

Зміст

ВСТУП.....	5
Модуль 1. ЛІНІЙНА ТА ВЕКТОРНА АЛГЕБРА.....	6
Практичне заняття №1 Тема: Визначники та їх властивості. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР). Розв'язання та дослідження СЛАР методом Крамера.....	6
Завдання до практичного заняття №1	9
Практичне заняття №2 Тема: Матриці та дії над ними.....	11
Завдання до практичного заняття №2.....	14
Практичне заняття №3 Тема: Розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь матричним методом та методом Гауса. <u>Фундаментальна система розв'язків СЛАР</u>	17
Завдання до практичного заняття №3.....	22
Практичне заняття №4 Тема: Вектори.....	23
Завдання до практичного заняття №4.....	28
Модуль 2. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ НА ПЛОЩИНІ ТА У ПРОСТОРИ.....	32
Практичне заняття №5 Тема: Аналітична геометрія на площині.....	32
Завдання до практичного заняття №5.....	35
Практичне заняття №6 Тема: Криві другого порядку.....	39
Завдання до практичного заняття №6.....	41
Практичне заняття №7 Тема: Аналітична геометрія у просторі. Площина.....	43
Завдання до практичного заняття №7.....	45
Практичне заняття №8 Тема: Аналітична геометрія у просторі. Пряма у просторі.	46
Завдання до практичного заняття №8.....	48
Практичне заняття №9 Тема: Аналітична геометрія у просторі. Взаємне розташування прямої та площини.....	50
Завдання до практичного заняття №9.....	52
Модуль 3. ДИФЕРЕНЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ТА БАГАТЬОХ ЗМІННИХ.....	56
Практичне заняття №10 Тема: Комплексні числа та дії над ними.....	56
Завдання до практичного заняття №10.....	58

} *вмістє*

} *вмістє*

Практичне заняття №11 Тема: Методи обчислення границі послідовностей та функцій.	59
Завдання до практичного заняття №11	62
Практичне заняття №12 Тема: Похідна. Правило Лопітала обчислення границь.	67
Завдання до практичного заняття №12	70
Практичне заняття №13 Тема: Частинні похідні функції багатьох змінних. Екстремум функції багатьох змінних.	73
Завдання до практичного заняття №13	76
Модуль 4. ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ	80
Практичне заняття №14 Тема: Невизначений інтеграл. Методи інтегрування.	80
Завдання до практичного заняття №14	85
Практичне заняття №15 Тема: <u>Визначений інтеграл</u> [Невласні інтеграли] .X.....	88
Завдання до практичного заняття №15	90
Практичне заняття №16 Тема: Числові ряди. Степеневі ряди. Радіус збіжності.	91
Завдання до практичного заняття №16	96
Практичне заняття №17 Тема: Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними. Однорідні диференціальні рівняння.	99
Завдання до практичного заняття №17	101
Практичне заняття №18 Тема: Лінійні диференціальні рівняння.	102
Завдання до практичного заняття №18	104
Практичне заняття №19 Тема: Лінійні диференціальні рівняння вищих порядків зі сталими коефіцієнтами	105
Завдання до практичного заняття №19	108
СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ	110
Додаток 1	111

Х
вместе

ВСТУП

В практиці економічних досліджень широке застосування одержали виробничі функції, що використовуються для встановлення залежностей, наприклад, випуску продукції від витрат ресурсів, витрат виробництва від об'єму продукції, виторгу від продажу товару і т.д. У припущенні диференційованості виробничих функцій важливого значення набувають їхні диференціальні характеристики, пов'язані з поняттям похідної. Також в економіці широко використовуються середні величини: середня вартість продукції, середня продуктивність праці і т.п. В однаковій мірі середні величини важливі і при комерційній діяльності: середній дохід, середній об'єм продажів і т.п. Але при плануванні розвитку виробництва та будь-якої підприємницької діяльності, виникає, наприклад, така задача: потрібно довідатися, на яку величину виросте результат, якщо будуть збільшені витрати, і, навпаки, наскільки зменшиться результат, якщо витрати скоротяться. Оперуючи середніми величинами, не одержиш відповіді на такі питання. Тут мова йде про *прирости* змінних величин. У подібних задачах потрібно знайти границю відношення приросту розглянутих величин або, як говорять, граничний ефект. Отже, тут застосовне поняття диференціального числення — похідної функції. Таким чином, розв'язання багатьох економічних задач, як правило, вимагає знань і вмілого застосування різних математичних методів.

Мета вивчення курсу “Математика для економістів: вища математика” студентами, що навчаються за економічним напрямком — це освоєння основ математичного апарата, необхідного для розв'язання теоретичних і практичних задач, що виникають в їх майбутній професійній діяльності; вироблення вмінь та навичок з моделювання реальних природних процесів; освоєння прийомів дослідження і розв'язання математично формалізованих задач.

У даному навчально-методичному посібнику наводяться рекомендації з вивчення таких тем курсу вищої математики як «Лінійна та векторна алгебра», «Аналітична геометрія», «Диференціальне числення», «Інтегральне числення», а також достатня кількість завдань з кожної теми для самостійного опрацювання та підготовки до семестрового контролю.

Дане методичне видання розроблене у відповідності до навчального плану з дисципліни “Математика для економістів: вища математика” і охоплюють розділи, які вивчаються студентами протягом першого курсу. Наведені теми практичних занять дозволяють студентам отримати знання та навички, не опрацьовуючи велику кількість літератури, що в загальному випадку запропонована студентам технічних та фізико-математичних спеціальностей.

В процесі підготовки до практичних занять студентам рекомендовано перед кожним практичним заняттям опрацювати з посібника [16] зазначені сторінки, де викладений теоретичний матеріал даного параграфа. Окрім зазначеного джерела можна використовувати як лекційний матеріал так і додаткову літературу [1-17].

Дані методичні вказівки призначені для більш якісного освоєння матеріалу з курсу “Математика для економістів: вища математика”, і як результат одержання заліку та іспиту в кінці першого року вивчення даної дисципліни.

Модуль 1. ЛІНІЙНА ТА ВЕКТОРНА АЛГЕБРА



ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ №1

Тема: Визначники та їх властивості. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР). Розв'язання та дослідження СЛАР методом Крамера.

1. Визначники та їх властивості. Література: [16], розд. I, §1, стор. 7-10.

Обчислення визначників II порядку:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Обчислення визначників III порядку:

а) метод Саррюса

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

б) правило трикутника

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

З першого визначника береться добуток елементів, що закреслені, тобто по головній діагоналі, та вершини трикутника зі знаком „+”, а з другого визначника, аналогічно – зі знаком „-”. Тобто маємо:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Приклад №1.1. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix}$ за правилом трикутника.

Розв'язання.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 \cdot 5 + 0 \cdot 2 \cdot 3 + (-1) \cdot 2 \cdot 3 - 3 \cdot 1 \cdot 3 - 2 \cdot 2 \cdot 2 - 0 \cdot (-1) \cdot 5 = 10 - 6 - 9 - 8 = -13.$$

Приклад №1.2. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 1 & -5 & 3 \\ -3 & 2 & -4 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix}$.

а) безпосередньо; б) перший рядок помножити на (-2) і додати до останнього.

$$\text{Розв'язання. а) методом трикутника одержимо значення визначника } \begin{vmatrix} 1 & -5 & 3 \\ -3 & 2 & -4 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 8 +$$

$$+ 27 + 40 - 12 - 12 - 60 = -9;$$

$$б) \begin{vmatrix} 1 & -5 & 3 \\ -3 & 2 & -4 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix} \xrightarrow{\times(-2)} \begin{vmatrix} 1 & -5 & 3 \\ -3 & 2 & -4 \\ 0 & 7 & -2 \end{vmatrix} = -4 - 63 + 28 + 30 = -9.$$

2. **Мінор. Алгебраїчне доповнення елемента визначника.** Література: [16], розд. I, §2, стор. 11-12.

Алгебраїчне доповнення A_{ij} визначника обчислюється за формулою: $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, де M_{ij} – мінор до елемента a_{ij} .

Теорема. Визначник дорівнює сумі добутків елементів будь-якого рядка (або стовпця) визначника на їх алгебраїчні доповнення.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + a_{1n}A_{1n}.$$

Приклад №1.3. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 7 \end{vmatrix}$ розкладом по елементам третього рядка.

Розв'язання.

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 7 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 4 \cdot (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (-7) \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-5) + 4 \cdot (-6) - 7 \cdot (-7) = 10.$$

Зауваження. Користуючись вище наведеною теоремою можна завжди знизити порядок визначника і довести його до третього порядку, а потім обчислити. Зручно, при обчисленні визначників вищих порядків, спочатку отримати максимальну кількість нулів у рядку (або стовпці), а потім розкласти його по елементам цього рядка (або стовпця).

3. **Системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Формули Крамера.** Література: [16], розд. I, §3, стор. 12-18.

Нехай дана сумісна система n лінійних рівнянь з n невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \quad (1.1)$$

Правило Крамера

– якщо у системі (1.1) головний визначник $\Delta = \det A \neq 0$, то система сумісна і має єдиний розв'язок, який знаходиться за формулами $x_i = \Delta_i / \Delta$, $i = \overline{1, n}$, де Δ_i – допоміжний визначник, одержаний з визначника Δ заміною i -го стовпця на стовпець вільних членів;

– якщо в системі (1.1) $\Delta = 0$, але хоча б один з визначників Δ_i не дорівнює нулю, то система не має розв'язків, тобто несумісна;

– якщо у системі (1.1) $\Delta = 0$ і усі допоміжні визначники Δ_i дорівнюють нулю, тобто $\Delta_i = 0$, то система сумісна і має нечисленну множину розв'язків.

Приклад №1.4. Методом Крамера дослідити та розв'язати систему лінійних алгебраїчних

$$\text{рівнянь. } \begin{cases} x - y + z = 0, \\ -x + 2y + 3z = 5, \\ 3x + y + 6z = 23. \end{cases}$$

Розв'язання.

Обчислимо головний визначник: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 12 + 1 - 9 + 6 - 3 - 6 = 1.$

Оскільки $\Delta \neq 0$, то система має єдиний розв'язок. Знайдемо допоміжні визначники, замінюючи відповідні стовпці Δ вільними членами системи:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 5 & 2 & 3 \\ 23 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 0 - 5 - 69 + 46 - 0 + 30 = 2; \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 5 & 3 \\ 3 & 23 & 6 \end{vmatrix} = 30 + 23 + 0 + 15 - 0 - 69 = -1;$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 23 \end{vmatrix} = 46 + 0 - 15 - 0 - 5 - 23 = 3.$$

Тоді $x = \Delta_x / \Delta = 2/1 = 2$, $y = \Delta_y / \Delta = -1/1 = -1$ і $z = \Delta_z / \Delta = 3/1 = 3$.

Приклад №1.5. Дослідити методом Крамера СЛАР $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = -3 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1 \\ x_1 - 4x_2 - 9x_3 = -5 \end{cases}$.

Розв'язання. Обчислимо головний визначник:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -9 \end{vmatrix} = -81 + 8 + 4 + 3 + 48 + 18 = 0.$$

Оскільки $\Delta = 0$, то необхідно визначити сумісна система чи несумісна. Для цього знайдемо допоміжні визначники:

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \\ -5 & -4 & -9 \end{vmatrix} = 81 - 40 + 4 - 15 - 48 + 18 = 0;$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 3 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & -5 & -9 \end{vmatrix} = -27 + 5 - 12 + 1 + 60 - 27 = 0; \quad \Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & -4 & -5 \end{vmatrix} = -45 + 12 + 2 + 9 + 12 + 10 = 0.$$

Оскільки всі допоміжні визначники дорівнюють нулю, то система сумісна, але невизначена, тобто має нескінченну множину розв'язків.

Контрольні питання

1. Що називається визначником і що є його порядком?
2. Правила обчислення визначників II-го і III-го порядків.
3. Властивості визначників.
4. Визначення мінору та алгебраїчного доповнення.
5. Теорема про розкладання визначника по елеентам будь-якого рядка та стовпця.
6. Методика обчислення визначників IV-го та більш високих порядків.
7. Яка система лінійних алгебраїчних рівнянь називається сумісною, несумісною?
8. Що таке головний визначник і побічні визначники СЛАР?
9. Як складаються головний і побічні визначники?

10. Записати формулу Крамера розв'язання СЛАР.

11. Використовуючи формули Крамера вказати, коли система а) має єдиний розв'язок; б) не має розв'язків; в) має безліч розв'язків.

Завдання до практичного заняття №1

В задачах 1.1–1.24 обчислити визначники:

$$1.1 \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}$$

$$1.2 \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$1.3 \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 10 \end{vmatrix}$$

$$1.4 \begin{vmatrix} 3 & -16 \\ 5 & 10 \end{vmatrix}$$

$$1.5 \begin{vmatrix} a & 1 \\ a^2 & a \end{vmatrix}$$

$$1.6 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix}$$

$$1.7 \begin{vmatrix} 10 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$1.8. \begin{vmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix}$$

$$1.9. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$1.10. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$1.11 \begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 5 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$1.12 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$1.13 \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$1.14 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$1.15 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 8 & 9 & 7 \end{vmatrix}$$

$$1.16 \begin{vmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{vmatrix}$$

$$1.17 \begin{vmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & -3 \\ -3 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$1.18 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$1.19 \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 5 \\ 6 & -2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$1.20 \begin{vmatrix} a & a-b \\ a+b & a-1 \end{vmatrix}$$

$$1.21 \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2\cos\alpha} \\ \cos\alpha & 1 \end{vmatrix}$$

$$1.22 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$1.23 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & -3 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$1.24 \begin{vmatrix} 5 & 1 & 10 \\ 2 & -1 & 6 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix}$$

В задачах 1.25–1.33 розв'язати рівняння:

$$1.25 \begin{vmatrix} 3x & -1 \\ x & 2x-3 \end{vmatrix} = 0.$$

$$1.26 \begin{vmatrix} 2 & x-4 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

$$1.27 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3x & x+22 \end{vmatrix} = 0.$$

$$1.28 \begin{vmatrix} 3x & -1 \\ x & 2x-3 \end{vmatrix} = \frac{3}{2}.$$

$$1.29 \begin{vmatrix} x+1 & -5 \\ 1 & x-1 \end{vmatrix} = 0.$$

$$1.30 \begin{vmatrix} x & x+1 \\ -4 & x+1 \end{vmatrix} = 0.$$

$$1.31 \begin{vmatrix} 3 & x & -4 \\ 2 & -1 & 3 \\ x+10 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

$$1.32 \begin{vmatrix} x-2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \\ x-3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

$$1.33 \begin{vmatrix} 1 & 3 & x \\ 4 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

В задачах 1.34–1.39 розв'язати нерівності:

$$1.34 \begin{vmatrix} 3x-3 & 2 \\ x & 1 \end{vmatrix} > 0.$$

$$1.35 \begin{vmatrix} 1 & x+5 \\ 2 & x \end{vmatrix} < 0.$$

$$1.36 \begin{vmatrix} 2x-2 & 1 \\ 7x & 2 \end{vmatrix} > 5.$$

$$1.37. \begin{vmatrix} x & 3x \\ 4 & 2x \end{vmatrix} < 14.$$

$$1.38 \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & x & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} < 1.$$

$$1.39 \begin{vmatrix} 2 & x+2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & x \end{vmatrix} > 0.$$

В задачах 1.40–1.43 розкрити визначники за будь-яким рядком або стовпцем:

$$1.40 \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$1.41 \begin{vmatrix} 1 & 17 & -7 \\ -1 & 13 & 1 \\ 1 & 7 & 1 \end{vmatrix}$$

$$1.42 \begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 16 \\ 0 & -1 & 10 \end{vmatrix}$$

$$1.43 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & -3 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix}$$

В задачах 1.44-1.49 обчислити визначники 4-го порядку:

$$1.44 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}$$

$$1.45 \begin{vmatrix} 8 & 7 & 2 & 0 \\ 8 & 7 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$1.46 \begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

$$1.47 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$1.48 \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 4 & 6 \\ 4 & 0 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$1.49 \begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

В задачах 1.50-1.52 знайти розв'язки системи:

$$1.50 \begin{cases} 3x - 5y = 13, \\ 2x + 7y = 81. \end{cases}$$

$$1.51 \begin{cases} 3y - 4x = 1, \\ 3x + 4y = 18. \end{cases}$$

$$1.52 \begin{cases} 2x - 3y = 6, \\ 4x - 6y = 5. \end{cases}$$

В задачах 1.53-1.76 дослідити та розв'язати систему:

$$1.53 \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$$

$$1.54 \begin{cases} 2x + y + z = 9, \\ x + y = 5, \\ x - z = 2. \end{cases}$$

$$1.55 \begin{cases} x + 3y - 3z = 0, \\ x + y + z = 2, \\ y - z = 0. \end{cases}$$

$$1.56 \begin{cases} x + 2y - 2z = 0, \\ 2x - 2y - 6z = 0, \\ -x + y + 3z = 10. \end{cases}$$

$$1.57 \begin{cases} x + 4y + z = 6, \\ 3x + 6y - z = 10, \\ 3y + 2z = 4. \end{cases}$$

$$1.58 \begin{cases} 3x - y + z = 10, \\ x - z = 2, \\ y + z = 1. \end{cases}$$

$$1.59 \begin{cases} x + 2y + z = 5, \\ x - y - z = -3, \\ y - 2z = 0. \end{cases}$$

$$1.60 \begin{cases} -2x + y + 3z = -6, \\ 2x - 3y - z = 3, \\ x - 2z = 7. \end{cases}$$

$$1.61 \begin{cases} 3x - 8y + 3z = 5, \\ x + 2y + z = -3, \\ -4x - y + z = 0. \end{cases}$$

$$1.62 \begin{cases} x + y - 2z = 3, \\ x - y + 4z = 2, \\ -2x + 5y = 6. \end{cases}$$

$$1.63 \begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -6, \\ 2x_1 + 11x_2 = -2, \\ -4x_1 - 7x_2 = 4. \end{cases}$$

$$1.64 \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 - 6x_3 = 2, \\ 3x_1 - 6x_2 + x_3 = -2. \end{cases}$$

$$1.65 \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 8, \\ 2x_1 - 4x_2 - 3x_3 = -1, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

$$1.66 \begin{cases} 5x_1 + 8x_2 - x_3 = 7, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$$

$$1.67 \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 8x_3 = 5, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = -3, \\ -3x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 7. \end{cases}$$

$$1.68 \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 4, \\ 5x_1 + 2x_2 + 13x_3 = 2, \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$$

$$1.69 \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -2, \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$$

$$1.70 \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 1, \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 8. \end{cases}$$

$$1.71 \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 2, \\ -4x_1 - x_2 + 3x_3 = -3. \end{cases}$$

$$1.72 \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 6, \\ 2x_1 + x_2 - 8x_3 = 20, \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 6. \end{cases}$$

$$1.73 \begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9, \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 14, \\ 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 18. \end{cases}$$

$$1.74 \begin{cases} x + y - z = 1, \\ 2x + 2y - 2z = 3, \\ -3x - 3y + 3z = -5. \end{cases}$$

$$1.75 \begin{cases} x - 3y + z = -2, \\ 4x + y - z = 3, \\ 5x + 2y - 3z = 0. \end{cases}$$

$$1.76 \begin{cases} 3x + y - 2z = 1, \\ x - 2y + 3z = 5, \\ 2x + 3y - z = -4. \end{cases}$$



ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ №2

Тема: Матриці та дії над ними.

4. Матриці, дії над матрицями. Застосування матриць в економіці. Література: [16], розд. I, §4, стор. 19-22, §10, стор. 39-50, прикл. 1.15-1.18.

Визначення. Матриця – це прямокутна таблиця, що складається з m рядків та n стовпців

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{(m,n)}. \quad (1.2)$$

У виразі (1.2) (m, n) визначають розмір матриці A .

Підсумовувати можна матриці A та B , якщо вони однакових розмірів, тобто

$$A_{(m,n)} + B_{(m,n)} = C_{(m,n)}, \quad (1.3)$$

причому для кожного елемента матриці $C_{(m,n)}$: $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$.

Добуток λA матриці A на число λ дорівнює матриці B , елементи якої дорівнюють добуткам кожного елемента матриці A на число λ , тобто

$$b_{ij} = \lambda a_{ij}, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}, \quad (1.4)$$

Добуток матриць A та B існує тільки в тому випадку, якщо число стовпців матриці A дорівнює числу рядків матриці B , тобто

$$A_{(m,n)} \cdot B_{(n,k)} = C_{(m,k)}, \quad (1.5)$$

причому розмірність матриці C дорівнює числу рядків матриці A та числу стовпців матриці B .

Приклад №2.1. Перемножити матриці $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ та $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \\ -2 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. Оскільки число стовпців матриці A дорівнює числу рядків матриці B , то такі матриці можна перемножити, тобто

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \\ -2 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 0 \cdot (-2) + (-1) \cdot 5 & 4 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + 0 \cdot 3 + (-1) \cdot 2 \end{pmatrix} =$$

$= \begin{pmatrix} -3 & 5 \end{pmatrix}$. Одержали матрицю розміром 1×2 , що відповідає одному рядку матриці A та двом стовпцям матриці B .

Зауваження. Для таких матриць неможливе перемноження в зворотному порядку, оскільки тоді число стовпців матриці B не буде дорівнювати числу рядків матриці A ($2 \neq 1$).

Приклад №2.2. Перемножити матриці $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ та $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & -6 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. Оскільки число стовпців матриці A дорівнює числу рядків матриці B , то такі матриці можна перемножити, тобто

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & -6 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 1 + 2 \cdot 2 & 0 \cdot 2 + 2 \cdot (-6) & 0 \cdot 4 + 2 \cdot (-1) & 0 \cdot 0 + 2 \cdot 2 \\ 3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 & 3 \cdot 2 + 1 \cdot (-6) & 3 \cdot 4 + 1 \cdot (-1) & 3 \cdot 0 + 1 \cdot 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & -12 & -2 & 4 \\ 5 & 0 & 11 & 2 \end{pmatrix}.$$

Одержали матрицю розміром 1×2 , що відповідає одному рядку матриці A та двом стовпцям матриці B .

5. Зворотна матриця. Література: [16], розд. 1, §4, стор. 22-25, прикл. 1.6, §12, стор. 58-65, прикл. 1.20-1.24.

Визначення. Якщо A – квадратна невідроджена матриця ($\det A \neq 0$), то існує і притому єдина матриця A^{-1} , яка називається зворотною до матриці A , при цьому повинна виконуватися така властивість:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E,$$

де E – одинична матриця, тобто $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$

Для того, щоб знайти матрицю A^{-1} , зворотню до невідродженої квадратної матриці A , необхідно:

- обчислити визначник $\Delta = \det A$ матриці A ;
- знайти алгебраїчні доповнення A_{ij} до кожного елементу a_{ij} визначника Δ ;
- транспонувати матрицю A , одержавши матрицю A^T ;
- у транспонованій матриці A^T кожен елемент замінити його алгебраїчним доповненням, одержавши матрицю $\overline{A^T}$;

- помножити матрицю $\overline{A^T}$ на число $1/\Delta$.

В результаті отримаємо зворотню матрицю до A , тобто:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \overline{A^T} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}. \quad (1.6)$$

Приклад №2.3. Дана матриця $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Знайти: а) $9A$; б) A^3 ; в) $|A|$; г) A^{-1} .

Розв'язання.

а) за формулою (1.4): $9A = \begin{pmatrix} 9 \cdot 5 & 9 \cdot 4 \\ 9 \cdot 1 & 9 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 & 36 \\ 9 & 18 \end{pmatrix};$

б) за формулою (1.5): $A \cdot A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 5 + 4 \cdot 1 & 5 \cdot 4 + 4 \cdot 2 \\ 1 \cdot 5 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 4 + 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 & 28 \\ 7 & 8 \end{pmatrix};$

$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 29 & 28 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 \cdot 5 + 28 \cdot 1 & 29 \cdot 4 + 28 \cdot 2 \\ 7 \cdot 5 + 8 \cdot 1 & 7 \cdot 4 + 8 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 173 & 172 \\ 43 & 44 \end{pmatrix};$

в) $|A| = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 10 - 4 = 6;$

г) за формулою (1.6): $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 \\ -1/6 & 5/6 \end{pmatrix}.$

Перевіримо, чи правильно знайдена зворотня матриця:

$$A^{-1} \cdot A = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 \cdot 5 - 4 \cdot 1 & 2 \cdot 4 + 2 \cdot (-4) \\ (-1) \cdot 5 + 5 \cdot 1 & (-1) \cdot 4 + 5 \cdot 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E,$$

що і потрібно було довести.

Приклад №2.4. Дана матриця $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 4 \\ -2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$. Знайти зворотню матрицю A^{-1} .

Розв'язання. Обчислюємо визначник $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 4 \\ -2 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 10 - 8 + 4 - 20 - 0 = -34$.

Обчислюємо алгебраїчні доповнення:

$$\begin{aligned} A_{11} &= \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = -1 \cdot 0 - 4 \cdot 5 = -20; & A_{21} &= -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = -(0 + 10) = -10; & A_{31} &= \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 2 = 2; \\ A_{12} &= -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -(0 + 8) = -8; & A_{22} &= \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 4 = -4; & A_{32} &= -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -(4 + 2) = -6; \\ A_{13} &= \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 4 = 3; & A_{23} &= -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = -(5 + 2) = -7; & A_{33} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2; \end{aligned}$$

Тоді зворотня матриця матиме вигляд: $A^{-1} = \frac{1}{-34} \begin{pmatrix} -20 & -10 & 2 \\ -8 & -4 & -6 \\ 3 & -7 & -2 \end{pmatrix}$.

Перевіримо одержану матрицю, помножуючи її на вихідну матрицю A , тобто

$$A^{-1} \cdot A = \frac{1}{-34} \begin{pmatrix} -20 & -10 & 2 \\ -8 & -4 & -6 \\ 3 & -7 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 4 \\ -2 & 5 & 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{34} \begin{pmatrix} -34 & 0 & 0 \\ 0 & -34 & 0 \\ 0 & 0 & -34 \end{pmatrix} = E.$$

Приклад №2.5. Знайти таку матрицю X , що задовольняє рівнянню $AX = B$, де $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. Помножимо рівняння $AX = B$ на A^{-1} зліва, тоді $A^{-1}AX = A^{-1}B$, оскільки $A^{-1} \cdot A = E$, а $EX = X$, то $X = A^{-1}B$.

Отже, для знаходження матриці X , знайдемо зворотню матрицю A^{-1} , тобто $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 7 = -1$, $A_{11} = 3$, $A_{12} = -1$, $A_{21} = -7$, $A_{22} = 2$. Записуємо $A^{-1} = -1 \cdot \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 7 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. Підставляємо до рівняння і одержуємо:

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -3 & 7 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 21 & -10 & 1 \\ -3 & -6 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Приклад №2.6. Знайти таку матрицю X , що задовольняє рівнянню $XA = B$, де

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Помножимо рівняння $XA = B$ на A^{-1} справа, тобто $XA A^{-1} = B A^{-1}$. Звідки $X = B A^{-1}$.

Знайдемо зворотну матрицю A^{-1} : $\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -1$, $A_{11} = -5$, $A_{12} = -4$, $A_{13} = 2$, $A_{21} = 1$, $A_{22} = 1$,

$A_{23} = -1$, $A_{31} = 3$, $A_{32} = 2$, $A_{33} = -1$. Запишемо зворотну матрицю:

$$A^{-1} = - \begin{pmatrix} -5 & 1 & 3 \\ -4 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -3 \\ 4 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Тоді } X = BA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -1 & -3 \\ 4 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -3 & -5 \\ 5 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Підставляємо до рівняння } X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -3 & 7 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 21 & -10 & 1 \\ -3 & -6 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Зробимо перевірку, для цього знайдемо добуток матриць XA :

$$\begin{pmatrix} 11 & 21 & -10 & 1 \\ -3 & -6 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9+10 & 18-3-15 & 9-6-5 \\ -5+8 & 10-12 & 5-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Контрольні питання

1. Що називається матрицею?
2. Які елементарні перетворення матриці можливі?
3. Для яких двох матриць існує добуток?
4. Як знаходиться добуток двох матриць?
5. Як знайти зворотну матрицю?
6. Для яких матриць існує зворотна матриця?
7. Яка матриця називається виродженою?

Завдання до практичного заняття №2

В задачах 2.1-2.3 обчислити визначник матриці, яка є добутком двох заданих матриць:

$$2.1 \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}; \quad 2.2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & -5 & 4 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}; \quad 2.3 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$2.4 \text{ Для заданих матриць } A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 8 \end{pmatrix} \text{ і } B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 5 & -7 \end{pmatrix} \text{ обчислити } AE^2 + B.$$

$$2.5 \text{ Для заданих матриць } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -6 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 8 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \text{ обчислити } 2A^T - 3B,$$

$$AB + E, BA - C^3.$$

$$2.6 \text{ Для заданих матриць } A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 8 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -7 \end{pmatrix} \text{ обчислити } 2B - 3C,$$

$$A(B + C), BC^T + A^2.$$

$$2.7 \text{ Для заданих матриць } A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -4 & 6 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix} \text{ обчислити}$$

$$4A - 3B + C, A^T + B^T, AB, BA, BC + A^2.$$

В задачах 2.8-2.27 знайти добуток матриць AB та BA :

$$2.8 A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -3 & 4 & 7 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 5 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$2.9 A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 12 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 7 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$2.10 A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 31 & 47 \\ 23 & 81 \end{pmatrix}.$$

$$2.11 A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 7 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 4 \\ 10 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$2.12 A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 5 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$2.13 A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 4 \\ 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$2.14 A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$2.15 A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 6 & -2 \\ 3 & -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 10 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$2.16 A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 7 & 8 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

$$2.17 A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$2.18 A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & 4 & 7 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$2.19 A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 7 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$2.20 A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 5 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 7 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$2.21 A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \\ 4 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$2.22 A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$2.23 A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & 7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 8 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$2.24 A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 6 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$2.25 A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$2.26 A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$2.27 A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

В задачах 2.28-2.45 для даної матриці A знайти, якщо це можливо, зворотну матрицю A^{-1} та перевірити правильність її знаходження за властивістю: $A \cdot A^{-1} = E$.

$$2.28 \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \Delta = 1$$

$$2.29 \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}, \Delta = -8$$

$$2.30 \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$2.31 \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -13 \end{pmatrix}$$

$$2.32 \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$2.33 \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$2.34 \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$2.35 \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$2.36 \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$2.37 \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$2.38 \quad A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 3 & 2 & -8 \\ 1 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

$$2.39 \quad A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & 8 \\ 1 & -7 & -5 \end{pmatrix}$$

$$2.40 \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$2.41 \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$2.42 \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2.43 \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$2.44 \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$2.45 \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

В задачах 2.46-2.53 розв'язати матричні рівняння:

$$2.46 \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$2.47 \quad X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$2.48 \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$2.49 \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$2.50 \quad X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -4 \\ 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$2.51 \quad X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$2.52 \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$2.53 \quad \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.54 Підприємство випускає продукцію двох видів, використовуючи при цьому сировину

трьох видів. Витрати сировини на виробництво продукції задаються матрицею $S = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, де

s_{ij} – кількість сировини i -го типу, що використовується на виготовлення одиниці продукції j -го виду. План щоденного випуску продукції передбачає 90 од. продукції першого виду і 120 од. продукції другого виду. Вартість одиниці кожного типу сировини відповідно дорівнює 8, 5 і 10 грн. Визначити загальні витрати сировини V , необхідні для щоденного випуску продукції, а

також загальну вартість C цієї сировини.

2.55 У цеху підприємства випускають продукцію трьох видів, використовуючи при цьому сировину двох типів. Витрати сировини на виробництво продукції задаються матрицею

$$S = \begin{pmatrix} 10 & 12 & 9 \\ 6 & 8 & 4 \end{pmatrix}, \text{ де } s_{ij} - \text{кількість одиниць сировини } i\text{-го типу, що використовується на виго-}$$

товлення одиниці продукції j -го виду. План тижневого випуску продукції передбачає 200 одиниць продукції 1-го виду, 100 од. – 2-го виду і 120 од. – 3-го виду. Вартість одиниці кожного типу сировини відповідно дорівнює 2 та 4 грн. Визначити загальні витрати сировини V , необхідні для тижневого випуску продукції, а також загальну вартість C цієї сировини.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ №3

Тема: Розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь матричним методом та методом Гауса. Фундаментальна система розв'язків СЛАР.

6. Матричний запис СЛАР та її розв'язання. Література: [16], розд. I, §5-6, стор. 26-39, прикл. 1.7-1.14.

Якщо ввести позначення у вигляді матриць

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix},$$

то систему (1.1) можна записати у матричній формі:

$$AX = B, \quad (1.7)$$

де A – матриця коефіцієнтів при невідомих, X – матриця невідомих, B – матриця правої частини системи.

Матричний метод (метод зворотної матриці).

Помножуючи обидві частини рівняння (1.7) на матрицю A^{-1} і враховуючи, що $A^{-1} \cdot A = E$, $EX = X$, одержуємо шуканий розв'язок:

$$X = A^{-1}B. \quad (1.8)$$

Зауваження. Методом зворотної матриці можна розв'язувати тільки у тому випадку, якщо матриця A – несинглярна, тобто якщо $\Delta \neq 0$.

Метод Жордана-Гауса.

Записавши розширену матрицю A^* , одержану з (1.7), за допомогою елементарних перетворень її необхідно привести до трикутного вигляду:

$$A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \bar{a}_{12} & \bar{a}_{13} & \dots & \bar{a}_{1n} & \bar{b}_1 \\ 0 & 1 & \bar{a}_{23} & \dots & \bar{a}_{2n} & \bar{b}_2 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \bar{a}_{3n} & \bar{b}_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \bar{b}_n \end{array} \right), \quad (1.9)$$

де $\bar{a}_{ij}$ і $\bar{b}_i$ – перетворені числа.

Одержана матриця (1.9) є розширеною матрицею системи:

$$\begin{cases} x_1 + \bar{a}_{12}x_2 + \bar{a}_{13}x_3 + \dots + \bar{a}_{1n}x_n = \bar{b}_1, \\ x_2 + \bar{a}_{23}x_3 + \dots + \bar{a}_{2n}x_n = \bar{b}_2, \\ x_3 + \dots + \bar{a}_{3n}x_n = \bar{b}_3, \\ \dots, \\ x_n = \bar{b}_n. \end{cases} \quad (1.10)$$

Розв'язання системи (1.10) має вигляд:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{b}_1 - \bar{a}_{12}x_2 - \bar{a}_{13}x_3 - \dots - \bar{a}_{1n}x_n \\ \bar{b}_2 - \bar{a}_{23}x_3 - \dots - \bar{a}_{2n}x_n \\ \dots \\ \bar{b}_n \end{pmatrix}.$$

Таким чином, розв'язок знаходимо з (1.10) послідовно знизу нагору, тобто з останнього рівняння відомо, що $x_n = \bar{b}_n$. Його підставляємо в передостаннє рівняння і знаходимо $x_{n-1} = \bar{b}_{n-1} - \bar{a}_{n-1n}x_n$ і т.д. Одержаний розв'язок є також розв'язком вихідної системи (1.1).

Зауваження. Методом Жордана-Гауса можна розв'язувати системи будь-яких розмірів, тобто немає вимоги, щоб число рядків дорівнювало числу стовпців, як в методі Крамера і матричному методі. В цьому випадку можна визначити сумісність системи і знайти фундаментальну сукупність розв'язків (ФСР) для сумісної системи, яка має незчисленну множину розв'язків.

Приклад №3.1. Визначити сумісність СЛАР $\begin{cases} x - y - z = 0 \\ -x + 2y + 3z = 5 \\ 3x + y + 6z = 23 \end{cases}$ і, якщо можливо,

розв'язати матричним методом та методом Жордана-Гауса.

Розв'язання. 1. Матричний метод.

Запишемо систему у матричній формі $AX = B$, де $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 23 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$,

тоді $X = A^{-1} \cdot B$.

Визначник матриці A : $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 12 + 1 - 9 + 6 - 3 - 6 = 1$.

Для знаходження матриці A^{-1} знайдемо всі її алгебраїчні доповнення:

$$\begin{aligned} A_{11} &= \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 3 = 9; & A_{12} &= -\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = -(-6 - 9) = 15; & A_{13} &= \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 6 = -7; \\ A_{21} &= -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = -(-6 + 1) = 5; & A_{22} &= \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 6 + 3 = 9; & A_{23} &= -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -(1 + 3) = -4; \\ A_{31} &= \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -3 + 2 = -1; & A_{32} &= -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -(3 - 1) = -2; & A_{33} &= \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1; \end{aligned}$$

Одержану матрицю $\bar{A} = \begin{pmatrix} 9 & 15 & -7 \\ 5 & 9 & -4 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ транспонуємо: $\bar{A}^T = \begin{pmatrix} 9 & 5 & -1 \\ 15 & 9 & -2 \\ -7 & -4 & 1 \end{pmatrix}$, а оскільки

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \overline{A}^T \text{ і } \Delta = 1, \text{ то } A^{-1} = \begin{pmatrix} 9 & 5 & -1 \\ 15 & 9 & -2 \\ -7 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо добуток матриць $A^{-1} \cdot B$, тобто

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 9 & 5 & -1 \\ 15 & 9 & -2 \\ -7 & -4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 23 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \cdot 0 + 5 \cdot 5 - 1 \cdot 23 \\ 15 \cdot 0 + 9 \cdot 5 - 2 \cdot 23 \\ -7 \cdot 0 - 4 \cdot 5 + 1 \cdot 23 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow x=2, y=-1 \text{ і } z=3.$$

2. Метод Жордана-Гауса.

Випишемо розширену матрицю системи і приводимо її до діагонального вигляду:

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 6 & 23 \end{array} \right) \xrightarrow{+} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 6 & 23 \end{array} \right) \xrightarrow{+} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 9 & 23 \end{array} \right) \xrightarrow{\times(-4)} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right).$$

З останнього рядка випливає, що $z = 3$. Підставляючи знайдене $z = 3$ у передостаннє рівняння $y + 2 \cdot 3 = 5$, отримуємо, що $y = -1$. Нарешті z та y підставляємо у перше рівняння і одержуємо: $x + (-1) \cdot (-1) + (-1) \cdot 3 = 0 \Rightarrow x = 2$.

Таким чином, розв'язки, отримані різними методами, співпали і підтверджують результати, одержані при розв'язанні прикладу 1.4.

Приклад №3.2. Визначити сумісність СЛАР
$$\begin{cases} 3x + 2y - z = -3, \\ x + 3y + 4z = 1, \\ x - 4y - 9z = -5, \end{cases} \text{ і, якщо можливо, розв'язати.}$$

Розв'язання. 1. Матричний метод.

Запишемо систему у матричній формі $AX = B$, де $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -9 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, тоді

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

Визначник матриці A дорівнює нулю, тобто: $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -9 \end{vmatrix} = -81 + 8 + 4 + 3 + 48 + 18 = 0$.

Оскільки $\Delta = 0$, то матриця A є виродженою і не має зворотної матриці. Тому застосувати ані матричний метод, ані метод Крамера для розв'язання даної СЛАР неможливо. Можна лише провести дослідження цієї системи методом Крамера, що і було зроблено в прикладі 1.5, тобто система має множинну розв'язків.

2. Метод Жордана-Гауса.

З системи рівнянь випишемо розширену матрицю системи A^* і приводимо її до діагонального вигляду:

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & -3 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & -4 & -9 & -5 \end{array} \right) \xrightarrow{+} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & -3 \\ 1 & -4 & -9 & -5 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{matrix} \times(-3) \\ \times(-1) \end{matrix}} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -7 & -13 & -6 \\ 0 & -7 & -13 & -6 \end{array} \right) \xrightarrow{\times(-1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -7 & -13 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

В останньому рядку вийшли всі нулі. Таким чином, в системі залишилось два рядки та три невідомі. Звідси випливає, що система сумісна, але невизначена, тобто має неєдиний, а безліч розв'язків.

Приклад №3.3. Визначити сумісність СЛАР $\begin{cases} 3x-3y=4, \\ -2x+z=3, \\ 2y-z=2, \end{cases}$ і, якщо можливо, розв'язати.

Розв'язання. 1. Матричний метод.

Запишемо систему у матричній формі $AX=B$, де $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, тоді

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

$$\text{Визначник матриці } A: \Delta = \begin{vmatrix} 3 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 0 - 0 - 6 + 6 = 0.$$

Оскільки $\Delta = 0$, то матриця A є виродженою і не може мати зворотної матриці. Отже, проводимо дослідження системи методом Крамера, тобто знаходимо усі побічні визначники:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -23, \Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -23, \Delta_z = \begin{vmatrix} 3 & -3 & 4 \\ -2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -46.$$

Оскільки всі побічні визначники не дорівнюють нулю, то система несумісна, тобто немає розв'язків.

2. Метод Жордана-Гауса.

Випишемо розширену матрицю системи і приводимо її до діагонального вигляду:

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 0 & 4 \\ -2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{+} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 0 & 4 \\ 1 & -3 & 1 & 7 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{\times(-3)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 7 \\ 3 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{+} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 7 \\ 0 & 6 & -3 & -17 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{\times(-3)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -23 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \end{array} \right)$$

В другому рядку вийшли всі нулі, крім правої частини, тобто одержали рівняння $0 \cdot z = -23$, в якому нуль повинний дорівнювати -23 , що неможливо. Таким чином, система розв'язків немає і є несумісною.

Визначення. Базис лінійного простору розв'язків однорідної СЛАР називають фундаментальною сукупністю розв'язків (ФСР).

7. Теорема Кронекера-Капеллі. Література: [16], розд. I, §7-8, стор. 28-35, прикл. 1.9-1.11.

Неоднорідна система лінійних рівнянь (1.1) сумісна тоді і тільки тоді, коли ранг r матриці коефіцієнтів A дорівнює рангу розширеної матриці A^* , тобто $r = \text{rang} A = \text{rang} A^*$. При цьому,

1) $r = n$, де n — кількість невідомих, тоді система має єдиний розв'язок;

2) $r < n$ – система має множину розв'язків.

Приклад №3.4. Знайти фундаментальну систему розв'язків СЛАР:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 1, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -1. \end{cases}$$

Розв'язання. Випишемо розширену матрицю вихідної системи:

$$A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 4 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & -1 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{Поміняємо місцями рядки}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -1 & -1 \\ 2 & -3 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 4 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} \times(-2) \quad \times(-3) \\ + \quad + \end{array}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -5 & 0 & 3 \\ 0 & 7 & -10 & 7 & 7 \end{array} \right) \xrightarrow{\times(-7)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -5 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -25 & 7 & -14 \end{array} \right).$$

Очевидно, що ранги матриці A і розширеної матриці A^* співпадають і $r = \text{rang} A = \text{rang} A^* = 3$. Тоді, оскільки кількість невідомих цієї СЛАР $n = 4$, тому $n - r = 4 - 3 = 1$, тобто одна вільна змінна, а три – базисні.

Оскільки, перетворення розширеної матриці здійснювалося тільки з рядками, то остання матриця відповідає системі рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -1, \\ x_2 - 5x_3 = 3, \\ 25x_3 + 7x_4 = -14. \end{cases}$$

З останнього рівняння знаходимо $x_3 = -(14 + 7x_4)/25 = -0,56 - 0,28x_4$, яке підставляємо у друге рівняння $x_2 = 3 + 5x_3 = 3 - (14 + 7x_4)/5 \Rightarrow x_2 = (1 - 7x_4)/5 = 0,2 - 1,4x_4$. Підставляючи x_3 та x_2 в перше рівняння, знайдемо x_1 : $x_1 = -1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = -1 + 2(1 - 7x_4)/5 - 3(14 + 7x_4)/25 + x_4 \Rightarrow x_1 = 27/25 - 24x_4/25 = 1,08 - 0,96x_4$. Знайдені значення x_1, x_2, x_3 підставимо у матрицю X :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,08 - 0,96x_4 \\ 0,2 - 1,4x_4 \\ -0,56 - 0,28x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,08 \\ 0,2 \\ -0,56 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -0,96 \\ -1,4 \\ -0,28 \\ 1 \end{pmatrix},$$

або замінюючи x_4 на довільну сталу C , фундаментальну сукупність розв'язків (ФСР) наведемо у вигляді:

$$X = \begin{pmatrix} 1,08 \\ 0,2 \\ -0,56 \\ 0 \end{pmatrix} + C \begin{pmatrix} -0,96 \\ -1,4 \\ -0,28 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Контрольні питання

1. Що є матрицею коефіцієнтів та розширеною матрицею СЛАР?
2. Записати СЛАР та її розв'язок у матричній формі.
3. У чому полягає метод Жордана-Гауса?
4. Які СЛАР можна розв'язувати матричним методом, а які ні?
5. Що називається рангом системи лінійних алгебраїчних рівнянь?
6. Які невідомі в системі називаються вільними, а які базисними? В якому випадку має місце така класифікація невідомих?
7. Що називається фундаментальною сукупністю розв'язків (ФСР)?
8. Теорема Кронекера-Капеллі.

Завдання до практичного заняття №3

3.1 У цеху підприємства виготовляють дві моделі жіночого одягу. На виготовлення першої моделі витрачають 2 м тканини, на виготовлення другої – 3 метри. При цьому витрати робочого часу на виготовлення цих моделей становлять відповідно 4 та 5 год. Відомо, що тижденьний запас тканини – 100 м, а робочий час обмежено 190 год. Скласти такий план тижневого виготовлення цих моделей одягу, при якому повністю використовують ресурси (тканину та робочий час).

3.2 У меблевому магазині найбільшим попитом користуються дві моделі письмових столів, виготовлених на різних фабриках. На перевезення першої моделі витрачають 10 грн, а другої – 15 грн. При цьому витрати робочого часу на виробництво цих моделей становлять відповідно 6 і 5 год. Відомо, що на місяць заплановано витратити 1200 грн на перевезення цих моделей, а робочий час на їх виробництво обмежений 480 год. Скільки цих моделей магазин повинний замовляти на фабриках щомісяця для того, щоб використати заплановані кошти на перевезення та ресурси робочого часу на їх виготовлення?

В задачах 3.3-3.20 визначити сумісність СЛАР і, якщо можливо, розв'язати матричним методом та методом Жордана-Гаусса:

3.3
$$\begin{cases} 2x+3y-z=7, \\ x-4y+z=1, \\ x+y-3z=-2. \end{cases}$$

3.6
$$\begin{cases} 6x+y+2z=13, \\ x+3y-z=5, \\ x-2y+4z=0. \end{cases}$$

3.9
$$\begin{cases} x+2y+z=1, \\ 3x+y-z=0, \\ x-y+2z=6. \end{cases}$$

3.12
$$\begin{cases} 3x-y+z=3, \\ x+2y+2z=5, \\ 2x-2y+4z=4. \end{cases}$$

3.15
$$\begin{cases} 3x+y+z=2, \\ x-y-2z=2, \\ x+y+3z=4. \end{cases}$$

3.18
$$\begin{cases} 4x-2y+z=5, \\ x+3y+z=5, \\ 2x-y+3z=4. \end{cases}$$

3.4
$$\begin{cases} x-6y+z=-3, \\ x-y+2z=4, \\ 2x+y-z=1. \end{cases}$$

3.7
$$\begin{cases} 3x+y-2z=3, \\ x+2y-z=4, \\ 2x-2y+3z=1. \end{cases}$$

3.10
$$\begin{cases} 2x+y-z=4, \\ x+3y-2z=3, \\ x-2y+4z=4. \end{cases}$$

3.13
$$\begin{cases} 3x+y+z=2, \\ x-2y-z=4, \\ x-y+4z=7. \end{cases}$$

3.16
$$\begin{cases} 3x-4y+2z=3, \\ x+2y-z=6, \\ x-y+4z=-2. \end{cases}$$

3.19
$$\begin{cases} 4x-y+z=5, \\ x+2y-z=2, \\ x-2y+2z=3. \end{cases}$$

3.5
$$\begin{cases} 3x+3y-2z=4, \\ 2x-y-z=1, \\ x+2y+4z=7. \end{cases}$$

3.8
$$\begin{cases} 5x-y+2z=2, \\ x+2y-z=4, \\ x-y-2z=2. \end{cases}$$

3.11
$$\begin{cases} 3x-2y+2z=-3, \\ x+2y-z=6, \\ 2x-y-2z=2. \end{cases}$$

3.14
$$\begin{cases} x+y+2z=3, \\ 2x+3y-z=3, \\ x-y+4z=1. \end{cases}$$

3.17
$$\begin{cases} 2x-y+z=7, \\ x+5y-z=3, \\ 2x-3y+2z=9. \end{cases}$$

3.20
$$\begin{cases} 3x+y-2z=6, \\ x+4y+3z=2, \\ 2x+y+2z=1. \end{cases}$$

В задачах 3.21-3.24 знайти ранг матриці

3.21
$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & -3 \\ 5 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

3.23
$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 & -4 \\ -1 & 2 & -1 & -2 \\ 3 & 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

3.22
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 & -1 \\ -5 & -2 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

3.24
$$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 & 5 & 7 \\ 9 & -3 & 4 & 8 & 9 \\ 6 & -2 & 6 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

В задачах 3.25-3.52 найти ФСР:

$$3.25 \quad \begin{cases} -2x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 2, \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 6x_4 = 3. \end{cases}$$

$$3.27 \quad \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + x_4 = -2. \end{cases}$$

$$3.29 \quad \begin{cases} 5x_1 - x_2 - x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 - 16x_5 = 14. \end{cases}$$

$$3.31 \quad \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 6x_4 - 5x_5 = -3, \\ 5x_1 + 6x_2 + 2x_3 - 6x_4 - 5x_5 = -1. \end{cases}$$

$$3.33 \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + 3x_5 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 1. \end{cases}$$

$$3.35 \quad \begin{cases} -4x_1 + 5x_2 - 6x_3 - 6x_4 - 4x_5 = 0, \\ 5x_1 - 6x_2 - 4x_3 + 5x_4 - 2x_5 = 11. \end{cases}$$

$$3.37 \quad \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 4x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 - 5x_3 - 4x_4 + 5x_5 = 0. \end{cases}$$

$$3.39 \quad \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 - 4x_5 = -6, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 + 8x_5 = -3. \end{cases}$$

$$3.41 \quad \begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 5x_4 + 3x_5 = 7, \\ -4x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 4x_4 - 2x_5 = -9. \end{cases}$$

$$3.43 \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 7x_5 = 1, \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$$

$$3.45 \quad \begin{cases} -2x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 5x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 6x_4 = 3. \end{cases}$$

$$3.47 \quad \begin{cases} x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 6x_4 - x_5 = -4, \\ 5x_1 + 6x_2 + 2x_3 - 5x_4 - 5x_5 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$$

$$3.49 \quad \begin{cases} -4x_1 + 5x_2 - 6x_3 - 6x_4 - 4x_5 = -9, \\ 5x_1 - 6x_2 - 4x_3 + 5x_4 - 2x_5 = 11, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

$$3.51 \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_4 = 0, \\ 2x_1 - 5x_3 + 6x_4 = 0. \end{cases}$$

$$3.26 \quad \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 2, \\ -2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 3. \end{cases}$$

$$3.28 \quad \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 4x_4 - 3x_5 = 8, \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 2x_4 + x_5 = 11. \end{cases}$$

$$3.30 \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 - 7x_5 = 13, \\ 13x_1 - 13x_2 - 7x_3 + 7x_4 - 11x_5 = 9. \end{cases}$$

$$3.32 \quad \begin{cases} 3x_1 - x_2 + 5x_3 - 2x_4 + x_5 = 3, \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 4x_5 = 3. \end{cases}$$

$$3.34 \quad \begin{cases} 5x_1 + 8x_2 - x_3 - 7x_4 - 9x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 = 1. \end{cases}$$

$$3.36 \quad \begin{cases} 2x_1 + 7x_2 - 3x_3 + x_4 + 2x_5 = 17, \\ 5x_1 + x_2 - 3x_3 + 4x_4 + 3x_5 = -2. \end{cases}$$

$$3.38 \quad \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 5x_4 + 3x_5 = -1, \\ 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 4x_4 - 2x_5 = -1. \end{cases}$$

$$3.40 \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 3x_5 = 4, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 3. \end{cases}$$

$$3.42 \quad \begin{cases} 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 + 7x_4 + 4x_5 = 20, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 15. \end{cases}$$

$$3.44 \quad \begin{cases} x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 6x_4 - x_5 = -4, \\ 5x_1 + 6x_2 + 2x_3 - 5x_4 - 5x_5 = -1. \end{cases}$$

$$3.46 \quad \begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 12x_4 = 10, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 4, \\ x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 4x_4 = 2. \end{cases}$$

$$3.48 \quad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = -4, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 - x_5 = 2, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

$$3.50 \quad \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 6x_4 + 6x_5 = -2, \\ 5x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 5x_5 = -1, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

$$3.52 \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 6x_3 + 7x_4 = 0, \\ 4x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_4 = 0, \\ -5x_1 - 10x_3 + 19x_4 = 0. \end{cases}$$



ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ №4

Тема: Вектори.

