

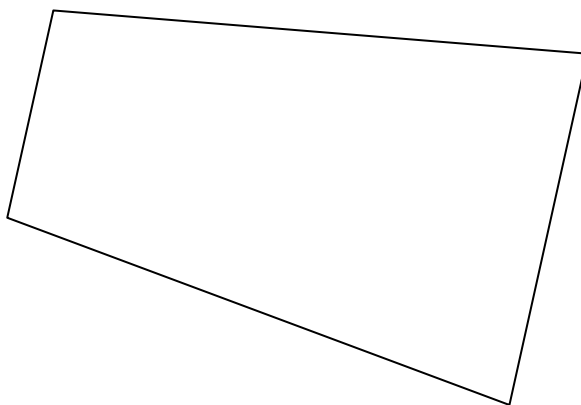
1. Основні теоретичні положення теорії тонких пластин

1.1 Основні поняття і гіпотези

Пластинкою називається призматичне або циліндрове тіло, висота якого мала в порівнянні з розмірами в плані (мал. 1). Висота називається товщиною пластинки і позначається h .

Площина, що ділить пластинку навпіл по товщині, називається серединною. При вигині пластинки серединна площина перетворюється на зігнуту поверхню. Лінія перетину бічної поверхні пластинки з серединною площиною називається контуром пластинки.

Для дослідження деформацій пластинки прямокутну систему координат розташовуватимемо так, щоб координатна площина xOy співпадала з серединною площиною, а вісь z направляти вниз. При такому виборі системи координат складова переміщення w у напрямі осі z буде прогином пластинки. Положення початку координат в серединній площині вибиратимемо в кожному даному випадку залежно від контура пластинки і характеру закріплення її країв.



Мал.1

Тонкими називаються пластинки, що мають відношення товщини до найменшого характерного розміру в плані h/b приблизно в межах $1/5-1/80$ і величину очікуваних прогинів не більш $h/4$.

Академік Б. Г. Гальоркін показав, що теорію тонких пластинок можна використовувати навіть при $h/b=1/3$. Пластинки, у яких $h/b > 1/3$, розраховують по теорії товстих плит, а пластинки, що мають прогини більш $1/4h$, - по теорії гнучких пластинок, або мембран.

Тонкі пластинки зазвичай розраховують по наближеній теорії – технічній теорії вигину пластинок, яка заснована на наступних гіпотезах, запропонованих німецьким фізиком Р. Кірхгофом.

1. Гіпотеза прямих нормалей: будь-який прямолінійний елемент, нормальний до серединної площини, залишається прямолінійним і нормальним до серединної поверхні після деформації пластинки, і довга його не змінюється. Ця гіпотеза аналогічна гіпотезі плоских перетинів в теорії вигину балок.

Будь-який прямолінійний елемент, нормальний до серединної площини, направлений уздовж осі z , і отже, перша частина гіпотези припускає, що прямі кути між цим елементом і осями x, y залишаються прямими, тобто зрушення у вказаних площинах відсутні

$$\left. \begin{array}{l} \gamma_{yz} = 0; \\ \gamma_{zx} = 0. \end{array} \right\} \quad (1)$$

Гіпотеза про збереження довжини прямолінійного елемента припускає, що лінійна деформація осі z (по товщині пластинки) відсутня:

$$\varepsilon_z = 0. \quad (2)$$

2. Гіпотеза про недеформованість серединної площини: у серединній площині відсутні деформації розтягування, стиснення і зрушення, тобто вона є нейтральною і її переміщення

$$u_0 = v_0 = 0. \quad (3)$$

3. Гіпотеза про відсутність тиску між шарами пластинки, паралельними серединній площині. Гіпотеза дозволяє нехтувати напругою σ_z зважаючи на трохи в порівнянні з напругою σ_x і σ_y

1.2 Переміщення і деформації в пластинках

Вивчення вигину пластинки почнемо з визначення переміщень і деформацій. Досліджуємо пластинку, що несе поперечне навантаження, тобто навантаження, нормальне до серединної площини пластинки. Під дією цього навантаження пластинка отримає переміщення. Для їх визначення звернемося до прийнятих гіпотез.

$$\varepsilon_z = \frac{\partial \omega}{\partial z} = 0,$$

звідки витікає, що прогини пластинки ω не залежать від координати z , тобто

$$\omega = \omega(x, y).$$

Це означає, що всі крапки пластинки, лежачі на одній вертикалі, отримують однакові переміщення ω . Отже, досить визначити прогин серединної площини пластинки, щоб знати вертикальні переміщення всіх її крапок.

Розглядаючи умови для зрушень (1), отримуємо

$$v_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial \omega}{\partial y} = 0;$$

$$v_{zx} = \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0;$$

звідси знаходимо похідні складових переміщення u і v :

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial \omega}{\partial x}; \quad \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial \omega}{\partial y}.$$

Інтегруючи ці рівняння по z , отримуємо

$$\left. \begin{aligned} u &= -z \frac{\partial \omega}{\partial x} + f_1(x, y); \\ v &= -z \frac{\partial \omega}{\partial y} + f_2(x, y). \end{aligned} \right\} \text{(a)}$$

Для обчислення функцій $f_1(x, y)$ і $f_2(x, y)$, рівнянь, що з'явилися при інтеграції, в приватних похідних, скористаємося гіпотезою про недеформованість серединної площини. Підставляючи умови (3) у формули (a) при $z = 0$, отримуємо:

$$\begin{aligned} u_0 &= f_1(x, y) = 0; \\ v_0 &= f_2(x, y) = 0. \end{aligned}$$

Тоді формули (a) приймають вигляд

$$\left. \begin{aligned} u_0 &= -z \frac{\partial \omega}{\partial x}; \\ v_0 &= -z \frac{\partial \omega}{\partial y}. \end{aligned} \right\} \text{(4)}$$

Таким чином, що становлять переміщення точок пластинки в напрямках осей x і y виражені через функцію прогинів серединної площини пластинки.

Деформації, що становлять, пластинки, відмінні від нуля

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}; \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}; \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2z \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \right\} (5)$$

Деформації, що тут становлять, так само як і переміщення, що становлять, в співвідношеннях (4) виражені через одну функцію прогинів серединної площини пластинки.

Напруження і зусилля в пластині

Для обчислення нормальної напруги σ_x і σ_y скористаємося двома першими формулами закону Гука і на підставі третьої гіпотези відкинемо напругу σ_z . Тоді отримаємо:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= (\sigma_x - \nu\sigma_y) / E; \\ \varepsilon_y &= (\sigma_y - \nu\sigma_x) / E;\end{aligned}$$

звідси з урахуванням залежностей

$$\left. \begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.\end{aligned}\right\} \quad (1.1)$$

знаходимо

$$\left. \begin{aligned}\sigma_x &= -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right); \\ \sigma_y &= -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right).\end{aligned}\right\} \quad (1.2)$$

Формула закону Гука після підстановки кутової деформації γ_{xy} з формул (1.1)

приймає такий вигляд:

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy} = -\frac{Ez}{1+\nu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (1.3)$$

Дотична напруга у двох інших площинах, згідно першої гіпотези, обертаються у нуль:

$$\begin{aligned}\tau_{yz} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{yz} = 0; \\ \tau_{zx} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{zx} = 0.\end{aligned}$$

Проте такий результат отримано тільки внаслідок прийнятих раніше гіпотез. Насправді ця дотична напруга не дорівнює нулю, оскільки це суперечить умовам рівноваги.

