию. Первая из них состоит в том, что сигнал  $u^*(t)$  появляется в дискретные моменты времени  $t = t_i (i = 0, 1, 2, \dots)$ . Чаще всего эти моменты времени равноотстоящие, т. е.  $t_i = iT$ , где  $T$  — период дискретности. В результате импульсной модуляции изменяется какой-либо параметр импульса (амплитуда, ширина). Форма импульсов может быть любой (прямоугольной, трапецидальной и т. п.), но обычно используются импульсы прямоугольной формы.

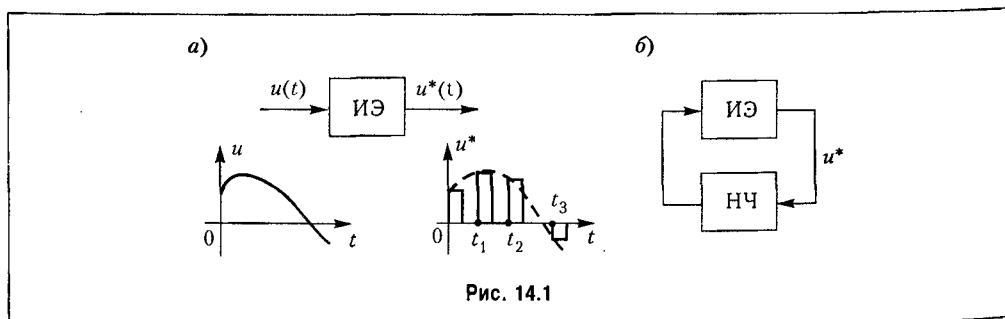


Рис. 14.1

Наиболее распространенными в настоящее время видами импульсной модуляции являются амплитудно-импульсная (АИМ) и широтно-импульсная (ШИМ).

При амплитудно-импульсной модуляции модулируемым параметром служит амплитуда (высота) импульсов. Обычно она пропорциональна значениям непрерывного сигнала  $u(t)$  в дискретные моменты времени  $t = iT$  ( $i = 0, 1, 2, \dots$ ), т. е. значениям

$$u(iT) = u(t)|_{t=iT}. \quad (14.1)$$

Сигнал  $u^*(t)$  на выходе импульсного элемента формируется в виде (рис. 14.2)

$$u^*(t) = \begin{cases} k_A u(iT) & \text{при } iT \leq t < (i+\gamma)T, \\ 0 & \text{при } (i+\gamma)T \leq t < (i+1)T, \end{cases} \quad (14.2)$$

где  $k_A$  — коэффициент пропорциональности;  $\gamma$  — скважность импульсов ( $0 < \gamma \leq 1$ ), которая остается постоянной.

При широтно-импульсной модуляции модулируемым параметром является ширина или длительность импульсов  $\tau_i = \gamma_i T$ , где  $\gamma_i = \gamma(u(iT))$  — скважность  $i$ -го импульса. Амплитуда импульсов при этом остается постоянной. Сигнал на выходе импульсного элемента (широтно-импульсного модулятора) формируется в виде (рис. 14.3)

$$u^*(t) = \begin{cases} h \operatorname{sign} u(iT) & \text{при } iT \leq t < (i+\gamma_i)T, \\ 0 & \text{при } (i+\gamma_i)T \leq t < (i+1)T, \end{cases} \quad (14.3)$$

где  $h$  — амплитуда импульсов, а  $\operatorname{sign} u(iT)$  означает знак величины  $u(iT)$ .

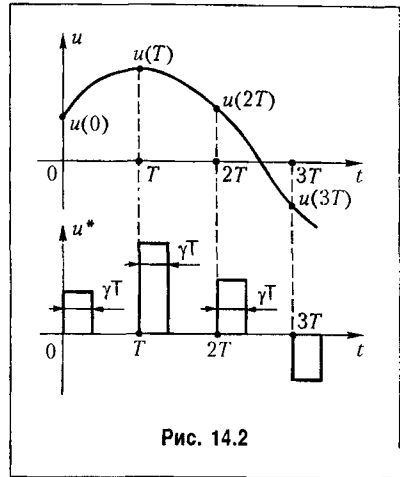


Рис. 14.2

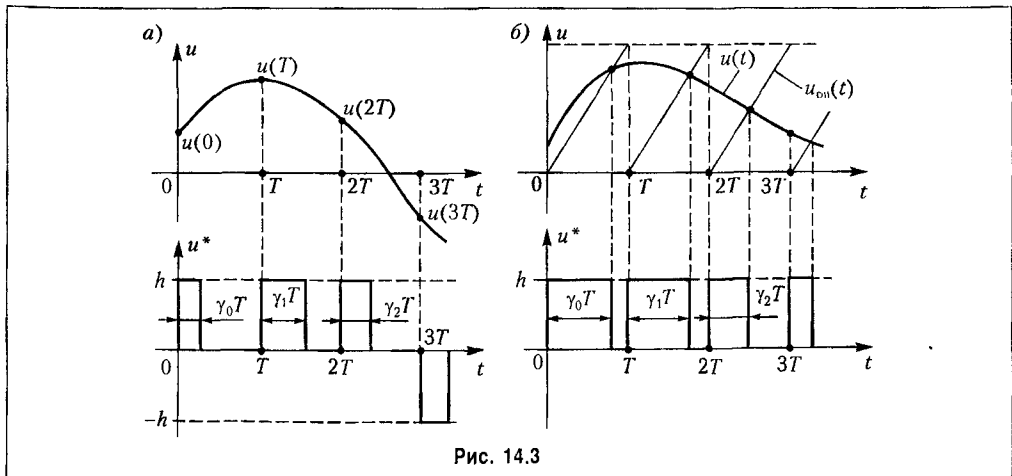


Рис. 14.3

В зависимости от способа определения текущего значения скважности  $\gamma_i$  различают широтно-импульсную модуляцию 1-го рода (ШИМ-1) и 2-го рода (ШИМ-2).

При ШИМ-1 (рис. 14.3, а) скважность  $i$ -го импульса

$$\gamma_i = \begin{cases} k_{\text{ш}} |u(iT)| & \text{при } k_{\text{ш}} |u(iT)| < 1, \\ 1 & \text{при } k_{\text{ш}} |u(iT)| \geq 1, \end{cases} \quad (14.4)$$

где  $k_{\text{ш}}$  — коэффициент пропорциональности (крутизна характеристики широтно-импульсного модулятора).

Так как длительность импульса  $\tau_i = \gamma_i T$  не может быть больше периода дискретности  $T$ , то при  $|u(iT)| \geq k_{\text{ш}}^{-1}$  скважность  $\gamma_i = 1$ , т. е. происходит насыщение модулятора.

При ШИМ-2 (рис. 14.3, б) длительность импульсов определяется в результате сравнения непрерывного входного сигнала  $u(t)$  с некоторым периодическим опорным сигналом  $u_{\text{оп}}(t)$ , в качестве которого обычно используется пилообразный сигнал, формируемый специальным генератором. Импульсы запускаются в моменты времени  $t = iT$  и существуют до момента совпадения сигналов  $u(t)$  и  $u_{\text{оп}}(t)$ . Как правило, ШИМ-2 используется в системах, в которых сигнал  $u(t)$  не меняет свой знак. Примером может служить система стабилизации напряжения, рассмотренная в главе 1.

Широтно-импульсный модулятор, даже если он в процессе работы системы управления не насыщается, является нелинейным звеном. В этом можно убедиться, воспользовавшись принципом суперпозиции, согласно которому реакция линейного звена на сумму входных воздействий должна быть равна сумме реакций.

Рассмотрим, например, ШИМ-1, положив для простоты в (14.4)  $k_{\text{ш}} = 1$ . Пусть сигнал на входе модулятора  $u(t) = u_1(t) + u_2(t)$  представляет собой ступенчатую функцию, причем  $u_1(t) = 0,2 \cdot 1(t)$ ,  $u_2(t) = 0,5 \cdot 1(t)$ . Если сигналы  $u_1(t)$  и  $u_2(t)$  действуют одновременно, то в соответствии с (14.3) и (14.4) на выходе модулятора появится последовательность импульсов  $u^*(t)$ , высота которых равна  $h$ , а длительность  $\tau = 0,7T$ . Это есть реакция на сумму воздействий. Пусть теперь действует только сигнал  $u_1(t)$ . Реакцией на него будет последовательность импульсов высотой  $h$  и длительностью  $0,2T$ . Соответственно, реакция на сигнал  $u_2(t)$  — это последовательность импульсов, высота которых равна  $h$ , а длительность —  $0,5T$ . В результате сумма реакций будет представлять собой последовательность импульсов, длительность которых  $\tau = 0,5T$ , а высота равна  $2h$  при  $iT \leq t < iT + 0,2T$  и  $h$  при  $iT + 0,2T \leq t < iT + 0,5T$ . Таким образом, реакция на сумму воздействий не равна сумме реакций и принцип суперпозиции не выполняется.

Рассуждая аналогично, нетрудно убедиться, что амплитудно-импульсный модулятор является линейным звеном. Поэтому ниже рассматриваются только системы с амплитудно-импульсной модуляцией. Системы управления с широтно-импульсной модуляцией из-за нелинейности самого импульсного элемента (широтно-импульсного модулятора) относятся к нелинейным системам и будут рассмотрены в разделе IV.

## § 14.2. Разностные уравнения

В импульсной системе (рис. 14.1, б) на вход непрерывной части поступает последовательность импульсов  $u^*(t)$ , модулированных по амплитуде. Несмотря на то, что непрерывная часть описывается линейным дифференциальным уравнением и сам им-

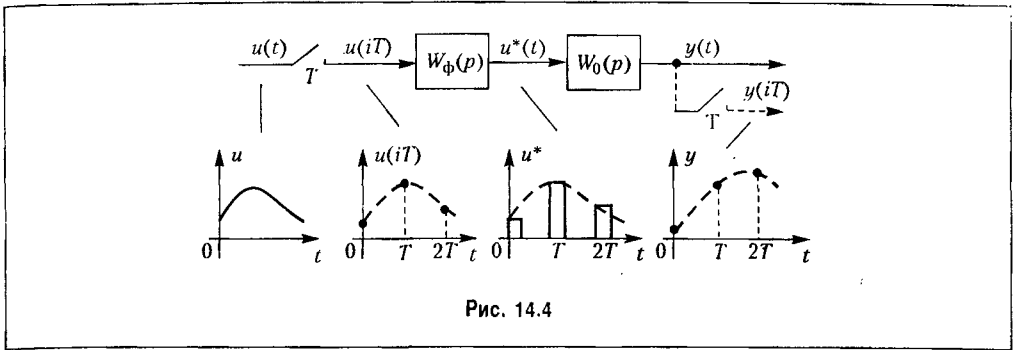


Рис. 14.4

пульсный элемент является линейным, получить дифференциальное уравнение системы, как это делалось в главе 5 для непрерывных систем, не представляется возможным из-за разрывного характера сигнала  $u^*(t)$ . Поэтому для исследования импульсных систем вместо дифференциальных уравнений используются так называемые *разностные уравнения*.