8. Вектори. Основні поняття. Проекція вектора на вісь. Довжина вектора. Література: [16], розд. I, §14, стор. 65-67, §17, стор. 73-75, §18, стор. 75-81.

Якщо вектор $\overline{AB}$ заданий початковою та кінцевою точками $A(x_1, y_1, z_1)$ та $B(x_2, y_2, z_2)$ у три-

вимірному просторі, то в базисі $\vec{i}(1;0;0)$, $\vec{j}(0;1;0)$, $\vec{k}(0;0;1)$ вектор $\overrightarrow{AB}$ можна записати у вигляді:

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}, \text{ або } \overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1). \quad (1.11)$$

Проекція вектора $\overrightarrow{AB}$ на вісь $\vec{e}$ обчислюється за формулою:

$$\text{пр}_{\vec{e}} \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB} \wedge \vec{e}), \quad (1.12)$$

де $|\overrightarrow{AB}|$ — довжина (модуль) вектора $\overrightarrow{AB}$, що обчислюється за формулою:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (1.13)$$

9. Лінійні операції над векторами. Література: [16], розд. I, §20, стор. 81-84.

До лінійних операцій над векторами відносяться: сума, різниця та множення вектора на число. Якщо до кінця вектора $\vec{a}$ прикласти вектор $\vec{b}$, то *сумою* цих векторів буде вектор, побудований з кінця вектора $\vec{b}$ у початок вектора $\vec{a}$ (рис. 1.1 а — *правило трикутника*). У випадку, якщо вектори виходять з однієї точки, тоді сумою векторів буде вектор, що виходить з початку векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ та є діагоналлю паралелограма, побудованого на даних векторах (рис. 1.1 б — *правило паралелограму*). Різницею $\vec{b} - \vec{a}$ називається вектор, який в сумі з вектором $\vec{a}$ складає вектор $\vec{b}$, або, різниця двох векторів, які приведені до загального початку є вектор, що йде з кінця вектора $\vec{a}$, який віднімається, у кінець вектора $\vec{b}$, який зменшується (рис. 1.1 в).

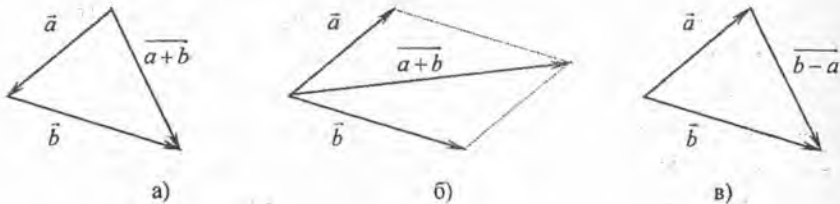


Рис. 1.1

10. Скалярний добуток двох векторів та його властивості. Література: [16], розд. I, §22, стор. 85-90.

Визначення. Якщо дані вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$, то скалярний добуток цих векторів — це число, що обчислюється за формулою:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a} \wedge \vec{b}). \quad (1.14)$$

Якщо вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ задані в ортогональному базисі $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, тобто $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$ та $\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$, то їх скалярний добуток знаходиться за формулою:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2, \quad (1.15)$$

а модулі векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}, \quad |\vec{b}| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}. \quad (1.16)$$

Якщо вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ ортогональні, то їх скалярний добуток дорівнює нулю, тобто

$$(\vec{a}, \vec{b}) = 0. \quad (1.17)$$

Для векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$, які задані в базисі $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, умова ортогональності буде такою:

$$x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2 = 0. \quad (1.18)$$

Приклад №4.1. Дано три вершини $A(-1; -2)$, $B(-3; 2)$ та $C(5; 4)$ паралелограма $ABCD$. Визначити довжину його діагоналі BD .

Розв'язання. Позначимо сторони паралелограма як вектори $\overline{BA}$ та $\overline{BC}$ і знайдемо їх за формулою (1.11): $\overline{BC} = (5 - (-3); 4 - 2) = (8; 2)$ і $\overline{BA} = (-1 - (-3); -2 - 2) = (2; -4)$. Оскільки сума двох векторів, що виходять з однієї точки це вектор, що є діагоналлю паралелограма, побудованого на цих векторах, то $\overline{BD} = \overline{BC} + \overline{BA} = (8+2, 2-4) = (10; -2)$. Звідки знаходимо за формулою (1.16): $|\overline{BD}| = \sqrt{10^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{26}$, що є довжиною діагоналі BD .

11. Векторний добуток двох векторів та його властивості. Література: [16], розд. I, §23, стор. 90-94.

Визначення. Якщо дані вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$, то **векторний добуток** цих векторів – це вектор $\vec{c}$, модуль якого обчислюється за формулою:

$$|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\angle \vec{a} \wedge \vec{b}), \quad (1.19)$$

причому модуль вектора $\vec{c}$ дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$.

Якщо вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ задані в ортогональному базисі $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, тобто $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$ та $\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$, то їх векторний добуток обчислюється за формулою:

$$\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}] = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}. \quad (1.20)$$

Якщо дані три точки A, B та C , то на векторах $\overline{AB}$ та $\overline{AC}$ можна побудувати паралелограм та знайти його площу за формулою (1.19), або площу трикутника, з вершинами в заданих точках. Оскільки площа трикутника дорівнює половині площі паралелограма, побудованого на векторах $\overline{AB}$ та $\overline{AC}$, то

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |\overline{AB} \times \overline{AC}|. \quad (1.21)$$

12. Мішаний добуток векторів. Література: [16], розд. I, §24, стор. 95-98.

Визначення. Мішаний добуток векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – це число, яке є їхнім векторно-скалярним добутком і позначається $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c} = (\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]) = ([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c})$.

Геометричний зміст мішаного добутку. Мішаний добуток трьох векторів дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на цих векторах, узятому зі знаком „+”, якщо ці вектори утворюють праву трійку і зі знаком „-”, якщо вони утворюють ліву трійку.

Отже, об'єм паралелепіпеда дорівнює модулю мішаного добутку

$$V = |(\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}])|, \quad (1.22)$$

а об'єм тетраедра

$$V = \frac{1}{6} |(\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}])|. \quad (1.23)$$

Властивості мішаного добутку:

а) $([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}) = ([\vec{b}, \vec{c}], \vec{a}) = ([\vec{c}, \vec{a}], \vec{b})$;

б) $([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}) = -([\vec{b}, \vec{a}], \vec{c})$;

в) якщо $([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}) = 0$, $\vec{a} \neq 0$, $\vec{b} \neq 0$, $\vec{c} \neq 0$, то вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – лежать в одній площині (компланарні);

Зауваження. Якщо точки A, B та C лежать в одній площині, тоді площа трикутника ABC

обчислюється за формулою: $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}|A|$, де $A = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}$.

г) якщо вектори задані в ортонормованому базисі $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, тобто $\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$ і $\vec{c}(x_3, y_3, z_3)$, то мішаний добуток обчислюється за формулою:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}. \quad (1.24)$$

Приклад №4.2. Обчислити об'єм тетраедра, якщо задані його вершини у тривимірному просторі $A(2; 1; -1)$, $B(3; -2; 1)$, $C(-1; 2; 0)$, $D(1; -1; 2)$.

Розв'язання. Знайдемо вектори, на яких побудований тетраедр, тобто: $\vec{a} = \overrightarrow{AB} = (3-2; -2-1; 1+1) = (1; -3; 2)$; $\vec{b} = \overrightarrow{AC} = (-1-2; 2-1; 0+1) = (-3; 1; 1)$; $\vec{c} = \overrightarrow{AD} = (1-2; -1-1; 2+1) = (-1; -2; 3)$. Тоді, підставляючи у формулу (1.23), одержимо:

$$V = \frac{1}{6} \left| \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \end{vmatrix} \right| = |3 + 12 + 3 + 2 + 2 - 27|/6 = 5/6.$$

Приклад №4.3. У ортонормованому базисі задані вектори $\vec{a}(1; 2; 3)$, $\vec{b}(3; 2; 1)$ і $\vec{c}(2; 3; 1)$. З'ясувати чи є трійка векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ - правою.

Розв'язання. Знайдемо мішаний добуток даних векторів, тобто за формулою (1.23):

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 27 + 4 - 12 - 3 - 6 = 12 > 0, \text{ звідки одержуємо, що трійка векторів } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ дійсно права.}$$

13. **Лінійна залежність векторів.** Література: [16], розд. 1, §25, стор. 101-102.

Для трьох векторів, заданих своїми координатами у тривимірному просторі $\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$ і $\vec{c}(x_3, y_3, z_3)$, лінійна незалежність цих векторів означає, що визначник, складений з координат цих векторів не дорівнює нулю, тобто:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} - \text{лінійно незалежні.} \quad (1.25)$$

Приклад №4.4. Дослідити вектори $\vec{a}(2; -1; 3)$, $\vec{b}(0; 1; -2)$ і $\vec{c}(-2; 3; -1)$ на лінійну залежність.

$$\text{Розв'язання. Обчислимо визначник } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 12 \neq 0. \text{ Отже вектори } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ (див.}$$

форм. 1.25) - лінійно незалежні.

15. **Ділення відрізка в заданому співвідношенні.** Література: [16], розд. I, §21, стор. 84-85.

Відстань між двома точками. Якщо є дві точки $A(x_1, y_1, z_1)$ та $B(x_2, y_2, z_2)$, то відстань між ними обчислюється за формулою:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (1.26)$$

Нехай дано точки $A(x_1, y_1, z_1)$ та $B(x_2, y_2, z_2)$, тоді координати т. M , що ділить відрізок AB у співвідношенні $\lambda = AM/MB$ знаходяться за формулами:

$$x_M = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}; y_M = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}; z_M = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}. \quad (1.27)$$

Зауваження. Якщо т. M лежить на середині відрізка AB , то $\lambda=1$.

Приклад №4.5. У трикутнику ABC з вершинами $A(4; 3)$, $B(16; -6)$ та $C(20; 16)$ визначити: а) внутрішній кут при вершині B ; б) довжину медіани AM ; в) центр мас трикутника.

Розв'язання. а) Визначимо $\angle ABC$ як кут між векторами $\overrightarrow{BA}$ та $\overrightarrow{BC}$. Оскільки $\overrightarrow{BA} = (4 - 16; 3 + 6) = (-12; 9)$, $\overrightarrow{BC} = (20 - 16; 16 + 6) = (4; 22)$, то скалярний добуток цих векторів за форм. (1.25) $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = -12 \cdot 4 + 9 \cdot 22 = 150$, а модулі цих векторів за формулою (1.26) будуть: $|\overrightarrow{BA}| = \sqrt{(-12)^2 + 9^2} = 15$, $|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{4^2 + 22^2} = 10\sqrt{5}$. Отже, із формули (1.24) знаходимо

$$\cos \angle ABC = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}|} = \frac{150}{15 \cdot 10\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}. \text{ Звідки } \angle ABC = \arccos 1/\sqrt{5} \approx 63^\circ.$$

б) За визначенням, медіана – це відрізок, що з'єднує вершину з серединою протилежної сторони. Знайдемо середину сторони BC , тобто т. $M(x; y)$ за формулами (1.27) з врахуванням зауваження матиме такі координати $x = (16 + 20)/2 = 18$, $y = (-6 + 16)/2 = 5 \Rightarrow M(18; 5)$. Отже довжина медіани $AM = \sqrt{(18 - 4)^2 + (5 - 3)^2} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$.

в) З геометрії відомо, що центр мас трикутника – це точка перетину медіан, що ділить медіану у співвідношенні 2:1, починаючи від вершини. Тобто, позначаючи $O(x; y)$ як центр мас трикутника і використовуючи знайдену в пункті б) медіану AM , маємо $\lambda = AO/OM = 2$, тоді за форм. (1.27) одержимо: $x = (4 + 2 \cdot 18)/(1 + 2) = 40/3$, $y = (3 + 2 \cdot 5)/(1 + 2) = 13/3 \Rightarrow O(40/3; 13/3)$.

Приклад №4.6. Визначити довжину бісектриси AK у трикутнику з вершинами $A(6; 8; -3)$, $B(4; 0; 3)$, $C(0; 3; 2)$.

Розв'язання. За умовою AK – бісектриса внутрішнього кута $\angle A$, тому $\frac{BK}{KC} = \frac{BA}{AC}$. За форм. (1.26) знаходимо довжини сторін $|\overrightarrow{BA}| = \sqrt{(6 - 4)^2 + (8 - 0)^2 + (-3 - 3)^2} = 2\sqrt{26}$, $|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(0 - 4)^2 + (3 - 0)^2 + (2 - 3)^2} = \sqrt{26}$, тоді $\frac{BK}{KC} = \frac{2\sqrt{26}}{\sqrt{26}}$ і т. K ділить відрізок AC у відношенні $\lambda = 2$. Тоді за форм. (1.27) одержуємо $x = (6 + 2 \cdot 0)/(1 + 2) = 2$, $y = (8 + 2 \cdot 3)/(1 + 2) = 14/3$, $z = (-3 + 2 \cdot 2)/(1 + 2) = 1/3$. Отже, $|AK| = \sqrt{(2 - 6)^2 + (14/3 - 8)^2 + (1/3 - (-3))^2} = 2\sqrt{74}/3$.

Приклад №4.7. Знайти відношення, у якому координатна площина xOy ділить відрізок між точками $A(2; -3; 4)$ і $B(5; 4; -8)$ та координати т. M – перетину відрізка AB з площиною xOy .

Розв'язання. Оскільки у координатній площині xOy $z = 0$, то $z_M = 0$. З іншого боку z_M обчислюється за форм. (1.27), тобто $0 = [4 + \lambda(-8)]/(1 + \lambda) \Rightarrow 8\lambda = 4 \Rightarrow \lambda = 0,5$. Тоді $x_M = (2 + 0,5 \cdot 5)/(1 + 0,5) = 3$, $y_M = (-3 + 0,5 \cdot 4)/(1 + 0,5) = -2/3$. Отже т. $M(3; -2/3; 0)$.

Контрольні питання

1. Визначення n -вимірного простору.
2. Дати визначення векторного простору.
3. Вимірність та базис лінійного простору.
4. Визначення лінійної незалежності векторів.
5. Визначення підпростору векторного простору.
6. Дати визначення проєкції вектора на вісь.
7. Властивості проєкції вектора на вісь.
8. Лінійні операції над векторами.

9. Скалярний добуток двох векторів та його властивості.
10. Векторний добуток двох векторів та його властивості.
11. Геометричний зміст модуля векторного добутку.
12. Мішаний добуток трьох векторів.
13. Геометричний зміст мішаного добутку.
14. Формули обчислення об'єму паралелепіпеда та тетраедра.
15. Формули для визначення поділу відрізка у даному відношенні.
16. Формули для визначення координати точки, що ділить відрізок у даному відношенні.

Завдання до практичного заняття №4

Задачі I рівня

- 4.1 Обчислити відстань від початку координат до: а) т. $M(3; 4)$; б) т. $D(2; 1; 2)$.
- 4.2 Визначити кут між векторами: а) $\vec{a}(6; -3)$ і $\vec{b}(4; 8)$; б) $\vec{a}(5; -6; 2)$ та $\vec{b}(2; 3; 4)$.
- 4.3 Перевірити чи є колінеарними вектори $\vec{a}(3; -2)$ та $\vec{M_1M_2}$, якщо $M_1(2; -3)$, $M_2(-7; 3)$.
- 4.4 Перевірити, чи є колінеарними вектори $\vec{a}(1; -2; 4)$ і $\vec{b}(-3; 6; 12)$.
- 4.5 Для векторів $\vec{a}(7; 1)$ і $\vec{b}(3; 4)$: а) знайти вектори $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$, $\vec{p} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$ та записати їх розклади за ортами; б) обчислити скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$; в) знайти кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$; г) знайти проєкцію вектора $\vec{a}$ на $\vec{b}$; г) визначити довжину вектора $\vec{p}$.
- 4.6 Для векторів $\vec{a}(3; -4; 1)$ і $\vec{b}(-1; 2; 6)$ визначити $2\vec{a} - 3\vec{b}$, $(\vec{a}, \vec{b})$, $(3\vec{a} + \vec{b})^2$, $\vec{a} \times \vec{b}$.
- 4.7 Дано точки $A(1; 2; -3)$, $B(-1; 5; 3)$, $C(2; 1; 7)$, $D(5; -5; 1)$. Знайти проєкції вектора $\vec{a} = \vec{AB} + \vec{CD}$ на вектори $\vec{AB}$ і $\vec{CD}$.
- 4.8 При яких α і β вектори $\vec{a}(6; \alpha; 3)$ і $\vec{b}(2; -5; \beta)$ є колінеарними?
- 4.9 Показати, що чотирикутник з вершинами $A(-3; -2; 1)$, $B(7; 8; 6)$, $C(-4; 18; 8)$, $D(-14; 8; 3)$ є квадратом.
- 4.10 Показати, що чотирикутник з вершинами $A(5; 2; 6)$, $B(6; 4; 4)$, $C(4; 3; 2)$, $D(3; 1; 4)$ є квадратом. Визначити довжину його діагоналей та обчислити його площу.
- 4.11 Перевірити, чи є трикутник з вершинами $A(-1; 3; 2)$, $B(-4; 0; 2)$ і $C(2; -3; 1)$ рівнобедреним.
- 4.12 Показати, що чотирикутник з вершинами $A(1; 3)$, $B(4; 7)$, $C(2; 8)$, $D(-1; 4)$ є паралелограмом та знайти точку перетину його діагоналей.
- 4.13 У паралелограмі задано вершини $A(-3; 1)$, $B(-1; -1)$, $C(5; 7)$. Визначити координати вершини D та довжини діагоналей паралелограма.
- 4.14 Дано три вершини $A(2; -1; -3)$, $B(6; 0; -5)$ і $C(4; 5; 1)$ паралелограма $ABCD$. Визначити його четверту вершину D , вектор $\vec{AD}$ та площу паралелограма.
- 4.15 Визначити внутрішній кут трикутника ABC , якщо: $A(5; 1; -4)$, $B(9; -8; -3)$, $C(16; -6; -11)$.
- 4.16 Дано дві вершини $A(1; -2; -4)$, $B(-2; 2; 1)$ паралелограма $ABCD$ і точку перетину його діагоналей $O(3; -2; 6)$. Визначити дві інші вершини паралелограма.
- 4.17 На векторах $\vec{a}(0; 3; -6)$ і $\vec{b}(-2; 1; 2)$ побудовано паралелограм. Обчислити довжину діагоналей паралелограма та кут між ними.
- 4.18 Показати, що чотирикутник з вершинами $A(2; 8; -7)$, $B(-2; 0; 1)$, $C(2; 3; 3)$, $D(6; 11; -5)$ є паралелограмом. Обчислити довжини векторів $\vec{AB}$, $\vec{BC}$, $\vec{CD}$ і $\vec{AD}$ та площу паралелограма $ABCD$.
- 4.19 Дано точки $A(1; 0; -1)$, $B(\alpha; 2; -5)$, $C(-2; -6; \beta)$. При яких значеннях α і β ці точки лежать на одній прямій?
- 4.20 Показати, що точки $A(3; -5)$, $B(-2; -7)$, $C(18; 1)$ лежать на одній прямій.
- 4.21 Визначити вектор, перпендикулярний до векторів $\vec{a}(-2; 4; 3)$ і $\vec{b}(1; -5; -3)$.
- 4.22 Знайти довжини сторін трикутника ABC , якщо $A(2; 3; -1)$, $B(2; -4; 3)$, $C(4; -1; -1)$.
- 4.23 Знайти довжини сторін трикутника ABC , якщо $A(1; -1; 4)$, $B(-2; -1; -1)$, $C(4; 3; 1)$.

- 4.24 Знайти площу трикутника ABC , якщо $A(5; -1; -4)$, $B(6; 5; 4)$ та $C(5; 2; 0)$.
- 4.25 Знайти площу трикутника ABC , якщо $A(2; 1; -7)$, $B(2; 4; -6)$ та $C(6; 4; -5)$.
- 4.26 Обчислити площу трикутника з вершинами $A(2; 3; 5)$, $B(4; 1; 8)$, $C(6; 3; 1)$.
- 4.27 В трикутнику ABC знайти кути $\angle ABC$ та $\angle ACB$, якщо $A(3; 3; -1)$, $B(2; 3; 0)$, $C(3; 3; 0)$.
- 4.28 Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ неколінеарні. При яких λ будуть колінеарні вектори $\lambda\vec{a} + \vec{b}$ і $3\vec{a} + \lambda\vec{b}$.
- 4.29 Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ неколінеарні. При яких α будуть колінеарні вектори $\alpha\vec{a} + 5\vec{b}$ і $3\vec{a} - \vec{b}$.
- 4.30 Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ неколінеарні. При якому значенні λ вектори $2\vec{a} - 3\vec{b}$ та $5\lambda\vec{a} + 4\vec{b}$ будуть колінеарні.
- 4.31 Дані вектори $\vec{AB} = 3\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ та $\vec{AC} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$. Обчислити площу $\triangle ABC$, побудованого на цих векторах.
- ✗ 4.32 Визначити, при яких значеннях α та β вектор $\vec{p} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j} + \vec{k}$ буде перпендикулярний векторам $\vec{a} = -2\vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}$ та $\vec{b} = 3\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$, де $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - орти.
- 4.33 Обчислити кут між векторами $\vec{a} = 3\vec{p} + 2\vec{q}$ та $\vec{b} = \vec{p} + 5\vec{q}$, де $\vec{p}, \vec{q}$ - одиничні вектори.
- 4.34 Знайти площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{AB}$ та $\vec{AC}$, якщо $A(1; 0; -3)$, $B(2; 2; -1)$, $C(3; 2; 0)$.
- 4.35 Знайти площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a} = 5\vec{i} - 4\vec{j} + 7\vec{k}$ та $\vec{b} = \vec{j} + \vec{i} - 2\vec{k}$, де $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - орти.
- 4.36 Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{p} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$ та $\vec{q} = \vec{a} - 4\vec{b}$, де $\vec{a}, \vec{b}$ - орти.
- 4.37 Обчислити довжини діагоналей і площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a} = \vec{k} - \vec{j}$ і $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, де $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - орти.
- ✗ 4.38 При якому значенні α вектори будуть перпендикулярні: $2\vec{a} - 3\vec{b}$ та $5\alpha\vec{a} + 4\vec{b}$, якщо $\vec{a}, \vec{b}$ - орти.
- 4.39 При якому значенні α вектори: $\vec{p} = 4\vec{i} + 5\vec{j} - \vec{k}$ та $\vec{q} = \alpha\vec{i} + 3\vec{j} - 2\alpha\vec{k}$ будуть взаємно перпендикулярні, якщо $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - орти.
- 4.40 Сторони трикутника задані векторами $\vec{AB} = -6\vec{i} + 2\vec{j}$, $\vec{BC} = 7\vec{i} + \vec{j}$ та $\vec{CA} = -\vec{i} - 3\vec{j}$. Визначити кути цього трикутника, якщо $\vec{i}, \vec{j}$ - орти.
- 4.41 Визначити середину відрізка PQ , якщо $P(1; -1; 1)$, $Q(3; 1; 1)$.
- 4.42 Визначити координати кінців A і B відрізка, поділеного на три рівні частини точками $M(3; 1; 2)$ і $N(6; -1; 1)$.
- 4.43 Визначити центр мас трикутника з вершинами $A(1; -1)$, $B(6; 4)$, $C(2; 6)$.
- 4.44 У трикутнику ABC , де $A(3; -1; 5)$, $B(4; 2; -5)$ і $C(-4; 0; 3)$, обчислити довжину медіани, проведеної з вершини A . Знайти центр мас трикутника.
- ✗ 4.45 Довести, що точки $A(1; -1; 0)$, $B(4; 1; 1)$, $C(2; -2; 1)$ та $D(5; 0; 2)$ лежать в одній площині.
- 4.46 Знайти об'єм тетраедра та паралелепіпеда, побудованого на точках $A(1; 0; -1)$, $B(2; 6; -3)$, $C(0; -2; 3)$ і $D(6; 1; -3)$.
- 4.47 Обчислити об'єм тетраедра з вершинами у точках $A_1(3; 0; -1)$, $A_2(6; -2; 1)$, $A_3(5; 1; -3)$, $A_4(-1; 3; 8)$ та його висоту, що опущена з вершини A_4 на грань $A_1A_2A_3$.
- 4.48 Знайти об'єм тетраедра з вершинами у т. $M_1(6; -3; 8)$, $M_2(1; 1; 4)$, $M_3(2; 1; 2)$ та $M_4(0; 0; 1)$.
- 4.49 Обчислити мішаний добуток векторів $\vec{a}(5; 6; -2)$, $\vec{b}(1; 1; -1)$, $\vec{c}(3; 2; -1)$. Знайти об'єм тетраедра, побудованого на цих векторах.
- 4.50 Перевірити, чи лежать чотири точки $A(1; -2; -6)$, $B(2; 7; -1)$, $C(2; 5; 9)$ і $D(1; -4; 4)$ в одній площині.
- 4.51 Дослідити вектори на лінійну незалежність: а) $\vec{a}(5; 4; -1)$, $\vec{b}(2; 0; 1)$ та $\vec{c}(-1; 2; 3)$;
б) $\vec{a}(2; 1; 0)$, $\vec{b}(-4; -2; 0)$ та $\vec{c}(1; -1; -1)$; в) $\vec{a}(3; 4; -1)$, $\vec{b}(2; 1; 0)$ та $\vec{c}(6; 4; -2)$.
- ✗ 4.52 У трикутнику з вершинами $A(-2; 0)$, $B(6; 6)$ та $C(1; -4)$ проведено бісектрису AK . Обчис-

лити її довжину.

4.53 Дано трикутник з вершинами $A(1; -1; -3)$, $B(2; 1; -2)$ і $C(-5; 2; -6)$. Обчислити довжину бісектриси внутрішнього кута при вершині A .

Задачі II рівня

4.54 Дано вершини трикутника $A(6; -4; 3)$, $B(2; 1; 3)$, $C(2; 5; 0)$. Обчислити довжину його висоти, опущеної з вершини A .

4.55 У трикутнику з вершинами $A(5; -2; 3)$, $B(-3; 1; 8)$ і $C(-1; -5; 5)$ визначити внутрішній кут при вершині A , довжину висоти CH та обчислити його площу.

4.56 У трикутнику ABC задано вершини $A(-2; 1)$, $B(5; 2)$, $C(1; 5)$. Визначити внутрішні кути цього трикутника, довжину його висоти AN та медіани CM .

4.57 Показати, що вектори $\vec{a}(3; 2; -6)$, $\vec{b}(2; -1; -3)$ та $\vec{c}(5; 1; -9)$ компланарні. Знайти координати вектора $\vec{d}$ перпендикулярного заданим векторам.

4.58 Знайти координати вектора $\vec{p}$, який перпендикулярний векторам $\vec{m}(-3; 1; 1)$ та $\vec{n}(1; -2; 3)$.

Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{m}$ та $\vec{n}$.

4.59 Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ взаємно перпендикулярні. Знаючи, що $|\vec{a}| = 5$ і $|\vec{b}| = 2$ обчислити

$$|[(3\vec{a} + 2\vec{b})(\vec{a} - \vec{b})]|.$$

4.60 Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ взаємно перпендикулярні. Знаючи, що $|\vec{a}| = 4$ і $|\vec{b}| = 3$ обчислити

$$|[(5\vec{a} - 2\vec{b})(\vec{a} + \vec{b})]|.$$

4.61 Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут 60° . Знайти довжини векторів $\vec{c} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$ та $\vec{d} = 4\vec{a} - \vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$.

4.62 Визначити довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a} = 2\vec{m} + \vec{n}$ та $\vec{b} = \vec{m} - 2\vec{n}$, де $\vec{m}$ та $\vec{n}$ — одиничні вектори, кут між якими 60° .

4.63 Визначити кут між векторами $\vec{a} = 2\vec{m} + 4\vec{n}$ та $\vec{b} = \vec{m} - \vec{n}$, де $\vec{m}$ та $\vec{n}$ — одиничні вектори, кут між якими 120° .

4.64 Дано вектори $\vec{OA} = \vec{a}$ та $\vec{OB} = \vec{b}$, причому $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 4$, а кут між ними 60° . Визначити кут між медіаною $\vec{OM}$ трикутника AOB та стороною $\vec{OA}$.

4.65 Знайти кут між діагоналями паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a} = 2\vec{m} + \vec{n} - \vec{p}$ та $\vec{b} = \vec{m} - 3\vec{n} + \vec{p}$, де $\vec{m}$, $\vec{n}$ та $\vec{p}$ — орти.

4.66 Знайти площу паралелограма, діагоналями якого служать вектори $2\vec{m} - \vec{n}$ та $4\vec{m} - 5\vec{n}$, де $\vec{m}$ та $\vec{n}$ — одиничні вектори, кут між якими 45° .

4.67 Знайти площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a} = \vec{m} + 2\vec{n}$ та $\vec{b} = 2\vec{m} + \vec{n}$, $\vec{m}$ та $\vec{n}$ — одиничні вектори, кут між якими 30° .

4.68 Знайти проєкцію вектора $\vec{a} = [(\vec{i} - 2\vec{k})(-2\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k})]$ на вектор $\vec{b} = 2\vec{j} - 4\vec{k}$, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ — орти.

4.69 Знайти проєкцію вектора $\vec{a} = 10\vec{m} + 2\vec{n}$ на вісь, що має напрямок вектора $\vec{b} = 5\vec{m} - 12\vec{n}$, де $\vec{m}$ та $\vec{n}$ — орти. Обчислити кути між віссю проєкцій та векторами $\vec{m}$, $\vec{n}$.

4.70 Обчислити внутрішні кути трикутника $A(1; 2; 1)$, $B(3; -1; 7)$ та $C(7; 4; -2)$. Переконатися, що $\triangle ABC$ — рівнобедрений.

4.71 Обчислити довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a} = 5\vec{p} + 2\vec{q}$ і

$$\vec{b} = \vec{p} - 3\vec{q}, \text{ якщо } |\vec{p}| = 2\sqrt{2}, |\vec{q}| = 3, (\vec{p} \wedge \vec{q}) = \frac{\pi}{4}.$$

4.72 Обчислити довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a} = 3\vec{p} - \vec{q}$ і

$$\vec{b} = 2\vec{p} + 4\vec{q}, \text{ якщо } |\vec{p}| = \sqrt{2}, |\vec{q}| = 4, (\vec{p} \wedge \vec{q}) = \frac{\pi}{4}.$$

4.73 Обчислити довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\vec{m}$ та $\vec{n}$, якщо $|\vec{m}| = \sqrt{2}$, $|\vec{n}| = 3$, $(\vec{m} \wedge \vec{n}) = 45^\circ$.

4.74 Обчислити довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = \sqrt{3}$, $(\vec{a} \wedge \vec{b}) = 30^\circ$.

4.75 Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{AB} = \vec{m} + 2\vec{n}$ та $\vec{AD} = \vec{m} - 3\vec{n}$, де $|\vec{m}| = 5$, $|\vec{n}| = 3$ та $(\vec{m} \wedge \vec{n}) = \pi/6$.

4.76 Обчислити синус кута між діагоналями паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a} = \vec{m} - 2\vec{n} + \vec{p}$ та $\vec{b} = \vec{m} + 4\vec{n} - 3\vec{p}$, де $\vec{m}$, $\vec{n}$ та $\vec{p}$ – орти.

4.77 Який кут створюють одиничні вектори $\vec{s}$ та $\vec{t}$, якщо відомо, що вектори $\vec{p} = \vec{s} + 2\vec{t}$ та $\vec{q} = 5\vec{s} - 4\vec{t}$ взаємно перпендикулярні.

4.78 У трикутнику ABC дані $|\vec{AB}| = 3$, $|\vec{BC}| = 2$ і $|\vec{AC}| = 3$. Знайти $(\vec{AC}, \vec{BC})$.

4.79 Довжини базисних векторів $\vec{e}_1$ та $\vec{e}_2$ на площині дорівнює 3 та 2, а кут $(\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2) = 30^\circ$. В даному базисі дані вершини паралелограма $(1; 3)$, $(1; 0)$ та $(-1; 2)$. Знайти площу.

4.80 Довжини базисних векторів $\vec{e}_1$ та $\vec{e}_2$ на площині дорівнюють $\sqrt{2}$ та 1, а кут $(\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2) = 45^\circ$. Обчислити довжини діагоналей та кути паралелограма, побудованого на векторах у даному базисі з координатами $(2; 2)$ та $(-1; 4)$.

4.81 Довжини базисних векторів $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ дорівнюють 1; 1; 2, а кути $(\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2) = (\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_3) = 90^\circ$, $(\vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3) = 60^\circ$. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}(-1, 0, 2)$ та $\vec{b}(2, -1, 1)$.

4.82 Довжини базисних векторів $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ дорівнюють 3; $\sqrt{2}$; 4, а кути $(\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2) = (\vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3) = 45^\circ$, $(\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_3) = 60^\circ$. Обчислити довжини сторін та кути паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}(1, -3, 0)$ та $\vec{b}(-1, 2, 1)$.

4.83 Знайти вектор $\vec{x}$, колінеарний вектору $\vec{a}(5, -3, 1)$ та одиничною довжиною.

4.84 Знайти вектор $\vec{x}$ довжини 1, перпендикулярний векторам $\vec{a}(1, 1, 2)$ та $\vec{b}(2, -1, 3)$.

4.85 Знайти вектор довжини 1, перпендикулярний векторам $\vec{a}(1, -1, 0)$ та $\vec{b}(2, 3, 0)$.

4.86 Знайти вектор $\vec{x}$, якщо він перпендикулярний векторам $\vec{a}(2, 3, -1)$ та $\vec{b}(1, -2, 3)$ в ортонормованому базисі $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ та задовольняє умові, що скалярний добуток вектора $\vec{x}$ вектор на $2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ дорівнює -6 .

4.87 Знайти вектор $\vec{m}$, якщо він перпендикулярний вектору $\vec{n} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, де $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – орти, і відомо, що вектор $\vec{m}$ лежить у площині YOz , при цьому $|\vec{m}| = 4$.

4.88 Знайти вектор $\vec{x}$, якщо він перпендикулярний осі Oz і вектору $\vec{a}(8; -15; 3)$ та створює гострий кут з віссю Ox , при цьому $|\vec{x}| = 51$.



Модуль 2. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ НА ПЛОЩИНІ ТА У ПРОСТОРИ

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ №5

Тема: Аналітична геометрія на площині.

1. Загальне рівняння прямої та його дослідження. Рівняння прямої у відрізках на осях та з кутовим коефіцієнтом. Рівняння прямої, що проходить через одну та дві точки. Література: [16], розд. II, §3, стор. 123-131.

Визначення. Загальне рівняння прямої має вигляд:

$$Ax + By + C = 0, \quad (2.1)$$

де A та B є коефіцієнти при невідомих та координати вектора нормалі $\vec{N}(A, B)$.

Для побудови прямої, що не проходить через початок координат, використовують рівняння прямої у відрізках на осях:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \quad (2.2)$$

Визначення. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом має вигляд:

$$y = kx + b, \quad (2.3)$$

де $k = \tan \alpha$, тобто k – кутовий коефіцієнт і дорівнює тангенсу кута нахилу прямої до додатного напрямку вісі Ox ; b – відрізок, що відсікається прямою на осі Oy .

Якщо дані точки $A(x_1, y_1)$ і $B(x_2, y_2)$, то рівняння прямої, що проходить через дві точки таке:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}, \quad (2.4)$$

а рівняння прямої, що проходить через одну точку $A(x_1, y_1)$ має вигляд:

$$y - y_1 = k(x - x_1). \quad (2.5)$$

Приклад №5.1. Побудувати прямі, що задані своїми рівняннями: а) $y = 2x - 3$; б) $3x + 2y + 4 = 0$; в) $x - 2y - 1 = 0$; г) $x + 3y - 6 = 0$; е) $y = 6$; є) $x = 2$.

Розв'язання. Для побудови прямих зручно використати рівняння прямих у відрізках на осях (2.2), якщо пряма не проходить через початок координат. В рівняннях а)–г) є вільний доданок, отже ці прямі не проходять через початок координат. Зведемо рівняння а)–г) до рівнянь у відрізках на осях (2.2):

а) $y - 2x = -3 \Rightarrow \frac{y}{-3} + \frac{2x}{3} = 1 \Rightarrow \frac{x}{3/2} + \frac{y}{-3} = 1$. Тепер відкладаємо на осях координат відрізки, що дорівнюють знаменникам рівняння: на осі Ox це $3/2$, на осі Oy це -3 і з'єднуємо отримані точки прямою (рис. 2.1 а);

б) $3x + 2y = -4 \Rightarrow \frac{3x}{-4} + \frac{2y}{-4} = 1 \Rightarrow \frac{x}{-4/3} + \frac{y}{-2} = 1$. Аналогічно відкладаємо відповідні відрізки і з'єднуємо (рис. 2.1 б);

в) $x - 2y = 1 \Rightarrow \frac{x}{1} + \frac{y}{-1/2} = 1$ (рис. 2.1 в);

г) $x + 3y = 6 \Rightarrow \frac{x}{6} + \frac{y}{2} = 1$ (рис. 2.1 г);

д) у прямої $5x + y = 0$ немає вільного доданку, отже, його не можна звести до рівняння у відрізках на осях, тому що ця пряма проходить через початок координат. Для її побудови достатньо двох точок, причому одна з точок – це початок координат, а другу точку вибираємо довільно: наприклад, $x = -1$, тоді $y = 5$, тобто т. $A(-1; 5)$. Будуємо точки і з'єднуємо її з точкою

$O(0; 0)$ (рис. 2.2 а);

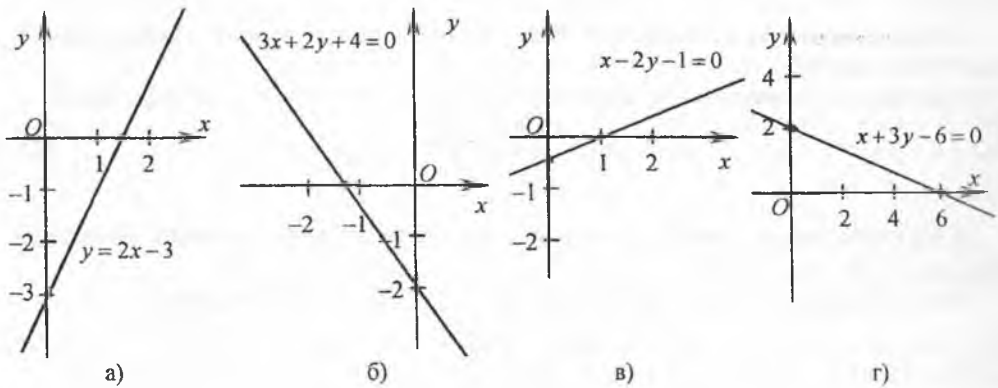


Рис. 2.1

е) у рівнянні $y = 6$ немає змінної x . Отже пряма паралельна осі Ox (рис. 2.2 б);

с) у рівнянні $x = 2$ немає змінної y . Отже вона паралельна осі Oy (рис. 2.2 в).

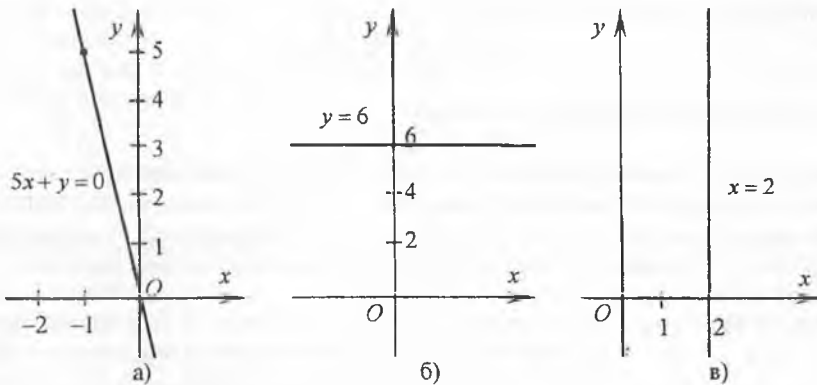


Рис. 2.2

Приклад №5.2. Знайти рівняння прямої, що проходить через початок координат і нахилена до осі Ox під кутом: а) 45° ; б) 135° ; в) 180° .

Розв'язання. Оскільки заданий кут нахилу прямої до осі Ox , то скористуємося рівнянням з кутовим коефіцієнтом (2.3). Шукана пряма проходить через початок координат, тобто $b = 0$, а $k = \tan \alpha$, де α – кут нахилу прямої до осі Ox . Отже,

а) оскільки $\tan 45^\circ = 1$, тоді $k = 1 \Rightarrow y = x$;

б) $\tan 135^\circ = \tan(180^\circ - 45^\circ) = -\tan 45^\circ = -1 \Rightarrow y = -x$;

в) $\tan 180^\circ = 0 \Rightarrow y = 0$.

Приклад №5.3. Написати рівняння прямої, що проходить через т. $A(1; -3)$ і нахилена до осі Ox під кутом а) 30° ; б) 60° ; в) 90° ; г) 180° .

Розв'язання. Будемо шукати пряму у виді рівняння через одну точку (2.5) ($k = \tan \alpha$). Отже,

а) $\tan 30^\circ = 1/\sqrt{3}$, тоді $y - (-3) = (x - 1) \cdot 1/\sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{3}y - x + 3\sqrt{3} + 1 = 0$;

б) $\tan 60^\circ = \sqrt{3} \Rightarrow y + 3 = \sqrt{3}(x - 1) \Rightarrow y - \sqrt{3}x + 3 + \sqrt{3} = 0$;

в) $\tan 90^\circ = \infty$, тобто пряма перпендикулярна до осі абсцис і паралельна до осі ординат, та враховуючи, що вона проходить через т. $A(1; -3)$, одержимо $x = 1$;

г) $\text{tg} 180^\circ = 0$, $k = 0$. Ця пряма паралельна осі Ox , а її рівняння має вид: $y = -3$.

2. Нормальне рівняння прямої. Відстань від точки до прямої. Література: [16], розд. II, §4, стор. 132-136.

Відстань від точки $M(x_0, y_0)$ до прямої $Ax + By + C = 0$ обчислюється за формулою:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (2.6)$$

3. Кут між двома прямими та взаємне розташування двох прямих. Література: [16], розд. II, §5, стор. 136-141.

Якщо рівняння двох прямих задані у вигляді: $y = k_1x + b_1$ та $y = k_2x + b_2$, тоді

$$\text{tg} \theta = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}, \quad (2.7)$$

де θ – кут між даними прямими.

Якщо рівняння прямих задані в загальному виді, тоді:

$$\text{tg} \theta = \frac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{A_1 A_2 + B_1 B_2}. \quad (2.8)$$

Умова паралельності двох прямих:

$$k_1 = k_2 \text{ або } \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}. \quad (2.9)$$

Умова перпендикулярності двох прямих:

$$k_2 = -1/k_1 \text{ або } A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0. \quad (2.10)$$

Приклад №5.3. Написати нормальне рівняння прямої, що проходить через т. $A(3; -1)$ і паралельна: а) осі абсцис; б) бісектрисі I, IV координатних кутів; в) прямій $y - 3x + 7 = 0$.

Розв'язання. Пряма, що проходить через т. $A(3; -1)$ за формулою (2.5) матиме такий вигляд: $y + 1 = k(x - 3)$. З умови паралельності прямих (2.9) знайдемо кутовий коефіцієнт k :

а) для прямої паралельної осі Ox $k = 0$, отже $y = -1$;

б) рівняння бісектриси I, IV координатних кутів $y = x$, отже $k = 1$, тоді шукана пряма буде $y + 1 = x - 3 \Rightarrow y - x + 4 = 0$. Як відомо, для запису рівняння прямої у нормальному виді потрібний нормуючий множник: $\sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. Отже, нормальне рівняння прямої буде таким:

$$-\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}} + \frac{4}{\sqrt{2}} = 0;$$

в) знайдемо k у заданій прямій $y - 3x + 7 = 0 \Rightarrow y = 3x - 7 \Rightarrow k = 3$. Тоді за формулою (3.9) у шуканій прямій повинно бути таке ж k , тоді $y + 1 = 3(x - 3) \Rightarrow y - 2x + 10 = 0$. Звідки, записуючи нормуючий множник $\sqrt{(-2)^2 + 1^2} = \sqrt{5}$, одержимо нормальне рівняння прямої

$$-\frac{2x}{\sqrt{5}} + \frac{y}{\sqrt{5}} + \frac{10}{\sqrt{5}} = 0.$$

Приклад №5.4. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку перетину прямих $2x - 3y + 5 = 0$ і $3x + y - 7 = 0$ та паралельна прямій $y = 4x + 1$.

Розв'язання. Запишемо рівняння жмутка прямих із центром у точці перетину двох заданих прямих: $2x - 3y + 5 + \lambda(3x + y - 7) = 0$, що визначає шукану пряму при визначеному значенні λ . Приведемо рівняння до рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом. Тобто, $(2 + 3\lambda)x + (-3 + \lambda)y + (5 - 7\lambda) = 0$. Звідки $y = \frac{2 + \lambda}{3 - \lambda}x + \frac{5 - 7\lambda}{3 - \lambda}$. Оскільки шукана пряма паралельна прямій $y = 4x + 1$, то за умовою паралельності двох прямих (2.9) одержуємо $(2 + \lambda)/(3 - \lambda) = 4$. Звідки знаходимо $\lambda = 2$. Підставляючи одержане значення λ у рівняння жмутка, визначимо рі-

вняння шуканої прямої: $4x - y - 9 = 0$.

Приклад №5.5. Скласти рівняння катетів прямокутного рівнобедреного трикутника (рис. 2.3), знаючи рівняння гіпотенузи $y = 3x + 5$ і вершини прямого кута т. $A(4; -1)$.

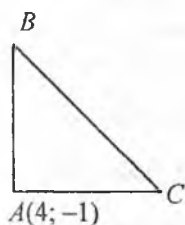


Рис. 2.3

Розв'язання. За умовою рівняння BC : $y = 3x + 5$, рівняння катета AC через одну точку (2.5): $y + 1 = k(x - 4)$. Оскільки $AC \perp AB$, то за форм. (2.10): $k_{AB} = -1/k_{AC}$, або $k_{AB} = -1/k$. Отже, рівняння AB : $y + 1 = -(x - 4)/k$. Оскільки заданий трикутник рівнобедрений, то $|AC| = |AB|$ і кут між

AC і CB дорівнює 45° . З формули (2.7): $\text{tg} \theta = \frac{k_{BC} - k_{AC}}{1 + k_{BC} \cdot k_{AC}}$ маємо

$$\text{tg} 45^\circ = (3 - k)/(1 + 3k) \Rightarrow 1 = (3 - k)/(1 + 3k) \Rightarrow 1 + 3k = 3 - k \Rightarrow k = 0,5 \Rightarrow k_{AB} = -2. \text{ Отже, рівняння катета } AC: y + 1 = 0,5(x - 4) \Rightarrow 2y - x + 6 = 0. \text{ Рівняння катета } AB: y + 1 = -2(x - 4) \Rightarrow y + 2x - 7 = 0.$$

Приклад №5.6. На пряму, що проходить через точки $A(1; -2)$ і $B(3; 8)$, опущений перпендикуляр з $D(-3; 4)$. Обчислити відношення, в якому основа цього перпендикуляра ділить відрізок AB .

Розв'язання. За формулою (2.4) запишемо рівняння прямої, що проходить через точки $A(1; -2)$ і $B(3; 8)$: $\frac{x-1}{3-1} = \frac{y-(-2)}{8-(-2)} \Rightarrow \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{10} \Rightarrow 5x - y - 7 = 0$ або $y = 5x - 7$. За умовою потрібно знайти рівняння прямої, що проходить через т. D і перпендикулярно до прямої AB , тобто за формулою (2.5): $y - 4 = k(x + 3)$, а за формулою (2.10): $k = -1/5 = 0,2$. Отже, рівняння шуканої прямої має вид: $y - 4 = 0,2(x + 3) \Rightarrow x + 5y - 17 = 0$. Знайдемо точку перетину двох прямих як основу перпендикуляра:

$$\begin{cases} 5x - y - 7 = 0, \\ x + 5y - 17 = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 5x - 7, \\ x + 5(5x - 7) - 17 = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 5x - 7, \\ 26x = 52; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 3, \\ x = 2. \end{cases}$$

Оскільки відомі всі точки, то використовуючи формулу (1.27) знайдемо λ , тобто відношення в якому основа перпендикуляра ділить відрізок AB : $2 = \frac{1 + \lambda \cdot 3}{1 + \lambda} \Rightarrow 3\lambda + 1 = 2(\lambda + 1) \Rightarrow \lambda = 1$, тобто відрізок ділиться навпіл.