Нехтуючи об'ємними силами, з першого рівняння рівноваги знаходимо:

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = -\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}.$$

Підставимо сюди напруження з формул (1.2) і (1.3):

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = \frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^3 \omega}{\partial x^3} + \nu \frac{\partial^3 \omega}{\partial x \partial y^2} \right) + \frac{Ez}{1+\nu} \frac{\partial^3 \omega}{\partial x \partial y^2}$$

Після спрощення отримуємо:

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = \frac{Ez}{1-\nu^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right),$$

або

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = \frac{Ez}{1-\nu^2} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w.$$

Інтегруючи по z , знаходимо

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = \frac{Ez^2}{2(1-\nu^2)} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w + f_3(x, y). \quad (1.4)$$

Для визначення довільної функції $f_3(x, y)$ маємо наступні граничні умови: на верхній і нижній поверхнях пластинки немає дотичних навантажень, тобто при $z = \pm h/2$. $\tau_{zx} = 0$ Підставляючи ці умови у формулу (1.4), отримуємо:

$$0 = \frac{Eh^2}{8(1-\nu^2)} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w + f_3(x, y),$$

звідки шукана функція:

$$f_3(x, y) = -\frac{Eh^2}{8(1-\nu^2)} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w.$$

Вводячи її у формулу (1.4), отримуємо:

$$\tau_{zx} = -\frac{E}{2(1-\nu^2)} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w. \quad (1.5)$$

Вирішуючи таким же шляхом друге рівняння рівноваги, знаходимо

$$\tau_{yz} = -\frac{E}{2(1-\nu^2)} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w. \quad (1.6)$$

Отже, згідно формулам (1.2), (1.3), (г) і (д), в перетинах пластинки, перпендикулярних її серединній площині, виникає наступна напруга:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right); \\ \sigma_y &= -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right); \\ \tau_{xy} &= -\frac{Ez}{1+\nu} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y}; \\ \tau_{yz} &= -\frac{E}{2(1-\nu^2)} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 \omega; \\ \tau_{zx} &= -\frac{E}{2(1-\nu^2)} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \omega. \end{aligned} \right\} (6)$$

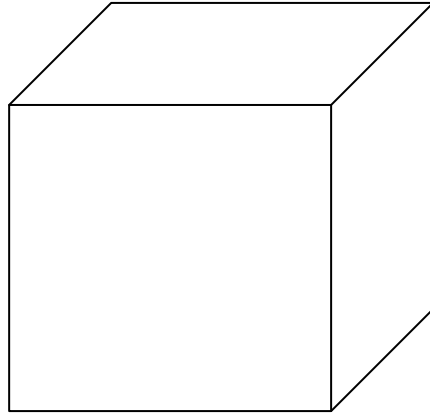


Мал.2

На мал.2 показані епюри цієї напруги по товщині пластинки. Напруга σ_x, σ_y і $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ розподіляються по лінійному закону, звертаючись в нуль в точках серединної площини; напруга τ_{yz} і τ_{zx} розподіляються по параболі, досягаючи в точках серединної площини максимального значення. Так само розподіляється дотична напруга і при поперечному вигині балок прямокутного перетину.

У формулах (6) вся напруга виражена через одну функцію два змінних $\omega(x, y)$, отже, функція прогинів грає тут ту ж роль, що і функція напруги в плоскому завданні.

Досліджуємо, які зусилля відповідають напрузі (6) в перетинах пластинки, нормальних до її середньої площини.



Мал. 3

На мал.3 зображений нескінченно малий елемент пластинки, вирізаний такими перетинами. Розглянемо спочатку майданчик з нормаллю, паралельній осі x . По ній діють складові напруги σ_x , τ_{yx} і τ_{zx} . На малюнку показана позитивна напруга: нормальна напруга σ_x направлена по зовнішній нормалі до перетину, а дотичні – у напрямі відповідних позитивних координатних осей, оскільки зовнішня нормаль до перетину, співпадає з позитивним напрямом осі x .

Позначимо над N_x нормальну силу, що доводиться на одиницю ширини даного перетину. Вона рівна проекції на вісь x рівнодіючою внутрішніх сил в перетині з нормаллю, паралельній осі x . На цю вісь проектується тільки нормальна напруга σ_x . Відповідна йому внутрішня сила на нескінченно малому майданчику $dydz$ рівна $\sigma_x dydz$, а на одиницю ширини перетину доводиться сила $\sigma_x dz$. Підсумовуючи ці елементарні сили по товщині пластинки, отримуємо вираз нормальної сили

$$N_x = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_x dz.$$

Підставимо сюди нормальну напругу σ_x з формул (6) і винесемо за знак інтеграла величини, не залежні від координати z :

$$N_x = -\frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) \int_{-h/2}^{+h/2} z dz.$$

Під знаком інтеграла коштує непарна функція, а межі інтеграції відрізняються тільки знайомий. Тому інтеграл рівний нулю, а отже, нормальна сила $N_x = 0$.

Аналогічно визначуваний момент, що вигинає M_x , є сумою елементарних моментів $\sigma_x dz \cdot z$:

$$M_x = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_x z dz = -\frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) \int_{-h/2}^{+h/2} z^2 dz.$$

Після інтегрування отримуємо

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right).$$

Що входить сюди величина

$$D = Eh^3 / [12(1-\nu^2)] \quad (7)$$

називається циліндровою рідиною. Вона є фізико-геометрической характеристикою пластинки при вигині.

Поперечна сила в даному перетині

$$Q_x = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{2x} dz.$$

Підставимо в цей інтеграл вираз дотичної напруги τ_{2x} з формул (6):

$$Q_x = -\frac{E}{2(1-\nu^2)} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \omega \int_{-h/2}^{+h/2} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) dz.$$

Після інтегрування отримуємо

$$Q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \omega.$$

Зрушуючу силу S_x знаходимо, підсумовуючи проекції внутрішніх сил в тому ж перетині на вісь y :

$$S_x = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{yx} dz.$$

Після підстановки дотичної напруги τ_{yx} з формул (6)

$$S_x = 0.$$

Момент, що крутить

$$M_{yx} = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{yx} z dz = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \quad (e)$$

Аналогічно визначаються зусилля в перетині з нормаллю, паралельній осі y (мал. 3):

$$\begin{aligned} M_y &= -D \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right); \\ Q_y &= -D \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 \omega; \\ M_{xy} &= -D(1-\nu) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \quad (\text{ж})$$

Порівнюючи формули (е) і (ж), помічаємо, що

$$M_{yx} = M_{xy} = H.$$

Таким чином, під дією поперечного навантаження в перетинах пластинки, перпендикулярних її серединній площині, виникають наступні зусилля:

Моменти, що вигинають

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -D \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right); \\ M_y &= -D \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right); \end{aligned} \right\} (8)$$

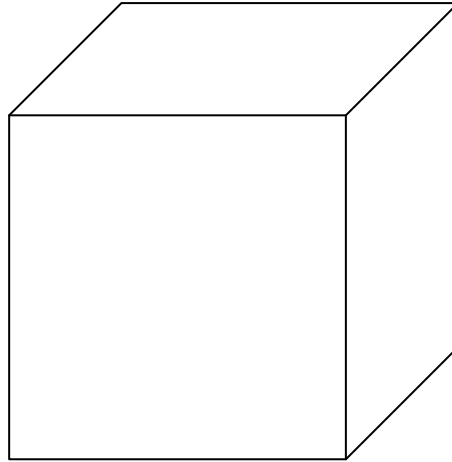
Поперечні сили

$$\left. \begin{aligned} Q_x &= -D \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \omega; \\ Q_y &= -D \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 \omega \end{aligned} \right\} (9)$$

і момент, що крутить

$$H = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y}, \quad (10)$$

Всі вони виражені через прогини серединної площини. Позитивні напрямки вказаних зусиль показані на мал. 4.