Рассмотрим разомкнутую систему, состоящую из импульсного элемента и непрерывной части. Ее схему представим так, как показано на рис. 14.4, где  $W_0(p)$  — передаточная функция непрерывной части, а импульсный элемент условно заменен последовательным соединением ключа и некоторого формирующего устройства с передаточной функцией  $W_\phi(p)$ . Ключ периодически с периодом  $T$  замыкается на очень короткий промежуток времени и выделяет из непрерывного сигнала  $u(t)$  его мгновенные значения  $u(iT)$  в соответствии с выражением (14.2). Формирующее устройство образует из этих значений импульсы прямоугольной формы так, как показано на рис. 14.2.

Будем полагать, что входным сигналом системы является не  $u(t)$ , а  $u(iT)$ , или в сокращенной записи  $u(i)$ . Несмотря на то, что сигнал  $y(t)$ , как показано в главе 1, в общем случае непрерывен, в качестве выходного сигнала системы будем рассматривать  $y(iT)$ , или в сокращенной записи  $y(i)$ . Условно это отображено на рис. 14.4 наличием ключа на выходе непрерывной части.

Последовательности типа  $u(i)$  и  $y(i)$  иногда называют решетчатыми функциями, хотя в строгом понимании они функциями не являются.

Аналогом первой производной непрерывной функции для любой последовательности  $f(i)$  служит конечная разность 1-го порядка или первая разность

$$\Delta f(i) = f(i+1) - f(i). \quad (14.5)$$

Она определяется в момент времени  $t = iT$  как разность между будущим значением последовательности при  $t = (i+1)T$  и текущим значением при  $t = iT$ .

Аналогом второй производной непрерывной функции для последовательности является конечная разность 2-го порядка или вторая разность

$$\Delta^2 f(i) = \Delta[\Delta f(i)] = \Delta f(i+1) - \Delta f(i) = f(i+2) - 2f(i+1) + f(i). \quad (14.6)$$

В общем случае для  $k$ -й разности можно записать

$$\Delta^k f(i) = \sum_{v=0}^k (-1)^v C_k^v f(i+k-v), \quad (14.7)$$

где

$$C_k^v = \frac{k!}{v!(k-v)!} \quad (14.8)$$

-- биномиальные коэффициенты.

В качестве аналога дифференциального уравнения можно рассматривать *уравнение в конечных разностях*. Применительно к системе, изображенной на рис. 14.4, оно имеет вид

$$a_0 \Delta^n y(i) + a_1 \Delta^{n-1} y(i) + \dots + a_n y(i) = d_0 \Delta^m u(i) + d_1 \Delta^{m-1} u(i) + \dots + d_m u(i), \quad (14.9)$$

где  $m \leq n$ .

Однако при исследовании дискретных систем удобнее пользоваться уравнением

$$c_0 y(i+n) + c_1 y(i+n-1) + \dots + c_n y(i) = b_0 u(i+m) + b_1 u(i+m-1) + \dots + b_m u(i), \quad (14.10)$$

которое получается из (14.9) с учетом (14.7). Оно и называется *разностным уравнением*.

Уравнение (14.10) можно представить и в ином виде:

$$c_0 y(i) + c_1 y(i-1) + \dots + c_n y(i-n) = b_0 u(i+m-n) + b_1 u(i+m-1-n) + \dots + b_m u(i-n). \quad (14.11)$$

Разностные уравнения по существу являются рекуррентными соотношениями, позволяющими при  $i = 0, 1, 2, \dots$  последовательно шаг за шагом (т. е. рекуррентно) вычислять значения выходной величины  $y(i)$  при заданных ее начальных значениях и любых заданных аналитически, графически или таблично значениях входной величины  $u(i)$ . Например, из уравнения (14.11), задав начальные значения  $y(-n), y(-n+1), \dots, y(-1)$  и значения  $u(i)$  можно последовательно найти  $y(0), y(1), y(2), \dots$  Такие вычисления легко механизуются, а также не представляют никаких принципиальных трудностей и при ручном счете (кроме, конечно, затрат времени) даже в случае, когда коэффициенты разностного уравнения с течением времени изменяются. Это отличает разностные уравнения от их непрерывных аналогов — дифференциальных уравнений.

Общее решение неоднородного разностного уравнения (14.10) или (14.11), как и решение неоднородного дифференциального уравнения, представляется в виде суммы переходной и вынужденной составляющих. Переходная составляющая, т. е. общее решение однородного уравнения, определяется следующим образом:

$$y(i) = C_1 z_1^i + C_2 z_2^i + \dots + C_n z_n^i, \quad (14.12)$$

где  $z_v$  ( $v = 1, 2, \dots, n$ ) — некрратные корни характеристического уравнения

$$c_0 z^n + c_1 z^{n-1} + \dots + c_n = 0, \quad (14.13)$$

которое легко получается из (14.10), а  $C_v$  — произвольные постоянные.

Из (14.12), в частности, вытекает условие затухания свободного движения системы, описываемой разностным уравнением (14.10), т. е. условие устойчивости:

$$|z_v| < 1 \quad (v = 1, 2, \dots, n). \quad (14.14)$$

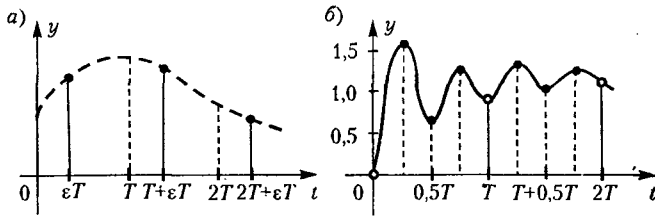


Рис. 14.5

Решение разностного уравнения  $y(i)$  дает значения выходной величины лишь в дискретные моменты времени  $t = iT$ . Во многих случаях этого вполне достаточно для суждения о поведении системы. Если же возникает необходимость в получении информации об изменении выходной величины в любой момент времени, то используется *смещенная последовательность* (рис. 14.5, а)

$$y(iT + \varepsilon T) = y(t)|_{t = iT + \varepsilon T}, \quad (14.15)$$

или в сокращенной записи  $y(i, \varepsilon)$ , где  $\varepsilon$  — параметр, которому можно придавать любые значения в пределах  $0 \leq \varepsilon \leq 1$ . Если  $\varepsilon$  изменять непрерывно в указанных пределах, то  $y(i, \varepsilon)$  совпадает с  $y(t)$ .

Смещенная последовательность  $y(i, \varepsilon)$  представляет собой решение *разностного уравнения со смещенным аргументом*

$$c_0 y(i + n, \varepsilon) + c_1 y(i + n - 1, \varepsilon) + \dots + c_n y(i + \varepsilon) = b_0(\varepsilon) u(i + m) + b_1(\varepsilon) u(i + m - 1) + \dots + b_m(\varepsilon) u(i), \quad (14.16)$$

которое при  $\varepsilon = 0$  превращается в уравнение (14.10).

Значения выходной величины  $y(i, \varepsilon)$  можно вычислить последовательно шаг за шагом при заданных начальных значениях и значениях входной величины  $u(i)$ .

Переходная составляющая, т. е. общее решение однородного уравнения, определяется в этом случае следующим образом:

$$y(i, \varepsilon) = C_1 z_1^{i+\varepsilon} + C_2 z_2^{i+\varepsilon} + \dots + C_n z_n^{i+\varepsilon}, \quad (14.17)$$

где  $z_v$  ( $v = 1, 2, \dots, n$ ) — некратные корни характеристического уравнения (14.13).

В качестве примера исследуем процессы в системе, разностное уравнение со смещенным аргументом которой имеет вид

$$y(i + 2, \varepsilon) - 0,27y(i + 1, \varepsilon) + 0,135y(i, \varepsilon) = (1 - e^{-2\varepsilon} \cos 4\pi\varepsilon) u(i + 2) - (0,135 - e^{-2\varepsilon} \cos 4\pi\varepsilon) u(i + 1) \quad (14.18)$$

при начальных значениях  $y(-1, \varepsilon) = y(-2, \varepsilon) = 0$  и единичной входной последовательности  $u(0) = u(1) = \dots = 1$ .

Положив  $\varepsilon = 0$ , получим обыкновенное разностное уравнение:

$$y(i + 2) - 0,27y(i + 1) + 0,135y(i) = 0,865 u(i + 1). \quad (14.19)$$

Корни характеристического уравнения

$$z^2 - 0,27z + 0,135 = 0;$$

$$z_{1,2} \approx 0,135 \pm j0,34$$

удовлетворяют условию (14.14). Следовательно, система устойчива.

Из (14.19) при  $y(-1) = y(-2) = 0$  последовательно шаг за шагом находим значения выходной величины в моменты времени  $t = iT$ :

$$y(0) = 0,27 y(-1) - 0,135 y(-2) + 0,865 u(-1) = 0;$$

$$y(1) = 0,27 y(0) - 0,135 y(-1) + 0,865 u(0) = 0,865;$$

$$y(2) = 0,27 y(1) - 0,135 y(0) + 0,865 u(1) \approx 1,098;$$

$$y(3) = 0,27 y(2) - 0,135 y(1) + 0,865 u(2) \approx 1,045, \dots$$

Продолжая вычисления, убеждаемся, что в дискретные моменты времени  $t = iT$  процесс монотонный, а выходная величина стремится к установившемуся значению  $y_{уст} = 1$ .

Аналогично решая уравнение (14.18) получим:

$$y(0, \varepsilon) = 1 - e^{-2\varepsilon} \cos 4\pi\varepsilon;$$

$$y(1, \varepsilon) = 1,135 - 0,27e^{-2\varepsilon} \cos 4\pi\varepsilon;$$

$$y(2, \varepsilon) \approx 1,036 + 0,062 e^{-2\varepsilon} \cos 4\pi\varepsilon, \dots$$

Кривая  $y(t)$  изображена на рис. 14.5, б, где отмечены ее значения при  $\varepsilon = 0; 0,25; 0,5; 0,75$ . Таким образом, реальный процесс в системе колебательный затухающий, что не обнаруживается в результате решения уравнения (14.19).

Способы получения разностных уравнений будут рассмотрены в следующих параграфах.

### § 14.3. Использование z-преобразования

Для последовательностей  $f(i)$  может быть введено понятие *дискретного преобразования Лапласа*, определяемое формулой

$$F^*(p) = \sum_{i=0}^{\infty} f(i) e^{-piT}. \quad (14.20)$$

Для смещенных последовательностей может быть записано аналогичное выражение:

$$F^*(p, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} f(i, \varepsilon) e^{-piT}. \quad (14.21)$$

Формулы (14.20) и (14.21) можно представить в символической записи:

$$F^*(p) = D \{f(i)\}, \quad (14.22)$$

$$F^*(p, \varepsilon) = D_{\varepsilon} \{f(i, \varepsilon)\}. \quad (14.23)$$

В приведенных формулах, как и в случае непрерывного преобразования Лапласа, комплексная величина  $p = c + j\omega$ , где  $c$  — абсцисса абсолютной сходимости. Если  $c < \infty$ , то ряд, определяемый формулами (14.20) и (14.21), сходится к оригиналу  $f(i)$  соответствует некоторое изображение.