Контрольні питання

1. Рівняння прямої: а) у відрізках на осях; б) з кутовим коефіцієнтом.
2. Рівняння прямої, яка проходить: а) через одну точку; б) через дві точки.
3. Загальне рівняння прямої та її дослідження.
4. Нормальне рівняння прямої та відстань від точки до прямої.
5. Як знайти кут між двома прямими на площині?
6. Взаємне розташування двох прямих на площині.

Завдання до практичного заняття №5

Задачі I рівня

- 5.1 Звести до нормального виду рівняння прямих: а) $3x - 4y + 10 = 0$; б) $2x - 2y - 5 = 0$; в) $\frac{12}{13}x - \frac{5}{13}y - 7 = 0$; г) $x/5 - 7y/5 + \sqrt{2} = 0$.
- 5.2 Скласти рівняння прямої, що проходить через т. $M(3; 4)$ паралельно осі Ox .
- 5.3 Визначити рівняння прямої, що проходить через початок координат перпендикулярно до вектора $\vec{n}(1; 2)$.
- 5.4 Скласти різні рівняння прямої, якщо вона проходить через точки $A(2; 0)$ і $B(0; 2)$.
- 5.5 Обчислити відстань від початку координат до прямої $3x + 4y - 5 = 0$.
- 5.6 Під яким кутом перетинаються прямі $2x - 3y + 5 = 0$ та $3x - 2y + 5 = 0$.
- 5.7 Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $M(3; -1)$ та: а) має вектор нормалі $\vec{n}(2; 5)$; б) має напрямний вектор $\vec{a}(1; -3)$; в) проходить через точку $P(4; -2)$; г) має кутовий

- коефіцієнт $k = 5/2$; д) відтинає на осі Ox відрізок $a = -3$; є) відтинає на осях координат однакові відрізки.
- 5.8 Визначити, при яких a і b прямі $ax - 4y + 5 = 0$ та $3x + 2y + b = 0$: а) перетинаються; б) збігаються; в) є паралельними; г) є перпендикулярними.
- 5.9 Скласти рівняння прямої, яка проходить через т. $A(2; 3)$ паралельно прямій $5x - 2y + 7 = 0$.
- 5.10 Через т. $A(1; 4)$ провести пряму: а) перпендикулярну прямій $x + 3y - 8 = 0$; б) паралельну прямій $-x + y - 9 = 0$.
- 5.11 Через т. $A(1; 2)$ провести пряму: а) паралельну прямій $x + 2y = -5$; б) перпендикулярну прямій $-2x + y = 1$.
- 5.12 З початку координат опустити перпендикуляр на пряму $3x + 4y - 5 = 0$. Знайти його рівняння.
- 5.13 Скласти рівняння прямої, що проходить через точку перетину двох прямих $3x - 2y + 5 = 0$ і $4x + 3y + 1 = 0$, якщо вона: а) проходить через т. $A(6; -1)$; б) паралельна прямій $x + 2y - 7 = 0$; в) перпендикулярна до прямої $2x - 5y + 6 = 0$; г) проходить під кутом 45° до прямої $3x + y - 1 = 0$. (Примітка. Розв'язати задачу, визначаючи таке визначаючи точки перетину заданих прямих).
- 5.14 Через точку перетину прямих $2x + y - 5 = 0$ та $-x + 3y - 8 = 0$ провести пряму паралельну прямій $4x - 2y + 1 = 0$.
- 5.15 Через точку перетину прямих $x + 5y = 17$ та $3x - y = 3$ провести пряму перпендикулярну прямій $9x + 27y - 1 = 0$.
- 5.16 Через точку перетину прямих $2x - y - 1 = 0$ та $6x + 5y - 11 = 0$ провести пряму перпендикулярну прямій $x + 3y - 69 = 0$.
- 5.17 Через точку перетину прямих $7x - 5y - 4 = 0$ та $x - 6y + 10 = 0$ провести пряму перпендикулярну прямій $3x - 6y - 1 = 0$.
- 5.18 Написати рівняння прямої, що проходить через точку перетину прямих $5x - y + 10 = 0$ та $8x + 4y + 9 = 0$ і паралельна прямій $x + 3y = 0$.
- 5.19 Написати рівняння прямої, що проходить через точку перетину прямих $2x - 3y + 5 = 0$ та $3x + y - 7 = 0$ і перпендикулярно прямій $y = 2x$.
- 5.20 Знайти проекцію т. $Q(-6; 4)$ на пряму $4x - 5y + 3 = 0$.
- 5.21 Дані т. $A(1; 2)$ і пряма $3x - 2y + 12 = 0$. Знайти координати проєкції т. A на пряму.
- 5.22 Дані т. $A(4; -5)$ і пряма $3x - y + 9 = 0$. Знайти координати проєкції т. A на пряму.
- 5.23 Визначити довжину перпендикуляра, опущеного з початку координат на пряму $x - y + 4 = 0$, та кут, що утворює цей перпендикуляр з віссю Ox .
- 5.24 Знайти відстань: а) т. $M(1; -2)$ до прямої $3x - 4y + 9 = 0$; б) точки перетину прямих $3x - 4y + 25 = 0$ і $3x + 2y - 19 = 0$ до прямої $x + 2y - 5 = 0$; в) середини відрізка, що сполучає точки $A(3; -4)$ і $B(-7; 6)$ до прямої $x + 2y - 5 = 0$.
- 5.25 Знайти відстань між прямими: $5x - 12y - 7 = 0$ та $-10x + 24y + 1 = 0$.
- 5.26 Знайти відстань між прямими: $6x - 8y + 8 = 0$ та $3x - 4y + 3 = 0$.
- 5.27 Обчислити відстань між прямими $3x - 4y + 16 = 0$ та $3x - 4y + 36 = 0$.
- 5.28 Знайти рівняння прямої, що проходить через точку перетину прямих $x + y - 1 = 0$ та $2x - y + 3 = 0$ і відтинає на від'ємній частині осі Oy відрізок у три одиниці.
- 5.29 Діагоналі ромба, довжиною 30 та 16 одиниць, прийняті за вісі координат. Обчислити відстань між паралельними сторонами цього ромба.
- 5.30 При яких a три прямі $ax + y = 1$, $x - y = a$ і $x + y = a^2$ мають спільну точку.
- 5.31 Якій умові повинні задовольняти коефіцієнти a та b , щоб прямі $ax + by + 1 = 0$, $2x - 3y + 5 = 0$ та $x - 1 = 0$ проходили через одну точку?

Задані прямі: $3x - 4y + 9 = 0$

Задані II рівня

- 5.32 Знайти рівняння прямої, що проходить через т. $A(2; -1)$ та складає з віссю Ox кут, вдвічі більший кута, що складає з Ox пряма $x - 3y + 4 = 0$.
- 5.33 Трикутник має вершини $A(-2, 0)$, $B(2, 4)$ та $C(4, -1)$. Написати рівняння сторін трикутника, медіани AE і висоти AD .
- 5.34 У трикутнику з вершинами $A(-2, 0)$, $B(2, 6)$ та $C(4, 2)$ проведені висота BD та медіана

BE. Написати рівняння сторони *AC*, медіани *BE* і висоти *BD*.

- 5.35 Знайти точку, симетричну точці $P(-2; -1)$ відносно прямої $x + 2y - 16 = 0$.

5.36 Даний трикутник з вершинами $A(-2, 0)$, $B(2, 4)$ та $C(4, 0)$. Написати рівняння сторін трикутника, медіани *AE* і висоти *AD* та знайти довжину медіани *AE*.

5.37 У трикутнику з вершинами $A(4; 3)$, $B(16; -6)$, $C(20; 16)$ знайти рівняння сторін *AB* і *BC* та кут при вершині *B*.

- 5.38 Дано трикутник із вершинами $A(1; -2)$, $B(5; 4)$ і $C(-2; 0)$. Скласти рівняння медіани *CM*, висоти *BN* та бісектриси *AP*. Знайти довжину висоти *BN*.

5.39 Дано трикутник із вершинами $A(2; 3)$, $B(-4; -1)$ і $C(5; 2)$. Скласти рівняння висоти *AP*, медіани *BM* та бісектриси *CQ*.

5.40 Для трикутника з вершинами $A(-12; -2)$, $B(4; 10)$ і $C(-6; -10)$ скласти рівняння бісектриси внутрішнього кута при вершині *A* та знайти її довжину.

5.41 Дано вершини трикутника $A(2; -2)$, $B(3; -5)$, $C(5; 7)$. Скласти рівняння перпендикуляра, опущеного з вершини *C* на бісектрису внутрішнього кута при вершині *A*.

- 5.42 У паралелограмі задано рівняння двох сторін $8x + 3y + 1 = 0$ і $2x + y - 1 = 0$ та однієї з його діагоналей $3x + 2y + 3 = 0$. Визначити вершини цього паралелограма.

5.43 Дано дві протилежні точки квадрата $A(-2; 2)$ і $C(0; -3)$. Скласти рівняння його сторін.

5.44 У трикутнику з вершинами $A(2; 2)$, $B(-2; -1)$ і $C(-5; 3)$ проведено медіани *AM* і *CN*. Записати рівняння цих медіан, знайти кут між ними та точку їх перетину.

5.45 В опуклому чотирикутнику з вершинами $A(-3; 1)$, $B(3; 9)$, $C(7; 6)$ і $D(-2; -6)$ знайти точку перетину діагоналей та кут між ними.

5.46 У квадраті задано вершину $A(-2; 3)$ та одну з його сторін $3x - 4y - 2 = 0$. Обчислити площу цього квадрата та довжину його діагоналей.

5.47 Скласти рівняння прямих, що проходять через вершини трикутника $A(2; -1)$, $B(3; 5)$ і $C(-4; 2)$ паралельно протилежним сторонам.

5.48 Визначити координати всіх вершин трикутника, якщо т. $M(0, 3)$ – точка перетину його медіан, а $x + 2y - 12 = 0$ та $4x - y + 15 = 0$ – рівняння двох сторін.

- 5.49 Дані дві вершини трикутника $A(-6; 2)$ та $B(2; -2)$ і т. $N(1, 2)$ перетину його висот. Обчислити координати третьої вершини.

5.50 Записати рівняння сторін трикутника, якщо задано одну з його вершин $A(-4; -5)$ та рівняння двох висот $5x + 3y - 4 = 0$ і $3x + 8y + 13 = 0$.

5.51 Дані дві точки $A(2; -3)$ та $B(5; -1)$. Провести пряму так, щоб вона пройшла на відстані шість одиниць від т. *A* і на відстані чотири одиниці від т. *B*.

- 5.52 Дані дві точки $A(-3; 1)$ та $B(3; -7)$. На осі ординат знайти таку т. *M*, щоб прямі *AM* та *BM* були взаємні перпендикулярні.

- 5.53 Дані точки $A(3; -4)$ та $B(-2; 5)$. На вісі ординат знайти таку т. *M*, щоб прямі *AM* та *BM* були перпендикулярні одна до іншої.

5.54 З т. $A(1; 1)$ проведений промінь під кутом $\pi/4$ до прямої $y - 2x + 3 = 0$. Знайти рівняння цього променя.

5.55 З точок перетину прямої $3x + 5y - 15 = 0$ з осями координат проведені перпендикуляри до цієї прямої. Знайти їх рівняння.

5.56 На осі ординат знайти точку, що однаково віддалена від початку координат та від прямої $3x - 4y + 12 = 0$.

- 5.57 Написати рівняння прямих, що проходять через початок координат під кутом 45° до прямої $y = 4 - 2x$.

5.58 Написати рівняння прямих, що проходять через т. $A(-1; 1)$ під кутом 45° до прямої

$$2x + 3y = 6.$$

5.59 Написати рівняння сторін квадрату, діагоналі якого служать осями координат. Довжина сторони квадрату дорівнює a .

5.60 Пряма $2x - y + 8 = 0$ перетинає осі Ox та Oy у точках A та B . Точка M ділить AB у відношенні $AM : MB = 3 : 1$. Написати рівняння перпендикуляра, побудованого з т. M до прямої AB .

5.61 Скласти рівняння прямих, паралельних прямій $2x - y + 5 = 0$ і віддалених від т. $A(1; -2)$ на відстані $\sqrt{20}$.

5.62 Скласти рівняння прямих, що проходять через т. $A(-1; 5)$ і рівновіддалених від двох точок $B(3; 7)$ і $C(1; -1)$.

5.63 Скласти рівняння прямої, що віддалена від точки $A(4, -2)$ на 4 одиниці та паралельна прямій $8x - 15y = 0$.

5.64 Скласти рівняння прямої, що проходить через т. $A(-1; 2)$ так, щоб відрізок цієї прямої, укладеної між прямими $3x + y + 2 = 0$ й $4x + y - 1 = 0$ у т. A ділився навпіл.

5.65 У рівнобедреному прямокутному трикутнику дані координати вершини гострого кута $(5; 7)$ і рівняння протилежного катета $6x + 4y - 9 = 0$. Скласти рівняння двох інших сторін трикутника.

5.66 Через т. $M(1; 2)$ провести пряму так, щоб вона пройшла на однаковій відстані від т. $A(3, 3)$ та $B(5, 2)$.

5.67 Через т. $M(3; 2)$ провести пряму так, щоб її відрізок, укладений між осями координат, ділився в даній точці навпіл.

5.68 На прямій $2x + y + 11 = 0$ знайти точку, рівновіддалену від двох даних точок $A(1; 1)$ та $B(3; 0)$.

5.69 Обчислити координати вершин ромба, якщо відомі рівняння двох його сторін $2x - y + 4 = 0$ та $2x - y + 10 = 0$ і рівняння однієї з його діагоналей $x + y + 2 = 0$.

5.70 Знайти рівняння прямих, що належать жмутку $(x + 2y - 7) + \alpha(3x - y + 5) = 0$ і перпендикулярних до кожної з основних прямих жмутка.

5.71 Знайти точку, що симетрична т. $M(-2; -9)$ відносно прямої $2x + 5y - 38 = 0$.

5.72 Знайти т. M_1 , симетричну точці $M(-8; 12)$ відносно прямої, що проходить через дві точки $A(2; -3)$ і $B(-5; 1)$.

5.73 Обчислити координати точки перетину перпендикулярів, що проведені з середин сторін $\triangle ABC$, якщо $A(2; 3)$, $B(0; -3)$ та $C(5; -2)$.

5.74 Обчислити площу квадрату, вершини якого лежать на прямих $x - 2y - 3 = 0$ та $-2x + 4y + 5 = 0$.

5.75 Скласти рівняння сторін трикутника, знаючи одну його вершину $A(0, 2)$ та рівняння висот (BM) $x + y = 4$ та (CM) $y = 2x$, де M — точка перетину висот.

5.76 Точка $H(-3, 2)$ є точкою перетину висот трикутника, дві його сторони лежать на прямих $y = 2x$ та $y = -x + 3$. Скласти рівняння третьої сторони.

5.77 Точка A лежить на прямій $x + y = 8$, причому рівновіддалена від т. $B(2; 8)$ та прямої $x - 3y + 2 = 0$. Знайти координати точки A .

5.78 Дані прямі $3x + 4y - 10 = 0$ та $5x - 12y + 26 = 0$. Знайти точку, що знаходиться на відстані п'ять одиниць від обох прямих.

5.79 Знайти координати точки, яка симетрична точці $A(2; -4)$ відносно прямої $4x + 3y + 1 = 0$.

5.80 Через т. $M(4; -3)$ провести пряму так, щоб площа трикутника, створеного нею та осями, дорівнювала три кв. од.

5.81 Скласти рівняння прямої, що проходить через т. $A(2; 6)$ та створює з осями координат

трикутник, що знаходиться у другій чверті та має площу три кв. од.

5.82 Скласти рівняння прямої, що проходить через т. $A(-1; 2)$ так, щоб середина її відрізка, укладеного між паралельними прямими $x + 2y + 1 = 0$ та $x + 2y - 3 = 0$, належить прямій $x + y + 2 = 0$.

5.83 Дані рівняння двох сторін трикутника $4x - 5y + 9 = 0$ та $x + 4y - 3 = 0$. Знайти рівняння третьої сторони, якщо відомо, що медіани цього трикутника перетинаються в т. $P(3; 1)$.



ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ №6

Тема: Криві другого порядку.

4. Криві другого порядку: коло, еліпс, гіпербола, парабола. Література: [16], розд. II, §6, стор. 141-157, §7, стор. 157-160.

1. Рівняння кола радіуса r з центром у довільній точці $O_1(a, b)$ має вигляд:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2. \quad (2.11)$$

Коло радіуса r з центром у початку координат має рівняння:

$$x^2 + y^2 = r^2. \quad (2.12)$$

2. Еліпс описується таким рівнянням:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (2.13)$$

де a – велика піввісь, b – мала піввісь.

Якщо фокуси еліпса мають координати $F_1(-c, 0)$ і $F_2(c, 0)$, тоді

$$b^2 = a^2 - c^2. \quad (2.14)$$

Ексцентриситет еліпса

$$e = c/a. \quad (2.15)$$

3. Якщо фокуси гіперболи $F_1(-c, 0)$ і $F_2(c, 0)$, a – дійсна піввісь, b – уявна піввісь, тоді рівняння гіперболи таке:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (2.16)$$

причому

$$b^2 = c^2 - a^2. \quad (2.17)$$

Ексцентриситет гіперболи обчислюється за формулою (2.15).

Рівняння асимптот гіперболи:

$$y = \pm \frac{b}{a} x. \quad (2.18)$$

Рівняння директрис еліпса і гіперболи:

$$x = \pm a/e. \quad (2.19)$$

4. Рівняння параболи з вершиною у початку координат і симетричної відносно осі Ox має такий вигляд:

$$y^2 = 2px, \quad (2.20)$$

де $F(p/2; 0)$ – фокус. Рівняння директриси параболи:

$$x = -p/2. \quad (2.21)$$

Приклад №6.1. Скласти канонічні рівняння еліпса та схематично його зобразити, якщо мала піввісь $b = 10$, а фокус знаходиться у т. $F(-12; 0)$.

Розв'язання. За умовою знаходимо $b=10$, $c=12$, тоді з (2.14): $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = 10^2 + 12^2 = 244$.

Підставляємо a^2 та b^2 у рівняння (2.13) і одержуємо рівняння еліпса: $\frac{x^2}{244} + \frac{y^2}{100} = 1$. Директри-

са еліпса буде мати таке рівняння (2.19): $x = \pm a/e = \pm \frac{a}{c/a} = \pm a^2/c = \pm 244/12 \approx \pm 20,33$. Для побу-

дови еліпса відкладаємо по осі Ox : $a = \pm \sqrt{244} \approx \pm 15,62$, а по осі Oy : $b = \pm 10$ (рис. 2.4).

Приклад №6.2. Скласти канонічні рівняння гіперболи та схематично зобразити, якщо велика піввісь $a = 25$, а ексцентриситет $e = 14/11$.

Розв'язання. Оскільки $a = 25$, а за формулою (2.15): $e = c/a = 14/11 \Rightarrow c = 14a/11 \Rightarrow c = 14(25/11) = 350/11$, тоді за формулою (2.17) $b^2 = (350/11)^2 - 25^2 = (122500 - 75625)/121 = 46875/121 \approx 387,4$. Таким чином, рівняння гіперболи (2.16) буде таким: $\frac{x^2}{625} - \frac{y^2}{387,4} = 1$. Ди-

ректрису гіперболи знайдемо із формули (2.19): $x = \pm a/e = \pm \frac{25}{14/11} = \pm 275/14 \approx \pm 19,64$. Для

більш зручної побудови гіперболи, крім відкладених по осі Ox : $a = \pm 25$, по осі Oy : $b = \pm \sqrt{387,4} \approx 19,68$, знайдемо та побудуємо асимптоти. Отже, за формулою (2.18) одержуємо: $y = \pm \frac{b}{a}x = \pm \frac{19,68}{25}x$ (рис. 2.5).



Рис. 2.4

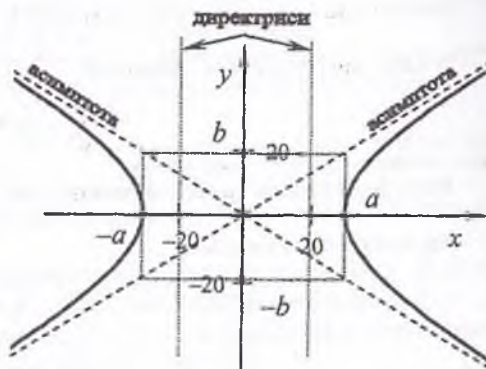


Рис. 2.5

Зауваження. Можна просто побудувати прямокутник зі сторонами, паралельними осям Ox та Oy , що проходять через точки $(-a; 0)$, $(a; 0)$, $(0; -b)$ та $(0; b)$, а діагоналі цього прямокутника і будуть асимптотами (рис. 2.5).

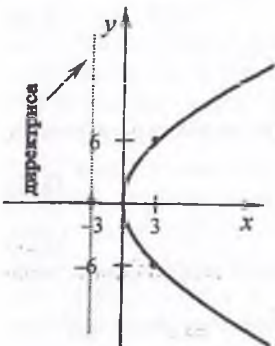


Рис. 2.6

Приклад №6.3. Скласти канонічні рівняння параболи та схематично зобразити її, якщо директриса $D: x = -3$.

Розв'язання. Із рівняння директриси за формулою (2.21) знаходимо: $x = -p/2 = -3 \Rightarrow p = 6$. Звідки одержимо рівняння параболи, що симетрична відносно осі Ox (2.20): $y^2 = 12x$. Оскільки коефіцієнт при x додатний, то парабола знаходиться у I та IV чверті, симетрична відносно осі Ox та проходить через точку $O(0; 0)$. Для побудови знайдемо ще одну точку, наприклад, візьмемо $x = 3$, звідки $y = \pm 6$ (рис. 2.6).

Приклад №6.4. Привести до канонічного виду і побудувати криву: $3x^2 - 2y^2 + 5x + 3y + 2 = 0$.

Розв'язання. Групуємо змінні x та y і доповнюємо їх до повного квадрату, причому коефіцієнти перед квадратами змінних виносимо за дужки:

$$3 \left[x^2 + \frac{5}{3}x + \left(\frac{5}{6}\right)^2 - \left(\frac{5}{6}\right)^2 \right] - 2 \left[y^2 - \frac{3}{2}y + \left(\frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 \right] + 2 = 0 \Rightarrow$$

$$3\left(x+\frac{5}{6}\right)^2 - \frac{25}{12} - 2\left(y-\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{9}{8} + 2 = 0 \Rightarrow 3\left(x+\frac{5}{6}\right)^2 - 2\left(y-\frac{3}{4}\right)^2 = -\frac{25}{24}.$$

Поділимо все рівняння на $-25/24$ коефіцієнти 3 і 2 віднесемо у знаменник. Отже, маємо:

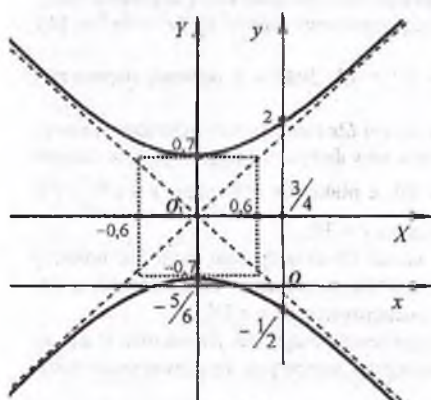


Рис. 2.7

$\frac{(y-3/4)^2}{25/48} - \frac{(x+5/6)^2}{25/72} = 1$. Якщо ввести нові координати $X = x + 5/6$; $Y = y - 3/4$, тобто робимо паралельний переніс системи координат, центром якої буде точка $O_1(-5/6, 3/4)$, тоді отримаємо рівняння спряженої гіперболи:

$\frac{Y^2}{(5/4\sqrt{3})^2} - \frac{X^2}{(5/6\sqrt{2})^2} = 1$. Будуємо графік старої системи і нової системи координат в одному масштабі (рис. 2.7).

По осі Oy відкладаємо $b = \pm 5/4\sqrt{3} \approx \pm 0,72$, а по осі $Ox - a = \pm 5/6\sqrt{2} \approx \pm 0,6$. Через отримані точки проводимо прямі паралельні осям координат, в результаті одержимо прямокутник. Через його вершини проводимо діагоналі і продовжуємо.

Ці прямі є асимптотами гіперболи. Оскільки у рівнянні знак „-“ перед x^2 , то вершини гіперболи будуть лежати на осі Oy . Точки перетину гіперболи з віссю старої системи координат Oy знаходимо з вихідного рівняння за умови, що $x = 0$. Отже, розв'яжемо рівняння $-2y^2 + 3y + 2 = 0 \Rightarrow 2y^2 - 3y - 2 = 0 \Rightarrow y_{1,2} = (3 \pm \sqrt{9+16})/4 = (3 \pm 5)/4 \Rightarrow y_1 = 2; y_2 = -1/2$. Точки перетину з віссю Ox , якщо $y = 0 \Rightarrow 3x^2 + 5x + 2 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = (-5 \pm \sqrt{25-24})/6 = (-5 \pm 1)/6 \Rightarrow x_1 = -1; x_2 = -2/3$.

Контрольні питання

1. Рівняння кола.
2. Визначення еліпсу та його канонічне рівняння.
3. Визначення гіперболи та її канонічне рівняння.
4. Визначення параболи та її рівняння.
5. Що таке паралельний переніс системи координат?
6. Як зводяться рівняння другого порядку до канонічного виду?

Завдання до практичного заняття №6

Задачі I рівня

- 6.1 Визначити, яку криву задає рівняння, та схематично побудувати: а) $9x^2 + 25y^2 = 225$; б) $y^2 = -2x$; в) $x^2 - 4y^2 = 8$; г) $x^2 + y^2 - 1 = 0$.
- 6.2 Знайти рівняння асимптот кривої $x^2/16 - y^2 = 1$.
- 6.3 Визначити ексцентриситет кривої $y^2 = 10x^2 + 4$.
- 6.4 Визначити рівняння спряженої кривої до гіперболи $x^2/12 - y^2/8 = 1$ та схематично побудувати обидві.
- 6.5 Записати рівняння еліпса, фокуси якого лежать на осі абсцис симетрично відносно початку координат та схематично його побудувати, якщо: а) велика піввісь дорівнює 13, а відстань між фокусами 10; б) мала піввісь дорівнює 4, а ексцентриситет $e = 4/5$; в) відстань між директрисами дорівнює 32, а ексцентриситет $e = 1/2$.
- 6.6 Записати рівняння еліпса, фокуси якого лежать на осі ординат симетрично відносно початку координат та схематично побудувати, якщо: а) півосі еліпса рівні 7 і 4 відповідно; б) відстань між фокусами дорівнює 24, а ексцентриситет $e = 12/13$.
- 6.7 Записати рівняння еліпсу та схематично його побудувати, якщо: а) півосі $a = 6$, $b = 4$; б) відстань між фокусами $2c = 10$, а велика вісь $2a = 16$; в) мала піввісь $b = 4$ і відстань між фоку-

сами $2c = 10$; г) велика піввісь $a = 12$, ексцентриситет $e = 0,5$; д) мала піввісь $b = 8$, а ексцентриситет $e = 0,6$; е) сума півосей $a + b = 12$, а відстань між фокусами $2c = 6\sqrt{2}$.

6.8 Знайти точки еліпса $x^2/100 + y^2/36 = 1$, відстань яких до правого фокуса F_1 дорівнює 14.

6.9 Знайти довжини осей, координати фокусів та ексцентриситет еліпсу а) $4x^2 + 9y^2 = 144$;

б) $16x^2 + 9y^2 = 144$.

6.10 Визначити, яка крива задається рівнянням $3x^2 - 4y^2 = 12$. Знайти її основні параметри, ексцентриситет, директриси та зобразити графічно.

6.11 Записати рівняння гіперболи, фокуси якої лежать на осі Ox симетрично відносно початку координат та схематично її побудувати, якщо: а) відстань між фокусами дорівнює 6; а ексцентриситет $e = 3/2$; б) відстань між фокусами дорівнює 20, а рівняння асимптот $y = \pm 4/3 x$; в)

відстань між директрисами дорівнює $16/3$, а ексцентриситет $e = 3/2$.

6.12 Скласти рівняння гіперболи, фокуси якої лежать на осі Oy симетрично відносно початку координат та схематично її побудувати, якщо: а) відстань між вершинами дорівнює 20, а відстань між фокусами 24; б) дійсна піввісь дорівнює 5, а ексцентриситет $e = 7/5$.

6.13 Для кривої $64x^2 - 36y^2 = 2304$ записати рівняння спряженої гіперболи. Визначити її дійсну та уявну півосі, фокуси, ексцентриситет, рівняння асимптот і директрис та схематично побудувати її.

6.14 Скласти рівняння гіперболи та побудувати її, якщо відстань між її вершинами дорівнює 20, а відстань між фокусами 30.

6.15 Дійсна піввісь гіперболи дорівнює 5, ексцентриситет $e = 1,4$. Знайти рівняння гіперболи та побудувати її.

6.16 Гіпербола проходить через точки $(3; 2\sqrt{5}/5)$ і $(-2\sqrt{5}; 3)$. Знайти рівняння гіперболи та побудувати її.

6.17 Знайти рівняння асимптот гіперболи: а) $2x^2 - 3y^2 = 6$; б) $x^2/16 - y^2 = 1$.

6.18 Знайти ексцентриситет гіперболи $25x^2 - 36y^2 = 900$.

6.19 Дані рівняння асимптот гіперболи $y = \pm x/2$ та відстань між фокусами $2c = 10$. Знайти рівняння гіперболи.

6.20 Парабола $y^2 = 2px$ проходить через т. $A(2; 4)$. Визначити її параметр та побудувати.

6.21 Записати рівняння параболи з вершиною в початку координат та схематично побудувати її, знаючи координати фокуса: а) $F(-5; 0)$; б) $F(0; 1/2)$.

6.22 Скласти рівняння параболи з вершиною в початку координат та схематично побудувати її, якщо її директрисою є пряма $2y - 5 = 0$.

6.23 Скласти рівняння параболи, якщо її вершина знаходиться в початку координат та відстань від фокуса до її вершини дорівнює 4, а вісь симетрії – вісь Ox .

6.24 Парабола симетрична відносно осі Ox , проходить через т. $A(4; -1)$; а її вершина лежить у початку координат. Скласти та побудувати її рівняння.

Задачі II рівня

В задачах 6.25-6.77 привести до канонічного виду і побудувати криву:

- 6.25 $\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1$. 6.26 $\frac{(x+2)^2}{16} - \frac{(y+3)^2}{9} = 1$. 6.27 $\frac{(x+4)^2}{16} + \frac{(y-5)^2}{25} = 1$.
- 6.28 $\frac{(x-3)^2}{25} - \frac{(y-1)^2}{4} = 1$. 6.29 $(y+3)^2 = 2x - 1$. 6.30 $(x-2)^2 = 5 - 2y$.
- 6.31 $x = y^2 + 2y + 3$. 6.32 $x = -2y^2 + 4y - 3$. 6.33 $x + 3y^2 + 8y + 2 = 0$.
- 6.34 $y = x^2 + 5x + 6$. 6.35 $y = -x^2 + 4x - 5$. 6.36 $x^2 + y^2 - 8x + 12 = 0$.
- 6.37 $x^2 + y^2 + 4y + 5 = 0$. 6.38 $x^2 + y^2 + x + y = 0$. 6.39 $y^2 + 6y + x + 9 = 0$.
- 6.40 $x^2 + y + 2x + 2 = 0$. 6.41 $x^2 - 2y^2 + 4y - 4 = 0$. 6.42 $3x^2 + 2y^2 + 6y - 1 = 0$.
- 6.43 $2x^2 + 6y + 8x + 5 = 0$. 6.44 $x^2 + y^2 - 2x - 24 = 0$. 6.45 $y^2 + 2y - 4x + 17 = 0$.
- 6.46 $x + 3y^2 + 8y + 2 = 0$. 6.47 $8y^2 - 2x + 6y + 4 = 0$. 6.48 $4x - 3y^2 + 12y - 12 = 0$.
- 6.49 $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$. 6.50 $5x^2 - 2y^2 + 10x - 12y = 0$. 6.51 $x^2 + 3y^2 - x + y = 0$.

- 6.52 $4x^2 + 25y^2 - 8x + 100y + 4 = 0$.
- 6.54 $x^2 + y^2 - x + 2y - 1 = 0$.
- 6.56 $4x^2 - y^2 - 2x + 10y + 16 = 0$.
- 6.58 $x^2 + y^2 + 3x - 7y - 3/2 = 0$.
- 6.60 $16x^2 + 4y^2 - 32x + 16y - 32 = 0$.
- 6.62 $9x^2 + 4y^2 - 18x + 8y - 23 = 0$.
- 6.64 $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 2 = 0$.
- 6.66 $4x^2 - y^2 - 8x - 6y - 9 = 0$.
- 6.68 $4x^2 + 9y^2 + 2x + 10y + 1 = 0$.
- 6.70 $3x^2 - 6x + 3y^2 - 12y + 15 = 0$.
- 6.72 $4x^2 + 2y^2 + 12x - 5y + 12 = 0$.
- 6.74 $x^2 + 2y^2 - 5x + 4y - 6 = 0$.
- 6.76 $-x^2 + 3y^2 - 6x + 12y + 1 = 0$.
- 6.53. $x^2 + 4y^2 + 10x + 8y + 28 = 0$.
- 6.55 $-x^2 + 4y^2 - 6x - 12y + 3 = 0$.
- 6.57 $2x^2 - 3y^2 - 12x - 12y = 0$.
- 6.59 $x^2 + y^2 + x + 14y - 94 = 0$.
- 6.61 $4x^2 - y^2 + 16x - 2y + 12 = 0$.
- 6.63 $x^2 - 3y^2 + 4x - 5y + 1 = 0$.
- 6.65 $9x^2 - y^2 - 54x - 6y + 72 = 0$.
- 6.67 $-x^2 + y^2 + 6x + 2y - 12 = 0$.
- 6.69 $3x^2 + 2y^2 - 6x - 12y + 22 = 0$.
- 6.71 $3x^2 + 3y^2 - 6x - 12y + 3 = 0$.
- 6.73 $9x^2 + 2y^2 - 15x - 10y + 20 = 0$.
- 6.75 $4x^2 + 9y^2 - 40x + 36y + 100 = 0$.
- 6.77 $2x^2 - 3y^2 + 8x - 6y + 5 = 0$.



ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ №7

Тема: Аналітична геометрія у просторі. Площина.

5. Загальне рівняння площини та його дослідження. Література: [16], розд. II, §11, стор. 175-179.

5. Загальне рівняння площини та його дослідження. Література: [16], розд. II, §11, стор. 175-179.

Визначення. Загальне рівняння площини має вигляд:

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad (2.22)$$

де A, B, C – координати нормального вектора $\vec{N}(A, B, C)$.

Рівняння площини, що проходить через одну точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0, \quad (2.23)$$

Рівняння площини, що проходить через три точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ та $M_3(x_3, y_3, z_3)$ знаходиться з умови рівності нулю такого визначника (умова компланарності трьох векторів):

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \quad (2.24)$$

Приклад №7.1. Дано точки: $A_1(-2, 1, 0)$, $A_2(1, -3, 2)$, $A_3(3, 0, 2)$. Скласти рівняння площини $A_1A_2A_3$.

Розв'язання. Рівняння площини $A_1A_2A_3$ знаходимо за формулою (2.24):

$$\begin{vmatrix} x+2 & y-1 & z-0 \\ 1+2 & -3-1 & 2-0 \\ 3+2 & 0-1 & 2-0 \end{vmatrix} = 0, \text{ або } \begin{vmatrix} x+2 & y-1 & z-0 \\ 1+2 & -3-1 & 2-0 \\ 3+2 & 0-1 & 2-0 \end{vmatrix} = (x+2) \cdot (-6) - (y-1) \cdot (-4) + 17z = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -6x + 4y + 17z - 16 = 0.$$

6. Нормальне рівняння площини. Відстань від точки до площини. Література: [16], розд. II, §12, стор. 180-182.

Відстань від точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до площини обчислюється за формулою:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (2.25)$$

Приклад №7.2. Обчислити відстань початку координат до площини $10x - 10y + 5z - 150 = 0$. Знайти напрямні косинуси вектора нормалі цієї площини і точки перетину площини з осями координат.

Розв'язання. Нормальне рівняння заданої площини має вигляд: $\frac{10x - 10y + 5z - 150}{\sqrt{10^2 + (-10)^2 + 5^2}} = 0$,

або $(10x - 10y + 5z - 150)/15 = 0 \Rightarrow \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z - 10 = 0$. Звідки відстань від початку координат до площини дорівнює 10, а напрямні косинуси нормального вектора $\cos\alpha = 2/3$, $\cos\beta = -2/3$, $\cos\gamma = 1/3$. Запишемо рівняння заданої площини у виді рівняння у відрізках на осях та знайдемо точки перетину з осями: $\frac{10}{150}x - \frac{10}{150}y + \frac{5}{150}z = 1$ або $\frac{x}{15} + \frac{y}{-15} + \frac{z}{30} = 1$. Тобто $A(15; 0; 0)$, $B(0; -15; 0)$ і $C(0; 0; 30)$.

7. Кут між двома площинами. Умови паралельності та перпендикулярності двох площин. Література: [16], розд. II, §13, стор. 182-184.

Кут між двома площинами обчислюється за формулою:

$$\cos\theta = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \quad (2.26)$$

Умова паралельності двох площин:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}. \quad (2.27)$$

Умова перпендикулярності двох площин випливає із (2.26) і має вигляд:

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0. \quad (2.28)$$

Приклад №7.3. Обчислити косинус кута між координатною площиною xOy і площиною $-6x + 4y + 17z - 16 = 0$ та відстань точки $A_4(4; 3; -1)$ до даної площини.

Розв'язання. Рівняння координатної площини xOy має такий вигляд: $z = 0$. Використовуючи (2.26) одержимо: $\cos\theta = \frac{0 \cdot (-6) + 0 \cdot 4 + 17 \cdot 1}{\sqrt{(-6)^2 + 4^2 + 17^2} \sqrt{1^2}} = \frac{17}{\sqrt{341}} \approx 0,92$.

Зауваження. Розглянемо другий варіант розв'язання даного пункту. Нормальне рівняння площини має вигляд: $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$, де $\cos\alpha$ – косинус кута між площиною та віссю Ox , аналогічно $\cos\beta$ та $\cos\gamma$ – косинуси кутів між площиною та осями Oy та Oz . Координатна площина xOy має нормальний вектор, який співпадає з віссю Oz . Отже, косинус кута між даною площиною та віссю Oz і буде відповіддю на дане завдання, тобто $\cos\gamma = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{17}{\sqrt{(-6)^2 + 4^2 + 17^2}} \approx 0,92$.

За форм. (2.25) знаходимо відстань точки $A_4(4; 3; -1)$ до площини $-6x + 4y + 17z - 16 = 0$: $d = \frac{|(-6) \cdot 4 + 4 \cdot 3 + 17 \cdot (-1) - 16|}{\sqrt{(-6)^2 + 4^2 + 17^2}} = \frac{45}{\sqrt{341}} \approx 2,44$.

Приклад №7.4. Скласти рівняння площини, що проходить через точки $A(1; -2; 2)$ і $B(2; 0; 1)$ паралельно вектору $\vec{a}(3; -1; 4)$.

Розв'язання. Оскільки площина проходить через дві дані точки, то вона паралельна вектору $\vec{b} = \overrightarrow{AB} = (1; 2; -1)$. Крім цього, шукана площина паралельна заданому вектору $\vec{a}$. Із теорії відомо, що нормальний вектор $\vec{N}$ перпендикулярний шуканій площині, а значить перпендикулярний і векторам $\vec{a}$ та $\vec{b}$, тобто $\vec{N} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -7\vec{i} + 7\vec{j} + 7\vec{k}$. Тоді рівняння

шуканої площини, яка проходить через т. $A(1; -2; 2)$ з нормальним вектором $\vec{N}(-7; 7; 7)$, має

вигляд: $-7(x-1) + 7(y+2) + 7(z-2) = 0 \Rightarrow x - y - z - 1 = 0$.

Контрольні питання

1. Загальне рівняння площини у просторі та його дослідження.
2. Нормальне рівняння площини.
3. Формула відстані від точки до площини.
4. Формула для обчислення кута між двома площинами.
5. Умова паралельності двох площин.
6. Умови перпендикулярності двох площин.

Завдання до практичного заняття №7

Задачі I рівня

7.1 Скласти рівняння площини, що проходить через початок координат і має вектор нормалі $\vec{N}(1; 2; -3)$.

В задачах 7.2-7.4 знайти рівняння площини, що проходить через три точки

7.2 $A(-1; 2; 0)$, $B(4; 3; -1)$, $C(2; 3; 2)$. 7.3 $M_1(1; -1; 2)$, $M_2(2; 1; 2)$, $M_3(1; 1; 4)$.

7.4 Початок координат, $A(3; -2; 1)$, $B(1; 4; 0)$.

7.5 Перевірити, чи лежать точки: початок координат, $A(1; -7; 4)$, $B(2; -1; 5)$ і $C(5; -9; 14)$ в одній площині.

7.6 При яких l і m площини $mx + 3y - 2z - 1 = 0$ і $2x - 5y - lz = 0$ будуть паралельні?

7.7 Визначити, при яких значеннях m і k площини $2x - 3y + z - 4 = 0$ і $mx + 6y + kz + 5 = 0$ є паралельними.

В задачах 7.8-7.14 обчислити відстань точки до площини:

7.8 $M(2; -5; 3)$, $2x - 3y + 6z - 2 = 0$. 7.9 $M(1; 2; -4)$, $2x - 2y + z + 3 = 0$.

7.10 $M(-1; 2; 1)$, $5x - 10y - 10z - 10 = 0$. 7.11 $M(5; 6; 4)$, $x + 3y + 4z - 13 = 0$.

7.12 Початок координат, $2x - 10y + 11z - 25 = 0$. 7.13 $A(2; 4; -1)$, $7x - 6y - 6z + 42 = 0$.

7.14 Початок координат, $5x - 3y + 7z = 0$.

7.15 Написати рівняння площини, що проходить через т. $A(2; -1; 3)$, $B(0; -2; 4)$ і $C(1; 1; 1)$ та знайти відстань т. $D(0; 6; 2)$ до даної площини.

7.16 Знайти відстань від т. $M_0(6; -1; 3)$ до площини, що проходить через три точки $M_1(1; -2; 0)$, $M_2(-2; 0; 3)$, $M_3(-1; 5; -3)$.

7.17 Знайти відстань т. $M(5; -2; 2)$ до площини, що проходить через точки $A(6; -1; 3)$, $B(8; 0; 3)$ і $C(12; 1; 6)$.

7.18 Дано тетраедр з вершинами $A(1; -1; 4)$, $B(3; 5; 3)$, $C(-2; 11; -5)$ і $D(0; 6; 4)$. Обчислити довжину висоти тетраедра, опущеної з вершини D .

В задачах 7.19-7.24 визначити кут між заданими площинами

7.19 $3x + y - 2z + 1 = 0$, $x - y + z - 2 = 0$. 7.20 $8x - 2y - 7z + 2 = 0$, $7x + 8y - 11z + 6 = 0$.

7.21 $x + y - \sqrt{2}z + 5 = 0$, $x - y - \sqrt{2}z - 3 = 0$. 7.22 $x - 2y + 2z + 1 = 0$, $3x + 3y - 3z - 4 = 0$.

7.23 $2x - y + 2z + 9 = 0$; xOz . 7.24 $x - y + \sqrt{2}z - 5 = 0$; yOz .

7.25 Перевірити, чи належать точки $M_1(1; -3; -1)$, $M_2(5; 2; 5)$, $M_3(2; -1; 2)$ та $M_4(8; 5; 8)$ одній площині.

7.26 Написати рівняння площини, що проходить через т. $A(1; -5; 7)$, якщо відомо, що площина відтинає на осях координат рівні відрізки.

7.27 Знайти площину, що проходить через т. $A(2; -2; 1)$ та належить жмутку площини $7x + 4y + 7z + 1 = 0$ і $2x - y - z + 2 = 0$.

7.28 Знайти рівняння площини, що проходить через т. $A(3; -2; 5)$ паралельно площині yOz .

7.29 Написати рівняння площини, що проходить через вісь Oz та т. $A(-2; 1; 3)$.

7.30 Скласти рівняння площини, що проходить через точку $A(1; 4; -3)$ і вісь Oy .

7.31 Написати рівняння площини, що проходить через т. $M_1(-2; 0; 4)$ і $M_2(-7; 1; -5)$, паралельно

на осі Oz .

7.32 Написати рівняння площини, що проходить через т. $A(3; 1; 2)$ та паралельна площині $x - 2y + z - 4 = 0$.

7.33 Через т. $M(3; 2; -1)$ провести площину паралельну площині $4x - 4y - 2z + 6 = 0$. Знайти відстань точки M до заданої площини.

7.34 Скласти рівняння площини, що проходить через т. $M(3; 5; -2)$ паралельно площині $5x - 3y + 2z - 6 = 0$.

Задачі II рівня

В задачах 7.35-7.38 звести до нормального виду рівняння заданих площин та знайти відстань від початку координат до цих площин:

8 7.35 $x + 2y - 2z - 27 = 0$.

7.36 $3x + 5y - 4z + 10 = 0$.

7.37 $6x + 2y - 3z - 7 = 0$.

7.38 $\frac{12}{13}y - \frac{5}{13}z + 2 = 0$.

7.39 Знайти напрямні косинуси та довжину перпендикуляра, опущеного з початку координат на площину $3x + 6y - 2z - 21 = 0$.

В задачах 7.40-7.42 знайти відстань між паралельними площинами

7.40 $2x - 3y + 6z - 14 = 0$; $2x - 3y + 6z + 28 = 0$. 7.41 $2x + 3y - 5z + 30 = 0$; $2x + 3y - 5z - 15 = 0$.

7.42 $10x - 2y + 11z = 0$; $-10x + 2y - 11z + 45 = 0$.

В задачах 7.43 – 7.45 написати рівняння площини, що проходить через дві точки та перпендикулярна площині:

7.43 $M_1(1, -2, 3)$, $M_2(3, 0, 4)$; $x - y + 2z - 4 = 0$. 7.44 $A(1; 4; -5)$, $B(4; 2; -3)$; $3x + 5y - 6z - 8 = 0$.

7.45 Початок координат, $A(-3; 0; 1)$; $4x + 3y - z + 14 = 0$.

В задачах 7.46 – 7.48 написати рівняння площини, що проходить через точку та перпендикулярна до двох площин:

7.46 $A(3; 1; 2)$; $7x - 6y - 6z + 42 = 0$, $2x + y - 4z - 12 = 0$.

7.47 $A(1; -1; -2)$; $x - 2y + z - 1 = 0$, $x + 2y - 2z + 1 = 0$.

7.48 $M(-1; 0; -4)$; $3x + y - z - 4 = 0$, $x + 4y - 5z + 4 = 0$.

В задачах 7.49 – 7.50 скласти рівняння площини, що проходить через точку і перпендикулярну вектору

7.49 $A(2; 1; -4)$; $\vec{a}(3; -2; 4)$.

7.50 $A(3; -2; 1)$; $\vec{a}(5; 2; -3)$.

В задачах 7.51 – 7.52 скласти рівняння площини, що проходить через точку, паралельно векторам.

7.51 $A(1; -1; 2)$; $\vec{a}(2; 1; -1)$, $\vec{b}(5; 0; -3)$.

8 7.52 $M(3; 4; -5)$; $\vec{a}(3; 1; -1)$, $\vec{b}(1; -2; -1)$.

7.53 Скласти рівняння площини, що відтинає на координатних осях Ox та Oy відрізки 4 та -7 і паралельна вектору $\vec{a}(2; 1; -1)$.

7.54 Скласти рівняння площини, що відтинає на координатних осях Ox та Oz відрізки 3 та -2 і паралельна вектору $\vec{a}(-1; 0; 2)$.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ №8

Тема: Аналітична геометрія у просторі. Пряма у просторі.

8. Канонічне рівняння прямої у просторі. Загальне та параметричне рівняння прямої у просторі. Література: [16], розд. II, §14, стор. 185-188.

Визначення. Канонічне рівняння прямої у просторі має вигляд:

$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}, \quad (2.29)$$

де m, n, p – координати направляючого вектора $\vec{s}(m, n, p)$ прямої, а x_0, y_0, z_0 – координати будь-якої точки M_0 , що належить даній прямій.

Нехай дано загальне рівняння прямої в просторі, як перетин двох площин

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases} \quad (2.30)$$

то для знаходження координат направляючого вектора, виписуємо матрицю коефіцієнтів при невідомих:

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}, \quad (2.31)$$

тоді m дорівнює визначнику без першого стовпця, n – без другого стовпця із знаком мінус і p – без третього стовпця, тобто

$$m = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, n = - \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} \text{ та } p = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}. \quad (2.32)$$

Координати точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ одержуємо при розв'язанні системи (2.30). Оскільки, число невідомих перевищує число рівнянь, то одній з невідомих надаємо довільне значення. Потім підставив обране значення невідомої у (2.30), розв'язуємо систему двох рівнянь з двома невідомими.

Параметричне рівняння прямої у просторі має вигляд:

$$\begin{cases} x = mt + x_0, \\ y = nt + y_0, \\ z = pt + z_0, \end{cases} \quad (2.33)$$

де t – довільний параметр.

Приклад №8.1. Дано точки $A_1(-2; 1; 0)$, $A_2(1; -3; 2)$ та $A_3(-4; -2; -1)$. Скласти рівняння прямих A_1A_2 і A_1A_3 .