Мал. 4

Ці формули, дозволяють визначати моменти і поперечні сили в будь-якій точці серединної площини пластинки. По їх значенню можна знайти напруги в будь-якій крапці пластинки. Дійсно, порівнюючи вирази нормальної напруги (6) з формулами моментів (8), що вигинають, отримуємо

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= 12M_x z / h^3; \\ \sigma_y &= 12M_y z / h^3. \end{aligned} \right\} (3)$$

Ці формули відповідають формулам для визначення нормальної напруги при вигині балки прямокутного перетину. У них входить момент інерції площі прямокутного перетину шириною, рівній одиниці $J = bh^3 / 12 = h^3 / 12$. Таким чином, формули (3) приймають вигляд, відомий з курсу опору матеріалів:

$$\sigma_x = M_x z / J; \quad \sigma_y = M_y z / J.$$

Максимальна по абсолютному значенню нормальна напруга виникає при $z = \pm h/2$:

$$\left. \begin{aligned} \max \sigma_x &= M_x / W; \\ \max \sigma_y &= M_y / W. \end{aligned} \right\} (11)$$

Тут $W = \frac{J}{h/2} = \frac{h^2}{6}$ - момент опору прямокутного перетину шириною, рівній одиниці.

З порівняння формул (6) і (10) виходить

$$\tau_{xy} = 12Hz / h^3.$$

Максимальна дотична напруга τ_{xy} також виникає при $z = \pm h/2$:

$$\max \tau_{xy} = 6H / h^2.$$

Вертикальну дотичну напругу визначаємо з порівняння формул (6) і (9):

$$\begin{aligned} \tau_{zx} &= 6Q_x (h^2 / 4 - z^2) / h^3; \\ \tau_{yz} &= 6Q_y (h^2 / 4 - z^2) / h^3. \end{aligned}$$

Аналогічні результати отримані в опорі матеріалів по формулі Д. І. Журавського для балки прямокутного перетину шириною, рівній одиниці. Максимальна напруга виникає в точках серединної площини, тобто при :

$$\begin{aligned} \max \tau_{zx} &= 3Q_x / (2h); \\ \max \tau_{yz} &= 3Q_y / (2h). \end{aligned}$$

1.4 Диференціальне рівняння зігнутої серединної поверхні пластинки.

Умови на контурі

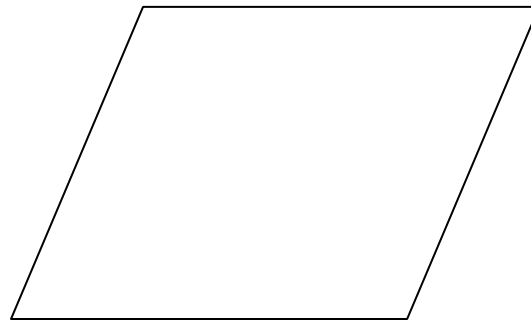
Раніше ми розглянули напругу і зусилля в пластинках виражені через прогини її серединної площини. Отже, для визначення напруги і зусиль необхідно знати функцію прогинів $w(x, y)$.

Виріжемо із серединної площини нескінченно малий елемент $Ocba$ розмірами dx , і покажемо прикладені до нього зусилля (мал. 54). На грані Oc діє поперечна сила Q_x . На грані ab , що відстоїть від грані Oc на нескінченно малій відстані dx , поперечна сила одержує нескінченно мале збільшення й дорівнює $Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx$. Аналогічно, на гранях Oa і bc діють відповідно

поперечні сили Q_y і $Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy$. Нормально до серединної площини діє поверхневе навантаження інтенсивністю q .

Для того, щоб даний елемент серединної площини знаходився в рівновазі, повинні задовольнятися шість умов рівноваги: три рівняння проекцій сил на координатні осі і три рівняння моментів щодо цих осей. При цьому всі зусилля слід умножати на довжину грані, по якій вони діють.

Спроектуємо всі сили, зображені на мал. 5, на вісь z :



Мал .4

$$\left(Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx \right) dy - Q_x dy + \left(Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy \right) dx - Q_y dx + q dx dy = 0.$$

Після спрощення отримуємо

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = -q. \quad (12)$$

Рівняння моментів всіх сил щодо осі y має вигляд

$$\begin{aligned} & \left(M_x + \frac{\partial M_x}{\partial x} dx \right) dy - M_x dy + \left(H + \frac{\partial H}{\partial y} dy \right) dx - \\ & - H dx - \left(Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx \right) dy dx + Q_y dx \frac{dx}{2} - \\ & - \left(Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy \right) dx \frac{dx}{2} - q dx dy \frac{dx}{2} = 0. \end{aligned}$$

Після спрощення ми отримуємо

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} = Q_x \quad (13)$$

Аналогічно, з рівняння моментів щодо осі x слідує

$$\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} = Q_y \quad (14)$$

Виключимо з рівнянь (12) - (14) поперечні сили. В результаті отримаємо

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -q.$$

Підставимо в це рівняння вираз моментів (8) і (10):

$$-D \left[\frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} + \nu \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial y^2} + 2(1-\nu) \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \omega}{\partial y^4} + \nu \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial y^2} \right] = -q,$$

Звідки після спрощення

$$D \left(\frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \omega}{\partial y^4} \right) = q, \quad (15)$$

або

$$D\nabla^4 \omega - q = 0. (16)$$

Отримали основне рівняння вигину пластинки, зазвичай зване рівнянням Софі Жермен. При його інтеграції з'являться довільні постійні, які повинні бути визначені з умов на контурі пластинки, залежних від характеру закріплення її країв.

Залежно від характеру закріплення країв на контурі пластинки можуть бути задані прогини і кути повороту серединної площини, моменти, що вигинають і крутять, поперечні сили.

Умови, при яких на контурі задаються переміщення, тобто прогини або кути повороту серединної площини, називаються геометричними. Умови, при яких на контурі задаються зусилля, тобто моменти, що вигинають або крутять, і поперечні сили називаються статичними.

Якщо ж задані одночасно і переміщення, і зусилля, то умови називаються змішаними. На кожному краю слід задати дві граничні умови. Сформулюємо граничні умови для різних випадків закріплення країв прямокутної пластинки (мал.б)



(рис.6)

Затиснений край OA .

У затисканні відсутні прогини і не можливий поворот крайового перетину щодо осі x . У зв'язку з цим маємо наступні умови:

$$\text{при } y=0 \quad \omega=0 \quad \frac{\partial \omega}{\partial y}=0.$$

Шарнірно обперті краї OC і AB .

На них рівні нулю прогини і моменти, що вигинають, тобто і $\omega=0$.

Виражаючи момент, що вигинає, через прогини пластинки згідно формулам (8), останню умову можна представити так:

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = 0.$$

Проте при $x = const$ і $\omega=0$ друга похідна $\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = 0$. Тому граничні умови на шарнірно обпертих краях OC і AB приймають вигляд

$$\text{при } x=0 \quad x=a \quad \omega=0 \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = 0.$$

(мал.7)

Вільний край СВ.