Как следует из (14.20) и (14.21), изображение является функцией величины  $e^{pT}$ .

Для исследования импульсных систем большое распространение получило так называемое  $z$ -преобразование, которое связано с дискретным преобразованием Лапласа и вытекает из него. Применительно к  $z$ -преобразованию ниже будут рассмотрены основные свойства и теоремы дискретного преобразования Лапласа.

Под  $z$ -преобразованием понимается изображение несмещенной или смещенной последовательностей, определяемое формулами

$$F(z) = \sum_{i=0}^{\infty} f(i)z^{-i}, \quad F(z, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} f(i, \varepsilon)z^{-i}. \quad (14.24)$$

В этих формулах введено новое обозначение  $z = e^{pT}$ . Из них следует, что  $z$ -преобразование практически совпадает с дискретным преобразованием Лапласа и отличается только аргументом изображения.

Формулы преобразования (14.24) могут быть записаны в символической форме:

$$F(z) = Z \{f(i)\}, \quad F(z, \varepsilon) = Z_{\varepsilon} \{f(i, \varepsilon)\}, \quad (14.25)$$

Формулы преобразования (14.25) могут быть записаны и для непрерывной производящей функции в виде

$$\begin{aligned} F(z) &= Z \{f(t)\}, & t &= iT, \\ F(z, \varepsilon) &= Z_{\varepsilon} \{f(t)\}, & t &= (i + \varepsilon)T, \end{aligned} \quad (14.26)$$

где  $i = 0, 1, 2, \dots$

Ряды (14.24) сходятся, и изображение существует, если выполняется условие, сформулированное выше для дискретного преобразования Лапласа:  $c < \infty$ , где  $c$  — абсцисса абсолютной сходимости.

В табл. 14.1 приведены изображения некоторых последовательностей, а также производящих функции времени и их изображений Лапласа.

Для всех непрерывных функций и последовательностей, приведенных в табл. 14.1, предполагается, что они тождественно равны нулю при  $t < 0$ . В некоторых изображениях табл. 14.1 использованы полиномы  $R_k(z)$ , которые могут быть представлены в виде определителя [ 96 ]

$$R_k = k! \begin{vmatrix} 1 & 1-z & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{2!} & 1 & 1-z & \dots & 0 \\ \frac{1}{3!} & \frac{1}{2!} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{k!} & \frac{1}{(k-1)!} & \frac{1}{(k-2)!} & \dots & 1 \end{vmatrix} \quad (14.27)$$



Таблица 14.1. Изображения решетчатых функций

Непрерывная функция		Несмещенная последовательность	z-преобразование	
оригинал	преобразование Лапласа		простое	смещенное
$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t=0 \\ 0 & \text{при } t \neq 0 \end{cases}$	-	$\delta_0(i)$	1	0
$1(t)$	$\frac{1}{p}$	$1(i)$	$\frac{z}{z-1}$	$\frac{z}{z-1}$
$t$	$\frac{1}{p^2}$	$iT$	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$	$Tz \left[ \frac{\varepsilon}{z-1} + \frac{1}{(z-1)^2} \right]$
$\frac{t^2}{2!}$	$\frac{1}{p^3}$	$\frac{(iT)^2}{2!}$	$\frac{T^2 z(z+1)}{2!(z-1)^3}$	$\frac{T^2 z}{2!} \left[ \frac{\varepsilon^2}{z-1} + \frac{2\varepsilon}{(z-1)^2} + \frac{z+1}{(z-1)^3} \right]$
$\frac{t^3}{3!}$	$\frac{1}{p^4}$	$\frac{(iT)^3}{3!}$	$\frac{T^3 z(z^2+4z+1)}{3!(z-1)^4}$	$\frac{T^3 z}{3!} \left[ \frac{\varepsilon^2}{z-1} + \frac{3\varepsilon^2}{(z-1)^2} + \frac{3\varepsilon(z+1)}{(z-1)^3} + \frac{z^2+4z+1}{(z-1)^4} \right]$
$\frac{t^k}{k!}$	$\frac{1}{p^{k+1}}$	$\frac{(iT)^k}{k!}$	$\frac{T^k z R_k(z)}{k!(z-1)^{k+1}}$	$\frac{T^k z}{k!} \sum_{v=0}^k C_k^v R_v(z) \varepsilon^{k-v}$
$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{p+\alpha}$	$e^{-\alpha iT} = d^i$	$\frac{z}{z-d}, \quad d = e^{-\alpha T}$	$\frac{z d^\varepsilon}{z-d}, \quad d = e^{-\alpha T}$
$1 - e^{-\alpha t}$	$\frac{\alpha}{p(p+\alpha)}$	$1 - e^{-\alpha iT}$	$\frac{(1-d)z}{(z-1)(z-d)}$	$\frac{z}{z-1} - \frac{z d^\varepsilon}{z-d}$
$te^{-\alpha t}$	$\frac{1}{(p+\alpha)^2}$	$iT e^{-\alpha iT}$	$\frac{zd}{(z-d)^2}$	$\frac{z d^\varepsilon \varepsilon}{z-d} + \frac{z d^{\varepsilon+1}}{(z-d)^2}$

Таблица 14.1. (Окончание)

Непрерывная функция		Несмещенная последовательность	z-преобразование	
оригинал	преобразование Лапласа		простое	смещенное
$\frac{t^2}{2!} e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{(p+\alpha)^3}$	$\frac{(iT)^2}{2!} e^{-\alpha iT}$	$\frac{z(z+d)d^2}{2!(z-d)^3}$	$\frac{zd^2 \epsilon^2}{2!(z-d)^2} + \frac{zd^{\epsilon 1}}{(z-d)^2} + \frac{z(z+d)d^{\epsilon 2}}{2!(z-d)^3}$
$\frac{t^k}{k!} e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{(p+\alpha)^{k+1}}$	$\frac{(iT)^k}{k!} e^{-\alpha iT}$	$\frac{zR_k(d^{-1}z)d^k}{k!(z-d)^{k+1}}$	$\frac{z}{k!} \sum_{v=0}^k C_k^v R_v(d^{-1}z) d^{\epsilon v} \epsilon^{k-v} (z-d)^{\nu 1}$
$\sin \frac{t}{T}$	$\frac{\pi T^{-1}}{p^2 + \pi^2 T^{-2}}$	$\sin \pi i = 0$	0	$\frac{z \sin \pi \epsilon}{z+1}$
$\cos \frac{t}{T}$	$\frac{p}{p^2 + \pi^2 T^{-2}}$	$\cos \pi i = (-1)^i$	$\frac{z}{z+1}$	$\frac{z \cos \pi \epsilon}{z+1}$
$\sin \frac{\pi t}{2T}$	$\frac{0,5\pi T^{-1}}{p^2 + 0,25\pi^2 T^{-2}}$	$\sin \frac{\pi}{2} i$	$\frac{z}{z^2+1}$	$\frac{z^2 \sin \frac{\pi}{2} \epsilon + z \cos \frac{\pi}{2} \epsilon}{z^2+1}$
$\cos \frac{\pi t}{2T}$	$\frac{p}{p^2 + 0,25\pi^2 T^{-2}}$	$\cos \frac{\pi}{2} i$	$\frac{z^2}{z^2+1}$	$\frac{z^2 \cos \frac{\pi}{2} \epsilon - z \sin \frac{\pi}{2} \epsilon}{z^2+1}$
$\sin \beta t$	$\frac{\beta}{p^2 + \beta^2}$	$\sin \beta iT$	$\frac{z \sin \beta T}{z^2 - 2z \cos \beta T + 1}$	$\frac{z^2 \sin \epsilon \beta T + z \sin(1-\epsilon)\beta T}{z^2 - 2z \cos \beta T + 1}$
$\cos \beta t$	$\frac{p}{p^2 + \beta^2}$	$\cos \beta iT$	$\frac{z^2 - z \cos \beta T}{z^2 - 2z \cos \beta T + 1}$	$\frac{z^2 \cos \epsilon \beta T - z \cos(1-\epsilon)\beta T}{z^2 - 2z \cos \beta T + 1}$
$e^{-\alpha t} \sin \beta t$	$\frac{\beta}{(p+\alpha)^2 + \beta^2}$	$e^{\alpha iT} \sin \beta iT$	$\frac{zd \sin \beta T}{z^2 - 2zd \cos \beta T + d^2}$	$zd^{\epsilon} \frac{z \sin \epsilon \beta T + d \sin(1-\epsilon)\beta T}{z^2 - 2zd \cos \beta T + d^2}$
$e^{\alpha t} \cos \beta t$	$\frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2 + \beta^2}$	$e^{-\alpha iT} \cos \beta iT$	$\frac{z^2 - zd \cos \beta T}{z^2 - 2zd \cos \beta T + d^2}$	$zd^{\epsilon} \frac{z \cos \epsilon \beta T - d \cos(1-\epsilon)\beta T}{z^2 - 2zd \cos \beta T + d^2}$

Некоторые частные значения этого полинома:

$$\left. \begin{aligned} R_0(z) &= 1, \\ R_1(z) &= 1, \\ R_2(z) &= z + 1, \\ R_3(z) &= z^2 + 4z + 1, \\ R_4(z) &= z^3 + 11z^2 + 11z + 1. \end{aligned} \right\} \quad (14.28)$$

Рассмотрим кратко основные правила и теоремы применительно к  $z$ -преобразованию. Эти же правила и теоремы будут справедливыми и для дискретного преобразования Лапласа. Рассмотрение проведем для несмещенных последовательностей, но полученные результаты можно распространить и на случай смещенных последовательностей, кроме случаев, оговоренных особо.

1. **Свойство линейности.** Это свойство заключается в том, что изображение линейной комбинации последовательностей равно той же линейной комбинации их изображений. Пусть

$$f(i) = \sum_{v=1}^N c_v f_v(i). \quad (14.29)$$

Тогда для изображения можно записать

$$F(z) = \sum_{v=1}^N c_v F_v(z). \quad (14.30)$$

2. **Теорема запаздывания и упреждения.** Рассмотрим последовательность  $f(i - m)$ , сдвинутую вправо (запаздывающую) на целое число тактов  $m$ . Тогда из формулы (14.24) следует, если обозначить  $i - m = r$ ,

$$\begin{aligned} Z\{f(i - m)\} &= \sum_{r=-m}^{\infty} f(r) z^{-(m+r)} = z^{-m} \left[ \sum_{r=0}^{\infty} f(r) z^{-r} + \sum_{r=-m}^{-1} f(r) z^{-r} \right] = \\ &= z^{-m} \left[ F(z) + \sum_{r=1}^m f(-r) z^r \right]. \end{aligned} \quad (14.31)$$

Здесь  $F(z)$  — изображение  $f(i)$ . Если исходная последовательности  $f(i)$  равна нулю при отрицательных значениях аргумента, то формула (14.31) упрощается:

$$Z\{f(i - m)\} = z^{-m} F(z). \quad (14.32)$$

Если сдвиг происходит влево (упреждение) и рассматривается последовательность  $f(i + m)$ , где  $m$  — целое положительное число, то аналогично случаю запаздывания можно показать, что

$$Z\{f(i + m)\} = z^m \left[ F(z) - \sum_{k=0}^{m-1} f(k) z^{-k} \right]. \quad (14.33)$$

Второе слагаемое в правой части (14.33) обращается в нуль, если  $f(i) = 0$  при  $i = 0, 1, \dots, m - 1$ .