Розв'язання. Рівняння прямої A_1A_2 знаходимо за форм., аналогічною (2.4), тобто:

$$\frac{x-x_{A_1}}{x_{A_2}-x_{A_1}} = \frac{y-y_{A_1}}{y_{A_2}-y_{A_1}} = \frac{z-z_{A_1}}{z_{A_2}-z_{A_1}} \Rightarrow \frac{x+2}{1+2} = \frac{y-1}{-3-1} = \frac{z-0}{2-0} \text{ або } \frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z}{2}. \text{ Аналогічно}$$

$$\text{одержуємо рівняння } A_1A_3: \frac{x+2}{-4+2} = \frac{y-1}{-2-1} = \frac{z-0}{-1-0} \Rightarrow \frac{x+2}{-2} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z}{-1}.$$

Приклад №8.2. Привести до канонічного та параметричного виду пряму:

$$\begin{cases} x+3y-4z+5=0, \\ 2x-y+z-4=0. \end{cases}$$

Розв'язання. Знайдемо координати направляючого вектора за формулами (2.32)

$$m = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1, n = - \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -9, p = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -7. \text{ Тепер підберемо будь-яку точку, що}$$

належить заданій прямій. Оскільки система має два рівняння і три невідомих, то одна невідома може мати будь-яке значення: нехай $z = 0$, тоді $\begin{cases} x+3y+5=0, \\ 2x-y-4=0. \end{cases}$ Звідки, розв'язуючи систему,

$$\text{маємо: } \begin{cases} x=1, \\ y=-2. \end{cases} \text{ Записуємо рівняння прямої в канонічному вигляді: } \frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{-9} = \frac{z-0}{-7} \text{ або}$$

$$x-1 = \frac{y+2}{9} = \frac{z}{7}. \text{ З даного рівняння можна отримати рівняння в параметричному виді за фор}$$

мулою (2.33), тобто:

$$\begin{cases} x = t + 1, \\ y = 9t - 2, \\ z = 7t. \end{cases}$$

9. Кут між двома прямими та взаємне розташування двох прямих. Література: [16], розд. II, §15, стор. 189-190.

Кут між двома прямими знаходиться за формулою:

$$\cos\theta = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}} \quad (2.34)$$

Умова паралельності двох прямих випливає з умови паралельності направляючих векторів цих прямих $\vec{s}_1(m_1, n_1, p_1)$ та $\vec{s}_2(m_2, n_2, p_2)$:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2} \quad (2.35)$$

Умова перпендикулярності двох прямих є наслідком формули (2.34), оскільки $\cos 90^\circ = 0$, тоді:

$$m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0. \quad (2.36)$$

Приклад №8.3. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $A(3; 0; 2)$ і паралельно прямій $\frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z}{2}$.

Розв'язання. Запишемо рівняння прямої, що проходить через точку A за форм. (2.29): $\frac{x-3}{m} = \frac{y-0}{n} = \frac{z-2}{p}$. З умови паралельності двох прямих (2.35) маємо: $\frac{m}{3} = \frac{n}{-4} = \frac{p}{2}$. Оскільки, направляючі вектори паралельні, то можна записати: $m = 3, n = -4, p = 2$, тоді рівняння шуканої прямої буде таким: $\frac{x-3}{3} = \frac{y}{-4} = \frac{z-2}{2}$.

Приклад №8.4. Обчислити косинус кута між прямими $\frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z}{2}$ та $\frac{x+2}{-2} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z}{-1}$.

Розв'язання. Використовуючи формулу (2.34) знаходимо:

$$\cos\theta = \frac{3 \cdot (-2) + (-4) \cdot (-3) + 2 \cdot (-1)}{\sqrt{3^2 + (-4)^2 + 2^2} \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2 + (-1)^2}} = \frac{4}{\sqrt{29} \sqrt{14}} = \frac{4}{\sqrt{406}} \approx 0,2.$$

Контрольні питання

1. Канонічне рівняння прямої у просторі.
2. Як загальне рівняння прямої у просторі звести до канонічного виду?
3. Параметричне рівняння прямої.
4. Формула для обчислення кута між двома прямими.
5. Умова паралельності двох прямих.
6. Умова перпендикулярності двох прямих.

Завдання до практичного заняття №8

В задачах 8.1-8.32 написати канонічне та параметричне рівняння прямої:

8.1 $\begin{cases} 2x + y + z - 2 = 0, \\ 2x - y - 3z + 6 = 0. \end{cases}$

8.2 $\begin{cases} x - 3y + 2z + 2 = 0, \\ x + 3y + z + 14 = 0. \end{cases}$

8.3 $\begin{cases} x - 2y + 7z - 4 = 0, \\ 2x + 2y - z - 8 = 0. \end{cases}$

$$8.4 \begin{cases} x + y + z - 2 = 0, \\ x - y - 2z + 2 = 0. \end{cases}$$

$$8.7 \begin{cases} x + 5y + 2z + 11 = 0, \\ x - y - z - 1 = 0. \end{cases}$$

$$8.10 \begin{cases} x - y - z - 2 = 0, \\ x - 2y + z + 4 = 0. \end{cases}$$

$$8.13 \begin{cases} 6x - 7y - 4z - 2 = 0, \\ x + 7y - z - 5 = 0. \end{cases}$$

$$8.16 \begin{cases} x + 5y - z - 5 = 0, \\ 2x - 5y + 2z + 5 = 0. \end{cases}$$

$$8.19 \begin{cases} 3x + 3y + z - 1 = 0, \\ 2x - 3y - 2z + 6 = 0. \end{cases}$$

$$8.22. \begin{cases} x + 5y - z + 11 = 0, \\ x - y + 2z - 1 = 0. \end{cases}$$

$$8.25 \begin{cases} x + 5y + 2z - 5 = 0, \\ 2x - 5y - z + 5 = 0. \end{cases}$$

$$8.28 \begin{cases} 3x + 4y + 3z + 1 = 0, \\ 2x - 4y - 2z + 4 = 0. \end{cases}$$

$$8.31 \begin{cases} x - 2y + 3z + 15 = 0, \\ 2x + 3y - 4z - 12 = 0. \end{cases}$$

$$8.5 \begin{cases} 2x + 3y + z + 6 = 0, \\ x - 3y - 2z + 3 = 0. \end{cases}$$

$$8.8 \begin{cases} 3x + 4y - 2z + 1 = 0, \\ 2x - 4y + 3z + 4 = 0. \end{cases}$$

$$8.11 \begin{cases} 4x + y - 3z + 2 = 0, \\ 2x - y + z - 8 = 0. \end{cases}$$

$$8.14 \begin{cases} 8x - y - z - 1 = 0, \\ x + y + z + 10 = 0. \end{cases}$$

$$8.17 \begin{cases} 2x - 3y + z + 6 = 0, \\ x - 3y - 2z + 3 = 0. \end{cases}$$

$$8.20 \begin{cases} 2x + y - 3z - 2 = 0, \\ 2x - y + z + 6 = 0. \end{cases}$$

$$8.23 \begin{cases} x - y + z - 2 = 0, \\ x - 2y - z + 4 = 0. \end{cases}$$

$$8.26 \begin{cases} 2x + 3y - 2z + 6 = 0, \\ x - 3y + z = 0. \end{cases}$$

$$8.29 \begin{cases} 6x - 5y + 3z + 8 = 0, \\ 6x + 5y - 4z + 4 = 0. \end{cases}$$

$$8.32 \begin{cases} x + 2y - z - 6 = 0, \\ 2x - y + z + 1 = 0. \end{cases}$$

$$8.6 \begin{cases} 3x + y - z - 6 = 0, \\ 3x - y + 2z = 0. \end{cases}$$

$$8.9 \begin{cases} 5x + y - 3z + 4 = 0, \\ x - y + 2z + 2 = 0. \end{cases}$$

$$8.12 \begin{cases} 3x + 3y - 2z - 1 = 0, \\ 2x - 3y + z + 6 = 0. \end{cases}$$

$$8.15 \begin{cases} 6x - 5y - 4z + 8 = 0, \\ x + 3y + 5z + 4 = 0. \end{cases}$$

$$8.18 \begin{cases} 5x + y + 2z + 4 = 0, \\ x - y - 3z + 2 = 0. \end{cases}$$

$$8.21 \begin{cases} x + y - 2z - 2 = 0, \\ x - y + z + 2 = 0. \end{cases}$$

$$8.24 \begin{cases} 6x - 7y - z - 2 = 0, \\ x + 7y - 4z - 5 = 0. \end{cases}$$

$$8.27 \begin{cases} x - 3y + z + 2 = 0, \\ x + 3y + 2z + 14 = 0. \end{cases}$$

$$8.30 \begin{cases} 4x + y + z + 2 = 0, \\ 2x - y - 3z - 8 = 0. \end{cases}$$

8.33 Скласти канонічне рівняння прямої $\begin{cases} x - 2y + 3z + 1 = 0, \\ 2x + y - 4z - 8 = 0. \end{cases}$ Записати параметричне рівняння прямої, яка проходить через т. $A(3; -4; 5)$ і паралельна заданій прямій.

В задачах 8.34-8.39 знайти кут між прямими

$$8.34 \frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+4}{3} \text{ та } \begin{cases} 2x + 3y - 8z + 3 = 0, \\ 3x + y - 5z + 1 = 0. \end{cases}$$

$$8.35 \begin{cases} 2x + 3y - 4z + 5 = 0, \\ x - y + z = 0 \end{cases} \text{ та } \begin{cases} x - y + 2z - 4 = 0, \\ 2x + y - z - 5 = 0. \end{cases}$$

$$8.36 \frac{x+2}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-1}{\sqrt{2}} \text{ та } \frac{x-3}{1} = \frac{y-5}{1} = \frac{z-1}{\sqrt{2}}.$$

$$8.37 \begin{cases} x = 7t - 2, \\ y = 2t + 3, \\ z = -8t + 1 \end{cases} \text{ та } \begin{cases} x = 11t - 1, \\ y = -8t + 4, \\ z = -7t + 5. \end{cases}$$

$$8.38 \begin{cases} 2x - y + z + 1 = 0, \\ x + y - 1 = 0 \end{cases} \text{ та } \begin{cases} x - 2y + 3z - 1 = 0, \\ 2x - 6y - 3 = 0. \end{cases}$$

$$8.39 \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-3}{2} \text{ та } \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{4} = \frac{z+1}{-2}.$$

8.40 Знайти кут між прямою, що проходить через початок координат та точку $A(3; 4; -2)$ і прямою

$$\begin{cases} x = 4z + 1, \\ y = -4z + 2. \end{cases}$$

8.41 Скласти канонічне рівняння прямої, яка: а) проходить через т. $A(1; -2; 5)$ паралельно осі Ox ; б) проходить через т. $M(-3; 2; 1)$ паралельно прямій $\frac{x-5}{-1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{4}$; в) проходить че-

рез т. $N(4; -5; 6)$ паралельно прямій $\begin{cases} x = -1 + 2t, \\ y = 3 - 2t, \\ z = 5 - 4t; \end{cases}$ г) проходить через дві точки $M_1(2; -3; 1)$ і $M_2(4; -2; 6)$.

В задачах 8.42-8.52 написати рівняння прямої, що проходить через задану точку та паралельна даній прямій.

8.42 Початок координат та $\begin{cases} 2x + 5y - 19 = 0, \\ z = 0. \end{cases}$

8.43. $A(3; 2; 1)$ та $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-2}{3}$.

8.44 Початок координат та $\frac{x-5}{4} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+1}{-2}$.

8.45 $A(-3; 2; 0)$ та $\begin{cases} y = 2x - 1, \\ x = 4z + 2. \end{cases}$

8.46 $A(1; -5; 3)$ та вісь Ox .

8.47 $M(3; -5; -1)$ та $\begin{cases} 3x + 2z - 8 = 0, \\ y - z = 0. \end{cases}$

8.48 $A(2; 0; -3)$ та вісь Oz .

8.49 $A(3; -2; 1)$ та $\begin{cases} 3x - y + 2z - 7 = 0, \\ x + 3y - 2z + 3 = 0. \end{cases}$

8.50 $A(3; -5; 3)$ та $\begin{cases} 2x - 3y - 3z - 9 = 0, \\ x - 2y + z + 3 = 0. \end{cases}$

8.51 $A(3; 2; 1)$ та $\begin{cases} 2x - y + 3z - 1 = 0, \\ 5x + 4y - z - 7 = 0. \end{cases}$

8.52 $A(2; 1; 1)$ та $\begin{cases} x = 5z + 1, \\ y = -3z + 4. \end{cases}$

Задачі II рівня

8.53 Знайти кути, що пряма $\begin{cases} 5x + 3y - 4z + 2 = 0, \\ x + y + z - 1 = 0 \end{cases}$ створює з координатними осями.

8.54 Написати рівняння перпендикуляра, опущеного з т. $A(-1; 1; 2)$ на вісь Ox .

8.55 Написати рівняння перпендикуляра, опущеного з т. $A(2; -3; 4)$ на вісь ординат.

8.56 Написати рівняння перпендикуляра, опущеного з т. $A(4; 0; -1)$ на вісь Oz .

8.57 У площині xOz знайти пряму, що проходить через початок координат і перпендикулярну до прямої $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-5}{1}$.

8.58 Через т. $M(2; -3; 1)$ провести пряму, перпендикулярну до вісі Ox .

8.59 Скласти рівняння спільного перпендикуляра двох прямих $\frac{x-7}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-9}{-1}$ та $\frac{x-3}{-7} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}$.

8.60 У паралелограмі задано три вершини $A(6; 2; -10)$, $B(9; -5; 6)$ і $C(2; -8; 4)$. Скласти рівняння його діагоналей.

8.61 Для трикутника з вершинами $A(5; 14; 3)$, $B(1; 2; -7)$ і $C(3; -1; -1)$ скласти параметричне рівняння медіани, опущеної з вершини C і канонічне рівняння бісектриси внутрішнього кута B .

8.62 Дано точки $A(1; 1; 1)$, $B(2; 3; 3)$ і $C(3; 3; 2)$. Скласти рівняння прямої, що проходить через т. A перпендикулярно до векторів $\overline{AB}$ і $\overline{AC}$.



ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ №9

Тема: Аналітична геометрія у просторі.
Взаємне розташування прямої та площини

10. Кут між прямою і площиною та їх взаємне розташування. Література: [16], розд. II, §16, стор. 190-191.

Кут між прямою та площиною обчислюється за формулою:

$$\sin \theta = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}. \quad (2.37)$$

Умова паралельності прямої та площини випливає з умови перпендикулярності направляючого вектора прямої $\vec{s}(m, n, p)$ та нормального вектора площини $\vec{N}(A, B, C)$, тобто $\sin\theta = 0$:
 $Am + Bn + Cp = 0$. (2.38)

Умовою перпендикулярності прямої та площини є умова паралельності векторів $\vec{s}$ та $\vec{N}$, яка виконується якщо

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}. \quad (2.39)$$

Приклад №9.1. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $A(-4; -2; -1)$ і перпендикулярна до площини $-6x + 4y + 17z - 16 = 0$.

Розв'язання. Запишемо рівняння шуканої прямої, що проходить через точку $A(-4; -2; -1)$ за форм. (2.29): $\frac{x+4}{m} = \frac{y+2}{n} = \frac{z+1}{p}$. З умови перпендикулярності прямої та площини (2.39)

одержимо: $\frac{-6}{m} = \frac{4}{n} = \frac{17}{p}$, тобто шукана пряма паралельна нормальному вектору площини та координати направляючого вектора $\vec{s}$ прямої співпадають з нормальним вектором площини, тобто $m = -6, n = 4, p = 17$. Тоді рівняння прямої має вигляд: $\frac{x+4}{-6} = \frac{y+2}{4} = \frac{z+1}{17}$.

Приклад №9.2. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $A(-4; -2; -1)$ перпендикулярно до прямої $\frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z}{2}$.

Розв'язання. Рівняння площини, що проходить через точку $A(-4; -2; -1)$ має вигляд (2.23): $A(x+4) + B(y+2) + C(z+1) = 0$. З умови перпендикулярності прямої та площини (2.39) знаходимо: $\frac{A}{3} = \frac{B}{-4} = \frac{C}{2}$, тобто $A = 3, B = -4, C = 2$. Тоді рівняння площини: $3(x+4) - 4(y+2) + 2(z+1) = 0$ або зводячи до загального рівняння площини, отримуємо: $3x - 4y + 2z + 6 = 0$.

Приклад №9.3. Обчислити синус кута між прямою, що проходить через точки $A(-2; 1; 0)$ і $B(-4; -2; -1)$ і площиною $-6x + 4y + 17z - 16 = 0$.

Розв'язання. Спочатку, запишемо рівняння прямої, що проходить через дві точки: $\frac{x+2}{-4+2} = \frac{y-1}{-2-1} = \frac{z-0}{-1-0}$ або $\frac{x+2}{-2} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z}{-1}$. Використовуючи формулу (2.37), одержимо:
 $\sin\theta = \frac{|(-6) \cdot (-2) + 4 \cdot (-3) + 17 \cdot (-1)|}{\sqrt{(-6)^2 + 4^2 + 17^2} \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2 + (-1)^2}} = \frac{17}{\sqrt{341} \cdot \sqrt{14}} = \frac{17}{\sqrt{4774}} \approx 0,246$.

11. Точка перетину прямої та площини. Література: [16], розд. II, §17, стор. 192-193.

Для знаходження точки перетину прямої та площини необхідно сумісно розглянути систему, яка складається з загального рівняння площини (2.22) і рівняння прямої у параметричному вигляді, тобто:

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0, \\ x = mt + x_0, \\ y = nt + y_0, \\ z = pt + z_0. \end{cases} \quad (2.40)$$

Система (2.40) має єдиний розв'язок, який легко отримати, якщо:

- x, y, z підставити у рівняння площини та знайти значення параметра t ;
- одержане значення параметру t підставити у параметричне рівняння прямої (2.40);
- знайдені значення x, y, z і будуть координатами точки перетину прямої та площини.

Приклад №9.4. Знайти точку перетину прямої $\frac{x+17}{-6} = \frac{y-10}{4} = \frac{z-10}{2}$ і площини $-6x + 4y + 5z - 6 = 0$.

Розв'язання. Згідно п. 11 задану пряму $\frac{x+17}{-6} = \frac{y-10}{4} = \frac{z-10}{2}$, де $m = -6$, $n = 4$, $p = 2$; $x_0 = -17$, $y_0 = 10$, $z_0 = 10$ наведемо у параметричному вигляді (2.33), тобто запишемо:

$$\begin{cases} x = -6t - 17, \\ y = 4t + 10, \\ z = 2t + 10. \end{cases}$$

Підставимо x, y, z у рівняння площини $-6x + 4y + 5z - 6 = 0$ і отримаємо $-6(-6t - 17) + 4(4t + 10) + 5(2t + 10) - 6 = 0$, звідки $62t + 186 = 0$ або $t = -186/62 = -3$.

Позначимо точку перетину прямої і площини через $M_1(x_1, y_1, z_1)$, тоді підставляючи знайдений параметр $t = -3$ до параметричного рівняння прямої, одержимо координати шуканої т. M_1 : $x_1 = -6(-3) - 17 = 1$, $y_1 = 4(-3) + 10 = -2$, $z_1 = 2(-3) + 10 = 4$. Тобто $M_1(1; -2; 4)$.

Приклад №9.5. Знайти проекцію т. $A(1; -1; -2)$ на пряму $\frac{x+3}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-8}{-2}$. Обчислити відстань від цієї точки до даної прямої.

Розв'язання. Запишемо рівняння площини, що містить т. A та перпендикулярна до заданої прямої. Оскільки вектор $\vec{a}(3; 2; -2)$ паралельний даній прямій, то він є перпендикулярним до шуканої площини. Тому рівняння буде мати такий вигляд: $3(x - 1) + 2(y + 1) - 2(z + 2) = 0$ або $3x + 2y - 2z - 5 = 0$. Запишемо рівняння заданої прямої $\frac{x+3}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-8}{-2}$ в параметричному вигляді: $x = -3 + 3t$, $y = -2 + 2t$, $z = 8 - 2t$. Знайдемо точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$ перетину прямої та площини, тобто з рівняння $3(-3 + 3t) + 2(-2 + 2t) - 2(8 - 2t) - 5 = 0 \Rightarrow t = 2$, звідки $x_1 = -3 + 3 \cdot 2 = 3$, $y_1 = -2 + 2 \cdot 2 = 2$, $z_1 = 8 - 2 \cdot 2 = 4$. Одержали координати проекції точки на задану пряму. Тоді відстань від точки A до прямої обчислюється, як відстань між двома точками (див. форм. 1.26):

$$\sqrt{(3-1)^2 + (2+1)^2 + (4+2)^2} = 7.$$

Приклад №9.6. Скласти рівняння площини, що проходить через пряму $\begin{cases} 3x + y - 4z + 5 = 0, \\ x - y + 2z - 1 = 0 \end{cases}$ та точку $M(1; -1; 2)$.

Розв'язання. Рівняння жмутка площин, що проходить через дану пряму може бути записано так: $3x + y - 4z + 5 + \lambda(x - y + 2z - 1) = 0$. З цього жмутка площин потрібно вибрати ту, що проходить через т. $M(1; -1; 2)$, тобто ця точка належить рівнянню площини. Підставимо координати точки у рівняння площини і одержимо: $3 - 1 - 8 + 5 + \lambda(1 + 1 + 4 - 1) = 0 \Rightarrow \lambda = 1/5 = 0,2$. Підставляючи знайдене значення λ до рівняння жмутка площин, одержимо $3x + y - 4z + 5 + 0,2(x - y + 2z - 1) = 0$ або $8x + 2y - 9z + 12 = 0$.

Контрольні питання

1. Формула для обчислення кута між прямою і площиною.
2. Умова перпендикулярності прямої та площини.
3. Умова паралельності прямої та площини.
4. Як знайти точку перетину прямої та площини.

Завдання до практичного заняття №9

Задачі I рівня

В задачах 9.1 – 9.32 знайти точку перетину прямої та площини.

9.1 $\frac{x-2}{-1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{4}$; $x + 2y + 3z - 14 = 0$. 9.2 $\frac{x+1}{3} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z+1}{5}$; $x + 2y - 5z + 20 = 0$.

$$9.3 \frac{x-1}{-1} = \frac{y+5}{4} = \frac{z-1}{2}; x-3y+7z-24=0.$$

$$9.5 \frac{x-5}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-2}{0}; 3x+y-5z-12=0.$$

$$9.7 \frac{x-1}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{-1}; x-2y+5z+17=0.$$

$$9.9 \frac{x+2}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+4}{-1}; 2x-y+3z+23=0.$$

$$9.11 \frac{x+2}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+3}{2}; x+2y-z-2=0.$$

$$9.13 \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{0} = \frac{z-1}{-1}; 3x-2y-4z-1=0.$$

$$9.15 \frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-4}{3}; x+3y+5z-42=0.$$

$$9.17 \frac{x+3}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{5}; 2x+3y+7z-52=0.$$

$$9.19 \frac{x-5}{-2} = \frac{y-2}{0} = \frac{z+4}{-1}; 2x-5y+4z+24=0.$$

$$9.21 \frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+5}{0}; x-7y+3z+11=0.$$

$$9.23 \frac{x-1}{7} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-6}{-1}; 4x+y-6z-5=0.$$

$$9.25 \frac{x+1}{-2} = \frac{y}{0} = \frac{z+1}{3}; x+4y+13z-23=0.$$

$$9.27 \frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+3}{-2}; 3x-y+4z=0.$$

$$9.29 \frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{0} = \frac{z+2}{-2}; 3x-y-2z+7=0.$$

$$9.31 \frac{x-1}{1} = \frac{y-9}{3} = \frac{z-12}{4}; x-5y-3z+2=0.$$

$$9.4 \frac{x-1}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z+3}{2}; 2x-y+4z=0.$$

$$9.6 \frac{x+1}{-3} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-3}{-2}; x+3y-5z+9=0.$$

$$9.8 \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-4}{1}; x-2y+4z-19=0.$$

$$9.10 \frac{x+2}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z+3}{0}; 3x-2y-4z-1=0.$$

$$9.12 \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{3}; 4x+2y-z-11=0.$$

$$9.14 \frac{x+3}{1} = \frac{y-2}{-5} = \frac{z+2}{3}; 5x-y+4z+3=0.$$

$$9.16 \frac{x-3}{-1} = \frac{y-4}{5} = \frac{z-4}{2}; 7x+y+4z-47=0.$$

$$9.18 \frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+3}{2}; 3x+4y+7z-16=0.$$

$$9.20 \frac{x-1}{8} = \frac{y-2}{-5} = \frac{z+5}{12}; x-2y-3z+18=0.$$

$$9.22 \frac{x-5}{-1} = \frac{y+3}{5} = \frac{z-1}{2}; 3x+7y-5z-11=0.$$

$$9.24 \frac{x-3}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-8}{0}; 5x+9y+4z-25=0.$$

$$9.26 \frac{x-1}{6} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+5}{3}; 3x-2y+5z-3=0.$$

$$9.28 \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-5} = \frac{z-3}{-2}; x+2y-5z+16=0.$$

$$9.30 \frac{x+3}{0} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+5}{11}; 5x+7y+9z-32=0.$$

$$9.32 \frac{x+3}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{-5}; x-2y+z-15=0.$$

В задачах 9.33-9.36 скласти рівняння прямої, що перпендикулярна площині та проходить через точку:

$$9.33 \ 2x+3y-z+1=0; M(1; 2; -1).$$

$$9.35 \ 2x-2y+z-6=0; A(3; -1; 8).$$

$$9.34 \ 5x-4y+z-1=0; A(3; 7; -2).$$

$$9.36 \ 6x-2y+z-3=0; A(1; -2; 4).$$

В задачах 9.37-9.46 написати рівняння площини, що проходить через точку та перпендикулярна прямій:

$$9.37 \text{ Початок координат, } \frac{x+2}{4} = \frac{y-3}{5} = \frac{z-1}{-2}.$$

$$9.39 \ A(1; 2; 3); \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{7} = \frac{z+5}{4}.$$

$$9.41 \text{ Початок координат, } \frac{x-2}{-2} = \frac{y+1}{5} = \frac{z+1}{4}.$$

$$9.43 \ A(0; 2; -3); \frac{x-9}{4} = \frac{y+5}{3} = \frac{z+3}{-2}.$$

$$9.38 \ N(3; 2; -2); \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{3}.$$

$$9.40 \ A(1; 2; -1); \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-1}{1}.$$

$$9.42 \ A(2; -4; 3); \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{7} = \frac{z+5}{4}.$$

$$9.44 \ P(1; 2; -2); x-3 = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+1}{4}.$$

9.45 $P(2; -4; -2); \begin{cases} x-4y+5z-1=0, \\ 2x+y+3=0. \end{cases}$

9.46 $B(2; 1; 6); \begin{cases} x=3t, \\ y=-5t+2, \\ z=-t-1. \end{cases}$

В задачах 9.47-9.50 обчислити кут між прямою та площиною:

9.47 $\frac{x+1}{3} = \frac{y}{-3} = \frac{z-2}{-2}; x-3y+6z+7=0.$ 9.48 $\begin{cases} x=5t+4, \\ y=3t-3, \\ z=-8t+1; \end{cases} 2x-3y-6z-5=0.$

9.49 $\frac{x-3}{2} = \frac{y-5}{-3} = \frac{z+2}{-2}; 6x-9y-6z+10=0.$ 9.50 $\frac{x-1}{2} = y+2 = \frac{z-1}{2}; 2x+y-z+4=0.$

Задачі II рівня

9.51 При якому значенні C , пряма $\begin{cases} 3x-y+2z+4=0, \\ x-y+z-1=0 \end{cases}$ буде паралельна площині $2x-y+Cz-2=0.$

В задачах 9.52-9.53 знайти точку перетину прямої та площини

9.52 $\begin{cases} 2x-3y+6z-4=0, \\ x-y+2z+1=0; \end{cases} 2x+y-3z-1=0.$ 9.53 $\begin{cases} x=5+2t, \\ y=2-t, \\ z=-1+3t; \end{cases} 2x-y+3z+23=0.$

9.54 Обчислити кут між прямою $\begin{cases} x+y+z-4=0, \\ 2x-y+4z+5=0 \end{cases}$ та площиною $x+y+3z-1=0.$

В задачах 9.55-9.58 знайти рівняння перпендикуляра до даної площини, що проходить через точку і визначити координати підстави перпендикуляра:

9.55 $A(2; -1; 3); x+3y-4z-13=0.$ 9.56 $P(2; 1; 6); x-4y+5z-1=0.$

9.57 $P(1; -1; 2); 3x-y-5z-8=0.$ 9.58 $P(2; -1; 3); x+3y-4z-13=0.$

9.59 Площина $x+2y-4z+1=0$ перетинається з прямою $\frac{x-7}{3} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-5}{4}$ в т. M . Скласти рівняння прямої, що проходить через т. M та точку $N(3; 2; -1).$

9.60 Площина $3x-y-2z-1=0$ перетинається з двома прямими $\frac{x+4}{-6} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-5}{2}$ та $\frac{x+1}{2} = \frac{y-5}{-5} = \frac{z-3}{1}$ у точках M та N . Скласти рівняння прямої, що проходить через ці точки.

9.61 Через точку перетину прямої $x = \frac{y-12}{3} = \frac{z-9}{13}$ і площини $x+3y-5z-2=0$ провести площину, перпендикулярну до даної прямої.

9.62 Написати рівняння прямої, що проходить через т. $A(1; 1; 1)$ паралельно площині $x+y+z=0$ і перпендикулярно прямій $\frac{x}{2} = \frac{y-3}{3} = z+4.$

В задачах 9.63-9.64 скласти рівняння площини, що перпендикулярна до площини, паралельна прямій і проходить через точку:

9.63 $x-2y+2z+1=0; \frac{x-5}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+1}{-1}; A(1; -1; 2).$

9.64 $2x + y = 0$; $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{4} = \frac{z}{-1}$; $A(1; 3; 1)$.

9.65 Знайти проєкцію прямої $\frac{x}{4} = \frac{y-4}{3} = \frac{z+1}{-2}$ на площину $x - y + 3z + 8 = 0$.

9.66 Знайти проєкцію т. $A(4; -3; 1)$ на площину $x + 2y - z - 3 = 0$.

9.67 Написати рівняння проєкції т. $A(1; -1; -3)$ на площину $2x + y + 2z - 4 = 0$.

9.68 Довести, що пряма $\begin{cases} 5x - 3y + 2z - 5 = 0, \\ 2x - y - z - 1 = 0 \end{cases}$ лежить у площині $4x - 3y + 7z - 7 = 0$.

9.69 Знайти рівняння площини, що проходить через пряму $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{2}$ і перпендикулярна до площини $3x - y + 2z - 2 = 0$.

9.70 Написати рівняння площини, що проходить через т. $A(1; 1; -2)$ та через пряму $\frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{-2}$.

9.71 Скласти рівняння площини, що паралельна прямій $\frac{x+5}{4} = \frac{y-2}{7} = \frac{z-1}{2}$ і проходить через пряму $\frac{x-3}{2} = \frac{y+4}{1} = \frac{z-3}{3}$.

В задачах 9.72 – 9.73 знайти рівняння площини, що проходить через дві паралельні прямі:

9.72 $\frac{x+2}{4} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{3}$, $\frac{x-1}{4} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{3}$. 9.73 $\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z}{4}$, $\frac{x+2}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{4}$.

9.74 Скласти рівняння площини, що проходить через точки $M(-2, -2, 1)$ і $N(1, -2, 0)$ паралельно прямій $\frac{x}{-1} = \frac{y+2}{2} = z - 1$.

9.75 Скласти рівняння площини, що проходить через пряму $\begin{cases} 3x + y - 4z + 5 = 0 \\ x - y + 2z - 1 = 0 \end{cases}$ і перпендикулярну до площини $2x + 3y - z - 4 = 0$.

9.76 Скласти рівняння площини, що проходить через пряму $x = 2t + 1$, $y = -3t + 2$, $z = 2t - 3$ та т. $M(2; -2; 1)$.

В задачах 9.77 – 9.78 скласти рівняння площини, що проходить через точку та пряму:

9.77 $A(1; 2; 3)$; $\begin{cases} 3x - y + 2z + 4 = 0 \\ x - y + z - 1 = 0 \end{cases}$ 9.78 $A(-1; 0; 4)$; $\begin{cases} 3x + y - 4z + 5 = 0 \\ x - y + 2z - 1 = 0 \end{cases}$

9.79 Через лінію перетину площин $x - y + z = 0$ і $3x + y - z - 1 = 0$ провести площину перпендикулярно до площини $x + 2z = 0$.

9.80 Через лінію перетину площин $4x - y + 3z - 1 = 0$ і $x + 5y - z + 2 = 0$ провести площину, що проходить через т. $M(1; 1; 1)$.

Модуль 3. ДИФЕРЕНЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ТА БАГАТЬОХ ЗМІННИХ



ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ №10

Тема: Комплексні числа та дії над ними

1. Комплексні числа та дії над ними в алгебраїчній формі. Література: [16], розд. III, §3, стор. 201-203.

Нехай дані два комплексних числа $z_1 = x_1 + iy_1$ та $z_2 = x_2 + iy_2$, де $i = \sqrt{-1}$ — уявна одиниця, тобто $i^2 = -1$ і $\operatorname{Re} z_1 = x_1$, $\operatorname{Im} z_1 = y_1$.

Дії над комплексними числами в алгебраїчній формі:

а) $z_1 \pm z_2 = x_1 \pm x_2 + i(y_1 \pm y_2)$;

б) $z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1)$;

в) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + i(x_2y_1 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2}$.

Зауваження. Числа $z_1 = z_2$, якщо $x_1 = x_2$ і $y_1 = y_2$.

2. Тригонометрична форма комплексного числа та дії над комплексними числами в тригонометричній формі. Література: [16], розд. III, §4,5, стор. 203-207.

Побудуємо $z_1 = x_1 + iy_1$ в комплексній площині, відкладаючи дійсну частину x_1 на осі Ox , а уявну iy_1 на осі Oy (рис. 3.1). Введемо поняття: $|z|$ — модуль комплексного числа, що позначається $r = |z|$; φ — кут між вектором z і додатним напрямком осі Ox , що називається **аргументом** комплексного числа. Головні значення кута позначається $\operatorname{arg} z$ і $-\pi < \operatorname{arg} z \leq \pi$, а всі значення аргументу позначаються і обчислюються $\operatorname{Arg} z = \operatorname{arg} z + 2\pi k$.

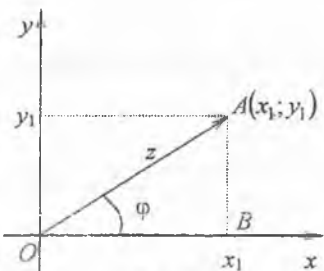


Рис. 3.1

За відомими x_1 і y_1 знайдемо модуль r і $\operatorname{arg} z$. Отже, з $\triangle ABO$ гіпотенуза $AO = r$, за теоремою Піфагора $r = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$.
Тоді:

а) для I чверті $\operatorname{arg} z = \operatorname{arctg} \frac{y_1}{x_1}$;

б) для II чверті $\operatorname{arg} z = \pi - \operatorname{arctg} \left| \frac{y_1}{x_1} \right|$;

в) для III чверті $\operatorname{arg} z = \operatorname{arctg} \frac{y_1}{x_1} - \pi$;

г) для IV чверті $\operatorname{arg} z = -\operatorname{arctg} \left| \frac{y_1}{x_1} \right|$.

Головне значення аргументу комплексного числа знаходиться для кожної чверті окремо з-за того, що $\operatorname{arg} z \in [-\pi; \pi]$. Нехай тепер відомі модуль r і аргумент φ . Знайдемо x_1 і y_1 . З $\triangle ABO$: $y_1 = r \sin \varphi$, $x_1 = r \cos \varphi$. Тоді комплексне число буде $z = r \cos \varphi + i r \sin \varphi$ або

$$z = r \cos \varphi + i r \sin \varphi. \quad (3.1)$$

Вираз (3.1) є **тригонометричною формою** запису комплексного числа $z_1 = x_1 + iy_1$.

Дії над комплексними числами в тригонометричній формі:

Нехай дані два комплексних числа у тригонометричній формі: $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$ і $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$, тоді:

а) $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$;

б) $z_1 / z_2 = r_1 / r_2 [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)]$;

в) $z_1^n = r_1^n [\cos(n\varphi_1) + i \sin(n\varphi_1)]$;

г) формула Муавра: $\sqrt[n]{z_1} = \sqrt[n]{r_1} \left[\cos\left(\frac{\varphi_1 + 2\pi k}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\varphi_1 + 2\pi k}{n}\right) \right]$, де $k = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$;

д) використовуючи формулу Ейлера $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$, комплексне число можна представити в показниковій формі $z = re^{i\varphi}$.

Приклад №10.1. Визначити модуль, головний аргумент комплексного числа z та записати його в тригонометричній формі для випадків: а) $z = -2$; б) $z = i$; в) $z = \sqrt{3} - i$.

Розв'язання. а) в алгебраїчній формі число $z = -2 + 0 \cdot i$, тоді $|z| = 2$, $\arg(-2) = \pi$. Звідки $z = 2(\cos\pi + i\sin\pi)$;

б) за умовою $z = 0 + 1 \cdot i$, тому $|z| = |i| = 1$, $\arg i = \pi/2$. Звідки $z = \cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2)$;

в) якщо $z = \sqrt{3} - i$, тоді $|z| = |\sqrt{3} - i| = \sqrt{3+1} = 2$, $\arg(\sqrt{3} - i) = \arctg(-1/\sqrt{3}) = -\pi/6$. Звідки $z = 2[\cos(-\pi/6) + i\sin(-\pi/6)] = 2[\cos(\pi/6) - i\sin(\pi/6)]$.

Приклад №10.2. Визначити дійсну та уявну частини комплексного числа $z = i^3 + i^4 - i^5$ та знайти число, спряжене до нього.

Розв'язання. Враховуючи, що $i^2 = -1$, одержимо $z = i^3 + i^4 - i^5 = (-1) \cdot i + (-1) \cdot (-1) - (-1) \cdot i = -i + 1 - i = 1 - 2i$. Звідки $\operatorname{Re} z = 1$, $\operatorname{Im} z = -2$. Тоді спряженим до заданого числа $z = 1 - 2i$ є число $\bar{z} = 1 + 2i$.

Приклад №10.3. Обчислити $\sqrt[3]{-8}$.

Розв'язання. За умовою дано комплексне число $z = -8$, де $y = 0$, а корінь $n = 3$. Для того, щоб використати формулу Муавра необхідно знайти модуль r і аргумент φ : $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-8)^2} = 8$ та, оскільки число $z = -8$ за будовою лежить на осі Ox у від'ємній частині, то кут між вектором $z = -8$ і додатним напрямком осі Ox : $\varphi = \pi$. Отже, за формулою Муавра: $\sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{8} \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi + 2\pi k}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi + 2\pi k}{3}\right) \right]$, де $k = 0, 1, 2$ Враховуючи, що $\sqrt[3]{8} = 2$, надаємо значення:

$$\text{а) для } k_1 = 0, \sqrt[3]{-8} = 2 \cdot \left[\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right] = 2 \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 1 + i\sqrt{3};$$

$$\text{б) для } k_2 = 1 \text{ буде } \sqrt[3]{-8} = 2 \cdot \left[\cos \frac{\pi + 2\pi}{3} + i \sin \frac{\pi + 2\pi}{3} \right] = 2(\cos\pi + i\sin\pi) = 2(-1 + i \cdot 0) = -2;$$

$$\text{в) і для } k_3 = 2 \quad \sqrt[3]{-8} = 2 \left[\cos \frac{\pi + 4\pi}{3} + i \sin \frac{\pi + 4\pi}{3} \right] = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3} \right) = 2 \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 1 - i\sqrt{3}.$$

Отже, $\sqrt[3]{-8}$ має три різних корені. Якщо кожний з цих коренів піднести до куба, то одержимо -8 . Наприклад, $(1 - i\sqrt{3})^3 = 1 - 3 \cdot 1^2 \cdot i\sqrt{3} + 3 \cdot i^2 \cdot 3 - i^3 (\sqrt{3})^3 = 1 - i3\sqrt{3} - 9 + i3\sqrt{3} = -8$, а $i^3 = -i$.

Приклад №10.4. Обчислити $(\sqrt{3} + i)^6$.

Розв'язання. Оскільки $|\sqrt{3} + i| = 2$ і $\arg(\sqrt{3} + i) = \pi/6$, то за формулою Муавра знаходимо $(\sqrt{3} + i)^6 = 2^6 \left(\cos 6 \cdot \frac{\pi}{6} + i \sin 6 \cdot \frac{\pi}{6} \right) = 64(\cos\pi + i\sin\pi) = -64$.

Приклад №10.5. Розв'язати рівняння $x^4 + 81 = 0$.

Розв'язання. З рівняння одержуємо, що $x^4 = -81 \Rightarrow x = \sqrt[4]{-81}$, тобто потрібно знайти корінь четвертого степеня з комплексного числа $z = -81$, де $y = 0$. Знаходимо модуль та аргумент комплексного числа: $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-81)^2} = 81$ і $\varphi = \pi$ (див. приклад №10.3). Отже, за фор-

мулюю Муавра: $\sqrt[4]{-81} = \sqrt[4]{81} \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi + 2\pi k}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi + 2\pi k}{4}\right) \right]$, де $k = 0, 1, 2, 3$. Враховуючи, що $\sqrt[4]{81} = 3$, одержимо корені:

а) при $k_1 = 0$, $\sqrt[4]{-81} = 3 \cdot \left[\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right] = 3 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{3+3i}{\sqrt{2}}$;

б) при $k_2 = 1$ буде $\sqrt[4]{-81} = 3 \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) = 3 \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{-3+3i}{\sqrt{2}}$;

в) при $k_3 = 2$ - $\sqrt[4]{-81} = 3 \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right) = 3 \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{-3-3i}{\sqrt{2}}$;

г) при $k_4 = 3$ - $\sqrt[4]{-81} = 3 \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right) = 3 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{3-3i}{\sqrt{2}}$.

Отже, рівняння $x^4 + 81 = 0$ має чотири різних корені: $x_1 = \frac{3+3i}{\sqrt{2}}$, $x_2 = \frac{-3+3i}{\sqrt{2}}$, $x_3 = \frac{-3-3i}{\sqrt{2}}$, $x_4 = \frac{3-3i}{\sqrt{2}}$.

Контрольні питання

1. Що таке комплексне число?
2. Чому дорівнює уявна одиниця?
3. Як знайти суму, різницю двох комплексних чисел?
4. Чому дорівнює добуток двох комплексних чисел?
5. Як знайти частку двох комплексних чисел?
6. Що таке модуль й аргумент комплексного числа?
7. В яких межах змінюється головне значення аргументу?
8. Геометричне зображення комплексного числа на площині.
9. Як знаходиться значення аргументу комплексного числа в залежності від чверті координатного кута?
10. Записати тригонометричну форму комплексного числа.
11. Дії над комплексними числами в тригонометричній формі.
12. Скільки значень має корінь n -го степеня з комплексного числа?

Завдання до практичного заняття №10

10.1 Для комплексного числа z записати спряжене $\bar{z}$ та визначити добуток $z \cdot \bar{z}$: а) $z = 2 + i$; б) $z = 4 - 5i$; в) $z = 7 + 3i$; г) $z = -6 + 2i$; д) $z = -3 - i$.

В задачах 10.2-10.25 знайти $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 \cdot z_2$, z_1 / z_2 .

10.2 $z_1 = 3 - i$, $z_2 = 1 + 2i$.

10.3 $z_1 = 3 + i^2$, $z_2 = 2 - i$.

10.4 $z_1 = (1 + 2i)^2$, $z_2 = i$.

10.5 $z_1 = 2/(1 + i)$, $z_2 = -2 - i$.

10.6 $z_1 = i^3 - 2$, $z_2 = -3 + i$.

10.7 $z_1 = 2i^3$, $z_2 = -1 + i$.

10.8 $z_1 = -3 - 7i$, $z_2 = 2/i$.

10.9 $z_1 = -1 + i$, $z_2 = i + i^2$.

10.10 $z_1 = (1 - i)^2$, $z_2 = -i$.

10.11 $z_1 = i^{-1}$, $z_2 = 2 + 3i$.

10.12 $z_1 = i^2 - 3i$, $z_2 = 1/i$.

10.13 $z_1 = i^3$, $z_2 = -2 + i$.

10.14 $z_1 = (-2 - i)^2$, $z_2 = 1 + i$.

10.15 $z_1 = 2 - 3i$, $z_2 = i - 4$.

10.16 $z_1 = 2/i^2 - 3i$, $z_2 = 1/2i$.

10.17 $z_1 = 2/(i + 1)$, $z_2 = -1 + 2i$.

10.18 $z_1 = i^3 + 2$, $z_2 = -3i$.

10.19 $z_1 = i^{-3}$, $z_2 = 1 - i$.

10.20 $z_1 = 1/(2 - i)^2$, $z_2 = 1 + 3i$.

10.21 $z_1 = 1/(1 - i)$, $z_2 = 2 + i$.

10.22 $z_1 = -i$, $z_2 = 1 + i$.

10.23 $z_1 = 2 + 2i$, $z_2 = i^{15} - i^{10}$.

10.24 $z_1 = 2 + \sqrt{5}i$, $z_2 = 2 - \sqrt{5}i$.

10.25 $z_1 = 4 + 3i$, $z_2 = i - 1$.

В задачах 10.26-10.31 визначити дійсну та уявну частини комплексного числа.

10.26 $z = \frac{1+i}{1-i}$.

10.27 $z = \frac{(1-i)^2}{1+i} + i^7$.

10.28 $z = \frac{9+2i}{4-i} - \frac{2-5i}{5+2i} + \frac{1}{i}$.

$$10.29 \ z = (2 + 3i)^3.$$

$$10.30 \ z = \frac{(1-3i)^3}{i} + i^{21}.$$

$$10.31 \ z = \frac{(i+1)(i-\sqrt{3})}{(1-i)(\sqrt{3}+i)}.$$

10.32 При яких значеннях x і y комплексні числа z_1 і z_2 є:

а) рівними між собою, якщо $z_1 = x^2 + i(x+y)$ і $z_2 = y + 6 + i(x-2)$;

б) спряженими, якщо $z_1 = 9y^2 - 4 - 10xi$ і $z_2 = 8y^2 + 20xi$?

В задачах 10.33-10.40 записати у тригонометричній формі комплексні числа.

$$10.33 \ z = 4.$$

$$10.34 \ z = -5.$$

$$10.35 \ z = i^{25} + i.$$

$$10.36 \ z = 1 - i.$$

$$10.37 \ z = i - \sqrt{3}.$$

$$10.38 \ z = i^{13} + 1.$$

$$10.39 \ z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

$$10.40 \ z = \left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^2.$$

В задачах 10.41-10.48, користуючись формулою Муавра, обчислити:

$$10.41 \ (1-i)^{26}.$$

$$10.42 \ \left(\frac{i-\sqrt{3}}{2}\right)^{12}.$$

$$10.43 \ \frac{2i}{(1-i)^4}.$$

$$10.44 \ \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)^{127}.$$

$$10.45 \ \left(\frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right)^{84}.$$

$$10.46 \ \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{200}.$$

$$10.47 \ \frac{512}{(1+\sqrt{3})^{13}}.$$

$$10.48 \ \frac{[\cos(\pi/3) + i\sin(\pi/3)]^3 [\cos(\pi/6) + i\sin(\pi/6)]^6}{\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}.$$

В задачах 10.49 – 10.63 розв'язати рівняння:

$$10.49 \ x^2 + 1 = 0.$$

$$10.50 \ x^2 - x + 1 = 0.$$

$$10.51 \ x^4 - 16 = 0.$$

$$10.52 \ x^2 + 4x + 13 = 0.$$

$$10.53 \ x^2 + 9 = 0.$$

$$10.54 \ x^2 + 6x + 13 = 0.$$

$$10.55 \ x^2 + 4 = 0.$$

$$10.56 \ 4x^2 - 4x + 5 = 0.$$

$$10.57 \ x^2 + 4x + 29 = 0.$$

$$10.58 \ x^2 + 2x + 5 = 0.$$

$$10.59 \ 5x^2 - 6x + 5 = 0.$$

$$10.60 \ x^2 - 2x + 10 = 0.$$

$$10.61 \ x^2 + 4x + 5 = 0.$$

$$10.62 \ x^2 + 2x + 2 = 0.$$

$$10.63 \ x^2 - 6x + 25 = 0.$$

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ №11

Тема: Методи обчислення границі послідовностей та функцій.

3. Границя числової послідовності та функції. Література: [16], розд. I, §8-10, §13, стор. 47-50, стор. 58-65.

Правила обчислення границі відношення поліномів $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{A_0 + A_1x + A_2x^2 + \dots + A_nx^n}{B_0 + B_1x + B_2x^2 + \dots + B_mx^m} :$

а) якщо найвищий степінь x у чисельнику дорівнює найвищому степеню x знаменника ($n = m$), то границя дорівнює відношенню коефіцієнтів при найвищих степенях A_n/B_m ;

б) якщо найвищий степінь x у чисельнику менше найвищого степеня x знаменника ($n < m$), то границя дорівнює нулю;

в) якщо найвищий степінь x у чисельнику більше найвищого степеня x знаменника ($n > m$), то границя дорівнює нескінченності.

Зауваження. Аналогічно обчислюються границі відношення поліномів, що представляються послідовностями, тобто аргументом є n .

Приклад №11.1. Обчислити границю $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2-3x+5x^2-7x^3}{4+2x^2-3x^3}.$

Розв'язання. Оскільки найвищі степені x чисельника та знаменника однакові і дорівню-

ють 3, то $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2-3x+5x^2-7x^3}{4+2x^2-3x^3} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \frac{-7}{-3} = \frac{7}{3}$ (див. п. а).

Приклад №11.2. Обчислити границю $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3+3x^2+4x-1}{5x^4-3x+8}$.

Розв'язання. Оскільки найвищий степінь x у чисельнику менше найбільшого степеня x у знаменнику ($3 < 4$), то отримаємо $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3+3x^2+4x-1}{5x^4-3x+8} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = 0$ (див. п. б).

Приклад №11.3. Обчислити границю $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + \sqrt[4]{5x^3+x^4}}{\sqrt{x+9} - \sqrt[5]{5x^4+3x^2}}$.

Розв'язання. Оскільки найвищий степінь x у чисельнику більше найбільшого степеня x у знаменнику ($2 > 4/5$), то отримаємо $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + \sqrt[4]{5x^3+x^4}}{\sqrt{x+9} - \sqrt[5]{5x^4+3x^2}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \infty$ (див. п. в).

Приклад №11.4. Обчислити $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{4n^3+3n^2+2}$.

