

**Тема. Границі функцій та послідовностей.
Диференційне числення функції однієї та багатьох змінних**

Завдання 9. Знайти границі послідовностей та функцій

Варіант №1.

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2 + 2} - 5n^2}{n - \sqrt{n^4 - n + 1}}; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^x; \text{ в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{x \sin 2x}; \text{ г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{2}\right)}.$$

Варіант №2.

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt[3]{7n} - \sqrt[4]{81n^8 - 1}}{(n + 4\sqrt{n})\sqrt{n^2 - 5}}; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1 - 2x}{3 - 2x}\right)^{4x}; \text{ в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2}; \text{ г) } \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{1 - x^2/\pi^2}.$$

Варіант №3.

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n - \sqrt[3]{n^3 - 5}}{n\sqrt{n} + 2n}\right); \text{ б) } \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{1/\sin x}; \text{ в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 10x}{e^{x^2} - 1}; \text{ г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x^2}.$$

Варіант №4.

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n - 2n\sqrt{n^2 - 1}}{n + \sqrt[3]{n^3 + 2}}; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x^2}\right)^{x^4}; \text{ в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 - 5x}{\sin 3x}; \text{ г) } \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a}.$$

Варіант №5.

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt[6]{n} + \sqrt[5]{32n^{10} + 1}}{(n + \sqrt[4]{n})\sqrt[3]{n^3 - 1}}; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2 + x}{x - 1}\right)^{x^2}; \text{ в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - 7x)}{\sin(\pi x + 7\pi)}; \text{ г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos\left(x + \frac{5\pi}{2}\right)\operatorname{tg} x}{\arcsin 2x^2}.$$

Варіант №6.

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt{71n} - \sqrt[3]{64n^6 + 9}}{(n - \sqrt[3]{n})\sqrt{11 + n^2}}; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow 0} (2 - \cos 3x)^{1/\ln(1+x^2)}; \text{ в) } \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{x^2 - \pi^2}{\sin x}; \text{ г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin 3x}.$$

Варіант №7.

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt{n} + \sqrt{n(n+2)}}{n^3 + 2n\sqrt{n^2 - 1}}; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x - 4}{3x + 2}\right)^{\frac{x+1}{3}}; \text{ в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{x^2}; \text{ г) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\ln x}.$$

Варіант №8.

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt[5]{n} - \sqrt[3]{27n^6 + n^2}}{(n + \sqrt[4]{n})\sqrt{9 + n^2}}; \text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + x^2}{x^2 + 2} \right)^{3x^2 - x}; \text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 3x}{\sqrt{2 + x} - \sqrt{2}}; \text{г) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 - x + 1} - 1}{\ln x}.$$

Варіант №9.

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n} - 9n^2}{3n - \sqrt[4]{9n^8 + 1}}; \text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x + \sin x)^{1/x}; \text{в) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)\sqrt{2-x}}{x^2 - 1}; \text{г) } \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos 7x - \cos 3x}{\sin^2 x}.$$

Варіант №10.

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{(n+2)n^2} - \sqrt[4]{n^3 + 2}}{4n^2 - 2n}; \text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{21x + 3x^2 - 7}{3x^2 + 18x + 9} \right)^{2x+1}; \text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 - 5x}{\sin 3x}; \text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{4x^2}.$$

Варіант №11.

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{5n+2} - \sqrt[3]{8n^3+5}}{\sqrt[4]{n+7} + 5n}; \text{б) } \lim_{x \rightarrow 8} \left(\frac{2x-7}{x+1} \right)^{1/(\sqrt[3]{x}-2)}; \text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{\sin(2\pi x + 20\pi)}; \text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \operatorname{tg}^2 \sqrt{x})^{1/2 \sin x}.$$

Варіант №12.

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n^2+2}}{\sqrt[4]{4n^4+1} - n}; \text{б) } \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{\cos \pi x}{\cos 2\pi x} \right)^{1/(x-2)}; \text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{4x^2}; \text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x - \operatorname{arctg} x}{x^3}.$$

Варіант №13.