При запаздывании на не целое число периодов  $m + \xi$  приходится вводить смещенную последовательность  $f(i + \varepsilon - m - \xi)$ , где  $m$  — целая, а  $\xi$  — дробная часть запаздывания. Если смещение  $\varepsilon$  удовлетворяет условию  $0 \leq \varepsilon < \xi$  и  $f(i + \varepsilon - m - \xi) \equiv 0$  при  $i + \varepsilon < m - \xi$ , то можно показать, что

$$Z_{\varepsilon} \{f(i + \varepsilon - m - \xi)\} = z^{-(1+m)} \cdot F(z, 1 + \varepsilon - \xi). \quad (14.34)$$

Если  $\xi \leq \varepsilon < 1$ , то

$$Z_{\varepsilon} \{f(i + \varepsilon - m - \xi)\} = z^{-m} \cdot F(z, \varepsilon - \xi). \quad (14.35)$$

При использовании табл. 14.1 для нахождения изображений следует вместо  $\varepsilon$  подставить  $1 + \varepsilon - \xi$  или  $\varepsilon - \xi$  в соответствии с формулами (14.34) и (14.35).

3. Сумма ординат последовательности. Если абсцисса абсолютной сходимости отрицательна ( $c < 0$ ), то, положив в (14.24)  $p = 0$ , имеем

$$F(1) = \lim_{z \rightarrow 1} F(z) = \sum_{i=0}^{\infty} f(i). \quad (14.36)$$

4. Конечное значение последовательности. Составим первую прямую разность последовательности  $f(i)$  и на основании (14.30) найдем ее изображение

$$Z \{\Delta f(i)\} = (z - 1) F(z) - z f(0).$$

Далее на основании (14.36) найдем сумму ординат  $\Delta f(i)$ :

$$\sum_{i=0}^{\infty} \Delta f(i) = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) F(z) - f(0).$$

Кроме того, можно записать

$$\sum_{i=0}^{\infty} \Delta f(i) = \sum_{i=0}^{\infty} [f(i+1) - f(i)] = \lim_{i \rightarrow \infty} f(i) - f(0).$$

Из двух последних выражений следует:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} f(i) = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) F(z). \quad (14.37)$$

5. Формулы разложения. Если изображение представляет собой простейшую табличную форму (см., например, табл. 14.1), то переход к оригиналу не представляет трудностей. Сложная дробно-рациональная форма может быть представлена в виде суммы дробей первой степени. Рассмотрим некоторые употребительные разновидности формулы разложения.

а) Пусть изображение  $F(z)$  представляет собой отношение двух многочленов:

$$F(z) = \frac{A(z)}{B(z)} = \frac{zA_0(z)}{B(z)},$$

причем будем предполагать, что степень числителя не выше, чем степень знаменателя, а корни знаменателя простые. Тогда изображение можно представить в виде суммы

$$F(z) = \frac{zA_0(z)}{B(z)} = \sum_{v=1}^l \frac{A_0(z_v)}{\dot{B}(z_v)} \frac{z}{z-z_v}, \quad (14.38)$$

где  $\dot{B}(z)$  — производная  $B(z)$  по  $z$ , а  $z_v$  ( $v = 1, 2, \dots, l$ ) — корни знаменателя. Элементарному слагаемому  $z(z-z_v)^{-1}$  соответствует оригинал  $e^{-\alpha_v iT} = z_v^i$ , где  $\alpha_v = T^{-1} \ln z_v^{-1}$  (см. табл. 14.1). В табл. 14.1 единственный корень дроби первой степени обозначен  $z_1 = d$ .

Поэтому оригинал (14.38) можно записать следующим образом:

$$f(i) = \sum_{v=1}^l \frac{A_0(z_v)}{\dot{B}(z_v)} z_v^i. \quad (14.39)$$

б) Пусть изображение  $F(z)$  не имеет нулевого корня числителя, но степень числителя  $A(z)$  меньше степени знаменателя.

Для нахождения оригинала в этом случае можно воспользоваться формулами (14.38) и (14.39), но применить их следует для сдвинутой на один такт влево решетчатой функции, изображение которой будет  $zF(z)$ . В результате имеем

$$f(i) = \sum_{v=1}^l \frac{A(z_v)}{\dot{B}(z_v)} z_v^{i-1}, \quad (14.40)$$

причем последнее выражение будет справедливым только для  $i \geq 1$ .

в) Пусть изображение  $F(z)$  не имеет нулевого корня числителя  $A(z)$ , причем степень  $A(z)$  равна степени знаменателя  $B(z)$ . Тогда следует понизить степень числителя, поделив его на знаменатель, и представить  $F(z)$  в виде суммы составляющей нулевого порядка и дробно-рационального остатка  $F_0(z)$ . Тогда

$$F(z) = \frac{A(z)}{B(z)} = f(0) + F_0(z) = f(0) + \frac{A_0(z)}{B(z)}.$$

Переход от второй составляющей изображения к оригиналу может быть сделан по формуле (14.40), которая справедлива для  $i \geq 1$ .

г) Если изображение  $F(z)$  можно представить в виде

$$F(z) = \frac{A(z)}{B(z)} = \frac{z}{z-1} F_0(z) = \frac{z}{z-1} \frac{A_0(z)}{B_0(z)},$$

то можно показать, что формула разложения приобретает вид

$$f(i) = \frac{A_0(1)}{B_0(1)} - \sum_{v=1}^l \frac{A_0(z_v)}{(1-z_v)\dot{B}(z_v)} z_v^i. \quad (14.41)$$

Последнее выражение представляет собой аналог известной формулы разложения Хевисайда, полученной им для непрерывных систем.

д) Пусть изображение  $F(z)$  имеет нулевой полюс кратности  $r$  и простые остальные полюсы

$$F(z) = \frac{A(z)}{B(z)} = \frac{A(z)}{z^r B_0(z)},$$

причем степень числителя  $A(z)$  меньше степени полинома  $B_0(z)$ . Тогда можно найти оригинал в виде

$$f(i) = \begin{cases} 0, & \text{если } i < r + 1, \\ \sum_{v=1}^{l-r} \frac{A(z_v)}{B_0(z_v)} z_v^{i-r}, & \text{если } i \geq r + 1. \end{cases} \quad (14.42)$$

При равенстве степеней числителя и полинома  $B_0(z)$  следует выделить делением  $A(z)$  на  $B_0(z)$  нулевую составляющую и остаток, после чего представить изображение в виде

$$F(z) = \frac{A(z)}{B(z)} = \frac{A(z)}{z^r B_0(z)} = \frac{1}{z^r} \left[ f(r) + \frac{A_0(z)}{B_0(z)} \right].$$

Здесь  $f(r)$  — значение оригинала в момент  $i = r$ . Далее можно воспользоваться формулой (14.42), заменив в ней  $A(z)$  на  $A_0(z)$ .

е) Пусть изображение  $F(z)$  имеет полюс  $z_l$  кратности  $r$ , а все остальные полюсы простые:

$$F(z) = \frac{A(z)}{B(z)} = \frac{A(z)}{(z - z_l)^r B_0(z)},$$

причем степень числителя меньше степени знаменателя.

Тогда оригинал будет

$$f(i) = \sum_{v=1}^{l-r} \frac{A(z_v)}{B_0(z_v)} z_v^{i-1} + \frac{1}{(r-1)!} \lim_{z \rightarrow z_l} \frac{d^{(r-1)}}{dz^{(r-1)}} \left[ \frac{A(z) z^{i-1}}{B_0(z)} \right]. \quad (14.43)$$

Эта формула справедлива для  $i \geq 1$ . При  $i = 0$  значение оригинала  $f(0) = 0$ .

Для случая двойного корня ( $r = 2$ ) формула (14.43) приобретает вид

$$f(i) = \sum_{v=1}^{l-2} \frac{A(z_v)}{B_0(z_v)} z_v^{i-1} + \lim_{z \rightarrow z_l} \frac{d}{dz} \left[ \frac{A(z) z^{i-1}}{B_0(z)} \right]. \quad (14.44)$$

Так, например, если

$$F(z) = \frac{Tz}{(z-1)^2},$$

то

$$f(i) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d}{dz} [Tz^i] = iT,$$

что совпадает с табл. 14.1.

В случае, когда степень числителя  $F(z)$  равна степени знаменателя, следует аналогично изложенному выше выделить член нулевого порядка  $f(0)$  делением числителя на знаменатель и рассматривать далее остаток от деления.

6. Разложение в ряд Лорана. Из основного выражения для нахождения  $z$ -преобразования (14.24) следует:

$$F(z) = \sum_{i=0}^{\infty} f(i)z^{-i} = f(0) + f(1)z^{-1} + \dots + f(k)z^{-k} + \dots$$

Разложив любым способом изображение  $F(z)$  в ряд Лорана (ряд по убывающим степеням  $z$ ):

$$F(z) = c_0 + c_1z^{-1} + \dots + c_kz^{-k} + \dots,$$

и сравнивая два ряда между собой, можно установить, что  $c_0 = f(0)$ ,  $c_1 = f(1)$ ,  $c_2 = f(2)$ , ...,  $c_k = f(k)$  и т. д.

Разложение в ряд можно делать любым способом, так как такое разложение единственно. Наиболее удобным приемом для дробно-рациональных функций является деление числителя на знаменатель.

Применяя разложение в ряд Лорана, можно вычислить значения оригинала  $f(i)$  или  $f(i, \epsilon)$  в дискретных точках без нахождения полюсов изображений  $F(z)$ .

7. Решение разностных уравнений. Пусть имеется разностное уравнение в форме (14.10)

$$c_0y(i+n) + c_1y(i+n-1) + \dots + c_ny(i) = b_0u(i+m) + b_1u(i+m-1) + \dots + b_mu(i)$$

с начальными условиями  $y(v) = y_v$  ( $v = 0, 1, \dots, n-1$ ). Найдем  $z$ -преобразование от его левой и правой частей. В соответствии с формулой (14.33) для случая упреждения на  $n$  тактов

$$Z\{y(i+n)\} = z^n \left[ Y(z) - \sum_{k=0}^{n-1} y(k)z^{-k} \right].$$

Аналогичные зависимости могут быть записаны для упреждения на  $(n-1)$ ,  $(n-2)$ , ..., 1 тактов.

Для входной последовательности начальные условия не задаются. Поэтому

$$Z\{u(i+m)\} = z^m U(z).$$

В результате при переходе в рассматриваемом разностном уравнении к изображениям получим:

$$C(z) Y(z) - Y_0(z) = B(z) U(z), \quad (14.45)$$

где  $C(z) = c_0z^n + c_1z^{n-1} + \dots + c_n$ ,  $B(z) = b_0z^m + b_1z^{m-1} + \dots + b_m$ , а  $Y_0(z)$  — сумма членов, определяемых начальными условиями.