Розв'язання. Якщо розкрити в чисельнику дужки, то найвищий степінь n буде третій з коефіцієнтом одиниця, у знаменнику теж найвищий степінь n – третій з коефіцієнтом 4. Таким чином, границя дорівнює відношенню цих коефіцієнтів – $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{4n^3+3n^2+2} = \frac{1}{4}$.

Приклад №11.5. Обчислити $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{3+n} - \sqrt{2+n})$.

Розв'язання. У підкореневий вираз підставляємо $n = \infty$ і отримуємо невизначеність виду $(\infty - \infty)$. У такій невизначеності треба весь вираз перетворити так, щоб отримати невизначеність виду $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. У даному прикладі помножимо та поділимо границю на спряжений вираз:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{3+n} - \sqrt{2+n}) &= [\infty - \infty] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{3+n} - \sqrt{2+n})(\sqrt{3+n} + \sqrt{2+n})}{(\sqrt{3+n} + \sqrt{2+n})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3+n-2-n}{(\sqrt{3+n} + \sqrt{2+n})} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(\sqrt{3+n} + \sqrt{2+n})} = \left[\frac{1}{\infty}\right] = 0. \end{aligned}$$

Зауваження. Якщо необхідно знайти границю відношення поліномів виду: $\lim_{x \rightarrow a} \frac{A_0 + A_1x + A_2x^2 + \dots + A_nx^n}{B_0 + B_1x + B_2x^2 + \dots + B_mx^m} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \left(\frac{0}{0}\right)$, тобто $P(a) = Q(a) = 0$, то дріб $\frac{P(x)}{Q(x)}$ треба скоротити на один або декілька $(x-a)$.

Приклад №11.6. Обчислити $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2-3x-10}{x^2-25}$.

Розв'язання. У чисельник і знаменник підставляємо $x = 5$. Одержуємо невизначеність $\left(\frac{0}{0}\right)$. Тобто $x = 5$ є коренем виразів у чисельнику та знаменнику. Знайдемо корені, прирівняв вирази до нуля:

$$1) x^2 - 3x - 10 = 0 \Rightarrow x_1 = 5, x_2 = -2;$$

$$2) x^2 - 25 = 0 \Rightarrow x_1 = 5, x_2 = -5.$$

Вихідний дріб розкладемо на лінійні множники, скорочуємо і підставляємо $x = 5$, тобто

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x-5)(x+2)}{(x-5)(x+5)} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x+2}{x+5} = 0,7.$$

4. Перша важлива границя. Література: [16], розд. I, § 14, стор. 61-63.

Перша важлива границя: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = 1$.

Наслідки:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha x}{x} = \alpha; \quad \text{б) } \lim_{U(x) \rightarrow 0} \frac{\sin U(x)}{U(x)} = 1; \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha x}{\sin \beta x} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Приклад №11.7. Знайти значення границі $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 5x}{x \cos 4x}$

Розв'язання. Підставляємо $x = 0$ у дріб і одержуємо:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 5x}{x \cos 4x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \frac{\text{розкладаємо чисельник за формулою різниці квадратів}}{x \cos 4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos 5x)(1 + \cos 5x)}{x \cos 4x} =$$

Перетворимо вираз у перших дужках за тригонометричною формулою $1 - \cos 5x = 2 \sin^2(5x/2)$,
а у вираз в других дужках підставляємо значення $x = 0$. Одержимо $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2(5x/2)(1 + 1)}{x \cos 4x} =$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \sin^2(5x/2)}{x \cos 4x} = \left[\begin{array}{l} \text{розділяємо на} \\ \text{два дроба} \end{array} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \sin^2(5x/2)}{x} \cdot \frac{1}{\cos 4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{20}{2} \cdot 0 = 0$ (див. нас-
лідки а) та в).

Зауваження. Якщо маємо невизначеність $(0 \cdot \infty)$, то необхідно зробити перетворення таким чином, щоб отримати невизначеність $\left(\frac{0}{0}\right)$ або $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

Приклад №11.8. Знайти границю $\lim_{x \rightarrow 3} (3 - x) \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi x}{6}$

Розв'язання. Підставляємо $x = 3$, маємо невизначеність $\lim_{x \rightarrow 3} (3 - x) \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi x}{6} = (0 \cdot \infty) =$ (за

означенням $\operatorname{tg} \frac{\pi x}{6} = \frac{\sin(\pi x/6)}{\cos(\pi x/6)}$) $= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(3 - x) \cdot \sin(\pi x/6)}{\cos(\pi x/6)} = \left(\frac{0}{0}\right) =$ (за формулою зведення перетво-

римо $\cos(\pi x/6) = \sin(\pi/2 - \pi x/6) = \sin[\pi/6(3 - x)]$) $= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(3 - x) \cdot \sin(\pi x/6)}{\sin[\pi/6(3 - x)]} =$ (виділимо першу важ-

ливу границю, яка буде дорівнювати 1, а $\sin(\pi/2) = 1$) $= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(3 - x) \cdot \pi/6 \cdot \sin(\pi x/6)}{\sin[\pi/6(3 - x)] \cdot \pi/6}$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(3 - x) \cdot \pi/6}{\sin[\pi/6(3 - x)]} \times \frac{\sin(\pi x/6)}{\pi/6} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sin(\pi x/6)}{\pi/6} = \frac{6}{\pi}.$$

5. Друга важлива границя. Література: [16], розд. I, § 14, стор. 64-65.

Друга важлива границя $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = (1^\infty) = e = 2,71,828182$ або $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = (1^\infty)$

Наслідки:

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x = e^k$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{U(x)}\right)^{U(x)} = e^k$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$.

Приклад №11.9. Знайти $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 2}{1 + x^2}\right)^{3x-4}$.

Розв'язання. Оскільки $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 2}{1 + x^2}\right)^{3x-4} = (1^\infty)$, то виділимо одиницю, для чого у чисельнику

додамо і віднімемо одиницю: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 2 + 1 - 1}{1 + x^2}\right)^{3x-4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-3}{1 + x^2}\right)^{3x-4} =$

показник степеня помножимо та поділимо на знаменник дробу $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-3}{1 + x^2}\right)^{\frac{(3x-4)(1+x^2)}{1+x^2}} =$ виділимо другу важливу границю

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\underbrace{\left(1 + \frac{-3}{1 + x^2}\right)^{1+x^2}}_{e^{-3}} \right]^{\frac{3x-4}{1+x^2}} = [e^{-3}]^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x-4}{1+x^2}} = (e^{-3})^0 = 1.$$

Приклад №11.10. Знайти $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-4}{2x+1}\right)^{2x+4}$.

Розв'язання. Знайдемо границю дробу у дужках $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x-4}{2x+1} = \frac{3}{2}$. Отже маємо

$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-4}{2x+1}\right)^{2x+4} = (3/2)^\infty = \infty$, оскільки $3/2$ величина більше одиниці, то у нескінченному степені це не є невизначеністю і її границя дорівнює нескінченності.

Контрольні питання

12. Змінна величина. Числова послідовність.
13. Границя послідовності.
14. Основні теореми про границі.
15. Визначення та способи завдання функції.
16. Неперервність функції однієї змінної.
17. Розриви першого та другого роду.
18. I та II важливі границі.

Завдання до практичного заняття №11

В задачах 11.1–11.66 обчислити границі послідовностей:

11.1 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n}{n^2 + 7}$

11.2 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{2-n}$

11.3 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n}$

11.4 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3-4n}{n+1}$

11.5 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+2}{n^2+1}$

11.6 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3+6}{n^2}$

11.7 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9n}{1-n^2}$

11.8 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2-2}{n^4+1}$

11.9 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3+7}{3n^2+1}$

11.10 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^5+2}{n^2+5}$

11.11 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6-n^2}{5n^2+3n+1}$

11.12 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{2n^2}$

- 11.13 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n-2)}{n^5 + 1}$
- 11.14 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+3)}{4n^2 + 1}$
- 11.15 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1000n^3 + 3n^2}{0,001n^4 - 100n^3 + 1}$
- 11.16 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2(n+2)}{n^3 + 8n + 1}$
- 11.17 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 - (n-1)^3}{(n+1)^2 + (n-1)^2}$
- 11.18 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - 100n^2 + 1}{100n^2 + 15n}$
- 11.19 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2(1-n)}{n^3 + 1}$
- 11.20 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n-5)^2 - 3n^2}{n^2 + 5n + 1}$
- 11.21 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^4 - 2)(2n^2 + 6)}{(n^3 + 1)(n^3 - 3)}$
- 11.22 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^4 + 2)(2n^2 - 1)}{(n^3 + 1)(2n^3 - 2)}$
- 11.23 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 7n}{(n+2)(n+3)(n+4)}$
- 11.24 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{0,5n^3 + 2n}{0,005(n^2 + 2)(n+3)}$
- 11.25 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)^4 - (n-1)^4}{(2n+1)^4 + (n-1)^4}$
- 11.26 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{2n^3}$
- 11.27 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)! - n!}$
- 11.28 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2) + (n+1)}{(n+2) - (n+1)}$
- 11.29 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2) + (n+1)}{(n+3)^2}$
- 11.30 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1+2+3+\dots+n}{n+2} - \frac{n}{2} \right)$
- 11.31 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^4 - (n-1)^4}{(n+1)^4 + (n-1)^4}$
- 11.32 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1+2+3+\dots+n)}{3n^2 + 1}$
- 11.33 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} (1+2+3+\dots+n)$
- 11.34 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n - 1}{2^n + 1}$
- 11.35 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} + 3^{n+1}}{2^n + 3^n}$
- 11.36 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1+3+3^2+\dots+3^n)}{3^n}$
- 11.37 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n} - 1}{\sqrt[3]{n} + 1}$
- 11.38 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}}$
- 11.39 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^4 + 1}}{3\sqrt[3]{n^5 + 1}}$
- 11.40 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{\sqrt{4n^2 + 5}}$
- 11.41 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2 + n}}{n+1}$
- 11.42 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt[4]{n^3 + 1}}{n+3}$
- 11.43 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^3 + 3} - \sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^4 + n^2} - \sqrt{n}}$
- 11.44 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^3 + 2n} - 1}{n+2}$
- 11.45 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2 + 1} + n)^2}{\sqrt[3]{n^6 + i}}$
- 11.46 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^3 + 1} + \sqrt{n^2 + 1}}{3\sqrt[5]{n^6 + 1}}$
- 11.47 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{n^5 + 2} - \sqrt[3]{n^2 + 1}}{\sqrt[5]{n^4 + 2} - \sqrt{n^3 + 1}}$
- 11.48 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[7]{2n^9 - 2} + n\sqrt{n^3}}{\sqrt[4]{16n^4 - 1} - \sqrt{4n^7}}$
- 11.49 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1+3+5+7+\dots+(2n-1)}{n+1} - \frac{2n+1}{2} \right)$
- 11.50 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^3 - 2n^2 + 1} + \sqrt[3]{n^4 + 1}}{\sqrt[4]{n^6 + 6n^5 + 2} - \sqrt[5]{n^7 + 3n^3 + 1}}$
- 11.51 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n}}{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{3^n}}$
- 11.52 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} \right)$
- 11.53 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1-2+3-4+\dots-2n}{\sqrt{n^2 + 1}} \right)$
- 11.54 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{1+n} - \sqrt{2+n})$
- 11.55 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{3+4n} - 3\sqrt{5n-1})$
- 11.56 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2 - 1})$
- 11.57 $\lim_{n \rightarrow \infty} n\sqrt{n} (n - \sqrt[3]{n^3 - 5})$
- 11.58 $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2 - 1})$
- 11.59 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{(n+2)^2} - \sqrt[3]{(n-3)^2})$
- 11.60 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n(n+5)} - n)$
- 11.61 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{n} (\sqrt[3]{n^2} - \sqrt[3]{n(n-1)})$
- 11.62 $\lim_{n \rightarrow \infty} n [\sqrt{n^4 + 3} - \sqrt{n^4 - 2}]$

$$11.63 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\sqrt{n(n^4 - 1)} - \sqrt{n^5 - 8} \right)$$

$$11.64 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left[n\sqrt{n} - \sqrt{n(n+1)(n+2)} \right]$$

$$11.65 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^3 - 3} - \sqrt{n^3 - 2} \right) \sqrt{n(n+1)}$$

$$11.66 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left[n\sqrt{n} - \sqrt{n(n+1)(n+2)} \right]$$

В задачах 11.67–11.109 обчислити границі функцій:

$$11.67 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-1}{3x^2+4x+5}$$

$$11.68 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2-4x+5}{2x^2+5x+7}$$

$$11.69 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+2x}{4x^2+1}$$

$$11.70 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3+x}{x^4-3x^2+1}$$

$$11.71 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4-5x}{x^2-3x+1}$$

$$11.72 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-1}{2x^2+1}$$

$$11.73 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+x-3x^3}{1+x^2+3x^3}$$

$$11.74 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2+3x+1}{x^2+6x}$$

$$11.75 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4+3x^3+5}{6x^4+6x}$$

$$11.76 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10x^6+1}{5x^6+4x^4}$$

$$11.77 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3+2}{x^2+4x+8}$$

$$11.78 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+3x}{2x^3+1}$$

$$11.79 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^4+3x^3+4x}{3x^4+6x}$$

$$11.80 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3+3x+1}{x^2+6x}$$

$$11.81 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-1)^{20}(x+1)^{10}}{4x^{30}+x^{10}+x^2}$$

$$11.82 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+3)^2}{x^2+1}$$

$$11.83 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-7x+2}{3x+5}$$

$$11.84 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+3)^2}{x^2+1}$$

$$11.85 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+3)^3(2x-1)^2}{x^5+7}$$

$$11.86 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^2+1}}{\sqrt{x^3-8}}$$

$$11.87 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^4+3}-\sqrt{x^3+4}}{\sqrt{x^7+1}}$$

$$11.88 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+6}}{\sqrt[3]{x^2+9}}$$

$$11.89 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2+1}}{\sqrt{x^3+1}}$$

$$11.90 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2x}+\sqrt{2x}+\sqrt{2x}}$$

$$11.91 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^4+2x+6}}{2x^2+2}$$

$$11.92 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+4}{\sqrt{x^3+5}}$$

$$11.93 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt[3]{x^2+1}}{\sqrt[4]{x^4+1}-\sqrt[5]{x^4+1}}$$

$$11.94 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3+x-x}}$$

$$11.95 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^6+2x^3+4}}{\sqrt{x^4+x^2+1}}$$

$$11.96 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3x^2+5x+1}-4x^2}{5x-2+\sqrt{9x^4+3x}}$$

$$11.97 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+4}-\sqrt{x})$$

$$11.98 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (x-\sqrt{1+2x})$$

$$11.99 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+1})$$

$$11.100 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[5]{x^7+3}+\sqrt[4]{2x^3-1}}{\sqrt[6]{x^8+x^7+1}-x}$$

$$11.101 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2-5x+6}-x)$$

$$11.102 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+1}-\sqrt{x^2-5})$$

$$11.103 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt{x^2+9}-x)$$

$$11.104 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+4}-\sqrt{x})$$

$$11.105 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt{x^2+1}-x)$$

$$11.106 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x})$$

$$11.107 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{2}{3}} (\sqrt{x^3+1}-\sqrt{x^3-1})$$

$$11.108 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}}-x\sqrt{2})$$

$$11.109 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{(x-1)^2})$$

В задачах 11.110–11.142 обчислити границі функцій:

$$11.110 \quad \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 2x - 15}{x^2 - 25}$$

$$11.111 \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1}$$

$$11.112 \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4x + 4}$$

$$11.113 \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3x + 2}$$

$$11.114 \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 5}{x - 3}$$

$$11.115 \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^3 - 3x^2 + 2x}$$

$$11.116 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$$

$$11.117 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^2 - (1+3x)}{x^2 + 3x^3}$$

$$11.118 \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 + 8x + 16}{x^2 - 4}$$

$$11.119 \quad \lim_{x \rightarrow 8} \frac{x - 8}{\sqrt[3]{x} - 2}$$

$$11.120 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt[3]{x} - 1}$$

$$11.121 \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - (a+1)x + a}{x^3 - a^3}$$

$$11.122 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$$

$$11.123 \quad \lim_{x \rightarrow 64} \frac{\sqrt{x} - 8}{\sqrt[3]{x} - 4}$$

$$11.124 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 1}{(x-1)^2}$$

$$11.125 \quad \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{2x^2 - 17x - 9}$$

$$11.126 \quad \lim_{x \rightarrow 7} \frac{2 - \sqrt{x-3}}{x^2 - 49}$$

$$11.127 \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3 - \sqrt{5+x}}{1 - \sqrt{5-x}}$$

$$11.128 \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x} - 3}{\sqrt{x} - 2}$$

$$11.129 \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+13} - 2\sqrt{x+1}}{x^2 - 9}$$

$$11.130 \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{x-6} + 2}{x^3 + 8}$$

$$11.131 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$$

$$11.132 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x}$$

$$11.133 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{\sqrt{x^2 + 16} - 4}$$

$$11.134 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}$$

$$11.135 \quad \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1} - 2}{x - 5}$$

$$11.136 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x^2}$$

$$11.137 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2} \right)$$

$$11.138 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2} - 1}{x^2}$$

$$11.139 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}{x}$$

$$11.140 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$$

$$11.141 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-2x}}{x + x^2}$$

$$11.142 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{7+x^3} - \sqrt{3+x^2}}{x-1}$$

лампа $x = (1+t)$

В задачах 11.143–11.174 обчислити границі, використовуючи 1 важливу границю:

$$11.143 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$$

$$11.144 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 3x}$$

$$11.145 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 2x}{3x^2}$$

$$11.146 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 4x}{x}$$

$$11.147 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\sin 5x}$$

$$11.148 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{x}$$

$$11.149 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 8x}{x}$$

$$11.150 \quad \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\sin \sqrt{x}}{x}$$

$$11.151 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x - \sin 2x}{x^3}$$

$$11.152 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2}$$

$$11.153 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1 - \cos x}}$$

$$11.154 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x}$$

$$11.155 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 6x}{1 - \cos 2x}$$

$$11.156 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\operatorname{tg} x} \right]$$

$$11.157 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{x \sin 2x}$$

$$11.158 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt[3]{(1 - \cos x)^2}}$$

$$11.159 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sin x - \cos x}{1 - \sin x - \cos x}$$

$$11.160 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2)}{(\sin x)^5}$$

$$11.161 \quad \lim_{x \rightarrow \pi/2} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \operatorname{tg} x$$

$$11.162 \quad \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 3x}{\sin 2x}$$

$$11.163 \quad \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt[3]{(1 - \sin x)^2}}$$

$$\begin{array}{lll}
 11.164 \quad \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{1 - \sin x}{(\pi/2 - x)^2} & 11.165. \quad \lim_{x \rightarrow \pi/6} \frac{\sin(x - \pi/6)}{\sqrt{3}/2 - \cos x} & 11.166. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x \sin x} - \sqrt{\cos 2x}}{\operatorname{tg}^2(x/2)} \\
 11.167 \quad \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\cos x - \sin x}{\cos 2x} & 11.168. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \sqrt{\cos 2x}}{x^2} & 11.169. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x}}{\operatorname{tg} x} \\
 11.170 \quad \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z) \operatorname{tg} \frac{\pi z}{2} & 11.171. \quad \lim_{x \rightarrow \pi/2} \left(2x \operatorname{tg} x - \frac{\pi}{\cos x} \right) & 11.172. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1 + \cos x}}{\sin^2 x} \\
 11.173 \quad \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 - \sin(x/2)}{\cos(x/2) [\cos(x/4) - \sin(x/4)]} & 11.174. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1 + \operatorname{arctg} 3x} - \sqrt[3]{1 - \operatorname{arcsin} 3x}}{\sqrt{1 - \operatorname{arcsin} 2x} - \sqrt{1 + \operatorname{arctg} 2x}}
 \end{array}$$

В задачах 11.175-11.225 обчислити границі послідовностей та функцій, використовуючи II важливу границю

$$\begin{array}{lll}
 11.175 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{n} \right)^{5n} & 11.176 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{n} \right)^{4n} & 11.177 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n+4} \right)^{2n+3} \\
 11.178 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n^2 + n - 1}{3n^2 + 2} \right)^{2n-1} & 11.179 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n+2} \right)^{3n-1} & 11.180 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 2}{n^2 - 4} \right)^{3n^2/2} \\
 11.181 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x-1} \right)^{x+3} & 11.182 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{3x} \right)^x & 11.183 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x} \right)^{2x} \\
 11.184 \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{\frac{1}{x}} & 11.185 \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x^2)^{\frac{1}{x}} & 11.186 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x^2 + 2}{5x^3} \right)^{\sqrt{x}} \\
 11.187 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{1+x} \right)^x & 11.188 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{\frac{x+1}{x}} & 11.189 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \right)^{x^2} \\
 11.190 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1} \right)^{x+1} & 11.191 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x+3} \right)^x & 11.192 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+3} \right)^{x+2} \\
 11.193 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x+1} \right)^{1+2x} & 11.194 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-3}{x+2} \right)^x & 11.195 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-1}{3x+1} \right)^{3x-6} \\
 11.196 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1-x}{1-5x} \right)^{x+1} & 11.197 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{2x+4} \right)^{3x-1} & 11.198 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1-7x}{2-5x} \right)^{x^2} \\
 11.199 \quad \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{x^2} & 11.200 \quad \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left(\frac{x+1}{2x-1} \right)^x & 11.201 \quad \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left(\frac{2x+1}{x-1} \right)^x \\
 11.202 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x+1}{4x-3} \right)^{x-2} & 11.203 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 3x - 1}{2x^2 - x + 4} \right)^x & 11.204 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 + 2} \right)^{3x^2} \\
 11.205 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2-x}{3-x} \right)^x & 11.206 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x}{1-3x} \right)^{4x+1} & 11.207 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 - 1}{2x^2 + 3} \right)^{x+1}
 \end{array}$$

$$11.208 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-4}{3x+2} \right)^{\frac{x+1}{3}}$$

$$11.209 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-2} \right)^{2x-1}$$

$$11.210 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)^x$$

$$11.211 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x^2-3x+1}{2x^2-3x+2} \right)^{3x+4}$$

$$11.212 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3+x+1}{x^3+2} \right)^{2x^2}$$

$$11.213 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{4x^2+2} \right)^{\frac{x+1}{x-2}}$$

$$11.214 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2-2x+3}{x^2-2x+5} \right)^{x^2-2x}$$

$$11.215 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+2}{2x^2+1} \right)^{x^2}$$

$$11.216 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x-1}{x^2-1} \right)^{x+1}$$

$$11.217 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2} \right)^x$$

$$11.218 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^5} \right)^x$$

$$11.219 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{\sin x}{x - \sin x}}$$

$$11.220 \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}}$$

$$11.221 \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \operatorname{tg}^2 \sqrt{x})^{\frac{1}{2x}}$$

$$11.222 \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\operatorname{cosec} x}$$

$$11.223 \quad \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x + \sin x)^{\frac{1}{x}}$$

$$11.224 \quad \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{\frac{1}{\sin x}}$$

$$11.225 \quad \lim_{x \rightarrow a} \left(2 - \frac{x}{a} \right)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2a}}$$

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ №12

Тема: Похідна. Правило Лопіталя обчислення границь.

6. Визначення похідної та її геометричний зміст. Література: [16], розд. II, §3, §4, стор. 88-91.

7. Основні правила диференціювання. Таблиця похідних. Література: [16], розд. II, §7, стор. 64-96, §13, стор. 101-102.

Нехай $y = f(U)$, де $U = \varphi(x)$, тоді маємо складну функцію $y = f[\varphi(x)]$. Похідна складної функції знаходиться за правилом: $y' = y' \cdot U'$.

Таблиця похідних складної функції.

№ п/п	$f(U)$	$f'[U] \cdot U'$
1.	C	0
2.	x	1
3.	U^n	$n \cdot U^{n-1} \cdot U'$
4.	$\sqrt{U}$	$\frac{1}{2\sqrt{U}} \cdot U'$
5.	$\frac{1}{U}$	$-\frac{1}{U^2} \cdot U'$
6.	$\sin U$	$\cos U \cdot U'$
7.	$\cos U$	$-\sin U \cdot U'$
8.	$\operatorname{tg} U$	$\frac{1}{\cos^2 U} \cdot U'$

№ п/п	$f(U)$	$f'[U] \cdot U'$
12.	$\ln U$	$\frac{1}{U} \cdot U'$
13.	$\log_a U$	$\frac{1}{\ln a \cdot U} \cdot U'$
14.	$\operatorname{arctg} U$	$\frac{1}{1+U^2} \cdot U'$
15.	$\operatorname{arcctg} U$	$-\frac{1}{1+U^2} \cdot U'$
16.	$\arcsin U$	$\frac{1}{\sqrt{1-U^2}} \cdot U'$
17.	$\arccos U$	$-\frac{1}{\sqrt{1-U^2}} \cdot U'$
18.	$C \cdot U$	$C \cdot U'$
19.	$U \pm V$	$U' \pm V'$

№ п/п	$f(U)$	$f'[U] \cdot U''$
9.	$\operatorname{ctg} U$	$-\frac{1}{\sin^2 U} \cdot U'$
10.	e^U	$e^U \cdot U'$
11.	a^U	$a^U \ln a \cdot U'$

№ п/п	$f(U)$	$f'[U] \cdot U''$
20.	$U \cdot V$	$U' \cdot V + V' \cdot U$
21.	$\frac{U}{V}$	$\frac{U' \cdot V - U \cdot V'}{V^2}$

Приклад №12.1. Знайти похідну функції $y = \ln^3 \sin(3x^2 + 1)$.

Розв'язання. Вихідну функцію запишемо так $y = [\ln \sin(3x^2 + 1)]^3$. Отже маємо U^3 , де $U = \ln[\sin(3x^2 + 1)]$. За формулою (4) з таблиці знайдемо похідну як від степеневої функції U^3 , а потім треба знайти похідну від $\ln U$ за формулою (12), далі від функції $\sin U$, користуючись формулою (6) і нарешті – від функції $(3x^2 + 1)$, тобто $y' = 3[\ln \sin(3x^2 + 1)]^2 (\ln[\sin(3x^2 + 1)])' =$
 $= 3[\ln \sin(3x^2 + 1)]^2 \cdot \frac{1}{\sin(3x^2 + 1)} \cdot (\sin(3x^2 + 1))' = 3[\ln \sin(3x^2 + 1)]^2 \cdot \frac{1}{\sin(3x^2 + 1)} \cdot \cos(3x^2 + 1) \cdot (3x^2 + 1)' =$
 $= 3[\ln \sin(3x^2 + 1)]^2 \cdot \frac{1}{\sin(3x^2 + 1)} \cdot \cos(3x^2 + 1) \cdot 3 \cdot 2x = 18x [\ln \sin(3x^2 + 1)]^2 \cdot \frac{1}{\sin(3x^2 + 1)} \cdot \cos(3x^2 + 1).$

8. Логарифмічне диференціювання. Література: [16], розд. II, §10, стор. 98-99.

Якщо функція задана у вигляді степенево-показникової функції, тобто $y = u^v$, то похідна від такої функції обчислюється за такою формулою:

$$y' = (u^v)' = u^v (v' \ln u + v (\ln u)') = v u^{v-1} u' + u^v \ln u \cdot v', \quad (3.2)$$

де $u > 0$, $v > 0$.

Приклад №12.2. Знайти похідну функції $y = (1 + \sin x)^x$.

Розв'язання. Використовуючи формулу (3.2), знаходимо похідну заданої функції, маючи на увазі, що $u = 1 + \sin x$, а $v = x$, тобто: $y' = (1 + \sin x)^x (1 \cdot \ln(1 + \sin x) + x \frac{\cos x}{1 + \sin x}) = x(1 + \sin x)^{x-1} \times$
 $\times \cos x + (1 + \sin x)^x \ln(1 + \sin x).$

9. Похідна функції, що задана параметрично. Похідна вищих порядків. Література: [16], розд. II, §15, §16 стор. 103-105.

Якщо функція задана параметрично, тобто

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \quad (3.3)$$

то похідна $\frac{dy}{dx}$ знаходиться за формулою:

$$y' = \frac{y'_t}{x'_t} \text{ або } y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\psi'_t}{\varphi'_t}. \quad (3.4)$$

Приклад №12.3. Знайти похідну функції $\begin{cases} x = \sqrt[3]{t^2 - 1} \\ y = \sin^2 3t \end{cases}$.

Розв'язання. Знайдемо окремо похідні $x'_t = \left[(t^2 - 1)^{\frac{1}{3}} \right]' = \frac{1}{3} (t^2 - 1)^{\frac{1}{3} - 1} \cdot (2t) = \frac{2}{3} (t^2 - 1)^{-\frac{2}{3}} \cdot t,$

$y'_t = \left[(\sin 3t)^2 \right]' = 2 \sin 3t \cdot \cos 3t \cdot 3$. Тоді з (3.4): $\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{2 \sin 3t \cdot \cos 3t \cdot 3}{\frac{2}{3} (t^2 - 1)^{-\frac{2}{3}} \cdot t}.$

Приклад №12.4. Знайти похідну четвертого порядку функції $y = \sin^2 3x$.

Розв'язання. Знаходимо першу похідну $y' = 2\sin 3x \cdot \cos 3x \cdot 3 = 3\sin 6x$. Від першої похідної беремо другу похідну: $y'' = 3\cos 6x \cdot 6 = 18\cos 6x$, потім третю похідну: $y''' = -18\sin 6x \cdot 6 = -108\sin 6x$ і врешті четверту похідну: $y^{IV} = -108\cos 6x \cdot 6 = -648\cos 6x$.

10. Диференціал функції. Література: [16], розд. II, §17 стор. 105-107.

Диференціал функції $y = f(x)$:

$$dy = f'(x) \cdot dx. \quad (3.5)$$

Приклад №12.5. Знайти диференціал функції $y = 3^{\arctg(5/x^2)}$.

Розв'язання. Знаходимо похідну вихідної функції і за формулою (3.5) одержимо:

$$dy = 3^{\arctg(5/x^2)} \cdot \ln 3 \cdot \frac{1}{1+(5/x^2)^2} \cdot 5 \cdot (-2) \cdot x^{-3} dx = 3^{\arctg(5/x^2)} \cdot \ln 3 \cdot \frac{x^4}{x^4+25} \cdot \left(\frac{-10}{x^3}\right) dx.$$

11. Правило Лопіталя. Література: [16], розд. II, §23, стор. 123-126.

Правило Лопіталя: якщо $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ дає невизначеність $\left[\frac{0}{0}\right]$ або $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, тоді границя відношення функцій дорівнює границі відношення похідних цих функцій, якщо функції $\varphi(x)$ та $\psi(x)$ диференційовані поблизу точки $x = a$ і $\varphi(a) = \psi(a) = 0$ або $\varphi(a) = \psi(a) = \infty$, тобто

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} \text{ або } \lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)},$$

причому a – може бути як скінченним так і нескінченним.

Приклад №12.6. Знайти $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3x}{x-1} - \frac{2}{\ln x} \right)$.

Розв'язання. Знайдемо границю кожного дробу у дужках $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3x}{x-1} - \frac{2}{\ln x} \right) = \left(\frac{3}{0} - \frac{2}{0} \right) = (\infty - \infty)$. Отриману невизначеність треба звести до невизначеності $\left[\frac{0}{0}\right]$ або $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Для цього приведемо дробу до спільного знаменника і одержимо $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x \cdot \ln x - 2(x-1)}{(x-1) \ln x} = \left(\frac{0}{0}\right)$. Отже, тепер можна застосувати правило Лопіталя, тобто знаходимо окремо похідну чисельника і похідну знаменника, користуючись правилами диференціювання:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3 \left(x' \cdot \ln x + x \cdot (\ln x)' \right) - 2(x-1)'}{(x-1)' \ln x + (x-1)(\ln x)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3 \left(\ln x + x \cdot \frac{1}{x} \right) - 2}{\ln x + (x-1) \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3 \ln x + 1}{\ln x + 1 - \frac{1}{x}} = \left(\frac{1}{0}\right) = \infty.$$

Зауваження. Якщо необхідно знайти границю, яка має невизначеність (0^0) або (∞^0) , то позначаємо всю границю за „ a ”, а потім логарифмуємо. Отримуємо невизначеність $(0 \cdot \infty)$, яку зводимо до невизначеності $\left(\frac{0}{0}\right)$ або $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Користуючись правилом Лопіталя, знаходимо границю $\ln a$. Відповідь треба зпотенціювати і знайти значення вихідної границі.

Контрольні питання

1. Визначення похідної функції однієї змінної.
2. Геометричний та фізичний зміст похідної.

3. Основна таблиця похідних.
4. Загальні правила диференціювання.
5. Похідні вищих порядків.
6. Знаходження границь за правилом Лопітала.

Завдання до практичного заняття №12

В задачах 12.1-12.93 знайти похідну:

- | | | |
|--|--|---|
| 12.1 $y = 5x^3 + 6x + \pi$ | 12.2 $y = e^{8x+3} + 2^3$ | 12.3 $y = 2^{1-2x} + e$ |
| 12.4 $y = 2\sqrt{x} + 0,2x^5$ | 12.5 $y = 3x^3 - 6x - \sin 2$ | 12.6 $y = e^{-2x^2} + \cos(2 - 6x)$ |
| 12.7 $y = \arcsin \sqrt{x^2 - 1}$ | 12.8 $y = \ln(3x^3 - 6) + 5$ | 12.9 $y = 3(\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 2)$ |
| 12.10 $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ | 12.11 $y = \frac{1}{\sqrt{x}} + 2\sqrt[3]{x^2}$ | 12.12 $y = \ln(\sqrt[3]{3x^2} + \sqrt{9x^4 + 1})$ |
| 12.13 $y = \ln^2 x$ | 12.14 $y = \sqrt{\ln x}$ | 12.15 $y = \ln^4 x^4 + 5\sqrt{x^3 - 3}$ |
| 12.16 $y = x + \sqrt[3]{x}$ | 12.17 $y = \ln(1 - 2x)$ | 12.18 $y = \sin^2(3x - 1) + \cos(x^2 + 1)$ |
| 12.19 $y = \ln(x^2 - 4x)$ | 12.20 $y = \ln \sin x$ | 12.21 $y = \ln \arccos 2x$ |
| 12.22 $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$ | 12.23 $y = \arctg^2(1/x)$ | 12.24 $y = \ln(\operatorname{tg} x + 1/\cos 3x)$ |
| 12.25 $y = -\sqrt[3]{x^2} - 2/\sqrt{x}$ | 12.26 $y = \cos^2(x/2) + \operatorname{tg}^2 4x$ | 12.27 $y = \arctg(\ln x/4) + \log_2(\sin^2 x)$ |
| 12.28 $y = \ln \operatorname{tg} x + 2^{\operatorname{tg}(1/x)}$ | 12.29 $y = e^{e^x} + e^{e^{e^x}}$ | 12.30 $y = \log_2 \log_3(x^2 + 1)$ |
| 12.31 $y = e^{-5x^2} + \sqrt{e^{-x}}$ | 12.32 $y = \arctg \sqrt{x} + \arcsin^2 x$ | 12.33 $y = \ln(x^2 + a^2) + \ln \cos 2x$ |
| 12.34 $y = (\operatorname{tg}^3 x)/3 + \operatorname{tg} 3x$ | 12.35 $y = 3^{x^2} + 2^{3x+x^2+\sqrt[3]{x}}$ | 12.36 $y = \arctg(x + \sqrt{1+x^2})$ |
| 12.37 $y = 3\sqrt[3]{\ln \sin \frac{x+3}{4}}$ | 12.38 $y = \operatorname{tg}(x/2) - \operatorname{ctg}(x/2)$ | 12.39 $y = \arcsin \frac{\sqrt{x}}{2} + \sqrt{4x - x^2}$ |
| 12.40 $y = \sqrt{1 + \ln^2 x}$ | 12.41 $y = \sqrt{\ln(4x - x^2)}$ | 12.42 $y = \sqrt{x+1} - \ln(1 + \sqrt{x+1})$ |
| 12.43 $y = \ln \arctg \sqrt{1+x^2}$ | 12.44 $y = \ln^4 \sin x + \ln^3 x^2$ | 12.45 $y = \sin x^2 + \sin^2 x + \sin^3 x^7$ |
| 12.46 $y = \arccos \sqrt{1-x^2}$ | 12.47 $y = (x^3 + 1)e^{2/x}$ | 12.48 $y = \cos(\sin x) + \cos^2 x^4$ |
| 12.49 $y = x\sqrt{1+x^2}$ | 12.50 $y = x^2 e^{-2x}$ | 12.51 $y = \ln \operatorname{tg}(x/2) + \arctg(1/x)$ |
| 12.52 $y = (x^2 + 5)\ln x^3$ | 12.53 $y = 3^{2x} \operatorname{tg}(x^2 + 1)$ | 12.54 $y = \sqrt{x} - \operatorname{tg} \sqrt{x} \ln \sin \sqrt{x}$ |
| 12.55 $y = \sin(x/2)\sin 2x$ | 12.56 $y = x^2 \log_3 x$ | 12.57 $y = e^{2x+3}(x^2 + x - 0,5)$ |
| 12.58 $y = \sin(8x)e^{\cos 3x}$ | 12.59 $y = x \operatorname{!} \operatorname{g} x$ | 12.60 $y = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$ |
| 12.61 $y = x \sin x \arctg x$ | 12.62 $y = \cos 2x \ln x^2$ | 12.63 $y = \sqrt{x \sin x \sqrt{1-e^x}}$ |
| 12.64 $y = x^5 \sqrt[3]{x^6 - 8}$ | 12.65 $y = \cos x \sqrt{1 + \sin^2 x}$ | 12.66 $y = x - \sqrt{1+x^2} \arcsin x$ |
| 12.67 $y = x \sin x \ln x$ | 12.68 $y = x^3 e^{x^2} \sin 2x$ | 12.69 $y = e^{-x} + \sin(e^{-x}) \cos(e^{-x})$ |
| 12.70 $y = \frac{x^2}{1-x}$ | 12.71 $y = \frac{x}{x^2+4}$ | 12.72 $y = \frac{2x-1}{3x+5}$ |
| 12.73 $y = \frac{\sqrt{x}}{4+\sqrt{x}}$ | 12.74 $y = \frac{x^2+1}{\ln x}$ | 12.75 $y = \frac{2x^2+x+1}{x^2-x+1}$ |
| 12.76 $y = \frac{1+\cos x}{\sin 3x}$ | 12.77 $y = \frac{\arctg 3x}{\ln 4x}$ | 12.78 $y = \frac{1-x^2}{\arcsin 3x}$ |
| 12.79 $y = \frac{2x}{1-x^2}$ | 12.80 $y = \frac{x}{(1-x)^2(1+x)^3}$ | 12.81 $y = \arctg \frac{\sqrt{x^4+1-x^2}}{x}$ |

$$\begin{array}{lll}
 12.82 \quad y = \frac{\sin 3x}{2 \sin^2 x \cos x} & 12.83 \quad y = \frac{\sin x - x \cos x}{\cos x + x \sin x} & 12.84 \quad y = \frac{\sin^2 x}{1 + \operatorname{ctg} 4x} + \frac{\cos^2 5x^2}{1 + \operatorname{tg} 3x} \\
 12.85 \quad y = \frac{1 - \ln x}{1 + \ln x} & 12.86 \quad y = \frac{\ln x}{1 + x^2} & 12.87 \quad y = \arcsin \frac{1 - x^2}{1 + x^2} \\
 12.88 \quad y = \ln \frac{1 + x}{\sqrt{1 + x^2}} & 12.89 \quad y = \ln \sqrt{\frac{e^x}{e^{2x} + 1}} & 12.90 \quad y = \ln \frac{\sqrt{1 + e^{2x}}}{\operatorname{arctg} e^{2x}} \\
 12.91 \quad y = \operatorname{ctg} \left(\frac{\cos x}{\sqrt[4]{\cos 2x}} \right) & 12.92 \quad y = \sqrt{\frac{\operatorname{tg} x + \sqrt{2 \operatorname{tg} x + 1}}{\operatorname{tg} x - \sqrt{2 \operatorname{tg} x + 1}}} & 12.93 \quad y = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x} - \frac{1}{3 \cos^3 x}
 \end{array}$$

В задачах 12.94-12.109 знайти похідну, використовуючи формулу логарифмічного диференціювання:

$$\begin{array}{llll}
 12.94 \quad y = x^{x^2} & 12.95 \quad y = (\ln x)^x & 12.96 \quad y = \left(1 + \frac{3}{x^2} \right)^{4x} & 12.97 \quad y = (\sin x)^{\cos x} \\
 12.98 \quad y = 2x^{\sqrt{x}} & 12.99 \quad y = x^{\cos 3x} & 12.100 \quad y = (\sin 5x)^{\cos 4x} & 12.101 \quad y = (x^2 + 1)^{\sin x} \\
 12.102 \quad y = x^{\operatorname{tg} x^2} & 12.103 \quad y = x^{\ln 3x^3} & 12.104 \quad y = x^{\operatorname{arctg}^3 3x} & 12.105 \quad y = (\lg \sqrt{x})^{\arcsin 4x} \\
 12.106 \quad y = (\ln 3x)^{x^3} & 12.107 \quad y = (x+1)^{2/x} & 12.108 \quad y = (\sin 2x)^{1/\ln 3x} & 12.109 \quad y = (\sin \sqrt{x})^{e^{1/x}}
 \end{array}$$

В задачах 12.110-12.125 знайти похідні функцій, заданих параметрично:

$$\begin{array}{llll}
 12.110 \quad \begin{cases} x = 2 \cos 5t \\ y = 3 \sin 3t \end{cases} & 12.111 \quad \begin{cases} x = 1 - t^2 \\ y = t - t^3 \end{cases} & 12.112 \quad \begin{cases} x = \arcsin 5t \\ y = \arccos 4t \end{cases} & 12.113 \quad \begin{cases} x = 10(\varphi - \sin \varphi) \\ y = 8(1 - \cos \varphi) \end{cases} \\
 12.114 \quad \begin{cases} x = te^{2t} \\ y = e^{5t} \end{cases} & 12.115 \quad \begin{cases} x = \sin^2 6t \\ y = \cos^4 3t \end{cases} & 12.116 \quad \begin{cases} x = te^{-t} \\ y = 2te^t \end{cases} & 12.117 \quad \begin{cases} x = 4 \cos \varphi \\ y = 5 \sin \varphi \end{cases} \\
 12.118 \quad \begin{cases} x = \frac{t+1}{t} \\ y = \frac{t-1}{t} \end{cases} & 12.119 \quad \begin{cases} x = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \\ y = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \end{cases} & 12.120 \quad \begin{cases} x = \frac{1+t^3}{t^2-1} \\ y = \frac{t}{t^2-1} \end{cases} & 12.121 \quad \begin{cases} x = \frac{3t}{1+t^3} \\ y = \frac{3t^2}{1+t^3} \end{cases} \\
 12.122 \quad \begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = t - \operatorname{arctg} t \end{cases} & 12.123 \quad \begin{cases} x = e^{2t} \sin t \\ y = e^t \cos 6t \end{cases} & 12.124 \quad \begin{cases} x = 7 \cos^3 \varphi \\ y = 8 \sin^3 \varphi \end{cases} & 12.125 \quad \begin{cases} x = \varphi(1 - \sin 3\varphi) \\ y = \varphi \cos 4\varphi \end{cases}
 \end{array}$$

В задачах 12.126-12.137 визначити диференціал функцій:

$$\begin{array}{lll}
 12.126 \quad y = \sin^3 4x & 12.127 \quad y = \sin^2 5x + \cos^6 7x & 12.128 \quad y = \sqrt{x^2 + 1} \\
 12.129 \quad y = \frac{xe^x \operatorname{arctg} x}{\ln^5 x} & 12.130 \quad y = \sqrt[3]{(1 + xe^{\sqrt{x}})^3} & 12.131 \quad y = \frac{1}{\cos(x - \cos x)} \\
 12.132 \quad y = xe^{1 - \cos x} & 12.133 \quad y = \frac{\arcsin 4x}{1 - 4x} & 12.134 \quad y = x \arcsin(\ln x) \\
 12.135 \quad y = \sin^2(x/3) \operatorname{ctg}(x/2) & 12.136 \quad y = \sin^2 \left(\frac{1 - \ln x}{x} \right) & 12.137 \quad y = \frac{2 \sin^2 x}{\cos 2x}
 \end{array}$$

В задачах 12.138-12.146 знайти другу похідну від функцій:

12.138 $y = xe^{x^2}$

12.139 $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$

12.140 $y = (1+x^2)\operatorname{arctg} x$

12.141 $y = 1/(4 + \sqrt{x})$

12.142 $y = \sqrt{1-x^2} \arcsin x$

12.143 $y = 1/(1+x^3)$

12.144 $y = e^{\sqrt{x}}$

12.145 $y = \arcsin(2\sin x)$

12.146 $y = \operatorname{arctg} x$

В задачах 12.147–12.225 обчислити границі за допомогою правила Лопітала:

12.147 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin x}$

12.148 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x - \operatorname{tg} x}$

12.149 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$

12.150 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}$

12.151 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x}$

12.152 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^{5x}}{x}$

12.153 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 12x + 16}{x^3 - 4x^2 + 4x}$

12.154 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{12} - 2x + 1}{x^7 - 3x^4 + x + 1}$

12.155 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin 2x}{x^2}$

12.156 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x - \sin 4x}{x^2 - xe^{2x}}$

12.157 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2x}{x + \sin 3x}$

12.158 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^{2x} - e^{-3x}}$

12.159 $\lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln x - 1}{x - e}$

12.160 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\sin x}}{x}$

12.161 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{3x}$

12.162 $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} x}$

12.163 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+4x)}{x}$

12.164 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(9-2x^2)}{\sin 2\pi x}$

12.165 $\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\ln 5x}{\ln \sin x}$

12.166 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x} - 2 + x}{x^2}$

12.167 $\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\ln 4x}{1 + 2 \ln \sin 3x}$

12.168 $\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{\ln x}{\sqrt{1-x}}$

12.169 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + e^{4x}}{2x^3 + e^{2x}}$

12.170 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln 3x}{e^{2x}}$

12.171 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5(x+\pi)}{e^{3x} - 1}$

12.172 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

12.173 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^x - 1 - \cos 3x}{(x^2 - 1)x}$

12.174 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$

12.175 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\operatorname{tg} x} - e^x}{\operatorname{tg} x - x}$

12.176 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^3} - 1 - x^3}{\sin^6 2x}$

12.177 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \arcsin x}{3x}$

12.178 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \arcsin x}{2x + \operatorname{arctg} x}$

12.179 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\arcsin x}{\operatorname{tg}(\pi x/2)}$

12.180 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x^3/6 - x^2/2 - x - 1}{\cos x + x^2/2 - 1}$

12.181 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)^4 - 4x + 2x^2 - \frac{4}{3}x^3 + x^4}{6 \sin x + x^2/2 - 6x + x^3}$

12.182 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(1-x) + \operatorname{tg}(\pi x/2)}{\operatorname{ctg} \pi x}$

12.183 $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\ln \cos 2x}{\ln \cos 4x}$

12.184 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \sin 2x}{\ln \sin x}$

12.185 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\ln(2x-5)}{e^{\sin \pi x} - 1}$

12.186 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\ln \sin x}$

12.187 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x - 2 \arcsin x}{x^3}$

12.188 $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\operatorname{tg} \pi x}{x + 2}$

12.189 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos 5x}{\ln \cos 7x}$

12.190 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sin x - \cos x}{1 - \sin x - \cos x}$

12.191 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x^2}$

12.192 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{\ln(x+1)}$

12.193 $\lim_{x \rightarrow \infty} (4-x)(\ln(1-x) - \ln(2-x))$

12.194 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2}$

12.195 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{e^{2x} + 1}$

12.196 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^x + 1) - 2(e^x - 1)}{x^3}$

- | | | |
|--|---|---|
| 12.197 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x \cos x}$ | 12.198 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\cos x - 1}$ | 12.199 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi - 2 \operatorname{arctg} x}{\ln(1 + 1/x)}$ |
| 12.200 $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(1 - \cos \frac{1}{x}\right)$ | 12.201 $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \ln \sin x$ | 12.202 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x - \operatorname{arctg} x}{x^3}$ |
| 12.203 $\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\operatorname{arctg} \frac{x+1}{x+2} - \frac{\pi}{4}\right)$ | 12.204 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi x}{\sin 3\pi x}$ | 12.205 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\ln(1+x) - \ln x)$ |
| 12.206 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(1 - \cos x)}{x^4}$ | 12.207 $\lim_{x \rightarrow \pi/2} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$ | 12.208 $\lim_{x \rightarrow \infty} [(\pi - 2 \operatorname{arctg} x) \ln x]$ |
| 12.209 $\lim_{x \rightarrow 0} (e^{2x} + x)^{\frac{1}{x}}$ | 12.210 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x}\right)$ | 12.211 $\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\operatorname{arctg} \frac{x+1}{x+2} - \operatorname{arctg} \frac{x}{x+2}\right)$ |
| 12.211 $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$ | 12.212 $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x$ | 12.213 $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1) \operatorname{ctg} \pi(x-1)$ |
| 12.214 $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{x}{\ln x}\right)$ | 12.215 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x^2 e^{\frac{1}{x^2}}\right)$ | 12.216 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{\sin 3x}\right)$ |
| 12.217 $\lim_{x \rightarrow 0+0} x^2 \ln 4x$ | 12.218 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-3x}$ | 12.219 $\lim_{x \rightarrow 1-0} \ln x \cdot \ln(1-x)$ |
| 12.220 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x \sin x} - \frac{1}{x^2}\right)$ | 12.221 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{ctg} x - 1}{x^2}$ | 12.222 $\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right]$ |
| 12.223 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)\right]$ | 12.224 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[x \sin \frac{4}{x}\right]$ | 12.225 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\cos(\pi x/2) \ln(1-x)}$ |



ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ №13

**Тема: Частинні похідні функції багатьох змінних.
Екстремум функції багатьох змінних.**

12. Похідна неявно заданої функції. Література: [16], розд. II, §14, стор. 102-103.

Якщо функція задана неявно

$$F(x, y) = 0, \quad (3.6)$$

тобто не розв'язана відносно змінної y , то для знаходження похідної $y' = \frac{dy}{dx}$ необхідно знайти похідну від функції (3.6) за змінною x , вважаючи y сталою величиною. Потім знаходимо похідну від функції (3.6) за змінною y , тепер x вважаємо сталою величиною. Такі похідні називаються частинними похідними і позначаються $F'_x(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x}$, якщо x змінна, а y – стала і

$F'_y(x, y) = \frac{\partial F}{\partial y}$, якщо y змінна, а x – стала. А загальна похідна y' неявно заданої функції (3.6)

знаходиться за формулою:

$$y' = -\frac{F'_x}{F'_y}. \quad (3.7)$$

Приклад №13.1. Знайти похідну функції $\cos \frac{y}{x} + e^{\frac{y}{x}} - x^2 y^2 = 0$.