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 - \sqrt[4]{n^3}}{\sqrt[3]{n^6 + n^3 + 7} - 5n}; \text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} (2 - 3^{\sin^2 x})^{1/(\ln \cos x)}; \text{в) } \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{e^\pi - e^x}{\sin 5x - \sin 3x}; \text{г) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\cos 2x}.$$

Варіант №14.

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{5n+2} - \sqrt[3]{8n^3+5}}{\sqrt[4]{n^4+2} + n}; \text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-10}{x+1} \right)^{3x+1}; \text{в) } \lim_{x \rightarrow 2\pi} (\cos x)^{1/\sin^2 x}; \text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin(\pi x + \pi)}{\ln(1+2x)}.$$

Варіант №15.

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1000\sqrt{n^6 + n} + 3n^2}{0,001n^4 - 100n^3 + \sqrt{n^3}}; \text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-3}{2x} \right)^{3x+1}; \text{в) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(9-2x^2)}{\sin 2\pi x}; \text{г) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{\pi} - \sqrt{\arccos x}}{\sqrt{x+1}}.$$

Варіант №16.

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt[3]{n^3+1}}{\sqrt[4]{n+1} - \sqrt[5]{n^5+1}}; \text{б) } \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{\sin x}{\sin 3} \right)^{1/(x-3)}; \text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{\cos 7x - \cos 3x}; \text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(e^{\pi x} - 1)}{\sqrt[3]{1+x} - 1}.$$

Варіант №17.

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+6} - \sqrt{n^2-5}}{\sqrt[3]{n^3+3} + \sqrt[4]{n^3+1}}; \text{б) } \lim_{x \rightarrow 4\pi} (\cos x)^{5/(\operatorname{tg} 5x \sin 2x)}; \text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x}{\ln(e-x)-1}; \text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin 4x}{x + \cos 2x - e^{3x}}.$$

Варіант №18.

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n+1} - \sqrt[3]{27n^3+4}}{\sqrt[4]{n} - \sqrt[3]{n^5+n}}; \text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{x^2 + \pi x}; \text{в) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3 + x + 1}{x^3 + 2} \right)^{2x^2}; \text{г) } \lim_{x \rightarrow 1} (2e^{x-1} - 1)^{\frac{3x-1}{x-1}}.$$

Завдання 10. Знайти а) y' , б) y'_x , в) y'_x , г) y'' , д) dy .

Варіант №1. а) $y = 5x - \ln(1 + \sqrt{1 - e^{10x}}) - e^{-5x} \arcsin(e^{5x})$; б) $\operatorname{arctg} \frac{x}{y} + \sin 2x + 4x^2 y^3 = 0$;

в) $\begin{cases} x = \cos 2t \\ y = \frac{2}{\cos^2 t} \end{cases}$; г) $y = (2x^2 - 7) \ln(x - 1)$; д) $y = \ln \arccos \sqrt{1 - e^{4x}}$.

Варіант №2. а) $y = \operatorname{arctg} x + \frac{5}{6} \ln \frac{x^2 + 1}{x^2 + 4}$; б) $\log_4 \left(\frac{4x^2}{y} \right) - 3x^3 y + 2x \sin 3y = 0$; в) $\begin{cases} x = \sqrt{1 - t^2} \\ y = \frac{1}{t} \end{cases}$;

г) $y = (3 - x^2) \ln^2 x$; д) $y = \cos \ln 2 - \frac{1}{3} \frac{\cos^2 3x}{\sin 6x}$.

Варіант №3. а) $y = \frac{4x + 1}{16x^2 + 8x + 3} + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{4x + 1}{\sqrt{2}}$; б) $\frac{x^3}{3} - \frac{y^2}{5} + 2xy = 0$; в) $\begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t \end{cases}$;

г) $y = x^4 \sin 5x$; д) $y = \log_2^2 (x^2 - e^{5x^3})$.

Варіант №4. а) $y = \ln \cos \frac{2x + 3}{2x + 1}$; б) $2x^3 + 4y^2 - 2xy^3 + 5x^2 y + 1 - 2y = 0$; в) $\begin{cases} x = \sqrt{t - 1} \\ y = \frac{t}{\sqrt{t - 1}} \end{cases}$;

г) $y = \frac{\ln(x - 1)}{\sqrt{x - 1}}$; д) $y = 3 \frac{\sin x}{\cos^2 x} + 2 \frac{\sin x}{\cos^4 x}$.