Тут повинні обертатися в нуль момент, що вигинає M_y , поперечна сила Q_y і момент H , що крутить, тобто замість необхідних двох умов з'являються три. Така суперечність пов'язана з тим, що завдання вирішується приблизно і тому всім граничним умовам задовольнити не можна. Проте суперечність можна усунути, об'єднавши дві останні умови. Покажемо, що момент, що крутить, і поперечну силу на контурі пластинки можна замінити однією силою, статистично ним еквівалентною. Розглянемо момент H , що крутить, розподілений уздовж грані СВ, паралельної осі x (мал. 7 а). На довжині dx діє момент, що крутить, рівний Hdx . Його можна представити у вигляді двох вертикальних протилежно направлених сил H з плечем dx (мал. 7 би). На нескінченно малому видаленні dx момент, що крутить, отримає приріст і буде рівний .

Його також можна представити у вигляді двох вертикальних протилежно направлених сил $H + \frac{\partial H}{\partial x} dx$ з тим же плечем dx .

Подібну заміну моментів, що крутять, вертикальними силами можна здійснити по всій довжині грані СВ. На межі кожної нескінченно малої ділянки dx , за виключенням крайніх крапок З і В, буде прикладено по дві протилежно направлені сили, різниця між якими рівна $\frac{\partial H}{\partial x} dx$.

Отже, уздовж грані діятиме вертикальне розподілене по її довжині навантаження інтенсивністю $\frac{\partial H}{\partial x}$ (мал. 7 в). У точках же С і В виникнуть зосереджені сили H_c і H_s . Отримане вертикальне навантаження можна

об'єднати з поперечною силою Q_y і вважати, що на межі СВ діє приведена поперечна сила інтенсивністю

$$Q_y^{прив} = Q_y + \frac{\partial H}{\partial x}. \quad (17)$$

Аналогічно, уздовж граней контура пластинки, паралельних осі y , діятиме приведена поперечна сила інтенсивністю

$$Q_x^{прив} = Q_x + \frac{\partial H}{\partial y} \quad (18)$$

Похідні моменту, що крутить, по x і y знайдемо диференціюванням функції (10):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial x} &= -D(1-\nu) \frac{\partial^3 \omega}{\partial x^2 \partial y}; \\ \frac{\partial H}{\partial y} &= -D(1-\nu) \frac{\partial^3 \omega}{\partial x \partial y^2}. \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

Підставляючи значення поперечних сил (9) і похідних моменту (a), що крутить, у формули (18) і (17), отримуємо

$$\left. \begin{aligned} Q_x^{прив} &= -D \left[\frac{\partial^3 \omega}{\partial x^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 \omega}{\partial x \partial y^2} \right]; \\ Q_y^{прив} &= -D \left[\frac{\partial^3 \omega}{\partial y^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 \omega}{\partial x^2 \partial y} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Таким чином, на кожній грані пластинки замість трьох зусиль: моменту, що вигинає, моменту, що крутить, і поперечної сили, - можна розглядати тільки два: момент, що вигинає, і приведену поперечну силу. Отже, на вільно від

закріплення грані замість трьох згаданих умов можна вимагати задоволення лише двох:

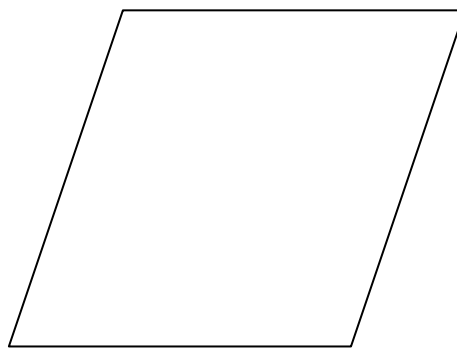
$$M_y = 0; Q_y^{npue} = 0. \text{ (б)}$$

Звичайно, при цьому граничні умови будуть задовольнятися приблизно. Але на підставі принципу Сен-Венана заміна поперечної сили і моменту, що крутить, статично ним еквівалентною приведеною поперечною силою викличе лише місцеву напругу поблизу даного краю пластинки.

Внесемо до умов (б) вирази моменту M_y (8), що вигинає, M_y і приведеної поперечної сили Q_y^{npue} (19). Тоді на вільній грані CB , тобто при $y = b$

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = 0.$$

$$\frac{\partial^3 \omega}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 \omega}{\partial x^2 \partial y} = 0.$$



Мал .8

1.5 Основні рівняння вигину круглої пластинки

Для вирішення завдання про вигин круглої пластинки всі рівняння вигину пластинки, виведені в декартовій системі координат, перетворимо до полярної системи. В цьому випадку прогин пластинки і навантаження є функціями змінних r , θ тобто $w = w(r, \theta)$. $q = q(r, \theta)$ Тоді основне рівняння вигину пластинки (15) приймає вигляд

$$D \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \theta^2} \right) = q \quad (22)$$

Моменти, що вигинають, в круглій пластинці позначатимемо так:

M_r - момент, що вигинає, в перетині, перпендикулярному радіус-вектору r в даній крапці (момент, що радіально вигинає);

M_θ - то ж в перетині, співпадаючому з радіус-вектором (тангенціальний момент, що вигинає).

Замінюючи у формулах (8) похідні функції прогинів по x і y на похідні по r і θ , отримуємо формули моментів, що вигинають, в полярній системі координат:

$$\left. \begin{aligned} M_r &= -D \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \theta^2} \right) \right]; \\ M_\theta &= -D \left[\frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \theta^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Аналогічно перетворимо формулу моменту, що крутить (8.10)

$$H = -D(1-\nu) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} \right). \quad (24)$$

Поперечні сили позначимо таким чином:

Q_r - поперечна сила на майданчику з нормаллю r (радіальна поперечна сила);

Q_θ - то ж, на майданчику, співпадаючому з радіус-вектором r (тангенціальна поперечна сила). Замінюючи у формулах (19) похідні, отримуємо вирази поперечних сил в полярній системі координат:

$$\left. \begin{aligned} Q_r &= -D \frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 \omega; \\ Q_\theta &= -D \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \nabla^2 \omega, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

або

$$\left. \begin{aligned} Q_r &= -D \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \theta^2} \right); \\ Q_\theta &= -D \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \theta^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Позначимо Q^{npue} інтенсивність приведеної поперечної сили на гранях контура, перпендикулярних радіус-вектору r , а Q_θ^{npue} - на гранях, співпадаючих з радіус-вектором. Тоді з формул (17) і (18) після заміни змінних x і y на r і θ можна отримати вирази приведеної поперечної сили на контурі, що враховує силу моменту, що крутить:

$$\begin{aligned} Q^{npue} &= Q_r + \frac{1}{r} \frac{\partial H}{\partial \theta}; \\ Q_\theta^{npue} &= Q_\theta + \frac{\partial H}{\partial r}. \end{aligned}$$

Підставляючи сюди значення поперечних сил (6) моменту (24), що крутить, знаходимо

$$\left. \begin{aligned} Q_r^{npue} &= -D \left[\frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 \omega + (1-\nu) \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} \right) \right]; \\ Q_\theta^{npue} &= -D \left[\frac{\partial}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \nabla^2 \omega + (1-\nu) \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} \right) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Формули (22) – (26) є основні рівняння вигину пластинок в полярній системі координат. Рівняння (22) служить для визначення функції прогинів серединної площини пластинки, а останні – для складання граничних умов і визначення зусиль.