Розв'язання. Знайдемо частинні похідні F'_x і F'_y : а) вважаємо y сталою величиною, тоді

$$F'_x = -\sin \frac{y}{x} \cdot \left(\frac{y}{x} \right)'_x + e^{\frac{x}{y}} \left(\frac{x}{y} \right)'_x - 2xy^2 = -\sin \frac{y}{x} \cdot y \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right) + e^{\frac{x}{y}} \frac{1}{y} - 2xy^2;$$

б) тепер вважаємо x сталою величиною, тоді $F'_y = -\sin \frac{y}{x} \cdot \left(\frac{y}{x} \right)'_y + e^{\frac{x}{y}} \left(\frac{x}{y} \right)'_y - 2x^2y =$

$$= -\sin \frac{y}{x} \cdot \frac{1}{x} + e^{\frac{x}{y}} \left(-\frac{x}{y^2} \right) - 2x^2y. \text{ Тоді з (3.7) } \frac{dy}{dx} = \frac{-\sin \frac{y}{x} \cdot \left(-\frac{y}{x^2} \right) + e^{\frac{x}{y}} \frac{1}{y} - 2xy^2}{-\sin \frac{y}{x} \cdot \frac{1}{x} + e^{\frac{x}{y}} \cdot \left(-\frac{x}{y^2} \right) - 2x^2y}.$$

13. Диференціювання функції багатьох змінних. Література: [16], розд. II, §3-4, стор. 177-180.

Нехай дана функція $z = f(x, y)$ – неперервна і диференційована. Нагадаємо, що для знаходження частинної похідної $\frac{\partial z}{\partial x}$ від функції $z = f(x, y)$: “ x ” – змінна, а “ y ” – стала, аналогічно, при знаходженні $\frac{\partial z}{\partial y}$: “ y ” – змінна, а “ x ” – стала.

Частинні похідні вищих порядків знаходяться послідовним диференціюванням частинних похідних нижчого порядку.

Повний диференціал функції $z = f(x, y)$ знаходиться за формулою:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy. \quad (3.8)$$

Приклад №13.2. Перевірити, що функція $z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$, задовольняє рівнянню:

$$-\frac{y}{x^2 + y^2} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

Розв’язання. Знайдемо частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, а потім підставимо у рівняння. Отже,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \right) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + y^2} + x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Тепер знаходимо $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$ Знайдену по-

хідну диференціюємо по x , як добуток двох функцій, тобто отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} &= -\frac{1}{(x + \sqrt{x^2 + y^2})^2} \cdot \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \left(-\frac{y \cdot 2x}{2\sqrt{(x^2 + y^2)^3}} \right) = \\ &= -\frac{(\sqrt{x^2 + y^2} + x) \cdot y}{(x + \sqrt{x^2 + y^2})^2 \cdot \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{xy}{(x + \sqrt{x^2 + y^2}) \sqrt{(x^2 + y^2)^3}} = \end{aligned}$$

$$= -\frac{y}{(x + \sqrt{x^2 + y^2}) \cdot (x^2 + y^2)} - \frac{xy}{(x + \sqrt{x^2 + y^2}) \sqrt{(x^2 + y^2)^3}} = -\frac{y(\sqrt{x^2 + y^2} + x)}{(x + \sqrt{x^2 + y^2}) \sqrt{(x^2 + y^2)^3}} =$$

$$= -\frac{y}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}.$$

Перевіряємо рівняння, тобто $-\frac{y}{x^2 + y^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = -\frac{y}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}} \Rightarrow$

$$-\frac{y}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}} = -\frac{y}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}. \text{ Таким чином, отримали тотожність. Отже рівняння доведено.}$$

Примітка. Похідну $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ можна знаходити також і з похідної $\frac{\partial z}{\partial x}$, а потім продиференціювати по y , оскільки існує теорема о рівності змішаних похідних, тобто $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

14. Градієнт. Література: [16], розд. II, §3-4, стор. 185-187.

Градієнтом функції $z = f(x, y)$ в точці $M_0(x_0, y_0)$ називається вектор, координатами якого є частинні похідні функції, обчислені в точці M_0 , тобто

$$\overrightarrow{\text{grad} z} = f'_x(M_0)\vec{i} + f'_y(M_0)\vec{j}. \quad (3.9)$$

Приклад №13.3. Знайти градієнт функції $z = 2x^2 - y^2 + \cos(3y - 2x)$ в точці $A(1; 0)$.

Розв'язання. Знаходимо частинні похідні: $z'_x = 4x - \sin(3y - 2x) \cdot (-2)$ і $z'_y = -2y - \sin(3y - 2x) \cdot 3$.

Підставляємо точку $A(1; 0)$: $z'_x = 4 - 2\sin 2$ та $z'_y = 3\sin 2$. Запишемо градієнт (3.9):

$$\overrightarrow{\text{grad} z} = (4 - 2\sin 2)\vec{i} + 3\sin 2\vec{j}.$$

15. Екстремум функції багатьох змінних. Література: [16], розд. III, §9, стор. 188-191.

Нехай функція $z = f(x, y)$ визначена в області D .

Необхідна умова існування екстремуму функції $z = f(x, y)$: рівність частинних похідних нулю або нескінченності, тобто

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = \infty \\ \frac{\partial z}{\partial y} = \infty \end{cases}. \quad (3.10)$$

З розв'язку системи (3.10) знаходяться критичні точки екстремуму. Якщо позначити:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = A, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = B, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = C; \quad (3.11)$$

то маємо дискримінант:

$$\Delta = AC - B^2. \quad (3.12)$$

Достатня умова: Для визначення екстремуму, координати критичної точки підставляємо в дискримінант (3.12) і, якщо:

- 1) $\Delta = AC - B^2 > 0$, то функція $z = f(x, y)$ має екстремум, причому
при $A > 0, C > 0$ – маємо мінімум,
при $A < 0, C < 0$ – маємо максимум.
- 2) $\Delta = AC - B^2 < 0$, то функція $z = f(x, y)$ в критичній точці немає екстремуму;
- 3) $\Delta = AC - B^2 = 0$, то екстремум функції $z = f(x, y)$ в критичній точці може бути, а може й ні. У даному випадку потрібні додаткові дослідження.

Приклад №13.4. Знайти екстремум функції $z = x^3 - 3x^2y - y^3 - 3x + 3y + 1$.

Розв'язання. З необхідної умови існування екстремуму (3.10) знаходимо критичні точки:

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 6xy - 3 = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = -3x^2 - 3y^2 + 3 = 0 \end{cases} \quad (3.13)$$

Розв'язуємо систему (3.13), додамо рівняння, отже: $-6xy - 3y^2 = 0 \Rightarrow 2xy + y^2 = 0 \Rightarrow y(2x + y) = 0$. Тоді рівняння розпадається на два: $y = 0$, $y = -2x$. Знайдені "y" підставляємо у систему (3.13) по черзі і одержимо: $x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$. Отже отримали дві критичні точки $M_1(1; 0)$ і $M_2(-1; 0)$. А при $y = -2x$, одержимо $x^2 + 4x^2 - 1 = 0 \Rightarrow 5x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm(1/\sqrt{5})$, а $y = \mp(2/\sqrt{5})$, тобто маємо ще дві критичні точки $M_3(1/\sqrt{5}; -2/\sqrt{5})$ і $M_4(-1/\sqrt{5}; 2/\sqrt{5})$.

Знайдемо дискримінант (3.12), для цього виписуємо похідні другого порядку:

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x - 6y = A$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -6x = B$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -6y = C$, тоді $\Delta = -6y(6x - 6y) - 36x^2 = -36y(x - y) - 36x^2 = -36(yx - y^2 + x^2)$. У дискримінант по черзі підставляємо координати критичних точок.

Для точки $M_1(1; 0)$ одержимо $\Delta = -36 < 0$ – екстремуму немає.

Для точки $M_2(-1; 0)$: $\Delta = -36 < 0$ – екстремуму немає.

Для точки $M_3(1/\sqrt{5}; -2/\sqrt{5})$: $\Delta = 36 > 0$, причому $C > 0$. Отже в точці $M_3(1/\sqrt{5}; -2/\sqrt{5})$ є мінімум.

Для точки $M_4(-1/\sqrt{5}; 2/\sqrt{5})$: $\Delta = 36 > 0$, причому $C < 0$. Отже в точці $M_4(-1/\sqrt{5}; 2/\sqrt{5})$ є максимум.

Контрольні питання

1. Означення функції багатьох змінних.
2. Частинні похідні функції багатьох змінних.
3. Частинні похідні вищих порядків.
4. Теорема про рівності змішаних похідних.
5. Означення градієнта в точці.
6. Дослідження функції двох змінних на екстремум.
7. Необхідна умова існування екстремуму функції багатьох змінних.
8. Достатня умова існування екстремуму функції багатьох змінних.

Завдання до практичного заняття №13

В задачах 13.1-13.48 знайти частинні похідні функцій:

- | | | |
|--------------------------------------|---|--|
| 13.1 $z = x^3 + 3xy^2 + y^3$ | 13.2 $z = e^{2x} \cos 4y + x^{2y}$ | 13.3 $z = (5x^2y - y^3 + 7)^3$ |
| 13.4 $z = x - y$ | 13.5 $z = x^3y - y^3x$ | 13.6 $z = \sqrt{x^2 + y^2} + e^{xy}$ |
| 13.7 $z = \frac{u}{v} + \frac{v}{u}$ | 13.8 $z = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \sin 5y$ | 13.9 $z = \arcsin(2x - 3y) + \ln \operatorname{tg}(y/x)$ |
| 13.10 $z = (x^2 + y^2)^3$ | 13.11 $u = \ln(x + y + z)$ | 13.12 $z = \operatorname{tg} 2^{xy} + \sin(x^3 + y^2)$ |
| 13.13 $u = xyz$ | 13.14 $u = xy + yz + xz$ | 13.15 $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ |

- 13.16 $u = e^{x(x^2+y^2+z^2)}$ 13.17 $u = \sin(x^2+y^2+z^2)$ 13.18 $u = x^3 + yz^2 + 3yx - x + z$
 13.19 $z = x\sqrt{y} + \frac{y}{3\sqrt{x}}$ 13.20 $z = \ln(2^x + 3^y) + \frac{1}{xy}$ 13.21 $z = \sin \frac{1}{x+y} + \operatorname{arctg} \frac{x^2}{y}$
 13.22 $z = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$ 13.23 $z = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{y}$ 13.24 $z = \frac{1}{\ln(x^2 + y^2)} + \frac{\operatorname{ctg}(x+y)}{x-y}$
 13.25 $u = x^{y^2}$ 13.26 $z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$ 13.27 $w = xyz + yzv + zvx + vxy$
 13.28 $z = \operatorname{arctg}(x/y)$ 13.29 $z = 1/\operatorname{arctg}(x/y)$ 13.30 $z = \lg(x^2 - 5xy) - x/(x+y)$
 13.31 $z = x^y + e^{-xy}$ 13.32 $z = \ln(x^2 + y^2)$ 13.33 $z = \ln(x + \ln y)$
 13.34 $z = \operatorname{arctg} \frac{u+w}{v-w}$ 13.35 $z = \arcsin \frac{\sqrt{x^2 - y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ 13.36 $z = \ln \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{\sqrt{x^2 + y^2} + x}$
 13.37 $z = \sin \frac{x}{y} \cos \frac{y}{x}$ 13.38 $z = \left(\frac{1}{3}\right)^{y/x}$ 13.39 $u = \frac{4}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}$
 13.40 $z = xy \ln(x+y)$ 13.41 $z = xye^{\sin xy}$ 13.42 $z = \operatorname{arctg} \sqrt{x^y}$
 13.43 $u = (\sin x)^{y^2}$ 13.44 $u = \operatorname{arctg}(x-y)^2$ 13.45 $u = x^{y^{1/2}}$
 13.46 $z = (2x+y)^{2x+y}$ 13.47 $z = (1+xy)^y$ 13.48 $u = x^{xy}$

В задачах 13.49-13.63 обчислити диференціал dz для функцій двох змінних:

- 13.49 $z = x^2 + y^2 + x^y$ 13.50 $z = \ln(x+3y) + \sqrt{x-2y}$ 13.51 $z = xy^3 - 3x^2y^2 + 2y^4$
 13.52 $z = \frac{x+y}{x-y}$ 13.53 $z = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ 13.54 $z = \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}$
 13.55 $z = \arcsin(x/y)$ 13.56 $z = 0,5 \ln(x^2 + y^2)$ 13.57 $z = x^2y^4 - x^3y^3 + 2x^4y^2$
 13.58 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 13.59 $z = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}$ 13.60 $u = x^{y^2}$
 13.61 $z = \sin(xy)$ 13.62 $z = \operatorname{arctg}(xy)$ 13.63 $u = \ln(x^3 + 2y^3 - z^3)$

В задачах 13.64-13.67 знайти $\overline{\operatorname{grad} z}$ для даних функцій в заданих точках.

- 13.64 $z = x^2 + y^2$, $M(3; 2)$. 13.65 $z = \sqrt{4 + x^2 + y^2}$, $A(2; 1)$.
 13.66 $u = \cos(xyz + 1)$, $M(2; -1; 1)$. 13.67 $z = \operatorname{arctg}(y/x)$, $C(1; 1)$, $M(1; -1)$.

В задачах 13.68-13.69 знайти проєкції градієнта для даних функцій в заданих точках.

- 13.69. $z = x^2 - 2yx + 3y - 1$; $B(1; 2)$. 13.70. $u = 5x^2y - 3xy^3 + y^4$; $C(3; 2)$.

В задачах 13.70-13.71 знайти кут між градієнтами даної функції в заданих точках:

- 13.70 $z = \arcsin \frac{x}{x+y}$; $A(1; 1)$, $B(3; 4)$. 13.71 $u = x^2 + y^2 - z^2$; $A(1; 0; 0)$, $B(0; 1; 0)$.

13.72 Дані функції $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ і $z = x - 3y + \sqrt{3xy}$. Знайти кут між градієнтами цих функцій в т. $C(3; 4)$.

13.73 Довести, що $\overline{\operatorname{grad} z} = \frac{1}{x^2 + y^2}(-iy + xj)$, якщо $z = \operatorname{arctg}(y/x)$.

13.74 Знайти градієнт функції $z = \operatorname{arctg}(x/y)$ та його довжину в точці $A(1; \sqrt{3})$.

13.75 Знайти точку, в якій модуль градієнту функції $z = (x^2 + y^2)^{3/2}$ дорівнює 2.

В задачах 13.76-13.77 знайти точку, в якій градієнт даної функції дорівнює заданому вектору:

13.76 $z = \ln(x + 1/y)$; $\vec{i} - \frac{16}{9}\vec{j}$.

13.77 $z = x^2 - 2xy + 3y - 1$; $\vec{j} - 2\vec{i}$.

В задачах 13.78-13.86 знайти всі другі частинні похідні від заданих функцій:

13.78 $z = \sin^2(3x + 4y)$

13.79 $z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$

13.80 $z = e^{xe^y}$

13.81 $z = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2 + y^2)^3}$

13.82 $z = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}$

13.83 $z = \frac{x-y}{x+y}$

13.84 $z = y^{\ln x}$

13.85 $z = \arcsin(xy)$

13.86 $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 2xz}$

В задачах 13.87-13.91 знайти похідну заданого порядку від даної функції.

13.87 $\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}$ $u = e^{xy^2}$

13.88 $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$ $z = \ln(x^2 + y^2)$

13.89 $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$ $z = \sin(xy)$

13.90 $\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y \partial z}$ $w = e^{xyz}$

13.91 $\frac{\partial^6 v}{\partial x \partial y^3 \partial z^2}$ $v = x^m y^n z^p$

В задачах 13.92-13.98 довести задану рівність.

13.92 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, якщо $z = x^3 + xy^2 - 5xy^3 + y^5$.

13.93 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, якщо $z = x^x$.

13.94 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$, якщо $u = \ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

13.95 $\frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x} = \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$, якщо $z = \operatorname{arctg}(y/x)$.

13.96 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, якщо $z = e^x(\cos y + x \sin y)$.

13.97 $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 1$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 = 0$, якщо $z = \ln(e^x + e^y)$.

13.98 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$, якщо $z = e^x(x \cos y - y \sin y)$.

В задачах 13.99-13.119 знайти похідну, від неявно заданої функції:

13.99 $4y^2 - x^2 + 4 = 0$

13.100 $\ln xy + xy = 0$

13.101 $x^2 - 3yx + 4y^2 - 2x + 3y + 2 = 0$

13.102 $x + y = e^{y/x}$

13.103 $\ln(x/y) = e^{y+x} - 4$

13.104 $x^{1/2} + y^{1/2} = a^{1/2}$

13.105 $y = 1 + xe^y$

13.106 $y^3 - 3y + 2ax = 0$

13.107 $y^2 \cos x = a^2 \sin 3x$

13.108 $x^4 + y^4 = x^2 y^2$

13.109 $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$

13.110 $\sin(yx) + \cos(yx) = \operatorname{tg}(y+x)$

13.111 $x^y = y^x$

13.112 $y = \cos(y+x)$

13.113 $x - y = \arcsin x - \arcsin y$

13.114 $2y \ln y = x$

13.115 $2^x + 2^y = 2^{x+y}$

13.116 $x \sin y - \cos y + \cos 2y = 0$

13.117 $\cos(yx) = x$

13.118 $y = x + \operatorname{arctg} y$

13.119 $y \sin x - \cos(x-y) = 0$

В задачах 13.120-13.161 дослідити на екстремум функції:

13.120 $z = 2y^2 + (x-1)^2$

13.121 $z = 2x + 4y - 2xy$

13.122 $z = (x-1)^2 + (y-1)^2 - 4$

13.123 $z = yx(4-x-y)$

13.124 $z = x^2 - 2yx + 3y^2 - 4$

13.125 $z = x^3 + yx - y^2 - 2x + 3y$

13.126 $z = y^3 + 3yx^2 + 6y^2$

13.127 $z = (x^2 - 2x)(y^2 - 4y)$

13.128 $z = x^2 + y^2 - 2 \ln x - 4y$

13.129 $z = 4yx + 2x^2 - y^2$

13.130 $z = (8x - x^2)(8y - y^2)$

13.131 $z = 2yx - 3x^2 - 2y^2 + 10$

13.132 $z = e^x(x + y^2 + 2y)$

13.133 $z = y\sqrt{1+x} + x\sqrt{1+y}$

13.134 $u = 2x^2 + y^2 + 2z - xy - xz$

13.135 $z = x^3 - 3yx - y^3$

13.136 $z = 4(x-y) - x^2 - y^2$

13.137 $z = x^2 + y^2 + x + xy - y + 1$

$$13.138 \quad z = x^3 + y^3 + 3yx$$

$$13.141 \quad z = y^3 + 3x^2y - 4$$

$$13.144 \quad z = xy(1 - x - y)$$

$$13.147 \quad z = x^3y^2(6 - x - y)$$

$$13.150 \quad z = 3xy - 4x + 5y$$

$$13.153 \quad z = 1/x + 1/y - xy$$

$$13.156 \quad z = 3yx^2 + y^3 - 4$$

$$13.159 \quad z = e^{x/2}(x + y^2)$$

$$13.139 \quad z = 2x^3 + y^2 + yx + 5x^2$$

$$13.142 \quad z = x^3 + 8y^3 - yx + 1$$

$$13.145 \quad z = x^3 + y^3 - 9yx + 27$$

$$13.148 \quad z = 3x^2 + 2y^2 - 4yx + 2x$$

$$13.151 \quad z = 2yx - 3x^2 - 3y^2 + 10$$

$$13.154 \quad z = xy^2 - y^3 + 3\ln x$$

$$13.157 \quad z = 3x^2 + 3xy - y^3 - 3x$$

$$13.160 \quad z = e^{-x^2-y^2}(2x^2 + y^2)$$

$$13.140 \quad z = x^2 - 2y^2 + 4xy - 3y$$

$$13.143 \quad z = x^2 + y^2 + xy - y + x + 1$$

$$13.146 \quad z = x^2 + y^2 + xy + 3y + 2x$$

$$13.149 \quad z = x^3 - y^3 + 3yx - 6x + 6y$$

$$13.152 \quad z = 2x^2 + y^2 + xy^2$$

$$13.155 \quad z = 6x + 1 - x^2 - y^2 - xy$$

$$13.158 \quad z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$$

$$13.161 \quad z = x^2 - 3xy + y^2 - 2x + y$$

Модуль 4. ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ №14

Тема: Невизначений інтеграл. Методи інтегрування.

1. Поняття невизначеного інтегралу. Його властивості. Класи інтегрованих функцій. Література: [16], розд. IV, §2, стор. 205-208.

Наведемо таблицю невизначених інтегралів

№ п/п	$\int f(U) dU$	$F(U) + C$	№ п/п	$\int f(U) dU$	$F(U) + C$
1.	$\int dU$	$U + C$	2.	$\int f(kU) dU$	$F(kU)/k + C$
3.	$\int \frac{1}{U^2} dU$	$-\frac{1}{U} + C$	4.	$\int U^n dU$	$\frac{U^{n+1}}{n+1} + C$
5.	$\int \frac{dU}{U}$	$\ln U + C$	6.	$\int \frac{dU}{U^2 - a^2}$	$\frac{1}{2a} \ln \left \frac{U-a}{U+a} \right + C$
7.	$\int a^U dU$	$a^U / \ln a + C$	8.	$\int e^U dU$	$e^U + C$
9.	$\int \sin U dU$	$-\cos U + C$	10.	$\int \cos U dU$	$\sin U + C$
11.	$\int \frac{dU}{\cos^2 U}$	$\tan U + C$	12.	$\int \frac{dU}{\sin^2 U}$	$-\cot U + C$
13.	$\int \tan U dU$	$-\ln \cos U + C$	14.	$\int \cot U dU$	$\ln \sin U + C$
15.	$\int \frac{dU}{a^2 + U^2}$	$\frac{1}{a} \arctg \frac{U}{a} + C$	16.	$\int \frac{dU}{\sqrt{a^2 - U^2}}$	$\arcsin \frac{U}{a} + C$
17.	$\int \frac{dU}{\sqrt{U^2 \pm a^2}}$	$\ln U + \sqrt{U^2 \pm a^2} + C$	18.	$\int \frac{dU}{U^2 - a^2}$	$\frac{1}{2a} \ln \left \frac{U-a}{U+a} \right + C$

2. Основні методи інтегрування. Література: [16], розд. IV, §4-6, стор. 208-217.

З основних методів інтегрування виділимо такі методи:

1. Метод інтегрування частинами.

Формула інтегрування частинами має вигляд:

$$\int U dV = U \cdot V - \int V dU. \quad (4.1)$$

Виділимо три класи функцій, для яких необхідно користуватися формулою (4.1):

I клас – якщо підінтегральна функція така:

$$x^n \cdot \begin{cases} \sin x \\ \cos x \\ \frac{1}{\sin^2 x} \\ \frac{1}{\cos^2 x} \\ a^x \\ e^x \end{cases} \quad \text{В цьому випадку приймемо } x^n = U, \text{ а } \begin{cases} \sin x dx \\ \cos x dx \\ dx \\ \sin^2 x dx \\ \cos^2 x dx \\ a^x dx \\ e^x dx \end{cases} \quad \text{приймаємо за } dV. \quad (4.2)$$

II клас – якщо підінтегральна функція така:

$$x^n \cdot \begin{cases} \arcsin x \\ \arccos x \\ \operatorname{arctg} x \\ \operatorname{arcc} \operatorname{tg} x \\ \ln x \end{cases}, \text{ тоді } U = \begin{cases} \arcsin x \\ \arccos x \\ \operatorname{arctg} x \\ \operatorname{arcc} \operatorname{tg} x \\ \ln x \end{cases}, \text{ а } dV = x^n dx. \quad (4.3)$$

III клас – якщо маємо такі підінтегральні функції:

$$\sin x \cdot e^x, \cos x \cdot e^x, \sin x \cdot a^x, \cos x \cdot a^x, \ln |\sin x|, \ln |\cos x|, \quad (4.4)$$

тоді треба інтегрувати два рази частинами за формулою (4.1), а потім отримати вихідний інтеграл і розв'язати як рівняння.

Приклад №14.1. Визначити інтеграл $\int x \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx$.

Розв'язання. Спочатку позбавимось від ірраціональності і введемо заміну: $\sqrt{x} = t \Rightarrow$

$$\int x \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx = \left| \begin{array}{l} \sqrt{x} = t \\ x = t^2 \\ dx = 2t dt \end{array} \right| = \int t^2 \cdot \operatorname{arctg} t \cdot 2t dt = 2 \int t^3 \cdot \operatorname{arctg} t dt. \text{ Підінтегральна функція відноситься до}$$

$$\text{II класу, отже, за (4.3): } 2 \int t^3 \operatorname{arctg} t dt = \left| \begin{array}{l} U = \operatorname{arctg} t \\ dU = \frac{1}{1+t^2} dt \\ t^3 dt = dV \\ V = \int t^3 dt = \frac{t^4}{4} \end{array} \right| = 2 \left[\operatorname{arctg} t \cdot \frac{t^4}{4} - \int \frac{t^4}{4} \cdot \frac{dt}{1+t^2} \right] = \operatorname{arctg} t \cdot \frac{t^4}{2} -$$

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{2} \int \frac{(t^4 - 1) + 1}{1+t^2} dt = \frac{t^4}{2} \cdot \operatorname{arctg} t - \frac{1}{2} \int (t^2 - 1) dt - \frac{1}{2} \int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{t^4}{2} \cdot \operatorname{arctg} t - \frac{1}{2} \cdot \frac{t^3}{3} + \frac{1}{2} t - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} t + C = \\ & = \frac{(\sqrt{x})^4}{2} \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \frac{(\sqrt{x})^3}{6} + \frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \sqrt{x} + C = \frac{x^2}{2} \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \frac{\sqrt{x^3}}{6} + \frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \sqrt{x} + C. \end{aligned}$$

Приклад №14.2. Визначити інтеграл $\int \sin 2x \cdot e^{3x} dx$.

Розв'язання. Підінтегральна функція належить до третього класу функцій (див. 4.4).

За U візьмемо функцію $\sin 2x$, а все що залишилось – за dV , тобто $\int \sin 2x \cdot e^{3x} dx =$

$$\left| \begin{array}{l} \sin 2x = U; \quad dU = \cos 2x \cdot 2 dx \\ e^{3x} = dV; \quad V = \int e^{3x} dx = e^{3x}/3 \end{array} \right| = \sin 2x \cdot e^{3x}/3 - \int e^{3x}/3 \cdot \cos 2x \cdot 2 dx = \sin 2x \cdot e^{3x}/3 - 2/3 \cdot \int e^{3x} \cdot \cos 2x dx \quad (*)$$

$$\begin{aligned} \text{Останній інтеграл знову інтегруємо частинами: } \int e^{3x} \cdot \cos 2x dx &= \left| \begin{array}{l} \cos 2x = U; \quad dU = -\sin 2x \cdot 2 dx \\ e^{3x} = dV; \quad V = \int e^{3x} dx = e^{3x}/3 \end{array} \right| \\ &= \cos 2x \cdot e^{3x}/3 - \int e^{3x}/3 \cdot (-\sin 2x) \cdot 2 dx = \cos 2x \cdot e^{3x}/3 + 2/3 \cdot \int e^{3x} \cdot \sin 2x dx. \end{aligned}$$

$$\text{Отриманий результат підставляємо у вираз (*) і одержуємо: } \int \sin 2x \cdot e^{3x} dx = \sin 2x \cdot e^{3x}/3 - 2/3 \cdot (\cos 2x \cdot e^{3x}/3 + 2/3 \cdot \int e^{3x} \cdot \sin 2x dx) = \sin 2x \cdot e^{3x}/3 - 2/9 \cdot \cos 2x \cdot e^{3x} - 4/9 \cdot \int \sin 2x \cdot e^{3x} dx.$$

$$\begin{aligned} \text{Таким чином, у правій частині отримали вихідний інтеграл. Далі розв'язуємо як рівняння:} \\ \int \sin 2x \cdot e^{3x} dx + 4/9 \cdot \int \sin 2x \cdot e^{3x} dx = \sin 2x \cdot e^{3x}/3 - 2/9 \cdot \cos 2x \cdot e^{3x} \Rightarrow 13/9 \cdot \int \sin 2x \cdot e^{3x} dx = \sin 2x \cdot e^{3x}/3 - 2/9 \cdot \cos 2x \cdot e^{3x} \Rightarrow \int \sin 2x \cdot e^{3x} dx = 9/13 \cdot (\sin 2x \cdot e^{3x}/3 - 2/9 \cdot \cos 2x \cdot e^{3x}) = 3/13 \cdot \sin 2x \cdot e^{3x} - 2/13 \cdot \cos 2x \cdot e^{3x} + C. \end{aligned}$$

2. Інтегрування функцій, у знаменнику яких квадратний тричлен.

Розглянемо два випадки таких інтегралів

$$\text{I) } \int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} dx;$$

$$\text{II) } \int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx.$$

Щоб проінтегрувати інтеграли, необхідно виконати такі дії:

– I) знайти похідну від знаменнику підінтегрального виразу (I), у випадку (II) – від підко-

реневого виразу;

– 2) у чисельнику виділити знайдену похідну;

– 3) розбити інтеграл на інтеграли:

– у інтегралі (I) буде дріб, чисельник якого точна похідна від знаменника. Такий інтеграл дорівнює натуральному логарифму від знаменника (у інтегралі (II) перший інтеграл буде дорівнювати подвоєному знаменнику);

– другий інтеграл буде мати вигляд: $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} \left(\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \right)$, який знаходиться

методом виділення повного квадрату у знаменнику та зведенням його до табличного.

Знаходження первісної таких інтегралів розглянемо більш детально. Отже, нехай є:

$\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} dx$. Похідна знаменника має вигляд: $(ax^2+bx+c)' = 2ax+b$. Для перетворення

чисельника на похідну від знаменника, винесемо за інтеграл A , а потім весь інтеграл помно-

жимо і поділимо на $2a$. У чисельник додамо і віднімемо b : $A \cdot \frac{1}{2a} \int \frac{(x+B/A) \cdot 2a+b-b}{ax^2+bx+c} dx =$

$= \frac{A}{2a} \int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c} dx + \frac{A}{2a} (B \cdot 2a/A - b) \int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{A}{2a} \ln|ax^2+bx+c| + \frac{A}{2a} (B \cdot 2a/A - b) \cdot I$, де

$I = \int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$. В інтегралі I виділимо в знаменнику повний квадрат:

$a \left[x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a} x + \left(\frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a} \right] = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a} \right]$. Введемо заміну $x + b/2a = t$,

тоді $dx = dt$. Позначивши $\frac{c}{a} - \left(\frac{b}{2a} \right)^2 = \pm d^2$, одержимо $I = \int \frac{dt}{a \left[t^2 - \left(\frac{b}{2a} \right)^2 + c/a \right]} = \frac{1}{a} \int \frac{dt}{t^2 \pm d^2}$.

Останній інтеграл є табличним.

Приклад №14.3. Визначити інтеграл $\int \frac{3x+2}{5x^2-7x+4} dx$.

Розв'язання. За приведеним алгоритмом перетворимо даний інтеграл. Для цього знайде-

мо похідну від знаменника: $(5x^2-7x+4)' = 10x-7$ та перетворимо чисельник: $\int \frac{3x+2}{5x^2-7x+4} dx =$

$= 3 \cdot \frac{1}{10} \int \frac{(x+2/3) \cdot 10-7+7}{5x^2-7x+4} dx = \frac{3}{10} \int \frac{10x-7}{5x^2-7x+4} dx + \frac{3}{10} \left(\frac{20}{3} + 7 \right) \int \frac{dx}{5x^2-7x+4}$. Попередньо виді-

ливши точний квадрат в знаменнику $5 \left[x^2 - 2 \cdot \frac{7}{10} x + \left(\frac{7}{10} \right)^2 - \left(\frac{7}{10} \right)^2 + \frac{4}{5} \right] = 5[(x-0,7)^2 - (0,7)^2 + 0,8] =$

$= 5[(x-0,7)^2 + 0,31]$ і зробивши заміну $x-0,7 = t$, $dx = dt$, одержимо: $0,3 \cdot \ln|5x^2-7x+4| +$

$+ 4,1 \cdot \frac{1}{5} \int \frac{dt}{t^2+0,31} = 0,3 \cdot \ln|5x^2-7x+4| + 0,82 \cdot \frac{1}{\sqrt{0,31}} \int \frac{dt}{t^2+0,31} = 0,3 \cdot \ln|5x^2-7x+4| +$

$+ \frac{41}{\sqrt{31}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{0,31}} + C = 0,3 \cdot \ln|5x^2-7x+4| + \frac{41}{\sqrt{31}} \operatorname{arctg} \frac{x-0,7}{\sqrt{0,31}} + C = 0,3 \cdot \ln|5x^2-7x+4| +$

$+ \frac{41}{\sqrt{31}} \operatorname{arctg} \frac{10x-7}{\sqrt{31}} + C$.

Приклад №14.4. Визначити інтеграл $\int \frac{3x+5}{\sqrt{4-3x^2-11x}} dx$.

Розв'язання. Аналогічно розв'язується інтеграл за приведеним алгоритмом. Знайдемо точну похідну від підкореневого виразу та виділимо її в чисельнику: $(4-3x^2-11x)' = -6x-11 \Rightarrow$

$$-\frac{1}{2} \int \frac{(3x+5) \cdot (-2)}{\sqrt{4-3x^2-11x}} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{-6x-11+11}{\sqrt{4-3x^2-11x}} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{-6x-11}{\sqrt{4-3x^2-11x}} dx - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{4-3x^2-11x}} =$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{4-3x^2-11x} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{4-3\left(x^2+2 \cdot \frac{11}{6}x + \left(\frac{11}{6}\right)^2 - \left(\frac{11}{6}\right)^2\right)}} = -\sqrt{4-3x^2-11x} -$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{3}} \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{4}{3} - \left(x + \frac{11}{6}\right)^2 + \left(\frac{11}{6}\right)^2}} = -\sqrt{4-3x^2-11x} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{169}{36} - \left(x + \frac{11}{6}\right)^2}} =$$

$$= -\sqrt{4-3x^2-11x} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \arcsin \frac{x + \frac{11}{6}}{\frac{13}{6}} + C = -\sqrt{4-3x^2-11x} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \arcsin \frac{6x+11}{13} + C.$$

3. Інтегрування раціональних дробів

Розглянемо раціональний дріб:

$$\frac{Q(x)}{F(x)} = \frac{A_0 + A_1x + A_2x^2 + \dots + A_nx^n}{B_0 + B_1x + B_2x^2 + \dots + B_mx^m} \quad (4.5)$$

Зауваження. Припускається, що дріб (4.5) є правильним, тобто степінь чисельника менше степеня знаменника, у протилежному випадку потрібно виділити цілу частину, тобто поділити чисельник на знаменник.

Оскільки будь-який раціональний дріб можна розкласти на суму простіших дробів, то потрібно знайти корені знаменника виразу (4.5), тобто $F(x) = B_0 + B_1x + B_2x^2 + \dots + B_mx^m = 0$. При цьому можуть бути такі випадки:

1) функція $F(x)$ має m різних дійсних коренів, тоді $B_0 + B_1x + B_2x^2 + \dots + B_mx^m = B_m(x-x_1) \cdot (x-x_2) \cdot \dots \cdot (x-x_m)$. Вихідний дріб (4.5) можна представити: $\frac{A_0 + A_1x + A_2x^2 + \dots + A_nx^n}{B_m(x-x_1) \cdot (x-x_2) \cdot \dots \cdot (x-x_m)} =$

$$= \frac{C_1}{(x-x_1)} + \frac{C_2}{(x-x_2)} + \dots + \frac{C_m}{(x-x_m)}, \text{ де } C_i = \lim_{x \rightarrow x_i} \frac{Q(x)}{B_m(x-x_i)} \cdot (x-x_i);$$

2) функція $F(x)$ має k кратних дійсних коренів, а всі інші – різні, тоді $\frac{A_0 + A_1x + A_2x^2 + \dots + A_nx^n}{B_m(x-x_1)^k \cdot \dots \cdot (x-x_m)} = \frac{C_1}{(x-x_1)^k} + \frac{C_2}{(x-x_1)^{k-1}} + \dots + \frac{C_k}{(x-x_1)} + \frac{C_{k+1}}{(x-x_2)} + \dots$, де для кратних

коренів $i = \overline{1, k}$: $C_i = \lim_{x \rightarrow x_1} \frac{1}{(i-1)!} \left[\frac{Q(x)}{F(x)} \cdot (x-x_1)^k \right]^{(i-1)}$;

3) функція $F(x)$ має комплексні корені, тоді $\frac{Q(x)}{F(x)} = \frac{Q(x)}{(a_1x^2 + b_1x + c_1)(a_2x^2 + b_2x + c_2) \dots} =$

$$= \frac{C_1x + D_1}{a_1x^2 + b_1x + c_1} + \frac{C_2x + D_2}{a_2x^2 + b_2x + c_2} + \dots. \text{ В даному випадку необхідно привести дроб до загально-$$

ного знаменника, при цьому в чисельнику одержимо багаточлен $M(x)$. Після цього прирівняти чисельники вихідного та одержаного дробів, що можуть дорівнювати один одному тільки тоді, коли дорівнюють коефіцієнти при однакових степенях. Таким чином складається система рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів C_i та D_i .

Приклад №14.5. Визначити інтеграл $\int \frac{3x-4}{x^4+4x^3+5x^2} dx$.

Розв'язання. Підінтегральна функція є правильним раціональним дробом, оскільки степінь чисельника дорівнює 1, а знаменника – 4. Знаходимо корені знаменника: $x^4 + 4x^3 + 5x^2 = x^2(x^2 + 4x + 5)$. В даному випадку багаточлен має один дійсний корінь $x = 0$ другої кратності і пару комплексних коренів, тоді вихідний раціональний дріб можна записати так:

$$\frac{3x-4}{x^4+4x^3+5x^2} = \frac{C_1}{x^2} + \frac{C_2}{x} + \frac{C_3x+D_3}{x^2+4x+5}$$

Знайдемо коефіцієнти C_1 і C_2 , враховуючи, що корінь кратний ($k = 2$), тобто при $i = 1$:

$$C_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(1-i)!} \left[\frac{3x-4}{x^2(x^2+4x+5)} \cdot (x-0)^2 \right]^{(1-1)} . \text{ Оскільки } 0! = 1, \text{ а нульова похідна - це і є сама}$$

$$\text{функція, одержимо } C_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x-4}{x^2(x^2+4x+5)} \cdot x^2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x-4}{x^2+4x+5} = -4/5 = -0,8. \text{ При } i = 2:$$

$$C_2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(2-1)!} \left[\frac{3x-4}{x^2(x^2+4x+5)} \cdot (x-0)^2 \right]^{(2-1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1!} \left[\frac{3x-4}{(x^2+4x+5)} \right]' =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3(x^2+4x+5) - (2x+4)(3x-4)}{(x^2+4x+5)^2} = \frac{31}{25}.$$

Для знаходження коефіцієнтів C_3 і D_3 приведемо розкладений дріб до загального знаменника: $\frac{C_1}{x^2} + \frac{C_2}{x} + \frac{C_3x+D_3}{x^2+4x+5} = \frac{C_1(x^2+4x+5) + C_2x(x^2+4x+5) + (C_3x+D_3)x^2}{x^2(x^2+4x+5)}$. Розкриваємо

дужки и приводимо подібні доданки: $\frac{(C_2+C_3)x^3 + (C_1+4C_2+D_3)x^2 + (4C_1+5C_2)x + 5C_1}{x^2(x^2+4x+5)}$. При-

рівнюємо коефіцієнти при степенях одержаного чисельника та вихідного і запишемо систему:

$$\begin{cases} C_2 + C_3 = 0 \\ C_1 + 4C_2 + D_3 = 0 \\ 4C_1 + 5C_2 = 3 \\ 5C_1 = -4 \end{cases} . \text{ Враховуючи знайдені коефіцієнти } C_1 \text{ і } C_2, \text{ одержимо:}$$

$$\begin{cases} \frac{31}{25} + C_3 = 0 \\ -\frac{4}{5} + 4 \cdot \frac{31}{25} + D_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_3 = -\frac{31}{25} \\ D_3 = -\frac{104}{25} \end{cases}$$

Підставляючи всі знайдені коефіцієнти, запишемо три інтеграли: $\int \frac{3x-4}{x^4+4x^3+5x^2} dx =$

$$= -\frac{4}{5} \int \frac{dx}{x^2} + \frac{31}{25} \int \frac{dx}{x} - \frac{1}{25} \int \frac{31x+104}{x^2+4x+5} dx = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{x} + \frac{31}{25} \ln|x| - \frac{31}{25} \int \frac{x+104/31}{x^2+4x+5} dx + C. \text{ Останній інтег-}$$

рал береться аналогічно як у прикладі 6.3, тобто $\int \frac{x+104/31}{x^2+4x+5} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x+4-4+208/31}{x^2+4x+5} dx =$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{2x+4}{x^2+4x+5} dx + \frac{42}{31} \int \frac{dx}{x^2+4x+5} = \frac{1}{2} \ln|x^2+4x+5| + \frac{42}{31} \int \frac{dx}{(x+2)^2+1} = \frac{1}{2} \ln|x^2+4x+5| +$$

$$+\frac{42}{31}\operatorname{arctg}(x+2)+C.$$

Таким чином, в результаті маємо: $\frac{4}{5x} + \frac{31}{25} \ln|x| - \frac{31}{50} \ln|x^2 + 4x + 5| - \frac{42}{25} \operatorname{arctg}(x+2) + C$.

Контрольні питання

1. Невизначений інтеграл та його властивості.
2. Основна таблиця інтегралів.
3. Інтегрування методом заміни змінної.
4. Інтегрування частинами.
5. Інтегрування функцій, у знаменнику яких квадратний тричлен.
6. Інтегрування найпростішого раціонального дробу.

Завдання до практичного заняття №14

В задачах 14.1-14.59 знайти значення інтегралів за таблицею

14.1 $\int (2x-3)^{99} dx$	14.2 $\int 3,4x^{-0,17} dx$	14.3 $\int (x+1)^{15} dx$	14.4 $\int \frac{dx}{2\sqrt{x}}$
14.5 $\int \sin(2x-3) dx$	14.6 $\int \lg(1-3x) dx$	14.7 $\int \operatorname{ctg} 3x dx$	14.8 $\int \cos(1-2x) dx$
14.9 $\int \operatorname{ctg}(2x+1) dx$	14.10 $\int (2x^{-1,2} + 3x^{-0,8} - 5x^{0,38}) dx$	14.11 $\int [5\cos x + 2 - 3x^2 + 1/x - 4/(x^2+1)] dx$	
14.12 $\int \sqrt{8-2x} dx$	14.13 $\int \sqrt[5]{(8-3x)^6} dx$	14.14 $\int \frac{dx}{x^2}$	14.15 $\int (e^{-2x} - e^{-3x}) dx$
14.16 $\int 10^x dx$	14.17 $\int e^{-3x+1} dx$	14.18 $\int (4^{3x} + 3^{-x}) dx$	14.19 $\int (2^x - 3^x)^2 dx$
14.20 $\int \frac{dx}{2x-1}$	14.21 $\int \frac{dx}{(2x-3)^5}$	14.22 $\int \sqrt{x} dx$	14.23 $\int (\sqrt{x}-1)(x-\sqrt{x}+1) dx$
14.24 $\int \frac{dx}{2+3x^2}$	14.25 $\int \frac{dx}{\sqrt{4+9x^2}}$	14.26 $\int \frac{dx}{\sqrt{16-25x^2}}$	14.27 $\int \frac{dx}{\sqrt{1-(2x+3)^2}}$
14.28 $\int \frac{dx}{16x^2-9}$	14.29 $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-2}}$	14.30 $\int \frac{dx}{(x-1)^2+4}$	14.31 $\int (1+\sin 4x + \cos 7x) dx$
14.32 $\int \frac{dx}{\sqrt{1-25x^2}}$	14.33 $\int \frac{dx}{1+9x^2}$	14.34 $\int \frac{dx}{2x^2-9}$	14.35 $\int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}$
14.36 $\int \frac{dx}{\sqrt{3-3x^2}}$	14.37 $\int \frac{x^2+3}{x^2-1} dx$	14.38 $\int \frac{x+2}{\sqrt{x}} dx$	14.39 $\int \frac{\sqrt{x}-2\sqrt{x^2+1}}{4\sqrt{x}} dx$
14.40 $\int \frac{x^2 dx}{1+x^2}$	14.41 $\int \frac{x^2}{1-x^2} dx$	14.42 $\int \left(\frac{1-z}{z}\right)^2 dz$	14.43 $\int \frac{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}} dx$
14.44 $\int \frac{(1-x)^2}{x\sqrt{x}} dx$	14.45 $\int \frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}} dx$	14.46 $\int \frac{(1+\sqrt{x})^3}{\sqrt[3]{x}} dx$	14.47 $\int \frac{\sqrt{x}-x^3 e^x + x^2}{x^3} dx$
14.48 $\int \frac{e^{2x}-1}{e^x} dx$	14.49 $\int \frac{x}{x+4} dx$	14.50 $\int \frac{3+x}{3-x} dx$	14.51 $\int [\cos(2x-\pi/4)]^{-2} dx$
14.52 $\int \frac{x}{2x+1} dx$	14.53 $\int \frac{(2x-1)dx}{x-2}$	14.54 $\int \frac{x+2}{2x-1} dx$	14.55 $\int \frac{(1+x)^2 dx}{x^2+1}$
14.56 $\int \frac{x^2-1}{x^2+1} dx$	14.57 $\int \frac{x^4}{1-x} dx$	14.58 $\int \frac{x^4}{x^2+1} dx$	14.59 $\int \frac{3 \cdot 2^x - 2 \cdot 3^x}{2^x} dx$

В задачах 14.60-14.72 знайти значення інтегралу за правилом точної похідної:

14.60	$\int \frac{x^3}{1+x^4} dx$	14.61	$\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$	14.62	$\int \frac{e^x dx}{2+e^x}$	14.63	$\int \frac{e^x dx}{2+e^x}$
14.64	$\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{4+x^5}}$	14.65	$\int \frac{x^3 dx}{\sqrt[3]{x^4+1}}$	14.66	$\int \frac{(6x-5)dx}{2\sqrt{3x^2-5x+6}}$	14.67	$\int \frac{dx}{x}$
14.68	$\int \frac{x^2 dx}{x^3+1}$	14.69	$\int \frac{e^x dx}{e^x+1}$	14.70	$\int \frac{(2x-3)dx}{x^2-3x+8}$	14.72	$\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1} dx$

В задачах 14.73-14.100 знайти значення інтегралу, в якому підінтегральна функція є якийсь тричлен:

14.73	$\int \frac{dx}{x(x-1)}$	14.74	$\int \frac{dx}{(x+2)(x-1)}$	14.75	$\int \frac{dx}{x^2+2x+3}$	14.76	$\int \frac{dx}{\sqrt{2-6x-9}}$
14.77	$\int \frac{dx}{x(x+1)}$	14.78	$\int \frac{dx}{(x+1)(2x-3)}$	14.79	$\int \frac{dx}{x^2-7x+10}$	14.80	$\int \frac{dx}{\sqrt{8+6x-9x^2}}$
14.81	$\int \frac{dx}{4x^2+4x+5}$	14.82	$\int \frac{dx}{x-x^2-2,5}$	14.83	$\int \frac{dx}{x^2+3x-10}$	14.84	$\int \frac{dx}{\sqrt{12x-9x^2-2}}$
14.85	$\int \frac{dx}{\sqrt{4x-3-x^2}}$	14.86	$\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-6x+2}}$	14.87	$\int \frac{dx}{\sqrt{5-2x+x^2}}$	14.88	$\int \frac{xdx}{\sqrt{2x^2-x-1}}$
14.89	$\int \frac{(8x-11)dx}{\sqrt{5+2x-x^2}}$	14.90	$\int \frac{(x+2)dx}{x^2+2x+2}$	14.91	$\int \frac{xdx}{x^2+3x+2}$	14.92	$\int \frac{(x-3)dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}$
14.93	$\int \frac{(3x-1)dx}{4x^2-4x+17}$	14.94	$\int \frac{3-4x}{2x^2-3x+1} dx$	14.95	$\int \frac{(x-2)dx}{x^2-7x+12}$	14.96	$\int \frac{2x+5}{\sqrt{9x^2+6x+2}} dx$
14.97	$\int \frac{(3x-1)dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$	14.98	$\int \frac{(2-5x)dx}{\sqrt{4x^2+9x+1}}$	14.99	$\int \frac{(4-3x)dx}{5x^2+6x+18}$	14.100	$\int \frac{xdx}{\sqrt{3x^2-11x+2}}$

В задачах 14.101-14.139 знайти значення інтегралу методом заміни змінної:

14.101	$\int e^{-x^3} x^2 dx$	14.102	$\int e^{\sin x} \cos x dx$	14.103	$\int \sin^3 x \cos x dx$	14.104	$\int (1+e^{3x})^2 e^{3x} dx$
14.105	$\int x \sqrt{1-x^2} dx$	14.106	$\int e^{x^2} x dx$	14.107	$\int x^{23} \sqrt{1+x^3} dx$	14.108	$\int x^{25} \sqrt{x^3+2} dx$
14.109	$\int \frac{xdx}{(1+x^2)^2}$	14.110	$\int \frac{\arctg x}{1+x^2} dx$	14.111	$\int \sqrt{1+e^x} e^x dx$	14.112	$\int 2x \sqrt{x^2+1} dx$
14.113	$\int \frac{\sin x}{e^{\cos x}} dx$	14.114	$\int \frac{\ln x dx}{x}$	14.115	$\int \frac{\arctg^3 x dx}{1+x^2}$	14.116	$\int x \cos x^2 dx$
14.117	$\int \frac{e^x dx}{e^{2x}+4}$	14.118	$\int \frac{2^x dx}{\sqrt{1-4^x}}$	14.119	$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$	14.120	$\int \frac{\ln^2 x}{x} dx$
14.121	$\int \frac{dx}{x \ln x}$	14.122	$\int \frac{\sqrt{\ln x} dx}{x}$	14.123	$\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$	14.124	$\int \frac{x^4 dx}{x^{10}+9}$
14.125	$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^6}}$	14.126	$\int \frac{xdx}{x^4+1}$	14.127	$\int \frac{x^3 dx}{x^8-2}$	14.128	$\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^8}}$
14.129	$\int \frac{x^2 dx}{x^6+4}$	14.130	$\int \frac{xdx}{\sqrt{9-x^4}}$	14.131	$\int \frac{(\arctg x)^2 dx}{1+x^2}$	14.132	$\int \frac{dx}{\cos^2 x \sqrt{1+\tg x}}$

$$\begin{array}{llll}
 14.133 \int \cos^3 x \sin 2x dx & 14.134 \int \frac{\sin 2x dx}{1 + \cos^2 x} & 14.135 \int \frac{\cos x dx}{\sqrt[3]{\sin^2 x}} & 14.136 \int \frac{dx}{(\arcsin x)^3 \sqrt{1-x^2}} \\
 14.137 \int \frac{dx}{1+e^x} & 14.138 \int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}} & 14.139 \int \frac{\sin x dx}{\cos^2 x} & 14.140 \int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}
 \end{array}$$

В підкачках 14.141-14.160 знайти значення інтегралу, використовуючи різні методи:

$$\begin{array}{llll}
 14.141 \int \lg^2 x dx & 14.142 \int 2 \sin^2(x/2) dx & 14.143 \int \operatorname{ctg}^2 x dx & 14.144 \int \cos^3 x dx \\
 14.145 \int \frac{3x-1}{x^2+9} dx & 14.146 \int \frac{dx}{\cos^2 x \sin^2 x} & 14.147 \int \frac{x dx}{\sqrt[3]{1-3x}} & 14.148 \int \frac{x + (\arccos 3x)^2}{\sqrt{1-9x^2}} dx \\
 14.149 \int \frac{x^2+1}{x^2-1} dx & 14.150 \int \frac{1+x-x^2}{\sqrt{(1-x^2)^3}} dx & 14.151 \int \frac{x(1-x^2) dx}{1+x^4} & 14.152 \int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} dx \\
 14.153 \int \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}} dx & 14.154 \int \frac{dx}{(x+\sqrt{x^2-1})^2} & 14.155 \int \frac{(1+2x^2) dx}{x^2(1+x^2)} & 14.156 \int \frac{2x - \sqrt{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}} dx \\
 14.157 \int \frac{(1+x)^2 dx}{x(1+x^2)} & 14.158 \int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x} dx & 14.159 \int \frac{dx}{\cos 2x + \sin^2 x} & 14.160 \int \frac{dx}{\sqrt{1+x} + \sqrt{x-1}}
 \end{array}$$

В підкачках 14.161-14.176 знайти значення інтегралу, в якому підінтегральна функція є раціональною дріб:

$$\begin{array}{llll}
 14.161 \int \frac{dx}{x^4+x^2} & 14.162 \int \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)} & 14.163 \int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)} dx & 14.164 \int \frac{2x+1}{(x-2)^3(x+5)} dx \\
 14.165 \int \frac{dx}{x^3+1} & 14.166 \int \frac{dx}{(x+1)(x-1)^2} & 14.167 \int \frac{dx}{(x^2+2)(x-1)^2} & 14.168 \int \frac{x dx}{(x+1)(x+2)(x+3)} \\
 14.169 \int \frac{x dx}{x^3-1} & 14.170 \int \frac{dx}{(x-3)(4+x)^2} & 14.171 \int \frac{x^2+3}{x^3-x^2-6x} dx & 14.172 \int \frac{x}{(x^2-1)(x-2)} dx \\
 14.173 \int \frac{dx}{x^4-1} & 14.174 \int \frac{x^{10} dx}{x^2+x-2} & 14.175 \int \frac{dx}{(x^2+1)^2(x+2)} & 14.176 \int \frac{x^5-x^4-2}{x^4-4x^2+4} dx
 \end{array}$$

В задачах 14.177-14.219 знайти значення інтегралу, використовуючи формулу інтегрування частинами:

$$\begin{array}{llll}
 14.177 \int x e^{-2x} dx & 14.178 \int x \sin 4x dx & 14.179 \int \arcsin x dx & 14.180 \int x \cos 3x dx \\
 14.181 \int \arctg x dx & 14.182 \int x^2 e^{-6x} dx & 14.183 \int \ln x dx & 14.184 \int \arctg \sqrt{x} dx \\
 14.185 \int x^2 \sin 2x dx & 14.186 \int \arccos x dx & 14.187 \int x^2 e^{-x} dx & 14.188 \int x \ln^2 x dx \\
 14.189 \int \frac{x dx}{\sin^2 x} & 14.190 \int \frac{\arcsin x}{\sqrt{x+1}} dx & 14.191 \int \frac{x \arctg x}{\sqrt{1+x^2}} dx & 14.192 \int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} dx \\
 14.193 \int x 3^x dx & 14.194 \int x^2 \sin 7x dx & 14.195 \int x \sin(1-5x) dx & 14.196 \int x \arctg x dx \\
 14.197 \int x^2 e^{5x} dx & 14.198 \int x^2 \cos x dx & 14.199 \int \ln(x^2+1) dx & 14.200 \int x^2 \arctg x dx \\
 14.201 \int x \ln x dx & 14.202 \int x^2 \ln x dx & 14.203 \int e^{3x} (\sin 2x - \cos 2x) dx & \\
 14.204 \int x \operatorname{tg}^2 x dx & 14.205 \int (\arctg x)^2 dx & 14.206 \int x^2 \ln(x+1) dx & 14.207 \int x \cos^2 x dx \\
 14.208 \int \frac{\lg x}{x^3} dx & 14.209 \int \frac{x}{\cos^2 x} dx & 14.210 \int \frac{\ln^3 x}{x^2} dx & 14.211 \int \frac{\ln^2 x}{\sqrt{x^5}} dx \\
 14.212 \int x^3 e^x dx & 14.213 \int \ln^2 x dx & 14.214 \int x^3 \sin 2x dx & 14.215 \int x^2 \cos^2 5x dx \\
 14.216 \int \cos \ln x dx & 14.217 \int e^{4x} \sin 3x dx & 14.218 \int (\arcsin x)^2 dx & 14.219 \int \sin \ln 2x dx
 \end{array}$$



ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ №15
Тема: Визначений інтеграл. Невласні інтеграли.