Из (14.45) можно найти изображение искомой выходной последовательности

$$Y(z) = \frac{B(z)}{C(z)}U(z) + \frac{Y_0(z)}{C(z)}. \quad (14.46)$$

Далее можно использовать изложенные выше приемы перехода к искомому оригиналу  $y(i)$ .

Для решения рассматриваемого разностного уравнения необходимо, как следует из изложенного, знать начальные условия  $y(v) = y_v$  ( $v = 0, 1, \dots, m - 1$ ). Последние же зависят от вида действующей в правой части разностного уравнения входной последовательности.

Более удобны для решения разностные уравнения вида (14.11)

$$c_0 y(i) + c_1 y(i-1) + \dots + c_n y(i-n) = b_0 u(i+m-n) + b_1 u(i+m-1-n) + \dots + b_m u(i-n)$$

с начальными условиями  $y(-v) = y_v$  ( $v = 0, 1, \dots, n$ ).

Изображение последовательности  $y(i-n)$ , запаздывающей на  $n$  тактов, в соответствии с (14.31) будет

$$Z\{y(i-n)\} = z^{-n} \left[ Y(z) + \sum_{r=1}^n y(-r)z^r \right].$$

Подобные зависимости могут быть записаны для запаздывания на  $(n-1)$ ,  $(n-2)$ , ..., 1 тактов.

При переходе в рассматриваемом разностном уравнении к изображениям могут быть получены выражения, аналогичные (14.45) и (14.46). Переход к искомой последовательности  $y(i)$  осуществляется в соответствии с изложенными выше приемами.

Особый интерес представляет случай, когда до момента времени  $t = 0$  искомая последовательность тождественно равна нулю. Это эквивалентно случаю нулевых начальных условий слева (при  $t = -0$ ) при решении дифференциальных уравнений для непрерывных функций. Тогда в выражении для изображения (14.46) пропадает член в правой части, определяемый начальными условиями, и оно приобретает вид

$$Y(z) = \frac{B(z)}{C(z)}U(z) = W(z)U(z). \quad (14.47)$$

Здесь введена дискретная передаточная функция  $W(z)$ , которая, как и в случае непрерывных функций, есть отношение двух изображений (выходной и входной величин) при нулевых начальных условиях. Дискретная передаточная функция играет такую же роль в импульсных и цифровых системах, как и обычная передаточная функция в непрерывных системах. Получение этой функции будет подробно рассмотрено ниже.

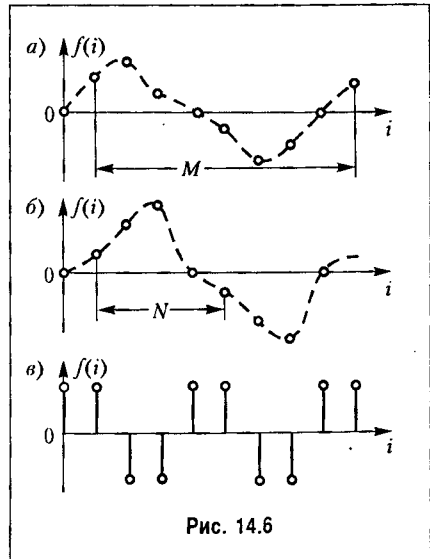


Рис. 14.6



8. Периодические последовательности и их изображения. Введем в рассмотрение периодическую последовательность

$$f(i + kM) = f(i), \quad (14.48)$$

где  $k$  и  $M$  — целые числа, причем  $M$  представляет собой относительный период (рис. 14.6).

Для симметричной периодической функции (см. рис. 14.6, б)  $M = 2N$  и  $f(i) = -f(i + N)$ .

Для нахождения изображения периодической последовательности (14.48) применим теорему сдвига (14.33):

$$F(z) = z^M \left[ F(z) - \sum_{r=0}^{M-1} f(r)z^{-r} \right].$$

Отсюда следует:

$$F(z) = \frac{z^M}{z^M - 1} \sum_{r=0}^{M-1} f(r)z^{-r}. \quad (14.49)$$

Сумма в правой части (14.49) представляет собой изображение последовательности на интервале  $0 - M$ .

Для симметричной последовательности  $f(i) = -f(i + N)$  аналогичным образом можно получить

$$F(z) = \frac{z^N}{z^N + 1} \sum_{r=0}^{N-1} f(r)z^{-r}. \quad (14.50)$$

Найдем, например, изображение симметричной периодической последовательности, показанной на рис. 14.6, в:

$$F(z) = \frac{z^2}{z^2 + 1} \sum_{r=0}^1 z^{-r} = \frac{z^2}{z^2 + 1} (1 + z^{-1}) = \frac{z(z+1)}{z^2 + 1}.$$

Кроме рассмотренных существуют и другие теоремы  $z$ -преобразования [49].

## § 14.4. Передаточные функции

В предыдущем параграфе было показано, что передаточная функция  $W(z)$  системы, схема которой представлена на рис. 14.4, легко определяется если известно разностное уравнение (14.10) или (14.11). В соответствии с (14.47) она имеет вид

$$W(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{B(z)}{C(z)}. \quad (14.51)$$

где  $B(z)$  и  $C(z)$  — полиномы, входящие в уравнение (14.45).

Однако на самом деле заданным является не разностное, а дифференциальное уравнение непрерывной части системы. Поэтому, наоборот, один из способов получения

разностного уравнения основан на использовании уже известной передаточной функции  $W(z)$ .

Действительно, если известна передаточная функция (14.51), то сразу же определяется уравнение для изображений (14.45). Из него при помощи формул (14.33) или (14.31) получаются разностные уравнения (14.10) или (14.11).

С учетом отмеченного передаточную функцию  $W(z)$  будем определять непосредственно по структурной схеме системы (рис. 14.4).

В качестве входной величины системы целесообразно рассматривать последовательность  $u(i)$ , изображение которой  $U(z)$ , а в качестве выходной — последовательность  $y(i)$ , изображение которой  $Y(z)$ . Тогда, как видно из рис. 14.4,

$$Y(z) = Z\{W_{\phi}(p) W_0(p)\} U(z) \quad (14.52)$$

и передаточная функция (14.51) может быть определена следующим образом:

$$W(z) = Z\{W_{\phi}(p) W_0(p)\}. \quad (14.53)$$

Последовательное соединение формирующего устройства с передаточной функцией  $W_{\phi}(p)$  и непрерывной части с передаточной функцией  $W_0(p)$  иногда называют приведенной непрерывной частью системы. Передаточная функция  $W(z)$  должна определяться по ее результирующей передаточной функции  $W_{\phi}(p) W_0(p)$ . Это связано с тем что  $z$ -преобразования от произведения передаточных функций непрерывных звеньев, не разделенных импульсным элементом (ключом), не равна произведению  $z$ -преобразований:

$$Z\{W_{\phi}(p) W_0(p)\} \neq Z\{W_{\phi}(p)\} Z\{W_0(p)\}.$$

Поэтому иногда для последовательного соединения двух звеньев, например такого, как в (14.53), передаточная функция записывается в виде  $W(z) = W_{\phi} W_0(z)$ , причем  $W_{\phi} W_0(z) \neq W_{\phi}(z) W_0(z)$ .

Передаточная функция непрерывной части системы  $W_0(p)$  полагается заданной. Для нахождения передаточной функции формирующего устройства  $W_{\phi}(p)$  положим, что оно генерирует прямоугольные импульсы (рис. 14.2) длительностью  $\gamma T$  в соответствии с выражением (14.2). Коэффициент пропорциональности  $k_A$  можно отнести к непрерывной части системы. Тогда амплитуда (высота) импульсов будет равна  $u(i)$ .

Передаточная функция  $W_{\phi}(p)$  может быть определена как отношение изображений по Лапласу выходной величины формирующего устройства (см. рис. 14.4)  $U^*(p)$  и его входной величины. Однако входная величина представляет собой последовательность  $u(i)$ , для которой преобразование Лапласа не существует. Чтобы устранить эту неопределенность положим, что идеальный импульсный элемент (ключ) генерирует не импульсы конечной высоты  $u(i)$ , а бесконечно короткие импульсы типа  $\delta$ -функций, площади которых пропорциональны значениям  $u(i)$ .

На самом деле никакой импульсный элемент не может генерировать бесконечные по высоте импульсы. Вместе с тем возможность использования указанного формального представления при теоретических исследованиях является обоснованной [49].

При поступлении на вход формирующего устройства единственной дискреты  $u(i)$  высотой, равной единице, на его выходе образуется прямоугольный импульс с такой же высотой и длительностью  $\gamma T$ . Его изображение в соответствии с (7.7)

$$U^*(p) = \int_0^{\gamma T} 1 \cdot e^{-pt} dt = \frac{1 - e^{-\gamma p T}}{p}. \quad (14.54)$$

Но так как указанная дискрета формально заменяется единичной  $\delta$ -функцией, изображение которой по Лапласу (см. табл. 7.2) равно единице, то изображение (14.54) представляет собой передаточную функцию формирующего устройства:

$$W_{\Phi}(p) = \frac{1 - e^{-\gamma p T}}{p}. \quad (14.55)$$

В этом случае передаточная функция (14.53)

$$W(z) = Z \left\{ \frac{1 - e^{-\gamma p T}}{p} W_0(p) \right\}. \quad (14.56)$$

Выражение (14.56) неудобно для практического применения. Поэтому воспользуемся теоремой смещения  $z$ -преобразования в вещественной области [49], согласно которой

$$Z \left\{ e^{-(m+\xi)T} F(p) \right\} = z^{-(1+m)} F(z, \xi) \Big|_{\xi=1-\xi}, \quad (14.57)$$

где  $m = 0, 1, 2, \dots; 0 \leq \xi < 1$ . Положив  $m = 0, \xi = \gamma$ , вместо (14.56) получим:

$$W(z) = Z \left\{ \frac{W_0(p)}{p} \right\} - z^{-1} Z_{\xi} \left\{ \frac{W_0(p)}{p} \right\} \Big|_{\xi=1-\gamma}. \quad (14.58)$$

Пусть, например, непрерывная часть системы имеет передаточную функцию

$$W_0(p) = \frac{K}{1 + T_1 p}.$$

Тогда в соответствии с (14.58) и табл. 14.1 получим:

$$W(z) = K \left[ \frac{(1-d)z}{(z-1)(z-d)} - \frac{1}{z-1} + \frac{d^{1-\gamma}}{z-d} \right] = K \frac{d^{1-\gamma} - d}{z-d},$$

где  $d = e^{-T/T_1}$ .