2. Деякі завдання вигину прямокутних пластин

Вирішення основного рівняння вигину (15) для прямокутної пластинки в замкнутій формі отримати не вдається. Його доводиться шукати у вигляді нескінченного ряду. Розглянемо шарнірно оперту по контуру прямокутну пластинку (мал. 9), що знаходиться під дією поперечного навантаження інтенсивністю $q(x, y)$, що змінюється по будь-якому закону. Початок координат розташуємо по куту пластинки. Розмір пластинки у напрямі осі x рівний a , а у напрямі осі y - b .



Мал. 9

Вирішення рівняння (15) шукатимемо у вигляді подвійного тригонометричного ряду по синусах:

$$\omega(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (\text{a})$$

де A_{mn} - постійні числа, коефіцієнти ряду; m і n - цілі позитивні числа: 1, 2, 3 .

Ряд (а) можна представити в розгорненому вигляді:

$$\begin{aligned} \omega(x, y) = & A_{11} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} + A_{12} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{b} + \\ & + A_{21} \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} + A_{22} \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{b} + \dots \end{aligned}$$

Для шарнірно опертой по контуру пластинки маємо наступні граничні умови:

$$\text{при } x=0 \text{ і } x=a \quad (\text{б}) \quad \omega = \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = 0;$$

$$\text{при } y=0 \text{ і } y=b \quad \omega = \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = 0. \quad (\text{в})$$

Переконаємося, що ряд (а) задовольняє цим умовам. Дійсно, на межі пластинки $x=0 \sin \frac{m\pi x}{a} = \sin 0 = 0$ і, отже, прогин $\omega(0, y) = 0$. На грані $x=a \sin \frac{m\pi x}{a} = \sin m\pi = 0$, а значить, і прогин $\omega(a, y) = 0$. Так само звертається в нуль прогин на гранях $y=0$ і $y=b$. Отже, граничні умови (б) і (в) відносно прогинів виконуються.

Другі похідні функції прогинів

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = - \sum_m \sum_n A_{mn} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b};$$

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = - \sum_m \sum_n A_{mn} \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

Містять синуси тих же аргументів, що і сама функція. Тому похідні звертаються в нуль на всіх гранях пластинки: при $x=0, x=a, y=0$ і $y=b$. Отже, граничні умови (б) і (в) для моментів, що вигинають, також виконуються.

Визначимо коефіцієнти ряду (а). для цього підрахуємо четверті похідні функції прогинів

$$\begin{aligned}\frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} &= \sum_m \sum_n A_{mn} \left(\frac{m\hbar}{a} \right)^4 \sin \frac{m\hbar x}{a} \sin \frac{n\hbar y}{b}; \\ \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial y^2} &= \sum_m \sum_n A_{mn} \left(\frac{mn\hbar}{ab} \right)^2 \sin \frac{m\hbar x}{a} \sin \frac{n\hbar y}{b}; \\ \frac{\partial^4 \omega}{\partial y^4} &= \sum_m \sum_n A_{mn} \left(\frac{n\hbar}{b} \right)^4 \sin \frac{m\hbar x}{a} \sin \frac{n\hbar y}{b}\end{aligned}$$

і підставимо їх в рівняння (15). Після спрощення отримаємо

$$D\hbar^4 \sum_m \sum_n A_{mn} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 \sin \frac{m\hbar x}{a} \sin \frac{n\hbar y}{b} = q(x, y). \quad (\Gamma)$$

Щоб визначити коефіцієнти ряду, що входить в ліву частину рівняння (Г), необхідно і праву частину цього рівняння розкласти в тригонометричний ряд. Представимо навантаження у вигляді подвійного тригонометричного ряду Фурье по синусах в прямокутній області $0 \leq x \leq a; 0 \leq y \leq b$:

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \sin \frac{m\hbar x}{a} \sin \frac{n\hbar y}{b}. \quad (\Delta)$$

Коефіцієнти цього ряду визначаються по формулі, відомій з курсу математичного аналізу:

$$C_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q(x, y) \sin \frac{m\hbar x}{a} \sin \frac{n\hbar y}{b} dx dy. \quad (\epsilon)$$

Підставляючи ряд (д) в рівняння (Г), отримуємо

$$D\hbar^4 \sum_m \sum_n A_{mn} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 \sin \frac{m\hbar x}{a} \sin \frac{n\hbar y}{b} = \sum_m \sum_n C_{mn} \sin \frac{m\hbar x}{a} \sin \frac{n\hbar y}{b}.$$

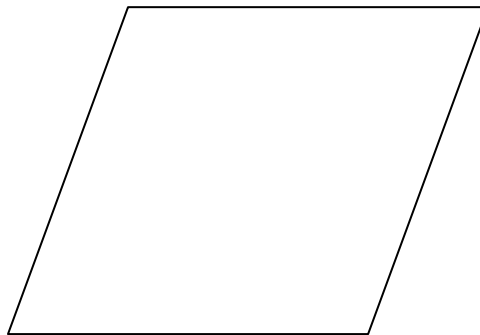
Два ряди рівні між собою, якщо рівні їх відповідні члени. Таким чином

$$D\hbar^4 A_{mn} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 = C_{mn}.$$

Підставляючи судна замість C_{mn} вираз (е), знаходимо коефіцієнти ряду (а) в такій формі:

$$A_{mn} = \frac{4}{D\hbar^4 ab \left(m^2 / a^2 + n^2 / b^2 \right)^2} \int_0^a \int_0^b q(x, y) \sin \frac{m\hbar x}{a} \sin \frac{n\hbar y}{b} dx dy. \quad (\text{ж})$$

Отже, функція (а) є рішенням поставленої задачі, оскільки вона задовольняє умовам на контурі пластинки і при виборі коефіцієнтів ряду у формі (ж) задовольняє основному рівнянню вигину пластинки. Подальша конкретизація завдання залежить від виду функції $q(x, y)$. Розглянемо деякі окремі випадки.



Мал. 10

1. Навантаження рівномірно розподілене по всій поверхні пластинки (мал.10). В цьому випадку $q(x, y) = q = const$. Тоді, згідно формули (ж)

$$A_{mn} = \frac{4q}{D\hbar^2 ab(m^2/a^2 + n^2/b^2)^2} \times \int_0^a \sin \frac{m\hbar x}{a} dx \int_0^b \sin \frac{n\hbar y}{b} dy.$$

Після інтегрування отримуємо

$$A_{mn} = \frac{16q}{D\hbar^6 mn(m^2/a^2 + n^2/b^2)^2} (m = 1,3,5,\dots; n = 1,3,5,\dots).$$

Підставляючи значення цих коефіцієнтів в ряд(а), знаходимо вираз функції прогинів:

$$\omega(x, y) = \frac{16q}{\hbar^2 D} \sum_m \sum_n \frac{\sin(m\hbar x/a) \sin(n\hbar y/b)}{mn(m^2/a^2 + n^2/b^2)^2}. \quad (20)$$

Максимальний прогин, що виникає в центрі пластинки (при $x = a/2$ і $y = b/2$), складає

$$\max \omega = \frac{16q}{\hbar^2 D} \sum_m \sum_n \frac{\sin(m\hbar/2) \sin(n\hbar/2)}{mn(m^2/a^2 + n^2/b^2)^2} \\ (m = 1,3,5,\dots; n = 1,3,5,\dots).$$