3. Невласні інтеграли з нескінченними границями інтегрування. Література: [16], розд. IV, §19, стор. 241-243.

3. Невласні інтеграли з нескінченними границями інтегрування. Література: [16], розд. IV, §19, стор. 241-243.

Нехай функція $f(x)$ неперервна на інтервалі $(-\infty; \infty)$. Тоді вона неперервна на будь-якому відрізку, що належить інтервалу $(-\infty; \infty)$ та існують її визначені інтеграли $\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

Отже, для обчислення невластного інтеграла з нескінченними границями інтервал $(-\infty; \infty)$ розбиваємо довільною точкою c і знаходимо суму границь, тобто

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^c f(x)dx + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_c^b f(x)dx \quad (4.6)$$

Визначення. Причому, якщо хоча б одна з двох границь є нескінченністю, то невластний інтеграл називається розбіжним. Якщо ж границі обох доданків існують і скінченні, то невластний інтеграл $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ називається збіжним.

Приклад №15.1. Дослідити інтеграл $\int_1^{\infty} xe^{-x^2} dx$ на збіжність.

Розв'язання. Знайдемо границю $\int_1^{\infty} xe^{-x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b xe^{-x^2} dx = \left| \begin{matrix} x^2 = t \\ 2x dx = dt \end{matrix} \right| =$ (при цьому границі визначеного інтеграла не зміняться) $= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{2} e^{-t} dt = \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b e^{-t} dt = \frac{1}{2} \left[\lim_{b \rightarrow \infty} e^{-b} - e^{-1} \right] =$
 $= 0,5(0 - e^{-1}) = 0,5e^{-1} < \infty$.

Отже, границя існує і скінченна, тоді вихідний інтеграл є збіжним.

При дослідженні на збіжність невластних інтегралів з нескінченними границями можна користуватися теоремами порівняння.

Теорема 1. Якщо для всіх $x \geq a$ виконується нерівність $0 \leq f(x) \leq \varphi(x)$ і якщо $\int_a^{\infty} \varphi(x)dx$ збігається, то і $\int_a^{\infty} f(x)dx$ також збігається, причому $\int_a^{\infty} f(x)dx \leq \int_a^{\infty} \varphi(x)dx$.

Теорема 2. Якщо для всіх $x \geq a$ виконується нерівність $0 \leq \varphi(x) \leq f(x)$, причому $\int_a^{\infty} \varphi(x)dx$ є розбіжним, то розбіжним є й інтеграл $\int_a^{\infty} f(x)dx$.

Приклад №15.2. Дослідити на збіжність $\int_1^{\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^3}} dx$.

Розв'язання. $\frac{x+1}{\sqrt{x^3}} > \frac{x}{\sqrt{x^3}}$ або $\frac{1}{\sqrt{x}} < \frac{x+1}{\sqrt{x^3}}$. Дослідимо невластний інтеграл від меншої фун-

кції: $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_1^a \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{a \rightarrow \infty} 2\sqrt{x} \Big|_1^a = 2 \lim_{a \rightarrow \infty} [\sqrt{a} - 1] = 2 \cdot \infty = \infty$. Отже, інтеграл від меншої функції розбіжний, а від більшої функції тим більше. Таким чином, вихідний інтеграл – розбіжний.

4. Невласні інтеграли від розривної функції. Література: [16], розд. IV, §19, стор. 243-245.

Нехай функція $f(x)$ визначена і неперервна при $a \leq x < c$, а при $x = c$ функція $f(x)$ або невинячена, або має розрив другого роду. У цьому випадку інтеграл від розривної функції в т. $x = c$ визначається

$$\int_a^c f(x) dx = \lim_{b \rightarrow c-0} \int_a^b f(x) dx. \quad (4.7)$$

Для розриву функції на лівому кінці маємо

$$\int_a^c f(x) dx = \lim_{b \rightarrow a+0} \int_b^c f(x) dx. \quad (4.8)$$

Якщо розрив функції в середині відрізка $[a, c]$, тобто у точці $x = x_0$, то вихідний інтеграл розбиваємо на два інтеграли:

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^{x_0} f(x) dx + \int_{x_0}^c f(x) dx.$$

Якщо існують і скінчені границі інтегралів (4.7)-(4.8), то такі невластні інтеграли є збіжними.

При дослідженні невластних інтегралів від розривної функції можна користуватися основними теоремами порівняння.

Теорема 1. Якщо на $[a, c]$ функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ розривні у точці $x = c$, і в усіх точках цього відрізка виконуються нерівності $0 \leq f(x) \leq \varphi(x)$, тоді якщо $\int_a^c \varphi(x) dx$ збігається, то і $\int_a^c f(x) dx$ також збігається.

Теорема 2. Якщо на $[a, c]$ функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ розривні у точці $x = c$, і в усіх точках цього відрізка виконуються нерівності $0 \leq \varphi(x) \leq f(x)$, тоді якщо $\int_a^c \varphi(x) dx$ є розбіжним, то і $\int_a^c f(x) dx$ також є розбіжним.

Приклад №15.3. Дослідити невластний інтеграл $\int_1^2 \frac{x dx}{\sqrt{4-x^2}}$ на збіжність.

Розв'язання. Підінтегральна функція розривна в точці $x = \pm 2$, але відрізьку інтегрування

$$\begin{aligned} \text{належить тільки т. } x = 2. \text{ Знайдемо границю } \int_1^2 \frac{x dx}{\sqrt{4-x^2}} &= \lim_{a \rightarrow 2-0} \int_1^a \frac{x dx}{\sqrt{4-x^2}} = \lim_{a \rightarrow 2-0} \int_1^a -\frac{1}{2} \frac{d(4-x^2)}{\sqrt{4-x^2}} = \\ &= -\frac{1}{2} \lim_{a \rightarrow 2-0} 2\sqrt{4-x^2} \Big|_1^a = -(0 - \sqrt{3}) = \sqrt{3}. \text{ Отже вихідний інтеграл є збіжним.} \end{aligned}$$

Контрольні питання

1. Визначений інтеграл та його властивості.
2. Визначення невластних інтегралів.
3. Теорема про дослідження на збіжність невластних інтегралів.

Завдання до практичного заняття №15

В задачах 15.1–15.52 знайти значення інтегралу

- | | | | |
|---|---|--|---|
| 15.1 $\int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$ | 15.2 $\int_0^{\pi/4} \sin 2x dx$ | 15.3 $\int_0^{\pi/2} \cos x dx$ | 15.4 $\int_0^{\pi/4} \lg x dx$ |
| 15.5 $\int_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ | 15.6 $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{5-4x}}$ | 15.7 $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(1+5x)^3}$ | 15.8 $\int_0^3 \frac{2x+4}{9x^2+6x+1} dx$ |
| 15.9 $\int_0^1 \sqrt{1+x} dx$ | 15.10 $\int_4^{13} \frac{dx}{\sqrt[5]{(3-x)^4}}$ | 15.11 $\int_4^9 \frac{y-1}{\sqrt{y+1}} dy$ | 15.12 $\int_0^1 \frac{x+3}{2x^2+7x+1} dx$ |
| 15.13 $\int_1^2 \frac{dx}{x+x^3}$ | 15.14 $\int_{-1}^3 \frac{x+4}{x^2-x+8} dx$ | 15.15 $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2+1}}$ | 15.16 $\int_0^3 \frac{x+3}{2x^2-x+5} dx$ |
| 15.17 $\int_2^4 \frac{dx}{x^2-4x+3}$ | 15.18 $\int_1^3 \frac{x-3}{x^2-x+3} dx$ | 15.19 $\int_0^1 \frac{x+3}{x^2+8x-1} dx$ | 15.20 $\int_0^2 \frac{4x+7}{2x^2+2x+7} dx$ |
| 15.21 $\int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}$ | 15.22 $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}$ | 15.23 $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+5}$ | 15.24 $\int_{-0.5}^1 \frac{x dx}{\sqrt{8+2x-x^2}}$ |
| 15.25 $\int_0^1 (e^x-1)^4 e^x dx$ | 15.26 $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} dx$ | 15.27 $\int_0^1 \frac{x-1}{x^2+3x-2} dx$ | 15.28 $\int_0^2 \frac{4x-2}{x^2+6x+4} dx$ |
| 15.29 $\int_0^1 \frac{x dx}{(x^2+1)^2}$ | 15.30 $\int_0^1 \sqrt{4-x^2} dx$ | 15.31 $\int_0^{\pi/2} \cos^2 x \cdot \sin x dx$ | 15.32 $\int_0^{\pi/2} \cos x \cdot \sin^2 x dx$ |
| 15.33 $\int_1^2 \frac{e^{1/x}}{x^2} dx$ | 15.34 $\int_0^4 x\sqrt{x^2+9} dx$ | 15.35 $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1} dx$ | 15.36 $\int_0^{\pi/2} \cos x \cdot \sin^3 x dx$ |
| 15.37 $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$ | 15.38 $\int_0^{\sqrt[3]{2}} \frac{x^{15} dx}{(1+x^8)^{2/5}}$ | 15.39 $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$ | 15.40 $\int_0^{\pi/2} \cos^5 x \cdot \sin 2x dx$ |
| 15.41 $\int_{1/\pi}^{2/\pi} \frac{\sin(1/x)}{x^2} dx$ | 15.42 $\int_{-\pi/2}^{-\pi/4} \frac{\cos^3 x \cdot dx}{\sqrt[3]{\sin x}}$ | 15.43 $\int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{x^3 dx}{(\sqrt[3]{5/8-x^4})^{3/2}}$ | 15.44 $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{\cos x - \cos^3 x} dx$ |
| 15.45 $\int_1^2 x \ln x dx$ | 15.46 $\int_0^{\pi/2} x \cos x dx$ | 15.47 $\int_0^{\ln 2} x e^{-x} dx$ | 15.48 $\int_0^{e-1} \ln(x+1) dx$ |
| 15.49 $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{x dx}{\sin^2 x}$ | 15.50 $\int_0^{\pi/2} e^{2x} \cdot \cos x dx$ | 15.51 $\int_0^{\pi} x^3 \sin x dx$ | 15.52 $\int_1^e \ln^3 x dx$ |

В задачах 15.53–15.56 знайти значення невласного інтегралу або дослідити його на збіжність:

- | | | | |
|---|--------------------------------------|---|---|
| 15.53 $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ | 15.54 $\int_1^{+\infty} x e^{-x} dx$ | 15.55 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ | 15.56 $\int_0^1 \frac{(x+1) dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$ |
|---|--------------------------------------|---|---|

15.57	$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 4}$	15.58	$\int_0^{\infty} \frac{x dx}{(1+x)^3}$	15.59	$\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x} dx}{(1+x)^2}$	15.60	$\int_1^{\infty} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x} dx$
15.61	$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^3}$	15.62	$\int_0^{\infty} \frac{x}{(x+1)} dx$	15.63	$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^3}$	15.64	$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^4}$
15.65	$\int_0^{\infty} e^{-2x} dx$	15.66	$\int_{\sqrt{2}}^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}}$	15.67	$\int_0^{\infty} e^{-\sqrt{x}} dx$	15.68	
15.69	$\int_1^{\infty} \frac{\arctg x dx}{x^2}$	15.70	$\int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x} dx}{(1+x)^2}$	15.71	$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2}$	15.72	$\int_0^{\infty} e^{-3x} \cos 2x dx$
15.73	$\int_1^{\infty} \frac{x^3 + 1}{x^4} dx$	15.74	$\int_e^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^{3/2}}$	15.75	$\int_0^{\infty} \sqrt{x} e^{-x} dx$	15.76	$\int_0^{\infty} \frac{x^{13}}{(x^5 + x^3 + 1)^3} dx$

В задачах 15.77–15.96 знайти значення невласного інтегралу або дослідити його на збіжність:

15.77	$\int_0^1 x \ln x dx$	15.78	$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$	15.79	$\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$	15.80	$\int_0^2 \frac{dx}{x^2 - 4x + 3}$
15.81	$\int_0^1 \frac{dx}{x}$	15.82	$\int_1^2 \frac{x dx}{\sqrt{x-1}}$	15.83	$\int_{-1}^1 \frac{3x^2 + 2}{\sqrt[4]{x^2}} dx$	15.84	$\int_{-1}^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x^2}}$
15.85	$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$	15.86	$\int_0^1 \frac{dx}{x \ln^2 x}$	15.87	$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^4}} dx$	15.88	$\int_3^5 \frac{x^2 dx}{\sqrt{(x-3)(5-x)}}$
15.89	$\int_{-1}^1 \frac{x+1}{\sqrt[5]{x^3}} dx$	15.90	$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{e^{\ln x} - 1} dx$	15.91	$\int_{-1}^0 \frac{e^x}{x^3} dx$	15.92	$\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{(x-2)(3-x)}}$
15.93	$\int_0^1 \frac{dx}{e^{\sqrt{x}} - 1}$	15.94	$\int_{-1}^1 \frac{x-1}{\sqrt[3]{x^5}} dx$	15.95	$\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt[3]{(1-x^2)^5}} dx$	15.96	$\int_0^1 \frac{dx}{1-x^2 + 2\sqrt{1-x^2}}$

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ №16

Тема: Числові ряди. Степеневі ряди. Радіус збіжності.

5. Числові ряди. Основні поняття. Геометричний ряд. Література: [16], розд. VII, §1-2, стор. 364-366.

1. Нескінченна сума числової послідовності називається рядом:

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n = U_1 + U_2 + \dots + U_n + \dots \quad (4.9)$$

Числовий ряд (3.1) називається збіжним, якщо існує скінченна границя послідовності часткових сум: $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$, де $S_n = U_1 + U_2 + \dots + U_n$ – часткова сума, S – сума ряду (4.9).

Якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$ або не існує, то ряд (4.9) називається розбіжним.

Приклад №16.1. Дослідити на збіжність числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \dots$$

Розв'язання. Розглянемо окремо кожну дріб і запишемо у вигляді:

$$\frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}, \quad \dots, \quad \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$$

Знайдемо часткову суму $S_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$. Після скорочення маємо $S_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}$. Отже, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{1}{2}$. Таким чином, даний ряд є збіжним.

6. Властивості числових рядів. Література: [16], розд. VII, §3, стор. 366-367.

7. Необхідна ознака збіжності ряду. Література: [16], розд. VII, §4, стор. 368-369.

Якщо ряд (4.9) є збіжним, то $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = 0$.

Приклад №16.2. Дослідити на збіжність ряд $\frac{2}{5} + \frac{4}{8} + \frac{6}{11} + \frac{8}{14} + \frac{10}{17} + \dots$

Розв'язання. Запишемо n -й елемент ряду, визначивши закономірність зміни окремо чисельника та знаменника. Бачимо, що у чисельнику стоять парні числа, тобто чисельник є $2n$. Кожний знаменник відрізняється від попереднього на 3 одиниці. Отже, для n -го елемента ряду запишемо $3 \cdot n$, а далі при $n=1$, щоб отримати перший знаменник, треба додати 2, тобто загальним знаменником буде $3n+2$. Тоді ряд у компактному запису має вигляд: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{3n+2}$, а

$U_n = \frac{2n}{3n+2}$. Перевіримо на збіжність ряд, використовуючи необхідну ознаку, тобто: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{3n+2} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \frac{2}{3} \neq 0$. Отже, необхідна ознака не виконується, що означає – вихідний ряд є розбіжним.

8. Достатні ознаки безпосереднього порівняння для знакододатних рядів. Література: [16], розд. VII, §5, стор. 369-378.

Ознака Даламбера збіжності ряду (4.9): якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = l$, то при $l < 1$ – ряд збіжний, при $l > 1$ – ряд розбіжний та при $l = 1$ – для визначення збіжності потрібні додаткові дослідження;

Приклад №16.3. Дослідити на збіжність ряд $\frac{1}{3 \cdot 2} + \frac{3}{3^2 \cdot 5} + \frac{5}{3^3 \cdot 10} + \frac{7}{3^4 \cdot 17} + \dots$

Розв'язання. Запишемо n -й елемент ряду, визначивши закономірність зміни дробів, тобто в чисельнику непарні числа: $2n-1$. В знаменнику перший множник – це 3^n , а другий множник – це квадрати натуральних чисел плюс одиниця, тобто n^2+1 . Тоді n -й член ряду матиме вигляд: $U_n = \frac{2n-1}{3^n(n^2+1)}$. Використаємо для доведення збіжності ряду ознаку Даламбера, для

чого випишемо $n+1$ -й член ряду: $U_{n+1} = \frac{2(n+1)-1}{3^{n+1}((n+1)^2+1)} = \frac{2n+1}{3^{n+1}(n^2+2n+2)}$. Знайдемо границю відношення

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2n+1}{3^{n+1}(n^2+2n+2)}}{\frac{2n-1}{3^n(n^2+1)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)3^n(n^2+1)}{(2n-1)3^{n+1}(n^2+2n+2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)(n^2+1)}{3(2n-1)(n^2+2n+2)} = \frac{1}{3},$$

оскільки найвищі степені поліномів в чисельнику та знаменнику рівні, то границя дорівнює відношенню коефіцієнтів при найвищих степенях. Одержане значення границі $\frac{1}{3} < 1$, тому за ознакою Даламбера, вихідний ряд є збіжним.

Радикальна ознака Коши: якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{U_n} = l$, то при $l < 1$ – ряд збіжний, при $l > 1$ – ряд розбіжний та при $l = 1$ – для визначення збіжності потрібні додаткові дослідження;

Приклад №16.4. Дослідити на збіжність ряд $\arctg \frac{1}{2} + \arctg^2 \frac{1}{3} + \arctg^3 \frac{1}{4} + \dots$

Розв'язання. Для даного ряду маємо: $U_n = \arctg^n \frac{1}{n+1}$. Обчислимо границю

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{U_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\arctg^n \frac{1}{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \arctg \frac{1}{n+1} = 0 < 1. \text{ Отже, вихідний ряд – збіжний.}$$

Інтегральна ознака Коши: якщо для ряду (4.9) обчислити невласний інтеграл $\int_1^a U_n dn = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_1^a U_n dn$ і, якщо інтеграл буде збіжним, то і ряд (4.9) також збіжний, а якщо інтеграл – розбіжний, то і ряд – розбіжний.

Приклад №16.5. Дослідити на збіжність ряд $\frac{1}{2 \ln^2 2} + \frac{1}{3 \ln^2 3} + \frac{1}{4 \ln^2 4} + \dots$

Розв'язання. Для даного ряду маємо: $U_n = \frac{1}{(n+1) \ln^2(n+1)}$. Знаходимо невласний інтеграл

$$\int_1^{\infty} \frac{dn}{(n+1) \ln^2(n+1)} = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_1^a \frac{dn}{(n+1) \ln^2(n+1)} = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_1^a \frac{d(\ln(n+1))}{\ln^2(n+1)} = \lim_{a \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{\ln(n+1)} \right) \Big|_1^a = \frac{1}{\ln 2} < \infty. \text{ Таким чином, вихідний ряд є збіжним.}$$

Ознаки порівняння рядів.

Нехай дані два ряди $U_1 + U_2 + \dots + U_n + \dots$ та $V_1 + V_2 + \dots + V_n + \dots$. Відомо, що $U_n \leq V_n$, тоді:

– якщо ряд з більшими елементами $\sum_{n=1}^{\infty} V_n$ є збіжним, то ряд з меншими елементами $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ також є збіжним;

– якщо ряд з меншими елементами $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ є розбіжним, то ряд з більшими елементами

$\sum_{n=1}^{\infty} V_n$ є також розбіжним.

Зауваження. При використанні ознаки порівняння зручно ряди порівнювати з гармонічним рядом, для якого за інтегральною ознакою, відома його збіжність:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} = \begin{cases} \alpha \leq 1 & \text{– ряд розбіжний,} \\ \alpha > 1 & \text{– ряд збіжний.} \end{cases}$$

Приклад №16.6. Дослідити на збіжність ряд $\frac{1}{2 \cdot 7} + \frac{1}{4 \cdot 11} + \frac{1}{6 \cdot 15} + \frac{1}{8 \cdot 19} + \dots$

Розв'язання. Складемо n -й елемент ряду: $U_n = \frac{1}{2n(4n+3)}$. Порівняємо даний ряд з гар-

монічним рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Отже, треба довести, що елементи вихідного ряду менше елементів

гармонічного ряду. Розглянемо знаменники n -х елементів рядів $2n(4n+3)$ та n^2 . Очевидно, що $2n(4n+3) > n^2$, а значить $\frac{1}{2n(4n+3)} < \frac{1}{n^2}$. Звідки, оскільки ряд з більшими елементами збігається, то і вихідний ряд є також збіжним.

9. Знакопереміжні числові ряди. Ознака Лейбніца. Література: [16], розд. VII, §6, стор. 378-380.

Ряд виду $U_1 - U_2 + U_3 - U_4 + \dots + (-1)^{n+1} U_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} U_n$ називається **знакопереміжним**, причому $U_n \geq 0$.

Ознака Лейбніца: якщо для знакопереміжного ряду виконуються дві умови:

а) $|U_1| \geq |U_2| \geq |U_3| \geq \dots \geq |U_n| \geq \dots$;

б) $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = 0$,

то вихідний ряд збіжний, сума його додатна і не перевищує значення першого елемента ряду.

Знакопереміжний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} U_n$ називається **абсолютно збіжним**, якщо збігається ряд, складений з абсолютних значень елементів вихідного ряду, тобто збігається ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |U_n|$, якщо ряд, складений з абсолютних значень елементів, розбігається, а вихідний ряд збігається за ознакою Лейбніца, то даний ряд називається **умовно збіжним**.

Приклад №16.7. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+3)}{5^n}$.

Розв'язання. Перевіряємо на збіжність ряд за ознакою Лейбніца:

а) порівняємо n -й та $n+1$ -й члени ряду $-\frac{2n+3}{5^n}$ і $\frac{2n+5}{5^{n+1}}$. Помножимо обидві частини виразів на 5^{n+1} , тоді $5(2n+3) > 2n+5$. Отже, чисельник попереднього дробу більше чисельника наступного дробу і значить перша умова ознаки виконується;

б) знаходимо границю n -го елемента ряду за правилом Лопітала:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3}{5^n} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{5^n \ln 5} = 0.$$

Вихідний ряд є збіжним за ознакою Лейбніца. Перевіримо на умовну або абсолютну збіжність. Для цього розглянемо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{5^n}$ і за ознакою Даламбера виявимо його збіжність, тобто, якщо $U_n = \frac{2n+3}{5^n}$ і $U_{n+1} = \frac{2n+5}{5^{n+1}}$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+5) \cdot 5^n}{(2n+3) \cdot 5^{n+1}} = \frac{1}{5} < 1$. Отже, вихідний ряд є абсолютно збіжним.

10. Функціональні ряди. Основні поняття. Область збіжності степеневого ряду. Література: [16], розд. VII, §8-9, стор. 385-391.

Якщо є степеневі ряди

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n x^n \tag{4.10}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n (x-a)^n$$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{C_n}{C_{n+1}} \right| \quad (4.12)$$

або

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|C_n|}} \quad (4.13)$$

Проміжки $(-R; R)$ та $(a-R; a+R)$ називаються **інтервалами збіжності** степеневих рядів (4.10) та (4.11). Отже для ряду (4.10) $\epsilon -R < x < R$, а для ряду (4.11) $-R < x-a < R \Rightarrow a-R < x < a+R$. Для того, щоб визначити включати або не включати кінці інтервалів до проміжку збіжності, треба значення $x = \pm R$ або $x = a \pm R$ підставити у відповідні ряди (4.10) та (4.11) і отриманий числовий ряд додатково дослідити на збіжність.

Приклад №16.8. Знайти радіус збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{2^n (3n-1)}$.

Розв'язання. Для використання формули (4.12) виписуємо абсолютні значення коефіцієнтів $|C_n| = \frac{1}{2^n (3n-1)}$ і $|C_{n+1}| = \frac{1}{2^{n+1} (3n+2)}$. Тоді $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} (3n+2)}{2^n (3n-1)} = 2$. Отже, радіус збіжності $R: -2 < x < 2$.

Перевіримо збіжність у кінцях інтервалу. Для цього у вихідний ряд підставимо по черзі значення $x = -2$ і $x = 2$:

1) нехай $x = -2$, тоді $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (-2)^n}{2^n (3n-1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (-1)^n 2^n}{2^n (3n-1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)}$. Отриманий додатний

числовий ряд дослідимо на збіжність за інтегральною ознакою $\int_1^{\infty} \frac{dn}{3n-1} = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_1^a \frac{dn}{3n-1} =$

$= \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \ln|3n-1| \Big|_1^a = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{3} (\ln|3a-1| - \ln 2) = \infty \Rightarrow$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)}$ є розбіжним. Отже значення $x = -2$ не включаємо до проміжку збіжності;

2) нехай $x = 2$, тоді $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{2^n (3n-1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n-1}$ маємо знакопереміжний ряд. Для його дослідження скористуємося ознакою Лейбніца: а) $\frac{1}{3n-1} > \frac{1}{3n+2}$; б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3n-1} = 0$. Ознака Лейбніца виконується, тому $x = 2$ включаємо в проміжок збіжності.

Відповідь. $-2 < x \leq 2$.

Приклад №16.9. Знайти радіус збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n^2+1}$.

Розв'язання. Для знаходження радіуса виписуємо: $C_n = \frac{1}{n^2+1}$, $C_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2+1}$. Тоді

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|C_n|}{|C_{n+1}|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2+1}{n^2+1} = 1$. Отже $R: -1 < x+2 < 1 \Rightarrow -3 < x < -1$. Перевіримо в кінцях проміжку:

1) $x = -3$. Підставляємо у вихідний ряд і отримуємо знакопереміжний числовий ряд:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3+2)^n}{n^2+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$. Перевіряємо його збіжність за умовою Лейбніца: а)

проміжку:

1) $x = -3$. Підставляємо у вихідний ряд і отримуємо знакопереміжний числовий ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3+2)^n}{n^2+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$$
 Перевіряємо його збіжність за умовою Лейбніца: а) $\frac{1}{n^2+1} > \frac{1}{(n+1)^2+1}$; б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2+1} = 0$. Отже, даний ряд є збіжним за ознакою Лейбніца і значення $x = -3$ включаємо у проміжок збіжності;

2) $x = -1$. Отримуємо ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1+2)^n}{n^2+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$. За інтегральною ознакою $\int_1^{\infty} \frac{dn}{n^2+1} =$

$$= \lim_{a \rightarrow \infty} \int_1^a \frac{dn}{n^2+1} = \lim_{a \rightarrow \infty} \arctg n \Big|_1^a = \lim_{a \rightarrow \infty} (\arctg a - \arctg 1) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} < \infty$$
. Невласний інтеграл збіж-

ний, отже і числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ також є збіжний, а значить $x = -1$ включаємо у проміжок збіжності.

Відповідь. $-3 \leq x \leq -1$.

Контрольні питання

1. Числові ряди та їх властивості.
2. Необхідна ознака збіжності числового ряду.
3. Достатня ознака збіжності числових рядів.
4. Знакозмінні ряди їх абсолютна та умовна збіжність.
5. Степеневі ряди.
6. Інтервал (радіус) збіжності.
7. Формули знаходження радіуса збіжності.

Завдання до практичного заняття №16

В задачах 16.1–16.91 дослідити на збіжність ряди:

- | | | | |
|---|---|---|--|
| 16.1 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ | 16.2 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{3^n}$ | 16.3. $\sum_{n=1}^{\infty} \arctg^n \frac{1}{n^2}$ | 16.4 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(n+4)^3}}$ |
| 16.5 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{n^2}$ | 16.6 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{3n-2}}$ | 16.7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n-3}{n \cdot 3^n}$ | 16.8 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{n^2}$ |
| 16.9 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{3n+2} \right)^n$ | 16.10 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}$ | 16.11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2}$ | 16.12 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n+1} \right)^{2n-1}$ |
| 16.13 $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k+1}{2k+1} \right)^k$ | 16.14 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2-5}}$ | 16.15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n}$ | 16.16 $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{3n+1}{4n-5}}$ |
| 16.17 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n \sqrt{2n-1}}$ | 16.18 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ | 16.19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+5}$ | 16.20 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-4n+5}$ |
| 16.21 $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \sin \frac{\pi}{3^n}$ | 16.22 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+1}$ | 16.23. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+n^2}{1+n^3} \right)^2$ | 16.24 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}$ |
| 16.25 $\sum_{n=1}^{\infty} \arctg \frac{1}{2n^2}$ | 16.26 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+2^n}{6^n}$ | 16.27. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$ | 16.28 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2(2n+1)^2}$ |

$$16.37 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 1}{n^3}$$

$$16.38 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1000n+1}$$

$$16.39. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n \cdot 2^n}$$

$$16.40 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{n+1}{5n}}{3^n}$$

$$16.41 \quad \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \dots$$

$$16.42 \quad \frac{3}{2 \cdot 1} + \frac{4}{3 \cdot 2} + \frac{5}{4 \cdot 3} + \frac{6}{5 \cdot 4} + \dots$$

$$16.43 \quad \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots$$

$$16.44 \quad 1 + \frac{1+2}{1+2^2} + \frac{1+3}{1+3^2} + \dots$$

$$16.45 \quad \frac{1}{1+1^2} + \frac{2}{1+2^2} + \frac{3}{1+3^2} + \dots$$

$$16.46 \quad \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{6} + \frac{7}{8} + \dots$$

$$16.47 \quad \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 6} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \dots$$

$$16.48 \quad 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots$$

$$16.49 \quad \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots$$

$$16.50 \quad \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{6}{27} + \frac{8}{81} + \dots$$

$$16.51 \quad \frac{2}{1} + \frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{3} + \frac{2^4}{4} + \dots$$

$$16.52 \quad \frac{1}{4!} + \frac{4}{6!} + \frac{7}{8!} + \frac{10}{10!} + \dots$$

$$16.53 \quad \frac{21}{3} + \frac{41}{9} + \frac{61}{27} + \dots$$

$$16.54 \quad 1 + \frac{3}{2 \cdot 3} + \frac{3^2}{2^2 \cdot 5} + \frac{3^3}{2^3 \cdot 7} + \dots$$

$$16.55 \quad \frac{6}{1} + \frac{7}{3} + \frac{8}{5} + \frac{9}{7} + \dots$$

$$16.56 \quad \frac{2}{2} + \frac{2 \cdot 3}{2 \cdot 4} + \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{2^2 \cdot 6} + \dots$$

$$16.57 \quad \frac{2}{1 \cdot 2} + \frac{2^2}{2 \cdot 3} + \frac{2^3}{3 \cdot 4} + \frac{2^4}{4 \cdot 5} + \dots$$

$$16.58 \quad \frac{1}{1 \cdot 7} + \frac{1}{3 \cdot 9} + \dots$$

$$16.59 \quad \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{4}{2^4} + \dots$$

$$16.60 \quad \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} + \dots$$

$$16.61 \quad \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 5} + \dots$$

$$16.62 \quad \sin \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{8} + \dots$$

$$16.63 \quad \frac{1}{1 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 11} + \frac{1}{11 \cdot 16} + \dots$$

$$16.64 \quad \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \dots$$

$$16.65 \quad \frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 4} + \dots$$

$$16.66 \quad \frac{2}{2} + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{8}\right)^3 + \left(\frac{2}{11}\right)^4 + \dots$$

$$16.67 \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{8} + \dots$$

$$16.68 \quad \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{6 \cdot 7} + \frac{1}{11 \cdot 11} + \dots$$

$$16.69 \quad 1 + \frac{2^2}{3} + \frac{3^2}{3^2} + \frac{4^2}{3^3} + \frac{5^2}{3^4} + \dots$$

$$16.70 \quad 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots$$

$$16.71 \quad \frac{1}{3} + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{7}\right)^3 + \dots$$

$$16.72 \quad \frac{3}{1 \cdot 2} + \frac{5}{2 \cdot 3} + \frac{7}{3 \cdot 4} + \frac{9}{4 \cdot 5} + \dots$$

$$16.73 \quad \frac{2}{3} + \frac{3}{5} + \frac{4}{7} + \dots$$

$$16.74 \quad \operatorname{tg} \pi + \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{2} + \operatorname{tg}^3 \frac{\pi}{3} + \dots$$

$$16.75 \quad \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{4}{2 \cdot 7} + \frac{7}{3 \cdot 10} + \frac{10}{4 \cdot 13} + \dots$$

$$16.76 \quad \frac{1}{3} + \frac{4}{9} + \frac{9}{27} + \dots$$

$$16.77 \quad 1 + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{10}} + \dots$$

$$16.78 \quad 1 + \frac{2}{2!} + \frac{4}{3!} + \frac{8}{4!} + \frac{16}{5!} + \dots$$

$$16.79 \quad \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots$$

$$16.80 \quad \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{4\sqrt{4}} + \dots$$

$$16.81 \quad \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{5}{\sqrt{2 \cdot 3^2}} + \frac{9}{\sqrt{3 \cdot 3^3}} + \dots$$

$$16.82 \quad 1 + \frac{4}{1 \cdot 2} + \frac{9}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots$$

$$16.83 \quad 1 + \frac{2^2}{3!} + \frac{3^3}{5!} + \frac{4^4}{7!} + \dots$$

$$16.84 \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{17} + \frac{1}{26} + \dots$$

$$16.85 \quad 1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{5} + \dots$$

$$16.86 \quad 1 + \frac{5}{2!} + \frac{5^2}{3!} + \frac{5^3}{4!} + \dots$$

$$16.87 \quad \frac{1}{2 \ln 2} + \frac{1}{3 \ln 3} + \frac{1}{4 \ln 4} + \dots$$

$$16.88 \quad \frac{3}{3!} + \frac{4}{5!} + \frac{5}{7!} + \frac{6}{9!} + \dots$$

$$16.89 \quad \frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln^2 3} + \frac{1}{\ln^3 4} + \dots$$

$$16.90 \quad \sqrt{2} + \sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{4}{3}} + \dots$$

$$16.91 \quad \frac{1}{3} + \frac{3}{3^2} + \frac{5}{3^3} + \dots$$

В задачах 16.92–16.136 дослідити на умовну збіжність ряди:

- | | | | | | |
|--------|---|--------|--|--------|---|
| 16.92 | $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n-1)^2}$ | 16.93 | $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{4n}{3^n}$ | 16.94 | $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n+1)^2}$ |
| 16.95 | $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{3n-1}$ | 16.96 | $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^3+1}{n^2}$ | 16.97 | $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{3^n}$ |
| 16.98 | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot 2^n}{3^n \cdot (4n-1)}$ | 16.99 | $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ | 16.100 | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (2n-1)}{2^n}$ |
| 16.101 | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ | 16.102 | $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\ln(n+1)}$ | 16.103 | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{3n-1}}$ |
| 16.104 | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[4]{5n-1}}$ | 16.105 | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)}$ | 16.106 | $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\ln n}{n}$ |
| 16.107 | $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^3}{2^n}$ | 16.108 | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n - \ln n}$ | 16.109 | $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^n}{n!}$ |
| 16.110 | $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$ | 16.111 | $2 - \frac{3}{2} + \frac{4}{3} - \frac{5}{4} + \dots$ | 16.112 | $1 - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{4^4} + \dots$ |
| 16.113 | $-1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \frac{1}{16} - \dots$ | 16.114 | $1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \dots$ | 16.115 | $1 - \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 5^2} - \frac{1}{4 \cdot 5^3} + \dots$ |
| 16.116 | $\frac{1}{2} - \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} - \dots$ | 16.117 | $1 - \frac{1}{\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{13}} - \dots$ | 16.118 | $-\frac{1}{2} + \frac{9}{4} - \frac{25}{8} + \frac{49}{16} - \dots$ |
| 16.119 | $1 - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \dots$ | 16.120 | $\frac{1}{1!} - \frac{\sqrt{2}}{2!} + \frac{\sqrt{3}}{3!} - \dots$ | 16.121 | $1 - \frac{3}{2 \cdot 3} + \frac{3^2}{2^2 \cdot 5} - \frac{3^3}{2^3 \cdot 7} + \dots$ |
| 16.122 | $1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \dots$ | 16.123 | $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \dots$ | 16.124 | $1 - \frac{1}{\sqrt{2^3}} + \frac{1}{\sqrt{3^3}} - \frac{1}{\sqrt{4^3}} + \dots$ |
| 16.125 | $1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \dots$ | 16.126 | $1 - \frac{2}{2} + \frac{3}{4} - \frac{4}{8} + \dots$ | 16.127 | $1 - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{7^2} - \frac{1}{10^2} + \dots$ |

В задачах 16.128–16.173 знайти радіус збіжності та дослідити на збіжність ряд в кінцях інтервалу:

- | | | | | | | | |
|--------|---|--------|---|--------|---|--------|--|
| 16.128 | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n \cdot 8^{n-1}}$ | 16.129 | $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n (x-1)^n$ | 16.130 | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{3^n \cdot n}$ | 16.131 | $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n^2}$ |
| 16.132 | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n x^n}{\sqrt{n}}$ | 16.133 | $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{2n}$ | 16.134 | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n \cdot 4^{n-1}}$ | 16.135 | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-4)^n}{3^n (n^2+1)}$ |
| 16.136 | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n^2 \cdot 2^n}$ | 16.137 | $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{2^n (n-1)}$ | 16.138 | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{3^n}$ | 16.139 | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1/3)^{n+1}}{2^{n-1} (2n+1)}$ |
| 16.140 | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{\sqrt{3n-1}}$ | 16.141 | $\sum_{n=1}^{\infty} n! x^n$ | 16.142 | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n \cdot 10^n}$ | 16.143 | $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{5^n}$ |
| 16.144 | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{\sqrt[3]{n}}$ | 16.145 | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-3)^n}{2n-1}$ | 16.146 | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 (x-3)^n}{2^n}$ | 16.147 | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n \cdot 4^{n-1}}$ |
| 16.148 | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n-1}}{n!} x^n$ | 16.149 | $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n x^n$ | 16.150 | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \ln(n+1)}$ | 16.151 | $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sqrt{n} x^n}{n!}$ |

16.152 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3} x^n$	16.153 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{\sqrt{(n+1)^3}}$	16.154 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{2^n} x^n$	16.155 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n^2 \cdot 2^{n-2}}$
16.156 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-2)^{n+1}}{3^{n-1}}$	16.157 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$	16.158 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-4)^n}{(2n-1)n}$	
16.159 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{n!} (-1)^{n+1}$	16.160 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (x-\frac{1}{2})^n}{4^{n-1} \cdot (3n-1)}$	16.161 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-1)^n}{2n}$	
16.162 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x-2)^n \cdot 2^{n-1}}{(3n+2)(n-1)}$	16.163 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+1)^2}{2^n} x^n$	16.164 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{n^3}$	
16.165 $\frac{x}{2^2} + \frac{x^2}{4^2} + \frac{x^3}{6^2} + \dots$	16.166 $\frac{1}{3!}x + \frac{1}{5!}x^2 + \frac{1}{7!}x^3 + \dots$	16.167 $\frac{1}{2}x + \frac{3}{2^2}x^2 + \frac{5}{2^3}x^3 + \dots$	
16.168 $\frac{x}{1 \cdot 2} + \frac{x^2}{3 \cdot 4} + \frac{x^3}{5 \cdot 6} + \dots$	16.169 $\frac{1}{4!}x + \frac{1}{6!}x^2 + \frac{1}{8!}x^3 + \dots$	16.170 $\frac{2!}{1}x + \frac{4!}{2^2}x^2 + \frac{6!}{3^3}x^3 + \dots$	
16.171 $x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots$	16.172 $\frac{6}{1}x + \frac{7}{3}x^2 + \frac{8}{5}x^3 + \dots$	16.173 $\frac{1}{2} + \frac{x}{2^2 \cdot 2^2} + \frac{x^2}{2^3 \cdot 3^2} + \dots$	

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ №17

**Тема: Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними.
Однорідні диференціальні рівняння.**

11. Економічні задачі, що приводять до диференціальних рівнянь. Основні визначення. Диференціальні рівняння першого порядку. Література: [16], розд. VI, §1-2, стор. 307-315.

Рівняння з відокремлюваними змінними має вигляд:

$$M_1(x) \cdot N_1(x) dx + M_2(y) \cdot N_2(y) dy = 0 \quad (4.14)$$

або

$$M_1(x) \cdot N_1(y) + M_2(x) \cdot N_2(y) y' = 0, \quad (4.15)$$

де $y' = \frac{dy}{dx}$.

Особливості рівняння з відокремлюваними (подільними) змінними:

1. Якщо маємо рівняння виду (4.15), то підставляючи $y' = \frac{dy}{dx}$ можна звести його до рівняння виду (4.14).

2. У рівнянні з подільними змінними повинно бути тільки по одному диференціалу dx та dy , для чого потрібно згрупувати усі доданки, а диференціали потрібно винести за дужки.

3. При диференціалах dx та dy можуть бути добутки функцій, кожна з яких залежить тільки від однієї змінної.

Розв'язання рівняння (4.14) зводиться до відокремлення змінних, тобто при диференціалі dx повинна бути функція, що залежить тільки від змінної x , а при dy – тільки від y . Отже у рівнянні (4.14) при dx не повинно бути $N_1(y)$, а при dy – $M_2(x)$. Розділимо рівняння (4.14) на функції, що «мішають» при відповідних диференціалах, тобто на $N_1(y) \cdot M_2(x)$, за умови, що $N_1(y) \cdot M_2(x) \neq 0$

$$\frac{M_1(x) \cdot N_1(y) dx + M_2(x) \cdot N_2(y) dy}{N_1(y) \cdot M_2(x)} = 0.$$

Розділимо кожний доданок чисельника на знаменник, скоротимо і одержимо:

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)} dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)} dy = 0 \Rightarrow \frac{M_1(x)}{M_2(x)} dx = -\frac{N_2(y)}{N_1(y)} dy.$$

Останній вираз можна інтегрувати і одержимо загальний розв'язок рівняння з подільними змінними.

Приклад №17.1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$\sec^2 y \cdot y' - \sec^2 y \cdot e^x y' + 3e^x \operatorname{tg} y = 0$$

Розв'язання. Підставимо $y' = \frac{dy}{dx}$ і помножимо все рівняння на dx , отримаємо: $\sec^2 y dy - \sec^2 y e^x dy + 3e^x \operatorname{tg} y dx = 0$. Згрупуємо доданки з dy і спільний множник $\sec^2 y dy$ винесемо за дужки $(1 - e^x) \sec^2 y dy + 3e^x \operatorname{tg} y dx = 0$. Поділимо на ті функції, що «мішають» при відповідних диференціалах $\frac{(1 - e^x) \sec^2 y dy + 3e^x \operatorname{tg} y dx}{(1 - e^x) \cdot \operatorname{tg} y} = 0$. Після скорочень, отримаємо: $\frac{\sec^2 y}{\operatorname{tg} y} dy + \frac{3e^x}{(1 - e^x)} dx = 0$

$\Rightarrow \frac{\sec^2 y}{\operatorname{tg} y} dy = -\frac{3e^x}{(1 - e^x)} dx$. Інтегруємо обидві частини рівності і одержуємо: $\int \frac{1/\cos^2 y}{\operatorname{tg} y} dy = -3 \int \frac{e^x}{(1 - e^x)} dx$. В чисельниках обох інтегралів точна похідна відповідних знаменників, тому, використовуючи правило обчислення таких інтегралів, одержуємо: $\ln |\operatorname{tg} y| = 3 \ln |1 - e^x| + \ln C \Rightarrow \operatorname{tg} y = 3 \ln(1 - e^x) \cdot C \Rightarrow y = \operatorname{arctg}[C \cdot (1 - e^x)^3]$ – загальний розв'язок вихідного рівняння.

Приклад №17.2. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння або розв'язати задачу Коші $(xy^2 + x)dx + (yx^2 - y)dy = 0$ з початковою умовою $y = 1$ при $x = 2$.

Розв'язання. Спочатку знайдемо загальний розв'язок рівняння. При dx і dy у дужках винесемо спільні множники x та y за дужки і поділимо на $(y^2 + 1)(x^2 - 1)$: $\frac{x(y^2 + 1)dx + y(x^2 - 1)dy}{(y^2 + 1)(x^2 - 1)} = 0$. Після скорочення, маємо $\frac{x}{(x^2 - 1)} dx = -\frac{y}{(y^2 + 1)} dy$. Щоб отримати у кожному дробу в чисельнику точну похідну знаменника помножимо та поділимо на 2. Інтегруємо.