В системах автоматического управления преимущественно используются формирующие устройства, удерживающие на выходе величину, равную  $u(i)$ , в течение всего периода дискретности  $T$ . В этом случае  $\gamma = 1$ , а само формирующее устройство называ-

ется экстраполятором нулевого порядка. Передаточные функции (14.55) и (14.58) при  $\gamma = 1$  принимают вид

$$W_{\Phi}(p) = \frac{1 - e^{-Tp}}{p}, \quad (14.59)$$

$$W(z) = \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{W_0(p)}{p} \right\}. \quad (14.60)$$

Определим, например, передаточную функцию (14.60) для случая, когда непрерывная часть имеет передаточную функцию

$$W_0(p) = \frac{K}{p(1+T_1 p)}.$$

Чтобы можно было использовать данные табл. 14.1, разложим правую часть на простые дроби:

$$\frac{K}{p(1+T_1 p)} = K \left( \frac{1}{p} - \frac{T_1}{1+T_1 p} \right).$$

Тогда из (14.60) и табл. 14.1 получим:

$$\begin{aligned} W(z) &= \frac{K(z-1)}{z} Z \left\{ \frac{1}{p^2} - \frac{T_1}{p(1+T_1 p)} \right\} = \frac{K(z-1)}{z} \left[ \frac{Tz}{(z-1)^2} - \frac{T_1(1-d)z}{(z-1)(z-d)} \right] = \\ &= \frac{K[(T-T_1(1-d))z + T_1(1-d) - Td]}{(z-1)(z-d)}. \end{aligned}$$

В непрерывную часть системы может входить звено с чистым временным запаздыванием  $\tau$ , что соответствует (см. гл. 6) наличию в передаточной функции  $W_0(p)$  множителя  $e^{-\tau p}$ . Если величина  $\tau$  находится в пределах  $0 < \tau < T$ , то передаточную функцию (14.60) с учетом формулы (14.57) при  $m = 0$ ,  $\xi = \tau$  можно определить следующим образом:

$$W(z) = \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{e^{-\tau p} W_0(p)}{p} \right\} = \frac{z-1}{z^2} Z_{\epsilon} \left\{ \frac{W_0(p)}{p} \right\} \Bigg|_{\epsilon=1-\tau}. \quad (14.61)$$

Заметим, что при  $\tau = 0$  из (14.61) нельзя получить (14.60), так как при этом  $\epsilon = 1$  и смещенная последовательность  $f(i, \epsilon)$  переходит в  $f(i+1)$ . Выражения (14.60) и (14.61) совпадут, если последнее в соответствии с формулой (14.33) умножить на  $z$ .

В ряде случаев для получения более полной информации об изменении выходной величины системы применяется так называемая модифицированная передаточная функция

$$W(z, \epsilon) = \frac{Y(z, \epsilon)}{U(z)} = Z_{\epsilon} \left\{ \frac{W_0(p)}{p} \right\}, \quad (14.62)$$

где  $Y(z, \epsilon) = Z_{\epsilon} \{y(1, \epsilon)\}$ .

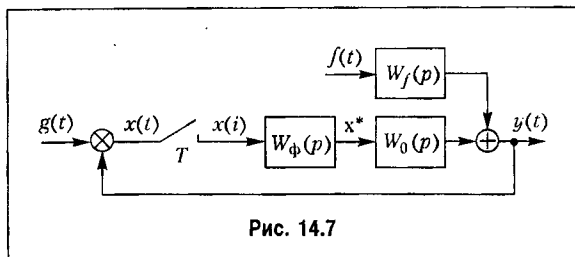


Рис. 14.7

ная функция разомкнутой системы по возмущению (см. гл. 5). Основу этой системы составляет схема, изображенная на рис. 14.4, при  $x(i) = u(i)$ . Тогда изображение управляемой величины  $y(t)$  при  $f(t) = 0$

$$Y(z) = W(z) X(z), \quad (14.63)$$

где  $W(z)$  – передаточная функция разомкнутой системы, которая при использовании экстраполятора нулевого порядка имеет вид (14.60) или (14.61).

Так как приведенная непрерывная часть системы реагирует на значения ошибки системы  $x(t) = g(t) - y(t)$  только в дискретные моменты  $t = iT$ , то  $x(i) = g(i) - y(i)$ , а  $X(z) = G(z) - Y(z)$ , и из (14.63) получим:

$$Y(z) = \frac{W(z)}{1 + W(z)} G(z) = \Phi(z) G(z); \quad (14.64)$$

$$X(z) = \frac{1}{1 + W(z)} G(z) = \Phi_x(z) G(z), \quad (14.65)$$

где  $\Phi(z)$  – передаточная функция замкнутой системы, а  $\Phi_x(z)$  – передаточная функция замкнутой системы по ошибке (по своей структуре эти передаточные функции аналогичны передаточным функциям замкнутой непрерывной системы (см. гл. 5)).

В качестве передаточной функции разомкнутой системы можно рассматривать и модифицированную передаточную функцию (14.62). Тогда при  $U(z) = X(z)$

$$Y(z, \varepsilon) = W(z, \varepsilon) X(z), \quad (14.66)$$

или с учетом (14.65)

$$Y(z, \varepsilon) = \frac{W(z, \varepsilon)}{1 + W(z)} G(z) = \Phi(z, \varepsilon) G(z), \quad (14.67)$$

где  $\Phi(z, \varepsilon)$  – модифицированная передаточная функция замкнутой системы (обычно эта передаточная функция не используется, так как практически всегда для оценки качества работы дискретной системы достаточно знания передаточных функций  $W(z)$ ,  $\Phi(z)$  или  $\Phi_x(z)$ ).

Передаточная функция импульсной системы (рис. 14.7) по возмущению  $\Phi_f(z)$  не существует. Это связано с тем, что если  $F(p)$  представляет собой изображение по Лапласу функции  $f(t)$ , то как отмечалось ранее,

$$Z\{W_f(p)F(p)\} = W_f F(z) \neq W_f(z)F(z). \quad (14.68)$$

Однако большинство задач по исследованию дискретных систем решается при использовании передаточной функции  $W(z)$ .

Рассмотрим теперь замкнутую импульсную систему (рис. 14.1, б). Ее структурная схема может быть представлена так, как показано на рис. 14.7, где  $W_f(p)$  – передаточ-

При наличии возмущения для разомкнутой системы вместо (14.63) получим

$$Y(z) = W(z)X(z) + W_f F(z). \quad (14.69)$$

Отсюда с учетом выражения  $X(z) = G(z) - Y(z)$  для замкнутой системы имеем:

$$Y(z) = \Phi(z)G(z) + \frac{W_f F(z)}{1 + W(z)}. \quad (14.70)$$

Изображение  $W_f F(z)$  можно определить только для конкретных заданных воздействий  $f(t)$ . Однако, как будет показано в §14.5, это не является препятствием для оценки качества импульсных систем при детерминированных воздействиях.

## § 14.5. Уравнения состояния

Уравнения состояния при непрерывном управлении

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= \bar{A}\bar{x} + \bar{b}u + \bar{m}f; \\ y &= \bar{c}^T \bar{x} \end{aligned} \quad (14.71)$$

и способы их получения были рассмотрены в главе 5. Найдем уравнения состояния для импульсной системы, схема которой изображена на рис. 14.4 с учетом возмущающего воздействия. Передаточные функции  $W_0(p)$  и  $W_f(p)$  полагаются заданными. Это означает, что известны и матрицы  $\bar{A}$ ,  $\bar{b}$ ,  $\bar{m}$ ,  $\bar{c}^T$ .

Решение первого из уравнений (14.71), как было показано в главе 5, имеет вид

$$\bar{x}(t) = e^{\bar{A}t} \bar{x}(0) + \int_0^t e^{\bar{A}(t-\tau)} [\bar{b}u(\tau) + \bar{m}f(\tau)] d\tau. \quad (14.72)$$

Для дискретных моментов времени из (14.72) получим:

$$\bar{x}(i) = e^{\bar{A}iT} \bar{x}(0) + \int_0^{iT} e^{\bar{A}(iT-\tau)} [\bar{b}u(\tau) + \bar{m}f(\tau)] d\tau. \quad (14.73)$$

Входное воздействие  $u(t) = u^*(t)$  изменяется по закону (14.2), причем коэффициент пропорциональности  $k_A$  отнесен к матрице  $\bar{b}$ . Возмущающее воздействие  $f(t)$  будем полагать детерминированным и изменяющимся по любому закону, но таким, что в течение периода дискретности  $T$  его можно считать постоянным:  $f(t) = f(i)$  при  $iT \leq t < (i+1)T$ . В реальных системах при малых значениях  $T$  это условие, как правило, выполняется.

Решая (14.73) последовательно шаг за шагом при  $i = 1, 2, \dots$ , как это делалось для разностных уравнений (см. 14.2), получим:

$$\bar{x}(i+1) = e^{\bar{A}T} \bar{x}(i) + u(i) \int_{iT}^{(i+1)T} e^{\bar{A}(i+1)T-\tau} \bar{b} d\tau + f(i) \int_{iT}^{(i+1)T} e^{\bar{A}(i+1)T-\tau} \bar{m} d\tau,$$

или после введения новой переменной  $\sigma = iT + T - \tau$

$$\bar{x}(i+1) = e^{\bar{A}T} \bar{x}(i) + u(i) \int_{(1-\gamma)T}^T e^{\bar{A}\sigma} \bar{b} d\sigma + f(i) \int_0^T e^{\bar{A}\sigma} \bar{m} d\sigma. \quad (14.74)$$

Таким образом, для импульсной системы (рис. 14.4) уравнения состояния можно представить в виде:

$$\begin{aligned} \bar{x}(i+1) &= \bar{A}^* \bar{x}(i) + \bar{b}^* u(i) + \bar{m}^* f(i); \\ y(i) &= \bar{c}^T \bar{x}(i), \end{aligned} \quad (14.75)$$

где

$$\bar{A}^* = e^{\bar{A}T}, \quad \bar{b}^* = \int_{(1-\gamma)T}^T e^{\bar{A}\sigma} \bar{b} d\sigma, \quad \bar{m}^* = \int_0^T e^{\bar{A}\sigma} \bar{m} d\sigma, \quad (14.76)$$

а матрица  $\bar{c}^T$  такая же, как и в (14.71).

При переходе от уравнений (14.71) к уравнениям (14.74) наиболее сложной операцией является вычисление матрицы  $\bar{A}^*$ . Задача определения этой матрицы может быть решена различными способами [31]. В общем случае предпочтительнее следует отдать способу, основанному на использовании преобразования Лапласа, согласно которому

$$e^{\bar{A}T} = L^{-1} \left\{ (p\bar{E} - \bar{A})^{-1} \right\}, \quad (14.77)$$

где  $p$  — оператор Лапласа,  $\bar{E}$  — единичная матрица.

Иными словами, для получения  $\bar{A}^*$  необходимо найти матрицу, обратную матрице  $(p\bar{E} - \bar{A})$ , для каждого ее элемента осуществить обратное преобразование Лапласа и в полученных выражениях заменить  $t$  на  $T$ .

Обширная таблица для матриц (14.76), соответствующих наиболее распространенным передаточным функциям  $W_0(p)$  и  $W_f(p)$ , приведена в [57]. При ее использовании в выражениях для  $\bar{b}^*$  скажность импульсов  $\gamma_i$  следует заменить на  $\gamma$ .