Підставляючи судна значення циліндрової рідини (7) і виносячи за дужки a^4 , отримуємо

$$\max \omega = \frac{19qa^4}{\hbar^6 Eh^3} (1 - \nu^2) \sum_m \sum_n \frac{\sin(m\hbar/2) \sin(n\hbar/2)}{mn(m^2 + n^2 a^2/b^2)^2} \\ (m = 1,3,5,\dots; n = 1,3,5,\dots).$$

Для практичного використання отримуваних результатів складають таблиці. У цих цілях останню формулу зручно представити у такому вигляді: $\max \omega = aqa^4 / (Eh^3)$, де коефіцієнт

$$a = \frac{192(1-v^2)}{\hbar^6} \sum_m \sum_n \frac{\sin(m\hbar/2)\sin(n\hbar/2)}{mn(m^2 + n^2 a^2 / b^2)^2}$$

$$(m = 1,3,5,\dots; n = 1,3,5,\dots)$$

залежить тільки від відношення сторін пластинки a/b . Що входить сюди ряд швидко сходиться. Так, зберігаючи перших чотирьох членів ряду і приймаючи $v = 0,3$, для квадратної пластинки ($a = b$) знаходимо

$$a(1) = \frac{192(1-0,3^2)}{\hbar^6} \left[\frac{1 \cdot 1}{1 \cdot 1(1^2 + 1^2)^2} + \frac{1(-1)}{1 \cdot 3(1^2 + 3^2)^2} + \frac{(-1) \cdot 1}{3 \cdot 1(3^2 + 1^2)^2} + \frac{(-1)(-1)}{3 \cdot 3(3^2 + 3^2)^2} \right] =$$

$$= \frac{192 \cdot 0,91}{\hbar^6} (0,2500 - 0,0033 - 0,0033 + 0,0003) = 0,0443,$$

що рівне точному значенню, що приводиться в довідковій літературі.

Підставляючи функцію прогинів (20) у формули (8), отримаємо моменти, що вигинають:

$$M_x = \frac{16qa^2}{\hbar^4} \sum_m \sum_n \frac{m^2 + vn^2 a^2 / b^2}{mn(m^2 + n^2 + a^2 / b^2)^2} \sin \frac{m\hbar x}{a} \sin \frac{n\hbar y}{b}$$

$$(m = 1,3,5,\dots; n = 1,3,5,\dots);$$

$$M_y = \frac{16qa^2}{\hbar^4} \sum_m \sum_n \frac{n^2 a^2 / b^2 + vm^2}{mn(m^2 + n^2 a^2 / b^2)^2} \sin \frac{m\hbar x}{a} \sin \frac{n\hbar y}{b}$$

$$(m = 1,3,5,\dots; n = 1,3,5,\dots).$$

Максимальні моменти, що вигинають, виникають в центрі пластинки (при $x = a/2$ і $y = b/2$):

$$\max M_x = \frac{16qa^2}{\hbar^4} \sum_m \sum_n \frac{m^2 + vn^2 a^2 / b^2}{mn(m^2 + n^2 a^2 / b^2)^2} \sin \frac{m\hbar}{2} \sin \frac{n\hbar}{2}$$

$$(m = 1,3,5,\dots; n = 1,3,5,\dots);$$

$$\max M_y = \frac{16qa^2}{\hbar^4} \sum_m \sum_n \frac{n^2 a^2 / b^2 + vm^2}{mn(m^2 + n^2 a^2 / b^2)^2} \sin \frac{m\hbar}{2} \sin \frac{n\hbar}{2}$$

$$(m = 1,3,5,\dots; n = 1,3,5,\dots).$$

Для складання таблиць їх представляють у вигляді

$$\begin{aligned}\max M_x &= \beta qa^2; \\ \max M_y &= \beta_1 qa^2,\end{aligned}$$

де коефіцієнти β і β_1 є функціями відношення сторін пластинки a/b . Ряди в цих функціях сходяться повільніше, ніж у функції α . Так, якщо підрахувати коефіцієнт β для квадратної пластинки, зберігаючи перших чотирьох членів ряду, отримаємо

$$\begin{aligned}\beta(1) &= \frac{16}{h^4} \left[\frac{1^2 + 0,3 \cdot 1^2}{1 \cdot 1(1^2 + 1^2)^2} \cdot 1 \cdot 1 + \frac{1^2 + 0,3 \cdot 3^2}{1 \cdot 3(1^2 + 3^2)^2} \cdot 1(-1) + \frac{3^2 + 0,3 \cdot 1^2}{3 \cdot 1(3^2 + 1^2)^2} (-1) \cdot 1 + \frac{3^2 + 0,3 \cdot 3^2}{3 \cdot 3(3^2 + 3^2)^2} (-1)(-1) \right] = \\ &= 0,0469,\end{aligned}$$

тоді як точне значення, що приводиться в таблицях $\beta = 0,0479$.

Отже, при збереженні чотирьох членів ряду значення коефіцієнта β відрізняється від точного його значення на 2,1%.

Значення поперечних сил знайдемо, підставивши функцію прогинів (20) у формули (9):

$$\begin{aligned}Q_x &= \frac{16qa}{h^3} \sum_m \sum_n \frac{\cos(m\hbar x/a) \sin(n\hbar y/b)}{n(m^2 + n^2 a^2/b^2)} \\ &\quad (m = 1,3,5,\dots; n = 1,3,5,\dots); \\ Q_y &= \frac{16qb}{h^3} \sum_m \sum_n \frac{\sin(m\hbar x/a) \cos(n\hbar y/b)}{m(m^2 b^2/a^2 + n^2)} \\ &\quad (m = 1,3,5,\dots; n = 1,3,5,\dots).\end{aligned}$$

Максимальних значень поперечних сил набувають по середині сторін контура пластинки. Так, $\max Q_x$ виникає в крапках з координатами

$x=0, y=b/2$ і $x=a, y=b/2$, а $\max Q_y$ - в крапках з координатами $x=a/2, y=0$ і $x=a/2, y=b$:

$$\max Q_x = \frac{16qa}{\hbar^3} \sum_m \sum_n \frac{\sin(n\hbar/2)}{n(m^2 + n^2 a^2 / b^2)}$$

$$(m = 1, 3, 5, \dots; n = 1, 3, 5, \dots);$$

$$\max Q_y = \frac{16qb}{a^3} \sum_m \sum_n \frac{\sin(m\hbar/2)}{n(m^2 b^2 / a^2 + n^2)}$$

$$(m = 1, 3, 5, \dots; n = 1, 3, 5, \dots).$$

Для складання таблиць ці функції представляють у такому вигляді:

$$\max Q_x = \gamma qa;$$

$$\max Q_y = \gamma_1 qa.$$

де коефіцієнти γ і γ_1 є функціями відношення сторін пластинки a/b . Ряди в цих функціях сходяться ще повільніше, ніж у функціях α, α_1, β і β_1 . Так, зберігаючи, як і в попередніх випадках, те ж число членів ряду, для квадратної пластинки отримуємо

$$\gamma(1) = \frac{16}{\hbar^3} \left[\frac{1}{1(1^2 + 1^2)} + \frac{-1}{3(1^2 + 3^2)} + \frac{1}{1(3^2 + 1^2)} + \frac{-1}{3(3^2 + 3^2)} \right] =$$

$$= \frac{16}{\hbar^3} (0,5000 - 0,0333 + 0,1000 - 0,0185) = 0,283$$

що відрізняється від точного значення, рівного 0,338, на 16,3%.