$\frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2 - 1} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{2y}{y^2 + 1} dy \Rightarrow 0,5 \ln |x^2 - 1| = -0,5 \ln |y^2 + 1| + 0,5 \ln C$ або $\ln |x^2 - 1| = \ln [C / (y^2 + 1)]$
 $\Rightarrow x^2 - 1 = C / (y^2 + 1) \Rightarrow y = \sqrt{\frac{C}{x^2 - 1}} - 1$ – загальний розв'язок рівняння.

Для знаходження частинного розв'язку треба у загальний розв'язок підставити початкові умови і знайти значення сталої C , а потім це значення C підставити у загальний розв'язок, тобто

$1 + 1 = C / [4 - 1] \Rightarrow C = 6$. Отже, частинний розв'язок буде $y^2 + 1 = 6 / (x^2 - 1)$ або $y = \sqrt{\frac{6}{x^2 - 1}} - 1$.

12. Диференціальні рівняння першого порядку. Література: [16], розд. VI, §2, стор. 318-320.

Диференціальне рівняння

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \quad (4.16)$$

є **однорідним**, якщо після підстановки $x = \lambda x$, $y = \lambda y$ параметр λ можна скоротити і отримати вихідне рівняння (4.16).

Розв'язання рівняння (4.16) знаходиться за допомогою підстановки $z = y/x \Rightarrow y = zx$, $y' = z'x + z$, де z – невідома функція, що залежить від x . Нове рівняння відносно z і x зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними.

Приклад №17.3. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $xdy - ydx =$

$$= \sqrt{x^2 + y^2} dx.$$

Розв'язання. Перевіряємо, що вихідне рівняння є однорідним. Для цього підставляємо $x = \lambda x, y = \lambda y$. Тоді $\lambda x dy - \lambda y dx = \sqrt{\lambda^2 x^2 + \lambda^2 y^2} dx \Rightarrow \lambda(x dy - y dx) = \lambda \sqrt{x^2 + y^2} dx \Rightarrow x dy - y dx = \sqrt{x^2 + y^2} dx$. Поділимо на dx і введемо заміну $y = zx, y' = z'x + z$. Підставляємо заміну у рівняння $xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow x(z'x + z) = zx + \sqrt{x^2 + z^2 x^2} \Rightarrow z'x^2 + zx = zx + x\sqrt{1 + z^2} \Rightarrow z'x^2 = x\sqrt{1 + z^2}$. Скорочуємо на x і одержуємо: $z'x = \sqrt{1 + z^2}$. Підставляємо $z' = \frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dx} \cdot x = \sqrt{1 + z^2} \Rightarrow x dz = \sqrt{1 + z^2} dx \Rightarrow \frac{dz}{\sqrt{1 + z^2}} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{dz}{\sqrt{1 + z^2}} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|z + \sqrt{1 + z^2}| = \ln|x| + \ln C$.

Потенціюємо $z + \sqrt{1 + z^2} = x \cdot C$. Повертаємось до «старої» змінної, тобто підставляємо $z = \frac{y}{x}: \frac{y}{x} + \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}} = x \cdot C$. Перетворимо і отримуємо $y + \sqrt{x^2 + y^2} = x^2 \cdot C$. Тоді загальний розв'язок або загальний інтеграл має вигляд: $y + \sqrt{x^2 + y^2} - x^2 \cdot C = 0$.

Приклад №17.4. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $2dx + \sqrt{\frac{x}{y}} dy - \sqrt{\frac{y}{x}} dx = 0$, що задовольняє початковим умовам при $x = 1, y = 4$.

Розв'язання. Поділимо все рівняння на dx і виділимо y' : $2 + \sqrt{\frac{x}{y}} y' - \sqrt{\frac{y}{x}} = 0$. Введемо заміну $z = \frac{y}{x}, y' = z'x + z: 2 + \sqrt{\frac{1}{z}} \cdot (z'x + z) - \sqrt{z} = 0 \Rightarrow 2 + \frac{z'x}{\sqrt{z}} + \frac{z}{\sqrt{z}} - \sqrt{z} = 0 \Rightarrow 2 + \frac{z'x}{\sqrt{z}} = 0$. оскільки $z' = \frac{dz}{dx}$, то $2 + \frac{x dz}{\sqrt{z} dx} = 0 \Rightarrow 2 \frac{dx}{x} = -\frac{dz}{\sqrt{z}} \Rightarrow 2 \int \frac{dx}{x} = -\int \frac{dz}{\sqrt{z}} \Rightarrow 2 \sqrt{z} = -2 \ln|x| + 2 \ln C \Rightarrow 2 \sqrt{\frac{y}{x}} = -2 \ln|x| + 2 \ln C \Rightarrow y = x[\ln(C/|x|)]^2$ - загальний розв'язок. підставляємо початкові умови і знаходимо сталу $C: 4 = 1 \cdot [\ln(C/1)]^2 \Rightarrow \ln C = 4$. Отже частинний розв'язок буде $y = x(4 - \ln|x|)^2$.

Контрольні питання

1. Основні поняття диференціальних рівнянь.
2. Порядок диференціального рівняння. Загальний розв'язок.
3. Задача Коші диференціального рівняння першого порядку.
4. Диференціальне рівняння першого порядку з поділеними змінними.
5. Методи розв'язання диференціальних рівнянь з поділеними змінними.
6. Поняття однорідного диференціального рівняння.
7. Метод розв'язання однорідного диференціального рівняння.

Завдання до практичного заняття №17

В задачах 17.1-17.24 знайти розв'язок диференціального рівняння:

- | | | |
|------------------------------------|---------------------------------------|--|
| 17.1 $xy' - y = y^2$ | 17.2 $y = y' + 4yx$ | 17.3 $(x^2 + x)y' = 2y + 1$ |
| 17.4 $y' + 2yx = 0$ | 17.5 $xy' + y - y^2 = 0$ | 17.6 $x^2 y' - 2yx = 3y$ |
| 17.7 $e^x dx - (1 + e^x) y dy = 0$ | 17.8 $y' \sin x = y \ln y$ | 17.9 $y' \tan x - y = 4$ |
| 17.10 $y' + 1 = y$ | 17.11 $xyy' = 1 - x^2$ | 17.12 $2xy' + y^2 = 1$ |
| 17.13 $y' = 1/\sqrt{x^2 - 1}$ | 17.14 $\sqrt{y^2 + 1} dx - xy dy = 0$ | 17.15 $\sqrt{1 - y^2} dx + y\sqrt{1 - x^2} dy = 0$ |
| 17.16 $y' = 10^{x+y}$ | 17.17 $y' = (y + 1)/x$ | 17.18 $(x^2 - 1)y' + 2xy^2 = 0$ |
| 17.19 $y' - y^2 x = 2yx$ | 17.20 $yx + (x + 1)y' = 0$ | 17.21 $2x^2 y dy - (y^2 - 2) dx = 0$ |

$$17.22 \quad y' + \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}} = 0$$

$$17.23 \quad y' = \frac{1+y^2}{xy(1+x^2)}$$

$$17.24 \quad yy' = \frac{1-2x}{y}$$

В задачах 17.25-17.27 знайти частинний розв'язок диференціального рівняння:

$$17.25 \quad y' = 3y^{2/3}, y(2) = 0$$

$$17.26 \quad y' \operatorname{ctg} x + y = 2, y(0) = 1$$

$$17.27 \quad (1+e^x)yy' = e^y, y(0) = 0$$

В задачах 17.28-17.47 знайти розв'язок однорідного диференціального рівняння:

$$17.28 \quad x^2y' = y^2 + yx$$

$$17.29 \quad (2y+x)dx - xdy = 0$$

$$17.30 \quad x^2y' + y^2 = yxy'$$

$$17.31 \quad y' = \frac{x/y + y/x}{x}$$

$$17.32 \quad y' = \frac{y^2}{x^2} - 2$$

$$17.33 \quad (xy' - y)/x = \operatorname{tg} \frac{y}{x}$$

$$17.34 \quad y' = e^{y/x} + \frac{y}{x}$$

$$17.35 \quad x - y \cos \frac{y}{x} + xy' \cos \frac{y}{x} = 0$$

$$17.36 \quad y' = \frac{2xy}{(x^2 - y^2)}$$

$$17.37 \quad yy' = 2y - x$$

$$17.38 \quad (8y + 10x)dx + (5y + 7x)dy = 0$$

$$17.39 \quad xdy - ydx = ydy$$

$$17.40 \quad xy' = y(\ln y - \ln x)$$

$$17.41 \quad x^2y' + y^2 - 2yx = 0$$

$$17.42 \quad x^3y' = y(y^2 + x^2)$$

$$17.43 \quad y' = \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2}$$

$$17.44 \quad \frac{dx}{x^2 - xy + y^2} = \frac{dy}{2y^2 - xy}$$

$$17.45 \quad y' = \frac{x+y}{x-y}$$

$$17.46 \quad \left(x \cos \frac{y}{x} + y \sin \frac{y}{x}\right) y dx + \left(x \cos \frac{y}{x} - y \sin \frac{y}{x}\right) x dy = 0 \quad 17.47$$

В задачах 17.48-17.51 знайти частинний розв'язок однорідного диференціального рівняння:

$$17.48 \quad (xy' - y) \operatorname{arctg} \left(\frac{y}{x}\right) = x, y|_{x=1} = 0$$

$$17.49 \quad (y^2 - 3x^2)dy + 2xydx = 0, y|_{x=0} = 1$$

$$17.50 \quad y' = \frac{y^2 - 2xy - x^2}{y^2 + 2xy - x^2}, y|_{x=0} = -1$$

$$17.51 \quad \frac{y - xy'}{x + yy'} = 2, y|_{x=1} = 1$$



ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ №18

Тема: Лінійні диференціальні рівняння.

13. Диференціальні рівняння першого порядку. Література: [16], розд. VI, §2, стор. 321-323.

Лінійним диференціальним рівнянням першого порядку називається рівняння виду:

$$y' + P(x)y = Q(x). \quad (4.17)$$

Особливості рівняння:

1) незалежна функція та її похідна (y і y') в рівнянні входить лінійно, тобто у плюс першому степені;

2) незалежну функцію та її похідну (y і y') можуть об'єднувати в рівнянні тільки лінійні математичні операції, тобто „+” або „-”;

3) коефіцієнт у похідній шуканої функції повинний дорівнювати одиниці, у протилежного випадку необхідно всі рівняння поділити на коефіцієнт.

Метод розв'язання:

1. Розв'язок рівняння (4.17) шукаємо у вигляді

$$y = U(x) \cdot e^{-\int P(x)dx}, \quad (4.18)$$

де $U(x)$ – невідома функція.

2. Знаходимо похідну розв'язку (4.18) і підставляємо у рівняння (4.17).

3. Після підстановки в рівнянні повинно залишитися тільки похідна невідомої функції (4.5), тобто $U'(x)$ з коефіцієнтом, та права частина.

4. З отриманого диференціального рівняння відносно $U'(x)$, інтегруючи, знаходимо функ-

цію $U(x)$ і підставляємо її в (4.18).

Приклад №18.1. Розв'язати рівняння $xy' - y = x^3$.

Розв'язання. Оскільки коефіцієнт при y' не одиниця, то поділимо все рівняння на « x » і одержимо: $y' - y/x = x^2$ або

$$y' - \frac{1}{x}y = x^2. \quad (4.19)$$

Отже $P(x) = -1/x$. Розв'язок рівняння (4.19) шукаємо у вигляді: $y = U(x) \cdot e^{-\int P(x)dx} = U(x) \cdot e^{\int \frac{dx}{x}} = U(x) \cdot e^{\ln x} = U(x) \cdot x$ або

$$y = U(x) \cdot x. \quad (4.20)$$

Знаходимо похідну від (4.20): $y' = U'(x) \cdot x + U(x)$. Підставляємо y і y' в (4.19) і одержуємо: $U'(x) \cdot x + U(x) - [U(x) \cdot x]/x = x^2 \Rightarrow U'(x) \cdot x = x^2 \Rightarrow U'(x) = x$. Заміняючи $U'(x) = \frac{dU}{dx}$, отримаємо

$$\frac{dU}{dx} = x \Rightarrow dU = x dx. \text{ Інтегруємо: } U = x^2/2 + C.$$

Знайдену функцію $U(x)$ підставляємо в (4.20), тоді розв'язок рівняння (4.19) набуде вигляду: $y = (x^2/2 + C) \cdot x = x^3/2 + Cx$.

Приклад №18.2. Знайти частинний розв'язок рівняння $\cos xy' - y \sin x = x \cos x$, якщо $y(0) = 0$.

Розв'язання. Поділимо все рівняння на $\cos x$:

$$y' - y \tan x = x. \quad (4.21)$$

Розв'язок шукаємо у вигляді: $y = U \cdot e^{\int \tan x dx} = U \cdot e^{-\ln |\cos x|} = U \cdot e^{\ln |1/\cos x|} = U/\cos x$ або

$$y = U/\cos x. \quad (4.22)$$

Знаходимо

$$y' = U'/\cos x + U \cdot \frac{\sin x}{\cos^2 x}. \quad (4.23)$$

Підставляємо (4.22), (4.23) в (4.21) і одержуємо: $U'/\cos x + U \cdot \frac{\sin x}{\cos^2 x} - U \cdot \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{\cos x} = x \Rightarrow U'/\cos x = x \Rightarrow U' = x \cos x$. Враховуючи, що $U'(x) = \frac{dU}{dx}$, будемо мати: $dU = x \cos x dx$. Інтегруємо частинами і отримаємо $U = \int x \cos x dx = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C$. Підставляємо U в (4.22) і тоді загальний розв'язок рівняння буде таким: $y = (x \sin x + \cos x + C)/\cos x$ або

$$y = x \tan x + 1 + C/\cos x. \quad (4.24)$$

Для знаходження частинного розв'язку, треба в загальний розв'язок підставити $x = 0$ і $y = 0$ та знайти значення сталої C . Отже, $0 = 1 + C \Rightarrow C = -1$. Звідки частинний розв'язок (4.24) матиме вигляд: $y = x \tan x + 1 - 1/\cos x$ або $y = x \tan x + 1 - \frac{1}{\cos x}$.

Зауваження. Інколи диференціальне рівняння є лінійним не відносно функції $y(x)$, а відносно функції $x(y)$.

Приклад №18.3. Знайти загальний розв'язок рівняння $(1 + y^2)dx = (\sqrt{1 + y^2} \sin y - xy)dy$.

Розв'язання. Оскільки « y » входить в рівняння нелінійно, то розглянемо рівняння відносно функції $x(y)$. Для цього виділимо похідну $x' = \frac{dx}{dy}$, тобто все рівняння поділимо на dy :

$(1 + y^2)x' = \sqrt{1 + y^2} \sin y - xy$. Перепишемо рівняння у вигляді: $(1 + y^2)x' + xy = \sqrt{1 + y^2} \sin y$. Поділимо на коефіцієнт при x' та одержимо: $x' + \frac{y}{(1 + y^2)}x = \frac{\sin y}{\sqrt{1 + y^2}}$. Розв'язок шукаємо у вигляді

$$x(y) = U(y) \cdot e^{-\int \frac{y}{1+y^2} dy} = U(y) \cdot e^{-\frac{1}{2} \ln(1+y^2)} = U(y) \cdot e^{-\frac{1}{2} \ln(1+y^2)} = U(y) \cdot e^{\ln(1+y^2)^{-\frac{1}{2}}} = U(y) / \sqrt{1+y^2}.$$

Знаходимо $x'(y) = U'(y) / \sqrt{1+y^2} - \frac{U(y) \cdot 2y}{2(1+y^2)^{3/2}} = U'(y) / \sqrt{1+y^2} - \frac{U(y) \cdot y}{(1+y^2)^{3/2}}$ і підставляємо у

рівняння: $U'(y) / \sqrt{1+y^2} - \frac{U(y) \cdot y}{(1+y^2)^{3/2}} + \frac{y}{(1+y^2)} \frac{U(y)}{\sqrt{1+y^2}} = \frac{\sin y}{\sqrt{1+y^2}} \Rightarrow U'(y) / \sqrt{1+y^2} = \sin y / \sqrt{1+y^2}$

$\Rightarrow U'(y) = \sin y \Rightarrow U(y) = -\cos y + C$. Отже загальний розв'язок буде $x(y) = (C - \cos y) / \sqrt{1+y^2}$.

Контрольні питання

1. Визначення лінійного диференціального рівняння першого порядку.
2. Особливості лінійного диференціального рівняння першого порядку.
3. Методи розв'язання лінійного диференціального рівняння.

Завдання до практичного заняття №18

В задачах 18.1-18.42 знайти розв'язок лінійного диференціального рівняння:

- | | | |
|--------------------------------------|--|---|
| 18.1 $xy' - y = x^2 \cos x$ | 18.2 $(1+x^2)y' + y = \arctg x$ | 18.3 $xy' + 2yx = x e^{-x^2}$ |
| 18.4 $y' - y = e^x$ | 18.5 $y' + 2y = 4x$ | 18.6 $y' + 5y = e^{3x}$ |
| 18.7 $y' + 2 \frac{y}{x} = 3x^2$ | 18.8 $y' + \frac{1-2x}{x^2} y = 1$ | 18.9 $y' - \frac{y}{x-1} = \frac{5}{x-1}$ |
| 18.10 $x \frac{dy}{dx} + y = 3$ | 18.11 $y' + \frac{xy}{1-x^2} = \arcsin x + x$ | 18.12 $y' + \frac{3}{x} y = \frac{2}{x^3}$ |
| 18.13 $y' + \frac{y}{1+x} + x^2 = 0$ | 18.14 $\frac{dy}{dx} = x + y$ | 18.15 $\frac{dy}{dx} + \frac{4xy}{x^2+1} = \frac{1}{x^2+1}$ |
| 18.16 $y' + 4y = e^{2x}$ | 18.17 $y' + y \cos x = \sin x \cos x$ | 18.18 $xy' - 2y = 2x^4$ |
| 18.19 $xy' - 3y = -e^x x^4$ | 18.20 $y' - 2y \lg x + \sin^2 x = 0$ | 18.21 $x(y' - y) = (1+x^2)e^x$ |
| 18.22 $y' + y = \cos x$ | 18.23 $y' + 2yx = x e^{-x^2}$ | 18.24 $x^2 dy + (3-2xy)dx = 0$ |
| 18.25 $x(y' - y) = e^x$ | 18.26 $(1+x^2)y' - 2xy = (1+x^2)^2$ | 18.27 $x^2 y' + yx + 1 = 0$ |
| 18.28 $y' = \frac{y}{3x - y^2}$ | 18.29 $y' = -\frac{1}{x + y^2}$ | 18.30 $2ydx + (y^2 - 6x)dy = 0$ |
| 18.31 $y'(y^2 - x) = y$ | 18.32 $y = x(y' - x \cos x)$ | 18.33 $e^y dx + (xe^y - 2y)dy = 0$ |
| 18.34 $(2e^y - x)y' = 1$ | 18.35 $(\sin^2 y + x \operatorname{ctg} y)y' = 1$ | 18.36 $ydx = (y^3 - x)dy$ |
| 18.37 $y' = \frac{1}{2x - y}$ | 18.38 $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \cos y + \sin 2y}$ | 18.39 $y' = \frac{y}{2y \ln y + y - x}$ |

В задачах 18.40-18.52 знайти частинний розв'язок лінійного диференціального рівняння:

- | | |
|--|--|
| 18.43 $y' + \frac{2}{x} y = \frac{4}{x^2}, y(1) = 0$ | 18.44 $y' - \frac{y}{x \ln x} = x \ln x, y(e) = e^2/2$ |
| 18.45 $y' \sqrt{1-x^2} + y = \arcsin x, y(0) = 0$ | 18.46 $y' \sin x - y \cos x = 1, y(\pi/2) = 0$ |
| 18.47 $y' + 3y \operatorname{ctg} 3x = \sin 6x, y(0) = 1/3$ | 18.48 $y' + y = e^{x/2}, y(0) = 9/4$ |
| 18.49 $xy' + y - e^x = 0, y(1) = 0$ | 18.50 $y' + y \lg x = 1/\cos x, y(0) = 0$ |
| 18.51 $y' - \frac{3x^2 y}{x^3 + 1} = (x^3 + 1) \sin x, y(0) = 1$ | 18.52 $xy' - \frac{y}{x+1} = x, y(1) = 0$ |



ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ №19

Тема: Лінійні диференціальні рівняння вищих порядків зі сталими коефіцієнтами

14. Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами *Література*: [16], розд. VI, §4, стор. 336-340.

Рівняння виду:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0 \quad (4.25)$$

є лінійним однорідним диференціальним рівнянням порядку n .

Для знаходження загального розв'язку рівняння (4.25) складаємо характеристичне рівняння

$$a_0 k^n + a_1 k^{n-1} + a_2 k^{n-2} + \dots + a_n = 0 \quad (4.26)$$

та розв'язуємо його. В залежності від коренів рівняння (4.26) маємо три випадки розв'язку диференціального рівняння (4.25):

I. Корені рівняння (4.26) всі дійсні та не рівні між собою, тобто $k_1 \neq k_2 \neq k_3 \dots \neq k_n$. Тоді розв'язок рівняння (4.25) буде таким:

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} + \dots + C_n e^{k_n x}. \quad (4.27)$$

II. Корені рівняння (4.26) всі дійсні та рівні між собою $k_1 = k_2 = \dots = k_n$, тоді розв'язок рівняння (4.25) матиме вигляд:

$$y = e^{k_1 x} (C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \dots + C_n x^{n-1}). \quad (4.28)$$

III. Корені рівняння (4.26) комплексно спряжені: $k_{1,2} = \alpha_1 \pm i\beta_1$, $k_{3,4} = \alpha_2 \pm i\beta_2$, ... У цьому випадку, якщо корені між собою не рівні, то розв'язок рівняння (4.25) буде

$$y = e^{\alpha_1 x} (C_1 \cos \beta_1 x + C_2 \sin \beta_1 x) + e^{\alpha_2 x} (C_3 \cos \beta_2 x + C_4 \sin \beta_2 x) + \dots \quad (4.29)$$

Якщо є пари комплексно спряжених чисел, які рівні між собою, наприклад $k_{1,2} = k_{3,4} = k_{5,6} = \alpha_1 \pm i\beta_1$, тобто три пари спряжених коренів рівні між собою, тоді розв'язок матиме вигляд:

$$y = e^{\alpha_1 x} [C_1 \cos \beta_1 x + C_2 \sin \beta_1 x + x(C_3 \cos \beta_1 x + C_4 \sin \beta_1 x) + x^2(C_5 \cos \beta_1 x + C_6 \sin \beta_1 x)] + e^{\alpha_2 x} (C_7 \cos \beta_2 x + C_8 \sin \beta_2 x) + \dots \quad (4.30)$$

Приклад №19.1. Знайти загальний розв'язок рівняння $y'' - y' = 0$.

Розв'язання. Складемо характеристичне рівняння $k^2 - k = 0 \Rightarrow k(k - 1) = 0 \Rightarrow k_1 = 0, k_2 = 1, k_2 = -1$.

Отже маємо три дійсних різних між собою корені. За (4.27) запишемо розв'язок $y = C_1 e^{0x} + C_2 e^{1x} + C_3 e^{-1x} = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{-x}$.

Приклад №19.2. Знайти загальний розв'язок рівняння $y^{IV} + 2y''' + y'' = 0$.

Розв'язання. Характеристичне рівняння $k^4 + 2k^3 + k^2 = 0 \Rightarrow k^2(k^2 + 2k + 1) = 0 \Rightarrow k_{1,2} = 0, k_{3,4} = -1$. Маємо по два кратних корені. За формулою (4.28) для кожної пари кратних коренів напишемо розв'язок $y = e^{0x} (C_1 + C_2 x) + e^{-x} (C_3 + C_4 x) = C_1 + C_2 x + e^{-x} (C_3 + C_4 x)$.

Приклад №19.3. Знайти загальний розв'язок рівняння $y^{IV} + 8y'' + 16y = 0$.

Розв'язання. Характеристичне рівняння $k^4 + 8k^2 + 16 = 0$. Маємо бікватратне рівняння. Робимо заміну $k^2 = t$, тоді $t^2 + 8t + 16 = 0 \Rightarrow t_{1,2} = -4$, отже $k^2 = -4 \Rightarrow k_{1,2} = k_{3,4} = \pm 2i \Rightarrow \alpha = 0; \beta = 2$. Розв'язок записуємо у вигляді (4.30): $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + x(C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x)$.

Приклад №19.4. Знайти частинний розв'язок рівняння $y'' - 5y' + 4y = 0, y(0) = 5, y'(0) = 8$.

Розв'язання. Знайдемо загальний розв'язок. Характеристичне рівняння $k^2 - 5k + 4 = 0 \Rightarrow k_1 = 4, k_2 = 1$. Розв'язок буде $y = C_1 e^{4x} + C_2 e^x$.

Для знаходження частинного розв'язку, знайдемо похідну від загального розв'язку $y' = C_1 \cdot 4e^{4x} + C_2 e^x$. Далі, у розв'язок та його похідну підставимо початкові умови і одержимо

$$\text{систему } \begin{cases} 5 = C_1 + C_2 \\ 8 = 4C_1 + C_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = 4 \end{cases}. \text{ Отже, частинний розв'язок буде мати вигляд: } y = e^{4x} + 4e^x.$$

15. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами *Література*: [16], розд. VI, §6, стор. 343-348.

Розглянемо лінійне неоднорідне диференціальне рівняння виду:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = f(x) \quad (4.31)$$

Розв'язок даного рівняння складається з суми розв'язків однорідного рівняння (4.25) та будь-якого частинного розв'язку $y_3 = y_{од} + y_ч$. Частинний розв'язок $y_ч$ можна знаходити двома методами:

- 1) методом варіації довільних сталих;
- 2) методом невизначених коефіцієнтів, тобто частинний розв'язок складається за видом правої частини $f(x)$ рівняння (4.31).

Частинний розв'язок будемо знаходити другим методом за видом правої частини $f(x)$:

Перший випадок

$$f(x) = e^{\alpha x} P_n(x), \quad (4.32)$$

де $P_n(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots + A_n x^n$.

У цьому випадку частинний розв'язок $y_ч$ складається за таким правилом:

- показникові функція $e^{\alpha x}$ бреться з правої частини (якщо її у правій частині немає, то не буде і в частинному розв'язку);
- з правої частини визначаємо найвищий степінь « x » і в частинному розв'язку записується повний поліном такого ж степеня з невизначеними коефіцієнтами.

Отже

$$y_ч = e^{\alpha x} (B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + \dots + B_n x^n). \quad (4.33)$$

Потім аналізуємо корені характеристичного рівняння, що можуть дати такі випадки:

- *комплексні-спряжені*. У цьому випадку частинний розв'язок залишається у вигляді (4.33).
- *дійсні корені, але жоден з них не дорівнює α* . Частинний розв'язок залишається у вигляді (4.33).
- *корені дійсні, але з них s коренів дорівнюють α* . У цьому випадку частинний розв'язок (4.33) треба помножити на x^s , тобто

$$y_ч = e^{\alpha x} (B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + \dots + B_n x^n) \cdot x^s \quad (4.34)$$

Невизначені коефіцієнти знаходимо, підставляючи частинний розв'язок $y_ч$ у вихідне рівняння. Потім прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях у лівій та правій частинах. Отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невизначених коефіцієнтів.

Приклад №19.5. Розв'язати рівняння $y'' - 4y = 3xe^{2x}$.

Розв'язання. Загальний розв'язок має вигляд: $y_3 = y_{од} + y_ч$. Для знаходження $y_{од}$ складемо характеристичне рівняння $k^2 - 4 = 0 \Rightarrow k_{1,2} = \pm 2$. Отже $y_{од} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$. Для складання $y_ч$ у вигляді (4.33) з правої частини беремо e^{2x} і повний поліном першого степеня $y_ч = e^{2x} (A_0 + A_1 x)$. Тепер аналізуємо корні характеристичного рівняння і бачимо, що один з коренів співпадає з коефіцієнтом показника степеня e^{2x} , тобто $k = \alpha$. У цьому випадку частинний розв'язок повинні помножити на x (див. 4.34). Отже, $y_ч = e^{2x} (A_0 + A_1 x) \cdot x = e^{2x} (A_0 x + A_1 x^2)$. Для знаходження A_0 і A_1 підставимо $y_ч$ у вихідне рівняння. Запишемо першу і другу похідну від $y_ч$.

$y_ч' = 2e^{2x} (A_0 x + A_1 x^2) + e^{2x} (A_0 + 2A_1 x)$, $y_ч'' = 4e^{2x} (A_0 x + A_1 x^2) + 2e^{2x} (A_0 + 2A_1 x) + 2e^{2x} (A_0 + 2A_1 x) + e^{2x} \cdot 2A_1 = 4e^{2x} (A_0 x + A_1 x^2) + 4e^{2x} (A_0 + 2A_1 x) + 2e^{2x} A_1$. Підставляючи, одержимо: $4e^{2x} (A_0 x + A_1 x^2) + 4e^{2x} (A_0 + 2A_1 x) + 2e^{2x} A_1 - 4e^{2x} (A_0 x + A_1 x^2) = 3xe^{2x}$. Скорочуємо і отримуємо $4A_0 + 8A_1 x + 2A_1 = 3x$. Зрівнюємо коефіцієнти при однакових степенях:

$$\begin{cases} x^0 | 4A_0 + 2A_1 = 0 \\ x^1 | 8A_1 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_0 = -\frac{1}{2}A_1 \\ A_1 = \frac{3}{8} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_0 = -\frac{3}{16} \\ A_1 = \frac{3}{8} \end{cases}$$

Звідки частинний матиме вигляд: $y_ч = e^{2x} \left(-\frac{3}{16} x + \frac{3}{8} x^2 \right)$. Тоді загальний розв'язок буде y_3

$$= y_{од} + y_ч = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + e^{2x} \left(-\frac{3}{16}x + \frac{3}{8}x^2 \right).$$

Приклад №19.6. Розв'язати рівняння $y'' + 9y = 4x - 1$.

Розв'язання. Спочатку знайдемо $y_{од}$. Тобто $k^2 + 9 = 0 \Rightarrow k_{1,2} = \pm 3i \Rightarrow y_{од} = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x$. Складаємо $y_ч = A_0 + A_1 x$ (4.33). Оскільки корені не співпадають, то знаходимо похідні $y'_ч = A_1$, $y''_ч = 0$ та підставляємо у вихідне рівняння $9A_0 + 9A_1 x = 4x - 1$.

$$\begin{cases} x^0 | 9A_0 = -1 \\ x^1 | 9A_1 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_0 = -1/9 \\ A_1 = 4/9 \end{cases}. \text{ Тоді } y_3 = y_{од} + y_ч = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x - \frac{1}{9} + \frac{4}{9}x.$$

Другий випадок

$$y_ч = e^{\alpha x} \cdot [P_n(x) \sin \beta x + Q_m(x) \cos \beta x], \quad (4.35)$$

де $P_n(x)$ – поліном степеня n , $Q_m(x)$ – поліном степеня m .

Нехай $n \geq m$. У цьому випадку частинний розв'язок складається так:

- з правої частини береться $e^{\alpha x}$;
- при функціях $\sin \beta x$ і $\cos \beta x$ записуються різні повні поліноми степеня n з невизначеними коефіцієнтами

$$y_ч = e^{\alpha x} [(A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots + A_n x^n) \sin \beta x + (B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + \dots + B_n x^n) \cos \beta x]. \quad (4.36)$$

Знову аналізуємо корні характеристичного рівняння і, якщо:

- корені дійсні, то $y_ч$ залишається у вигляді (4.36);
- корені комплексно-спряжені, причому жодний з них не дорівнює $\alpha \pm i\beta$, то $y_ч$ залишається у вигляді (4.36);
- корені комплексно-спряжені, причому з них s коренів дорівнюють $\alpha \pm i\beta$, тоді $y_ч$ треба помножити на x^s , тобто

$$y_ч = e^{\alpha x} [(A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots + A_n x^n) \sin \beta x + (B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + \dots + B_n x^n) \cos \beta x] \cdot x^s. \quad (4.37)$$

Невизначені коефіцієнти A_i , B_i знаходяться так же, як і у попередньому випадку, тільки треба ще зрівняти і коефіцієнти при $\sin \beta x$ і $\cos \beta x$.

Приклад №19.7. Розв'язати рівняння $y'' + y' - 2y = 8 \sin 2x$.

Розв'язання. Знайдемо $y_{од}$: $k^2 + k - 2 = 0 \Rightarrow k_1 = -2, k_2 = 1, \Rightarrow y_{од} = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x$. Частинний розв'язок матиме вигляд (4.36): $y_ч = A_0 \sin 2x + B_0 \cos 2x$. Знайдемо похідні $y'_ч = 2A_0 \cos 2x - 2B_0 \sin 2x$, $y''_ч = -4A_0 \sin 2x - 4B_0 \cos 2x$. Підставляючи у рівняння, одержимо $-4A_0 \sin 2x - 4B_0 \cos 2x + 2A_0 \cos 2x - 2B_0 \sin 2x - 2(A_0 \sin 2x + B_0 \cos 2x) = 8 \sin 2x$. Прирівнюючи коефіцієнти, маємо:

$$\begin{cases} \sin 2x | -4A_0 - 2B_0 - 2A_0 = 8 \\ \cos 2x | -4B_0 + 2A_0 - 2B_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6A_0 - 2B_0 = 8 \\ -6B_0 + 2A_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -9B_0 - B_0 = 4 \\ A_0 = 3B_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B_0 = -0,4 \\ A_0 = -1,2 \end{cases}. \text{ Тоді загальний розв'язок буде таким: } y_3 = y_{од} + y_ч = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x - 1,2 \sin 2x - 0,4 \cos 2x.$$

Приклад №19.8. Розв'язати рівняння $y'' + y = 2 \cos x$.

Розв'язання. Для знаходження $y_{од}$ запишемо характеристичне рівняння: $k^2 + 1 = 0 \Rightarrow k_{1,2} = \pm i \Rightarrow y_{од} = C_1 \cos x + C_2 \sin x$. За правою частиною (4.36) складаємо частинний розв'язок $y_ч = A_0 \sin x + B_0 \cos x$. Аналізуючи корні характеристичного рівняння, з'ясуємо, що як комплексно-спряжений, він має вигляд $\alpha \pm i\beta$, тобто для правої частини $\alpha = 0$, а $\beta = 1$. Отже $k_{1,2} = \pm i$ – корінь кратний. У цьому випадку частинний розв'язок треба помножити на x , тобто $y_ч = (A_0 \sin x + B_0 \cos x) \cdot x$. Знаходимо похідні $y'_ч = (A_0 \cos x - B_0 \sin x) \cdot x + A_0 \sin x + B_0 \cos x$, $y''_ч = (-A_0 \sin x - B_0 \cos x) \cdot x + (A_0 \cos x - B_0 \sin x) + A_0 \cos x - B_0 \sin x$. Підставляємо у вихідне рівняння: $-(A_0 \sin x + B_0 \cos x) \cdot x + 2A_0 \cos x - 2B_0 \sin x + (A_0 \sin x + B_0 \cos x) \cdot x = 2 \cos x \Rightarrow 2A_0 \cos x - 2B_0 \sin x = 2 \cos x$. Прирівнюємо коефіцієнти: $\begin{cases} \sin x | -2B_0 = 0 \\ \cos x | 2A_0 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B_0 = 0 \\ A_0 = 1 \end{cases}$. Тоді загальний розв'язок матиме такий вигляд: $y_3 = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x \cdot \sin x$.

Приклад №19.9. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $y''' - 9y' = 3(2 - x^2)$,

що задовольняє початковим умовам $y(0) = y'(0) = y''(0) = 1$.

Розв'язання. Знаходимо загальний розв'язок у вигляді: $y_3 = y_{од} + y_{ч}$. Характеристичне рівняння $k^3 - 9k = 0 \Rightarrow k(k^2 - 9) = 0 \Rightarrow k_1 = 0, k_2 = 3, k_3 = -3 \Rightarrow y_{од} = C_1 + C_2 e^{3x} + C_3 e^{-3x}$. Частинний розв'язок складаємо за правою частиною (4.36): $y_4 = A_0 + A_1 x + A_2 x^2$. Оскільки у правій частині немає e , тобто $\alpha = 0$ для $e^{\alpha x}$ і один з коренів характеристичного рівняння дорівнює нулю, то треба частинний розв'язок помножити на x : $y_4 = (A_0 + A_1 x + A_2 x^2)x = A_0 x + A_1 x^2 + A_2 x^3$. Знаходимо похідні $y'_4 = A_0 + 2A_1 x + 3A_2 x^2$, $y''_4 = 2A_1 + 6A_2 x$, $y'''_4 = 6A_2$. Підставляємо у вихідне рівняння: $6A_2 - 9(A_0 + 2A_1 x + 3A_2 x^2) = 3(2 - x^2)$. Прирівнюємо коефіцієнти:

$$\begin{cases} x^0: 6A_2 - 9A_0 = 6 \\ x^1: -18A_1 = 0 \\ x^2: -27A_2 = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9A_0 = 6 \cdot \frac{1}{9} - 6 \\ A_1 = 0 \\ A_2 = \frac{1}{9} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9A_0 = -\frac{16}{27} \\ A_1 = 0 \\ A_2 = \frac{1}{9} \end{cases}. \text{Отже загальний розв'язок вихідного}$$

рівняння має вигляд: $y_3 = C_1 + C_2 e^{3x} + C_3 e^{-3x} - \frac{16}{27}x + \frac{1}{9}x^3$.

Для знаходження розв'язку задачі Коші використовуємо початкові умови, попередньо записуючи першу та другу похідну $y'_3 = 3C_2 e^{3x} - 3C_3 e^{-3x} - \frac{16}{27} + \frac{1}{3}x^2$, $y''_3 = 9C_2 e^{3x} + 9C_3 e^{-3x} + \frac{2}{3}x$:

$$\begin{cases} 1 = C_1 + C_2 + C_3 \\ 1 = 3C_2 - 3C_3 - \frac{16}{27} \\ 1 = 9C_2 + 9C_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9 = 9C_1 + 9C_2 + 9C_3 \\ 3 = 9C_2 - 9C_3 - \frac{16}{9} \\ 1 = 9C_2 + 9C_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8 = 9C_1 \\ 4 = 18C_2 - \frac{16}{9} \\ 9C_3 = 1 - 9C_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{8}{9} \\ C_2 = \frac{26}{81} \\ C_3 = -\frac{17}{9} \end{cases}.$$

Отже, частинний розв'язок, що задовольняє початковим умовам буде таким:

$$y = \frac{8}{9} + \frac{26}{81}e^{3x} - \frac{17}{9}e^{-3x} - \frac{16}{27}x + \frac{1}{9}x^3.$$

Контрольні питання

1. Лінійні однорідні диференціальні рівняння вищих порядків зі сталими коефіцієнтами.
2. Метод розв'язання лінійних однорідних диференціальних рівнянь вищих порядків зі сталими коефіцієнтами.
3. Поняття характеристичного рівняння.
4. Три види загальних розв'язків лінійного однорідного диференціального рівняння в залежності від виду коренів характеристичного рівняння.
5. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння вищих порядків зі сталими коефіцієнтами.
6. Методи розв'язання лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь вищих порядків зі сталими коефіцієнтами.

Завдання до практичного заняття №19

В задачах 19.1-19.42 знайти розв'язок однорідного диференціального рівняння:

- | | | |
|-----------------------------|------------------------------|------------------------------|
| 19.1 $y'' + 4y = 0$ | 19.2 $y'' + 7y' = 0$ | 19.3 $y'' - 25y = 0$ |
| 19.4 $9y'' - y = 0$ | 19.5 $4y'' + y = 0$ | 19.6 $y'' - 4y' = 0$ |
| 19.7 $y'' - y' - 2y = 0$ | 19.8 $y'' - 4y' + 13y = 0$ | 19.9 $y'' + 7y' + 6y = 0$ |
| 19.10 $3y'' - 2y' - 8y = 0$ | 19.11 $y'' - 2y' + y = 0$ | 19.12 $y'' - 2y' + 10y = 0$ |
| 19.13 $y'' + 6y' + 13y = 0$ | 19.14 $4y'' - 8y' + 5y = 0$ | 19.15 $2y'' + y' - y = 0$ |
| 19.16 $y'' - 2y' - y = 0$ | 19.17 $y'' + 3y' + 2y = 0$ | 19.18 $y'' - 8y' + 16y = 0$ |
| 19.19 $y'' + 2y' + 9y = 0$ | 19.20 $y'' - 6y' + 9y = 0$ | 19.21 $y'' - 2y' - 3y = 0$ |
| 19.22 $y'' - 4y' + 4y = 0$ | 19.23 $y'' + 12y' + 37y = 0$ | 19.24 $9y'' - 6y' + y = 0$ |
| 19.25 $y'' + y' + y = 0$ | 19.26 $y'' + 10y' + 29y = 0$ | 19.27 $y'' - 10y' + 16y = 0$ |
| 19.28 $6y'' + 7y' - 3y = 0$ | 19.29 $y'' - 6y' + 8y = 0$ | 19.30 $4y'' - 8y' + 3y = 0$ |

- | | | |
|-------------------------------|-------------------------------|-----------------------------------|
| 19.31 $9y'' + 3y' - 2y = 0$ | 19.32 $y'' + 3y' - 4y = 0$ | 19.33 $y'' - 2y' - 15y = 0$ |
| 19.34 $y''' - 8y = 0$ | 19.35 $y''' + 9y' = 0$ | 19.36 $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$ |
| 19.37 $y''' - 5y'' + 6y' = 0$ | 19.38 $y''' - 13y' - 12y = 0$ | 19.39 $y^{IV} - 12y'' + 36y = 0$ |
| 19.40 $y^{IV} = 16y$ | 19.41 $y^{IV} = 8y'' - 16y$ | 19.42 $y^{IV} + 2y'' + y = 0$ |

В задачах 19.43-19.67 знайти частинний розв'язок однорідного диференціального рівняння:

- | | |
|--|---|
| 19.43 $y'' - 10y' + 25y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1.$ | 19.44 $y'' + 3y' = 0, y(0) = 1, y'(0) = 2.$ |
| 19.45 $y'' + 9y = 0, y(0) = 0, y'(\pi/4) = 1.$ | 19.46 $y'' + 5y' + 6y = 0, y(0) = 1, y'(0) = -6.$ |
| 19.47 $y'' - 4y' + 3y = 0, y(0) = 6, y'(0) = 10.$ | 19.48 $y'' - 4y' + 29y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 15.$ |
| 19.49 $y'' + 4y' + y = 0, y(0) = 2, y'(0) = 0.$ | 19.50 $y''' = -y', y(0) = 2, y'(0) = 0, y''(0) = -1.$ |
| 19.51 $y''' + 2y'' + 9y' + 18y = 0, y(0) = 1, y'(0) = -3, y''(0) = -9.$ | |
| 19.52 $y''' + y'' - 5y' + 3y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = -14.$ | |
| 19.53 $y''' - y'' + y' - y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = 0.$ | |
| 19.54 $y''' - 13y'' + 12y' = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = 133.$ | |
| 19.55 $y''' - 5y'' + 8y' - 4y = 0, y(0) = 1, y'(0) = -1, y''(0) = 0.$ | |
| 19.56 $y^{IV} - 2y''' + y'' = 0, y(0) = y'(0) = 0, y''(0) = 1, y'''(0) = 2.$ | |
| 19.57 $y^{IV} - 5y'' + 4y = 0, y(0) = -2, y'(0) = 1, y''(0) = 2, y'''(0) = 0.$ | |
| 19.58 $y^{IV} + 5y'' + 4y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 4, y''(0) = -1, y'''(0) = -16.$ | |
| 19.59 $y^{IV} + 10y'' + 9y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 3, y''(0) = -9, y'''(0) = -27$ | |
| 19.60 $y^{IV} = y', y(0) = y'(0) = y''(0) = 0, y'''(0) = 1, y^{IV}(0) = 2.$ | |
| 19.61 $y^{IV} - 6y^{IV} + 9y''' = 0, y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0, y^{IV}(0) = 27.$ | |

В задачах 19.62-19.90 знайти загальний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння:

- | | | |
|--|--|---------------------------------------|
| 19.62 $2y'' + y' - y = 2e^x$ | 19.63 $y'' - 3y' = 2x^2 - x$ | 19.64 $y'' - 6y' + 9y = 2x^2 - x + 3$ |
| 19.65 $y'' - 2y' + 2y = 2x$ | 19.66 $y'' + 25y = e^x$ | 19.67 $y'' + 2y' + 5y = -8.5\cos 2x$ |
| 19.68 $y'' + 4y' - 5y = 1$ | 19.69 $y'' - 9y' = e^{3x}(2 - x)$ | 19.70 $y'' + 2y' + 5y = e^{2x}\cos x$ |
| 19.71 $y'' + 16y = e^x$ | 19.72 $y'' - 7y' + 6y = \sin x$ | 19.73 $y'' + 2y' + y = e^{2x}(1 - x)$ |
| 19.74 $y'' + y = 6\sin 2x$ | 19.75 $y'' - 3y' + 2y = 2e^x x$ | 19.76 $y'' + 2y' - 3y = e^x(3 - 2x)$ |
| 19.77 $y'' + 9y = 3\sin 3x$ | 19.78 $y'' - 8y' + 15y = 2\cos 3x$ | 19.79 $y'' - 8y' + 12y = -65\cos 4x$ |
| 19.80 $y'' + y' = 2x^2 - 1$ | 19.81 $y'' + 16y' = e^x(x^2 + 4x - 1)$ | 19.82 $y''' - 4y' = xe^{2x}$ |
| 19.83 $y''' - 3y' + 2y = e^{-x}(4x^2 + 4x - 10)$ | 19.84 $y^{IV} - 2y'' + y = 8(e^x + e^{-x}) + 4(\sin x + \cos x)$ | |
| 19.85 $y'' + y' = 1 + \cos x$ | 19.86 $y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 2x + 3$ | 19.87 $y^{IV} + 8y'' + 16y = \cos x$ |
| 19.88 $y^{IV} - y = xe^x + \cos x$ | 19.89 $y^{IV} + 2y'' + y = \sin x$ | 19.90 $y^{IV} + y''' = x^2 + 1$ |

В задачах 19.91-19.99 записати частинний розв'язок рівняння за видом правої частини:

- | | |
|--|---|
| 19.91 $y'' - 4y = e^x \sin x + e^{-2x}x - e^{-2x} \sin x$ | 19.92 $y''' - 5y'' + 8y' - 4y = 2e^{3x} + 4e^x - 3e^{2x}$ |
| 19.93 $y'' + 4y' + 4y = xe^{2x} + 3e^{-2x}$ | 19.94 $y^{IV} + 2y'' + y = \cos x + e^x -$ |
| 19.95 $y'' - 3y' + 2y = 10e^{-x} - e^{-2x} + 2\sin x + 5\sin 2x - 3e^{2x}x + 2x^3 - 30.$ | |
| 19.96 $2y'' + 3y' = e^x + 5x^2 - 2x - 1 - 29\cos x + 29x\sin x.$ | |
| 19.97 $y'' - 4y' + 4y = 1 + 3e^{2x} - \sin 2x + 2x - 8x^2 - 8\cos x.$ | |
| 19.98 $y'' + y = 2x^3 - x + 2 - 8\cos 3x + \sin x - 2e^{-x} + e^x \cos x.$ | |
| 19.99 $y''' - 5y'' + 6y' = e^x + xe^{2x} - \sin x + x^4 e^{3x} - x^2 + x + 1 - xe^x \sin x.$ | |

В задачах 19.100-19.105 розв'язати задачу Копі неоднорідного диференціального рівняння:

- | | |
|---|---|
| 19.100 $y'' - y' = 2(1 - x), y(0) = y'(0) = 1.$ | 19.101 $y'' + y' + \sin x = 0, y(\pi) = y'(\pi) = 1.$ |
| 19.102 $4y'' + 16y' + 15y = 4e^{-3x/2}, y(0) = 3, y'(0) = -5.5.$ | |
| 19.103 $y'' - 2y' + 10y = 10x^2 + 18x + 6, y(0) = 1, y'(0) = 3.2.$ | |
| 19.104 $y'' - 2y' = e^x(x^2 + x - 3), y(0) = y'(0) = 2.$ | |
| 19.105 $y''' + 2y'' + y' + 2e^{-2x} = 0, y(0) = 2, y'(0) = y''(0) = 1.$ | |

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Беклемишва А. М. Сборник задач по линейной алгебре и аналитической геометрии. – М.: Наука, 1973.
2. Бугір М.К. Математика для економістів. Лінійна алгебра, Лінійні моделі: Посібник для студентів вищих навч. закл. – К.-Ж.: Видавничий центр “Академія”, 1998. – 272 с.
3. Данко Е. П. и др. Высшая математика в задачах и упражнениях. В 2-х частях. – М.: Наука, 1979.
4. Дудка Г.Я. Практикум з математики для економістів. – Львів: Львівський банківський коледж, 1998. – 362 с.
5. Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометрии – М.: Наука, 1975.
6. Замков О.О., Толстопятенко А.В., Черемных Ю.Н. Математические методы в экономике: Учебник. – М.: МГУ им. М.В. Ломоносова, изд-во ДИС, 1997. – 368 с.
7. Каплан И.А. Практические занятия по высшей математике. – Харьков: Высшая школа, 1974.
8. Киричевский В.В., Копылова Н.А. Курс высшей математики: Учеб. пособие для студентов экономических специальностей высших учебных заведений. – К.: Наук. думка, 1998. – 572 с.
9. Колесников А.Н. Краткий курс математики для экономистов: Учеб. пособие. – М.: ИНФРА-М, 1997. – 208 с.
10. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики. – М.: Наука, 1985.
11. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике. – М.: Наука, 1978.
12. Проскураков В. Д. Сборник задач по линейной алгебре. – М.: Наука, 1967. – 312 с.
13. Солодовников А.С., Бабейцев В.А., Браилов А.В. Математика в экономике: Учебник: В 3 ч. Ч. 1 – М.: Финансы и статистика, 1998. – 224 с.
14. Справочник по математике для экономистов // Под ред. проф. В.И. Ермакова. – М.: Высшая школа, 1987. – 336 с.
15. Гевяшев А.Д., Литвин О.Г. Высшая математика. Общий курс. Сб. задач и упражнений. – 2-е изд., испр. и доп. – Х.: Рубрикон, 1999. – 320 с.
16. Толок В.О., Киричевський В.В., Волкова Т.Д. Курс математики для економістів. Навчальний посібник в трьох частинах. Ч.1 – К.: Наукова думка, 2002. — 336 с.
17. Фаддеев Д. К., Соминский И. С. Сборник задач по высшей алгебре. – М.: Наука, 1964. – 304 с.