Варіант №5. а) $y = \ln^2 \sin 3x + e^x (2x^3 - 4)$; б) $\log_3 \frac{x + 2y}{3yx} - \operatorname{arctg}(2x - 3) + 6xy^3 - 7 = 0$;

в) $\begin{cases} x = \sqrt{t} \\ y = \sqrt[3]{t - 1} \end{cases}$; г) $y = e^{1 - 2x} \sin(2 + 3x)$; д) $y = \cos 6 + \cos^3 \frac{2x + 3}{2x + 1}$.

Варіант №6. а) $y = \frac{e^{2x} (2 - \sin 2x - \cos 2x)}{8}$; б) $x^2 - 2xy^2 + 5xy + 2 - \cos \frac{x}{y} = 0$; в) $\begin{cases} x = \sqrt{t^3 - 1} \\ y = \ln t \end{cases}$;

г) $y = \frac{\log_2 x}{x^3}$; д) $y = \operatorname{tg}^2 x^2$.

Варіант №7. а) $y = \frac{(2x+1)\sqrt{x^2-x}}{x^2}$; б) $y^4 - 2xy + x^4 - \cos 5x + 3 = 0$; в) $\begin{cases} x = \cos^2 t \\ y = \operatorname{tg}^2 t \end{cases}$;

г) $y = x \cos x^2$; д) $y = \ln^2(x + \cos x)$.

Варіант №8. а) $y = \sqrt{x} \ln(\sqrt{x} + \sqrt{x+a}) - \sqrt{x+a}$; б) $4y^2 7^x - 4y^{-2} - 2 \sin xy^2 + 10 = 0$;

в) $\begin{cases} x = \sqrt{t-3} \\ y = \ln(t-2) \end{cases}$; г) $y = (4x^3 + 5)e^{2x+1}$; д) $y = \frac{\sqrt{2x+3}(x-2)}{x^2}$.

Варіант №9. а) $y = \frac{4+x^4}{x^3} \operatorname{arctg} \frac{x^2}{2} + \frac{4}{x}$; б) $\frac{xy}{\ln x} + 2xy^3 + \frac{3}{2}x^{2/3} + 5 = 0$; в) $\begin{cases} x = \sin t \\ y = \ln \cos t \end{cases}$;

г) $y = x^2 \sin(5x-3)$; д) $y = \frac{x}{2}(\cos \ln x + \sin \ln x)$.

Варіант №10. а) $y = \sin^2(\cos 5x) + e^{-3x}(x^2 + x - 1)$; б) $y^x - x^y = 0$; в) $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 2 - \cos t \end{cases}$;

г) $y = (2x+5)\ln(2x+5)$; д) $y = x + \frac{1}{e^x + 1} - \ln(1 + e^x)$.

Варіант №11. а) $y = 3 \frac{\sin x}{\cos^2 x} + 2 \frac{\sin x}{\cos^4 x}$; б) $y^3 - 3xy + x^3 - 2x = 0$; в) $\begin{cases} x = \sqrt{2t-3} \\ y = \frac{1}{\sqrt{t}} \end{cases}$;

г) $y = \frac{2x-1}{\sqrt{x-1}}$; д) $y = \ln \cos \frac{2x+3}{2x+1}$.

Варіант №12. а) $y = \frac{7^x(3 \sin 3x + \ln 7 \cos 3x)}{(9 + \ln^2 7)}$; б) $y^4 - 2xy + x^4 - \cos 5x + 3 = 0$; в) $\begin{cases} x = \sin^2 3t \\ y = \operatorname{tg} 4t \end{cases}$;

г) $y = x \cos x^2$; д) $y = x^2(\sin e^x + \cos \ln 3x)$.

Варіант №13. а) $y = \arcsin e^{-4x} + \ln(e^{4x} + \sqrt{e^{8x} - 1})$; б) $y5^x + 4^y + 2 \cos xy + 2 = 0$;

в) $\begin{cases} x = \sin t \\ y = \ln \cos t \end{cases}$; г) $y = \frac{1}{x} \sin 2x$; д) $y = \sin^3 2x + \cos(2x+1)$.