Мал. 11

2. Сила P зосереджена в точці K з координатами $x = x_0$ і $y = y_0$ (мал. 11).

Представимо цю силу у вигляді навантаження, розподіленого на нескінченно малій площі $dxdy$ навколо крапки Do :

$$q(x, y) = P/(dxdy).$$

При обчисленні подвійного інтеграла у формулі (ж) слід врахувати, що він обертається в нуль в усіх точках, окрім K , де він дорівнює

$$\int_0^a \int_0^b q(x, y) \sin \frac{m\hbar x}{a} \sin \frac{n\hbar y}{b} dxdy = P \sin \frac{m\hbar x_0}{a} \sin \frac{n\hbar y_0}{b}.$$

Підставляючи це значення у вказану формулу, отримуємо вираз коефіцієнтів ряду (а):

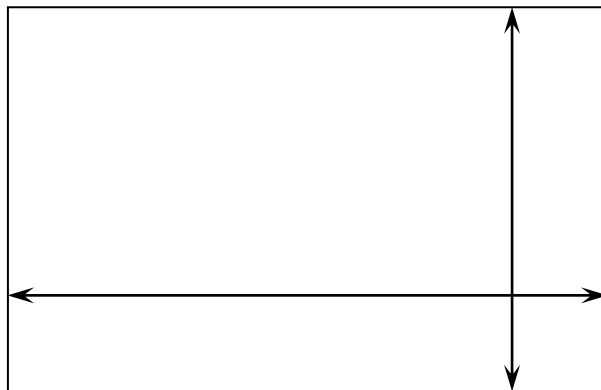
$$A_{mn} = \frac{4P \sin(m\hbar x_0 / a) \sin(n\hbar y_0 / b)}{D\hbar^4 ab (m^2 / a^2 + n^2 / b^2)^2}.$$

а підставляючи цей вираз в ряд (а) знаходимо функцію прогинів пластинки:

$$\omega = \frac{4P}{D\hbar^4 ab} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(m\hbar x_0 / a) \sin(n\hbar y_0 / b)}{(m^2 / a^2 + n^2 / b^2)^2} \sin \frac{m\hbar x}{a} \sin \frac{n\hbar y}{b} \quad (21)$$

Отриманий ряд сходиться повільніше, ніж ряд (20).

Знаючи функцію прогинів, звичайним шляхом можна знайти моменти, що вигинають, поперечні сили і моменти, що крутять. Ряди, що входять в їх функції, сходяться ще гірше, тому викладена методика може бути рекомендована тільки для знаходження прогинів. Для обчислення ж моментів, що вигинають, а тим більше поперечних сил, вона не раціональна. Вирішення Л. Навьє, розглянуте в попередньому параграфі, придатно тільки для прямокутних пластинок, шарнірно опертих по контуру. Більш загальним є вирішення М. Леві. Воно придатне для прямокутної пластинки, два протилежні краї якої шарнірно оперты, а два інших мають будь-яке закріплення (затискання, шарнірне спирання) або вільні.



Мал. 12

У пластинки, зображеної на мал. 12, шарнірно опертими є краю OC і AB . Граничні умови на цих краях такі:

$$\text{при } x=0 \text{ і } x=a \omega = \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = 0 \quad (\text{а})$$

щоб виконати ці умови, функцію прогинів можна узяти у вигляді

$$\omega = \sum_{n=1}^{\infty} Y \sin \alpha x \quad (\text{б})$$

де Y - довільна функція одного аргументу y ; $\alpha = n\pi/a$.

Оскільки при $x=0$ і $x=a$ $\sin \alpha x = 0$, то функція (б) задовольняє умовам (а) для моментів, що вигинають, підраховуємо другі приватні похідні функції прогинів (б) по x і y :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} &= -\sum_{n=1}^{\infty} Y \alpha^2 \sin \alpha x; \\ \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} Y'' \sin \alpha x. \end{aligned} \right\} (\text{в})$$

При $x=0$ і $x=a$ ці похідні, аналогічно самій функції, звертаються в нуль і, отже, умови (а) відносно моментів, що вигинають, також виконуються.

Функція (б) повинна задовольняти основному рівнянню вигину пластинки.

Підставляючи її четверті похідні в рівняння (15), отримуємо

$$\sum_{n=1}^{\infty} (Y^{IV} - 2\alpha^2 Y'' + \alpha^4 Y) \sin \alpha x = q(x, y)/D. \quad (\text{г})$$

Для вирішення рівняння (г) розкладемо його праву частину в тригонометричний ряд Фур'є по синусах:

$$q(x, y)/D = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(y) \sin \alpha x \quad (\text{д})$$

Коефіцієнти ряду Фур'є $F_n(y)$ є тут функцією y . Оскільки розкладання проводиться на відрізку $0 \leq x \leq a$, то їх визначають по відомій з курсу математичного аналізу формулі

$$F_n(y) = \frac{2}{Da} \int_0^a q(x, y) \sin \alpha x dx \quad (e)$$

Підставимо ряд (д) в рівняння (г):

$$\sum_{n=1}^{\infty} (Y^{IV} - 2\alpha^2 Y'' + \alpha^4 Y) \sin \alpha x = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(y) \sin \alpha x$$

Виносячи знак підсумовування за дужки, отримуємо

$$\sum_{n=1}^{\infty} [Y^{IV} - 2\alpha^2 Y'' + \alpha^4 Y - F_n(y)] \sin \alpha x = 0$$

Ця умова виконується, коли кожний член ряду дорівнює нулю:

$$Y^{IV} - 2\alpha^2 Y'' + \alpha^4 Y - F_n(y) = 0,$$

Або

$$Y^{IV} - 2\alpha^2 Y'' + \alpha^4 Y = F_n(y). \quad (ж)$$

Вирішення однорідного диференціального рівняння четвертого порядку (ж) рівне сумі загального вирішення відповідного однорідного рівняння і якогонебудь приватного вирішення неоднорідного рівняння. Однорідне рівняння має вигляд

$$Y^{IV} - 2\alpha^2 Y'' + \alpha^4 Y = 0 \quad (з)$$

Його розв'язок можна представити так:

$$Y_1 = A_n ch \alpha y + B_n ych \alpha y + C_n sh \alpha y + D_n ysh \alpha y \quad (\text{и})$$

Позначивши $\overline{F}_n(y)$ приватне вирішення рівняння (ж), отримаємо його загальне рішення:

$$Y(y) = A_n ch \alpha y + B_n ych \alpha y + C_n sh \alpha y + D_n ysh \alpha y + \overline{F}_n(y) \quad (\text{к})$$

Підставляючи функцію $Y(y)$ у формулу (б), знаходимо

$$\omega = \sum_{n=1}^{\infty} [A_n ch \alpha y + B_n ych \alpha y + C_n sh \alpha y + D_n ysh \alpha y + \overline{F}_n(y)] \sin \alpha x \quad (\text{л})$$

Функція ω є вирішенням рівняння (15) у разі поперечного навантаження $q(x, y)$, розподіленого на поверхні пластинки по будь-якому закону, і, як показано вище, задовольняє граничним умовам на шарнірно обпертих краях OC і AB .