В частном случае, когда уравнения (14.71) представлены в канонической форме (см. гл. 5), т. е. когда матрица  $\bar{A}$  является диагональной с элементами  $p_1, p_2, \dots, p_n$  матрица  $\bar{A}^*$  вычисляется очень просто:

$$\bar{A}^* = \begin{bmatrix} e^{p_1 T} & & & \\ & e^{p_2 T} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{p_n T} \end{bmatrix}. \quad (14.78)$$

Решение первого из уравнений (14.75) можно получить как последовательно шаг за шагом, так и в замкнутой форме. В первом случае вычислительная процедура осуществляется следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{x}(1) &= \bar{A}^* \bar{x}(0) + \bar{b}^* u(0) + \bar{m}^* f(0); \\ \bar{x}(2) &= \bar{A}^* \bar{x}(1) + \bar{b}^* u(1) + \bar{m}^* f(1); \\ &\dots \end{aligned} \tag{14.79}$$

Во втором случае, подставляя выражение для  $\bar{x}(1)$  в выражение для  $\bar{x}(2)$ , выражение для  $\bar{x}(2)$  в выражение для  $\bar{x}(3)$  и т. д., получим

$$\bar{x}(i) = (\bar{A}^*)^i \bar{x}(0) + \sum_{v=0}^{i-1} (\bar{A}^*)^{i-1-v} \bar{b}^* u(v). \tag{14.80}$$

Для простоты здесь положено, что  $f(i) = 0$ .

Решение (14.80) позволяет при известной последовательности  $u(i)$  найти  $\bar{x}(i)$  и, следовательно,  $y(i) = \bar{c}^T \bar{x}(i)$  для любого наперед заданного момента времени  $t = iT$ .

Используя уравнения (14.75), можно определить передаточные функции рассматриваемой системы. Для этого найдем  $z$ -преобразования от их левых и правых частей с учетом формулы (14.33) при нулевых начальных значениях. В результате получим:

$$\begin{aligned} z\bar{X}(z) &= \bar{A}^* \bar{X}(z) + \bar{b}^* U(z) + \bar{m}^* F(z); \\ Y(z) &= \bar{c}^T \bar{X}(z), \end{aligned} \tag{14.81}$$

где

$$\bar{X}(z) = Z\{\bar{x}(i)\} = \begin{bmatrix} X_1(z) \\ X_2(z) \\ \vdots \\ X_n(z) \end{bmatrix}. \tag{14.82}$$

Тогда

$$\bar{X}(z) = (z\bar{E} - \bar{A}^*)^{-1} \bar{b}^* U(z) + (z\bar{E} - \bar{A}^*)^{-1} \bar{m}^* F(z); \tag{14.83}$$

$$\bar{Y}(z) = \bar{c}^T (z\bar{E} - \bar{A}^*)^{-1} \bar{b}^* U(z) + \bar{c}^T (z\bar{E} - \bar{A}^*)^{-1} \bar{m}^* F(z). \tag{14.84}$$

Таким образом, передаточные функции системы определяются следующим образом:

$$W(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \bar{c}^T (z\bar{E} - \bar{A}^*)^{-1} \bar{b}^*; \tag{14.85}$$



$$W_f(z) = \frac{Y(z)}{F(z)} = \bar{c}^T (z\bar{E} - \bar{A}^*)^{-1} \bar{m}^*. \quad (14.86)$$

Использование выражения (14.85) дает такой же результат, как и (14.58) при  $\gamma < 1$  или (14.60) при  $\gamma = 1$ . Передаточная функция (14.86) существует лишь при сделанном ранее допущении о том, что возмущающее воздействие можно считать постоянным на интервалах времени  $iT \leq t < (i+1)T$ .

## § 14.6. Устойчивость импульсных систем

В § 6.1 было показано, что непрерывная система устойчива, если все корни  $p_v$  ( $v = 1, 2, \dots, n$ ) ее характеристического уравнения лежат в левой полуплоскости (рис. 14.8, а). При исследовании импульсных систем вместо  $p$  используется новая переменная  $z = e^{pT}$ . В теории функций комплексного переменного преобразования, в процессе которого одна переменная заменяется некоторой функцией от новой переменной, а одна область комплексной плоскости отображается в другую, называется конформным преобразованием. Конформное преобразование  $z = e^{pT}$  отображает левую полуплоскость плоскости  $p$  в область, ограниченную окружностью единичного радиуса на плоскости  $z$  (рис. 14.8, б). При этом мнимая ось плоскости  $p$  отображается в саму окружность.

Действительно, пусть  $p_{1,2} = \alpha \pm j\beta$ . Тогда

$$z_{1,2} = e^{(\alpha \pm j\beta)T} = e^{\alpha T} (\cos \beta T \pm j \sin \beta T). \quad (14.87)$$

При этом  $|z_{1,2}| = e^{\alpha T}$ . Для значений  $\alpha < 0$  (что соответствует корням  $p_{1,2}$  лежащим в левой полуплоскости плоскости  $p$ )  $|z_{1,2}| < 1$ , что соответствует корням, лежащим внутри круга единичного радиуса плоскости  $z$ . Если  $\alpha = 0$ , т. е. если корни  $p_{1,2}$  располагаются на мнимой оси плоскости  $p$ , то корни  $z_{1,2}$  попадают на окружность единичного радиуса плоскости  $z$ .

Таким образом, импульсная система устойчива, если все корни ее характеристического уравнения лежат внутри круга единичного радиуса, т. е. если  $|z_v| < 1$ ,  $v = 1, 2, \dots, n$ , что совпадает с результатом (14.14). Если хотя бы один корень лежит вне круга единичного радиуса, то система неустойчива.

Окружность единичного радиуса представляет собой границу устойчивости для импульсной системы.

Система падает на апериодической границе устойчивости, если в ее характеристическом уравнении

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n = 0 \quad (14.88)$$

имеется корень  $z_v = 1$ , а остальные корни располагаются внутри круга единичного радиуса (рис. 14.8, в). В этом случае переходная составляющая решения разностного уравнения (14.12) с течением времени стремится к значению  $C_v(z_v)^i = C_v$ .

Если в характеристическом уравнении имеется пара комплексных сопряженных корней, расположенных на окружности единичного радиуса (рис. 14.8, г), т. е. таких, что  $Re^2 z_{v,v+1} + Im^2 z_{v,v+1} = 1$ , то имеет место колебательная граница устойчивости. В этом

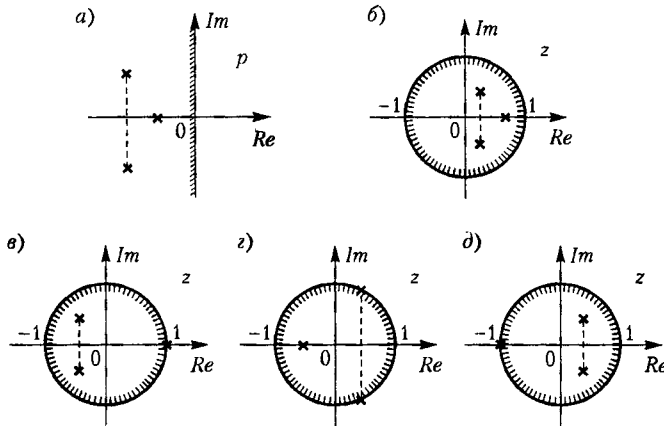


Рис. 14.8

случае с течением времени в системе устанавливаются незатухающие периодические колебания. Вещественная часть указанных корней  $Re z_{v,v+1}$  может быть положительной, как на рис. 14.8, з, отрицательной или нулевой.

Типичной для импульсных систем является так называемая граница устойчивости третьего типа, которой соответствует наличие в характеристическом уравнении корня  $z_v = -1$  (рис. 14.8, д). В этом случае в системе с течением времени устанавливаются незатухающие периодические колебания с периодом, равным  $2T$ , так как составляющая решения (14.12)  $C_v(z_v)^i = C_v(-1)^i$  при изменении  $i$  последовательно принимает значения  $C_v$  и  $-C_v$ .

В §14.4 отмечалось, что обычно для оценки устойчивости и качества импульсных систем используются передаточная функция разомкнутой системы  $W(z)$  и передаточные функции замкнутой системы  $\Phi(z)$  или  $\Phi_x(z)$ . Тогда в соответствии с выражениями (14.64) или (14.65) характеристическое уравнение замкнутой системы (14.88) может быть получено следующим образом:

$$1 + W(z) = B(z) + C(z) = 0, \quad (14.89)$$

где  $B(z)$  и  $C(z)$  — полиномы числителя и знаменателя передаточной функции  $W(z)$ .

Как правило, такое же уравнение получается и при использовании модифицированной передаточной функции замкнутой системы  $\Phi(z, \epsilon)$ , определяемой по формуле (14.67). Лишь в отдельных редких частных случаях полиномы знаменателей передаточных функций  $\Phi(z)$  и  $\Phi(z, \epsilon)$  могут иметь различное число корней [30]. Эти случаи здесь не рассматриваются.

Исследование устойчивости импульсных систем представляет собой более сложную задачу, чем исследование устойчивости непрерывных систем. Это связано с тем, что рассмотренные в главе 6 критерии устойчивости, такие как критерии Гурвица или Вышнеградского, устанавливают принадлежность корней характеристического уравнения к левой полуплоскости плоскости  $p$ , тогда как для устойчивости импульсной

системы корни характеристического уравнения (14.88) или (14.89) должны находиться внутри круга единичного радиуса на плоскости  $z$ . По той же причине неприменимым оказывается и необходимое условие устойчивости, требующее положительности коэффициентов характеристического уравнения. Например, в уравнении  $z - 0,5 = 0$  один коэффициент отрицательный, однако корень  $z_1 = 0,5$  находится внутри круга единичного радиуса.

Принадлежность корней к кругу единичного радиуса может быть установлена при помощи критерия Шур-Кона [90]. До некоторой степени он аналогичен критерию Гурвица, однако при его использовании необходимо составлять и анализировать определители вплоть до определителя порядка  $2n \times 2n$ , где  $n$  -- порядок характеристического уравнения. Поэтому на практике этот критерий применяется редко.

Для того чтобы получить возможность использования для исследования устойчивости импульсных систем всех критериев устойчивости непрерывных систем, необходимо отобразить круг единичного радиуса с плоскости  $z$  на левую полуплоскость некоторой новой переменной. Для этого можно, например, применить рассмотренное выше конформное преобразование  $z = e^{pT}$ . Однако в результате такой замены уравнение (14.88) станет трансцендентным. Вместе с тем в теории функций комплексного переменного существует преобразование

$$z = \frac{1+w}{1-w}, \quad (14.90)$$

которое называется билинейным, или  $w$ -преобразованием. Оно тоже отображает круг единичного радиуса на левую полуплоскость, но уже не плоскости  $p$ , а плоскости переменной  $w$ .