Варіант №14. а) $y = \ln \arcsin \sqrt{1-e^{2x}}$; б) $\frac{2x-3y}{4x+y} - \ln \frac{x}{y} + 2xy^3 + 2 = 0$; в) $\begin{cases} x = \sqrt{2t} \ln(t-2) \\ y = \frac{1}{\sqrt{t}} \end{cases}$;

г) $y = (1-x^2-x)e^{\frac{x-1}{2}}$; д) $y = (1+x)e^{\operatorname{arctg} x}$.

Варіант №15. а) $y = 10^{x \operatorname{tg} x}$; б) $e^{2xy^2} + 4xy^2 + 2x - 3y - 5 = 0$; в) $\begin{cases} x = \ln \cos t \\ y = 2 \ln \sin 2t \end{cases}$; г) y''' , якщо

$y = (x+1)e^{\sin x}$; д) $y = \sqrt{2x + \sqrt{\sin x^2 + \sqrt{x}}}$.

Варіант №16. а) $y = \ln \ln^2 \ln^3 x$; б) $\ln \frac{x+y}{4x} + \operatorname{arctg} 2y - 4xy^3 + 1 = 0$; в) $\begin{cases} x = \ln t \\ y = \operatorname{arctg} t \end{cases}$;

г) $y = \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$; д) $y = 2 \arccos \frac{2}{3x+1} + \sqrt{9x^2+6x-3}$.

Варіант №17. а) $y = \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 2x + \operatorname{tg} x + 3$; б) $\ln(\sqrt{x} + x^2 y) + 3xy^2 - 2x \cos y = 0$;

в) $\begin{cases} x = \sin t - t \cos t \\ y = \cos t + t \sin t \end{cases}$; г) $y = (5x-8) \cdot 2^{-x}$; д) $y = x^3 \arcsin x + \frac{x^2+2}{3} \sqrt{1-x^2}$.

$$\text{Варіант №18. а) } y = \sin \ln \frac{1}{2} + \frac{\sin^2 25x}{25 \cos 50x}; \text{ б) } \log_8 x - 2x^3 y + \ln \frac{x^3}{y^2} + 2 = 0; \text{ в) } \begin{cases} x = \frac{\cos t}{1 + 2 \cos t} \\ y = \frac{\sin t}{1 + 2 \cos t} \end{cases}$$

$$\text{г) } y = (4x + 1) \cdot 3^{-x}; \text{ д) } y = 3 \sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}}.$$

Завдання 11. Перевірити, чи задовольняє дана функція задане рівняння

$$\text{Варіант №1. } z = x \ln(y/x); \quad x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z.$$

$$\text{Варіант №2. } z = \frac{y}{y^2 - a^2 x^2}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

$$\text{Варіант №3. } u = e^{xy}; \quad x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

$$\text{Варіант №4. } u = \sqrt{\frac{y}{x}}; \quad x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 3y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

$$\text{Варіант №5. } u = \sin^2(x - at); \quad a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

$$\text{Варіант №6. } u = y/x; \quad x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

$$\text{Варіант №7. } z = x^y; \quad \frac{x}{y} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{\ln x} \frac{\partial z}{\partial y} = 2z.$$

$$\text{Варіант №8. } u = \operatorname{arctg}(2x - t); \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = 0.$$

$$\text{Варіант №9. } u = \sin(2x - 3y); \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}.$$

$$\text{Варіант №10. } u = x e^{-\frac{y}{x}}; \quad x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) = y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

$$\text{Варіант №11. } u = \arccos \sqrt{\frac{x}{y}}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}.$$

$$\text{Варіант №12. } u = \frac{xy}{x-y}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{2}{x-y}.$$

$$\text{Варіант №13. } u = e^{\frac{x}{y}}; \quad y \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x}.$$

$$\text{Варіант №14. } z = \ln(x^2 + y^2); \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

$$\text{Варіант №15. } z = \sin(x + ay); \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

$$\text{Варіант №16. } z = \cos y + (y - x) \sin y; \quad (x - y) \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

$$\text{Варіант №17. } z = e^y \cos(xy); \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

$$\text{Варіант №18. } u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$