Рассмотрим, например, характеристическое уравнение (14.88) при  $n = 1$ . После подстановки (14.90) получим:

$$(a_0 - a_1)w + a_0 + a_1 = 0. \quad (14.91)$$

Для уравнений первого и второго порядка, как показано в главе 6, необходимое и достаточное условие устойчивости сводится к требованию положительности коэффициентов. Таким образом, условия устойчивости импульсной системы при  $n = 1$  имеют вид

$$\left. \begin{aligned} a_0 - a_1 > 0; \\ a_0 + a_1 > 0. \end{aligned} \right\} \quad (14.92)$$

При  $n = 2$  характеристическое уравнение и условия устойчивости следующие:

$$\begin{aligned} (a_0 - a_1 + a_2)w^2 + 2(a_0 - a_2)w + a_0 + a_1 + a_2 = 0; \\ \left. \begin{aligned} a_0 - a_1 + a_2 > 0; \\ a_0 - a_2 > 0; \\ a_0 + a_1 + a_2 > 0. \end{aligned} \right\} \quad (14.93) \end{aligned}$$

При  $n = 3$  кроме положительности коэффициентов должно дополнительно выполняться условие критерия Гурвица (см. гл. 6). Поэтому для исследования устойчивости требуется проверить выполнение пяти неравенств:

$$\left. \begin{aligned} a_0 - a_1 + a_2 - a_3 &> 0; \\ 3a_0 - a_1 - a_2 + 3a_3 &> 0; \\ 3a_0 + a_1 - a_2 - 3a_3 &> 0; \\ a_0 + a_1 + a_2 + a_3 &> 0; \\ a_0^2 - a_0a_2 + a_1a_3 - a_3^2 &> 0. \end{aligned} \right\} \quad (14.94)$$

При  $n \geq 4$  условия устойчивости становятся слишком громоздкими.

В качестве примера исследуем устойчивость замкнутой системы, передаточная функция нецелой части которой

$$W_0(p) = \frac{K(1 + \tau p)}{p^2} = \frac{K}{p^2} + \frac{K\tau}{p}. \quad (14.95)$$

В соответствии с (14.60) при помощи табл. 14.1 находим передаточную функцию разомкнутой системы:

$$W(z) = \frac{KT^2}{2} \frac{z+1}{(z-1)^2} + \frac{K\tau T}{z-1} = \frac{KT^2}{2} \frac{\left(1 + \frac{2\tau}{T}\right)z + 1 - \frac{2\tau}{T}}{(z-1)^2}. \quad (14.96)$$

Характеристическое уравнение замкнутой системы (14.89) имеет вид

$$z^2 + \left(\frac{KT^2}{2} + K\tau T - 2\right)z + \frac{KT^2}{2} - K\tau T + 1 = 0.$$

Из неравенств (14.93) получаем условия устойчивости замкнутой системы:

$$K\tau T < 2, \quad \tau > \frac{T}{2}.$$

Для исследования устойчивости замкнутых систем удобно использовать критерий Найквиста (см. гл. 6). Чтобы построить амплитудно-фазовую характеристику разомкнутой системы можно использовать преобразование  $z = e^{pT}$ . Положив  $p = j\omega$ , получим:

$$z = e^{j\omega T} = \cos \omega T + j \sin \omega T = \frac{1 + j \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2}}{1 - j \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2}}. \quad (14.97)$$

Подставив (14.97) в выражение для передаточной функции разомкнутой системы  $W(z)$ , найдем частотную передаточную функцию разомкнутой системы  $W(e^{j\omega T})$ . Определив модуль и фазу или вещественную и мнимую части этой функции, можно построить а. ф. х. разомкнутой системы.

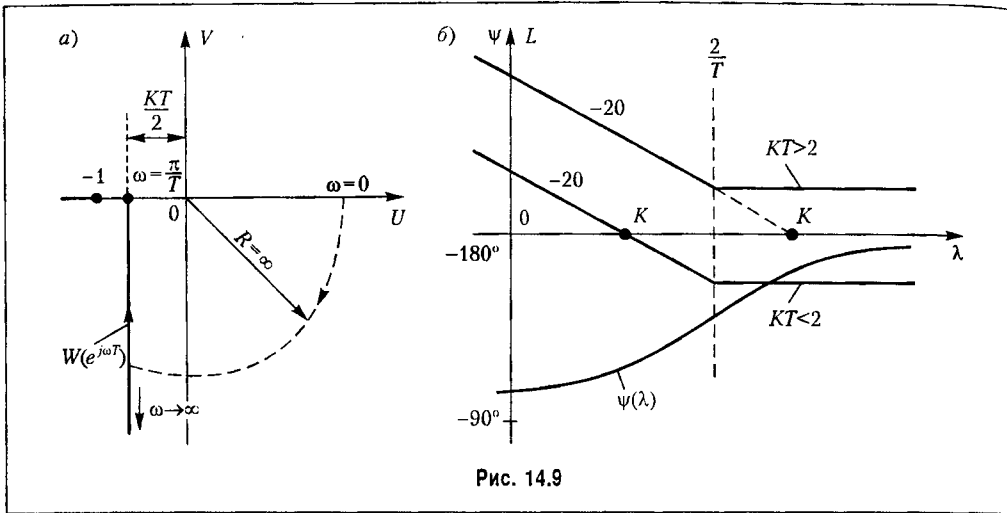


Рис. 14.9

Следует учитывать, что функция (14.97) периодическая. Поэтому при построении а. ф. х. достаточно ограничиться диапазоном частот  $0 \leq \omega \leq \pi/T$ .

В качестве примера рассмотрим систему, передаточная функция непрерывной части которой

$$W_0(p) = K/p.$$

В соответствии с (14.60) находим передаточную функцию разомкнутой системы

$$W(z) = \frac{KT}{z-1}. \quad (14.98)$$

В результате замены (14.97) получим

$$W(e^{j\omega T}) = \frac{KT \left(1 - j \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2}\right)}{2j \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2}} = -\frac{KT}{2} - j \frac{KT}{2} \operatorname{ctg} \frac{\omega T}{2}.$$

А. ф. х. разомкнутой системы изображена на рис. 14.9, а. Так как при  $\omega = 0$  она имеет разрыв, обусловленный наличием  $p$  в знаменателе  $W_0(p)$ , дополняем ее четвертью окружности бесконечно большого радиуса.

Для исследования устойчивости замкнутой системы можно использовать любую из приведенных в главе 6 формулировок критерия Найквиста. В знаменателе передаточной функции  $W_0(p)$  нет корней с положительной вещественной частью, т. е.  $l = 0$ . Поэтому в соответствии с первой формулировкой а. ф. х. разомкнутой системы не должна охватывать точку  $(-1, j0)$ . Следовательно, как видно из рис. 14.9, а, замкнутая система устойчива при  $KT < 2$ . В соответствии со второй формулировкой сумма переходов а. ф. х. через критический отрезок должна быть равна нулю. При  $KT < 2$  переходов нет и замкнутая система устойчива. При  $KT > 2$  а. ф. х. заканчивается на критическом отрезке, т. е. имеет место  $-1/2$  перехода.

При использовании преобразования  $z = e^{pT}$  частотная передаточная функция  $W(e^{j\omega T})$  является трансцендентной. Поэтому для систем выше второго порядка построение а. ф. х. существенно затрудняется. Кроме того, практически исключается возможность построения асимптотических логарифмических частотных характеристик.

Для преодоления указанных недостатков удобно использовать преобразование

$$z = \frac{1 + j\lambda \frac{T}{2}}{1 - j\lambda \frac{T}{2}}. \quad (14.99)$$

Оно, как и преобразование (14.90), является билинейным и отображает круг единичного радиуса с плоскости  $z$  на левую полуплоскость плоскости переменной  $\lambda$ , что дает возможность применять все критерии устойчивости непрерывных систем.

Переменная  $\lambda$  называется абсолютной псевдочастотой, или сокращенно — псевдо-частотой. Сравнив (14.99) с (14.97) получим:

$$\lambda = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2}. \quad (14.100)$$

Из (14.100) видно, что благодаря множителю  $2/T$  псевдочастота  $\lambda$  имеет размерность угловой частоты. Кроме того, при изменении частоты  $\omega$  от 0 до  $\pi/T$  она изменяется от 0 до  $\infty$ . Наконец, при  $\omega < 2/T$  псевдочастота практически совпадает с реальной частотой  $\omega$ .

При исследовании устойчивости и качества импульсных систем можно оперировать с  $j\lambda$  точно так же, как это делалось с  $j\omega$  или с  $p$  при исследовании непрерывных систем.

В качестве примера используем подстановку (14.99) в передаточной функции (14.97). В результате получим частотную передаточную функцию разомкнутой системы

$$W(j\lambda) = \frac{K \left(1 - j\lambda \frac{T}{2}\right)}{j\lambda}. \quad (14.101)$$

Теперь для исследования устойчивости замкнутой системы можно применять как алгебраический критерий, так и критерий Найквиста.

В первом случае находим характеристическое уравнение замкнутой системы:

$$\left(1 - \frac{KT}{2}\right)j\lambda + K = 0.$$

Необходимое условие выполняется при  $KT < 2$ . Для системы первого порядка оно является и достаточным.

Во втором случае находим модуль и фазу:

$$|W(j\lambda)| = \frac{K \sqrt{1 + \lambda^2 \frac{T^2}{4}}}{\lambda};$$

$$\psi(\lambda) = -90^\circ - \operatorname{arctg} \frac{\lambda T}{2}.$$

Нетрудно убедиться, что а. ф. х. разомкнутой системы будет точно такой же, как на рис. 14.9, а, только она закончится на оси абсцисс при  $\lambda = \infty$ .

На рис. 14.9, б изображены логарифмические частотные характеристики разомкнутой системы. Так как в знаменателе (14.101) имеется  $j\lambda$ , что эквивалентно наличию  $p$  в знаменателе передаточной функции непрерывной системы  $W(p)$ , то первая асимптота имеет наклон  $-20$  дБ/дек и пересекает ось абсцисс при  $\lambda = K$ . На сопрягающей частоте  $\lambda = 2/T$  л.а.х. изламывается на  $+20$  дБ/дек, так как множитель  $1 - j\lambda T/2$  находится в числителе. Если  $K < 2/T$ , то вторая асимптота проходит ниже оси абсцисс. При этом критический отрезок находится левее точки  $\lambda = K$  и логарифмическая фазовая характеристика не пересекает его. Следовательно, замкнутая система устойчива. Если же  $K > 2/T$ , то вторая асимптота проходит выше оси абсцисс и критическим отрезком будет вся эта ось. При  $\lambda = \infty$  фаза  $\psi(\omega) = -180^\circ$ , а модуль не равен бесконечности. Следовательно, имеет место  $-1/2$  перехода и замкнутая система неустойчива.

## § 14.7. Оценка качества импульсных систем

Общие соображения по оценке качества систем автоматического управления, рассмотренные в § 8.1, относятся и к импульсным системам.

Для оценки точности можно использовать величину ошибки в типовых режимах. В первых трех из них (см. § 8.2) при отсутствии возмущения значение установившейся ошибки в любой момент времени в соответствии с теоремой о конечном значении (14.37) определяется по формуле

$$x_{\text{уст}}(\epsilon) = \lim_{i \rightarrow \infty} x(i, \epsilon) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)X(z, \epsilon), \quad (14.102)$$

где

$$X(z, \epsilon) = G(z, \epsilon) - Y(z, \epsilon),$$

$G(z, \epsilon) = Z_\epsilon\{g(t)\}$  — изображение задающего воздействия, а  $Y(z, \epsilon)$  определяется выражением (14.77).

В дискретные моменты времени  $t = iT$

$$x_{\text{уст}} = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)X(z), \quad (14.103)$$

где  $X(z)$  определяется выражением (14.65).