Розглянемо побудову приватного рішення $\overline{F}_n(y)$. Згідно правила Коші, приватне вирішення неоднорідного диференціального рівняння четвертого порядку виражається інтегралом

$$\overline{F}_n(y) = \int_0^y \psi(y-t) F_n(t) dt \quad (\text{м})$$

де $F_n(t)$ - права частина вирішуваного рівняння, яка визначається виразом (е) при заміні аргументу y на t , а $\psi(y)$ - приватне вирішення відповідного однорідного рівняння. Воно задовольняє умовам

$$\psi(0) = \psi'(0) = \psi''(0) = 0, \psi'''(0) = 1 \quad (\text{н})$$

При розгляді однорідного рівняння (3) згідно формулі (и) отримано чотири незалежні приватні рішення: $ch\alpha y, ych\alpha y, sh\alpha y, ysh\alpha y$. З них умовам (н) задовольняє тільки наступна комбінація:

$$\psi(y) = \left(ych\alpha y - \frac{1}{\alpha} sh\alpha y \right) / (2\alpha^2) \quad (o)$$

Замінивши у функціях (o) і (e) аргументи і підставивши ці функції у формулу (м), отримаємо шукане приватне вирішення рівняння (ж):

$$\bar{F}_n(y) = \frac{1}{\alpha^2 Da} \int_0^y \left\{ \left[(y-t)ch\alpha(y-t) - \frac{1}{\alpha} ch\alpha(y-t) \right] \times \int_0^a q(x,t) \sin \alpha x dx \right\} dt$$

Для визначення довільних постійних A_n, B_n, C_n , і D_n використовуємо граничні умови на краях OA і BC . Розглянемо пластинку, у якої ці краї жорстко затиснені (мал. 61). Тоді маємо наступні граничні умови:

$$\text{при } y = 0 \text{ і } y = b \quad \omega = \frac{\partial \omega}{\partial y} = 0.$$

Підставивши в них функцію прогинів (б), отримаємо:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} Y(0) \sin \alpha x &= 0; & \sum_{n=1}^{\infty} Y'(0) \sin \alpha x &= 0; \\ \sum_{n=1}^{\infty} Y(b) \sin \alpha x &= 0; & \sum_{n=1}^{\infty} Y'(b) \sin \alpha x &= 0. \end{aligned}$$

Оскільки ці умови повинні виконуватися при будь-яких значеннях аргументу x , то

$$\left. \begin{aligned} Y(0) = 0, Y'(0) = 0; \\ Y(b) = 0, Y'(b) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (\Pi)$$

Вносячи до умов (п) функцію (к), отримуємо систему рівнянь для визначення постійних:

$$A_n = 0; B_n + C_n \alpha = 0;$$

$$A_n ch \alpha b + B_n bch \alpha b + C_n sh \alpha b + D_n bsh \alpha b + \overline{F}_n(b) = 0;$$

$$A_n \alpha sh \alpha b + B_n (ch \alpha b + absh \alpha b) + C_n \alpha ch \alpha b + \\ + D_n (sh \alpha b + abch \alpha b) + \overline{F}'_n(b) = 0,$$

Звідки

$$A_n = 0;$$

$$B_n = \frac{\alpha (sh \alpha b + abch \alpha b) \overline{F}_n(b) - absh \alpha b \overline{F}'_n(b)}{sh^2 \alpha b - \alpha^2 b^2};$$

$$C_n = \frac{-(sh \alpha b + abch \alpha b) \overline{F}_n(b) + bsh \alpha b \overline{F}'_n(b)}{sh^2 \alpha b - \alpha^2 b^2};$$

$$D_n = \frac{-abch \alpha b \overline{F}_n(b) - (sh \alpha b - abch \alpha b) \overline{F}'_n(b)}{sh^2 \alpha b - \alpha^2 b^2}.$$

При інших закріпленнях країв OA і BC виходять інші значення постійних.

Ряди у функції прогинів і її похідних сходяться значно швидше, ніж тригонометричні ряди у вирішенні Л. Навьє, тому вирішення М. Леві зручніше в практичних розрахунках навіть для прямокутної пластинки, шарнірно обпертій по всьому контуру.

3. Прості осесиметричні завдання вигину круглої пластинки

Завдання про вигин круглої пластинки буде осесиметричним, якщо навантаження на пластинку, а також умови закріплення її країв не залежать від полярного кута θ . В цьому випадку прогини пластинки також не залежать від полярного кута, θ а є функцією лише координати, r тобто $\omega = \omega(r)$. Тоді рівняння (22) значно спрощується:

$$D\left(\frac{d^4\omega}{dr^4} + \frac{2}{r}\frac{d^3\omega}{dr^3} - \frac{1}{r^2}\frac{d^2\omega}{dr^2} + \frac{1}{r^3}\frac{d\omega}{dr}\right) = q \quad (27)$$

Формули моментів (23), що вигинають, приймають вигляд

$$\left. \begin{aligned} M_r &= -D\left(\frac{d^2\omega}{dr^2} + \frac{v}{r}\frac{d\omega}{dr}\right); \\ M_\theta &= -D\left(\frac{1}{r}\frac{d\omega}{dr} + v\frac{d^2\omega}{dr^2}\right); \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

а момент (24), що крутить, звертається в нуль.

Спростуються і вирази поперечних сил (25):

$$\left. \begin{aligned} Q_r &= -D\frac{d}{dr}\left(\frac{d^2\omega}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\omega}{dr}\right); \\ Q_\theta &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

а приведені поперечні сили на контурі (26) складають

$$Q_r^{прив} = Q_r; \quad Q_\theta^{прив} = 0.$$

Рівняння (27) можна вирішити в загальному вигляді. Як відомо, загальне рішення

неоднорідного диференціального рівняння складається з суми загального вирішення відповідного однорідного рівняння ω_1 і якого-небудь приватного вирішення неоднорідного рівняння $\bar{\omega}$, тобто

$$\omega = \omega_1 + \bar{\omega}. \quad (a)$$

Загальне вирішення однорідного рівняння

$$\frac{d^4 \omega_1}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 \omega_1}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 \omega_1}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{d\omega_1}{dr} = 0$$

записується так:

$$\omega_1 = C_1 + C_2 \ln r + C_3 r^2 + C_4 r^2 \ln r.$$

Щоб отримати приватне рішення $\bar{\omega}$, рівняння (27) можна представити у вигляді

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left\{ r \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\omega}{dr} \right) \right] \right\} = \frac{q(r)}{D}.$$

Переконатися в правильності цього рівняння можна, виконавши диференціювання в його лівій частині. Диференціюючи функцію що стоїть в круглій дужці, знаходимо

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left\{ r \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \left(r \frac{d^2 \omega}{dr^2} + \frac{d\omega}{dr} \right) \right] \right\} = \frac{q(r)}{D}.$$

Або

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left\{ r \frac{d}{dr} \left[\frac{d^2 \omega}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\omega}{dr} \right] \right\} = \frac{q(r)}{D}.$$

Диференціюючи функцію, що стоїть в прямих дужках отримуємо

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left\{ r \left[\frac{d^3 \omega}{dr^3} - \frac{1}{r} \frac{d^2 \omega}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{d\omega}{dr} \right] \right\} = \frac{q(r)}{D},$$

або

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left\{ r \frac{d^3 \omega}{dr^3} + \frac{d^2 \omega}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d\omega}{dr} \right\} = \frac{q(r)}{D}.$$

Нарешті, диференціюючи функцію, що стоїть у фігурних дужках, знаходимо

$$\frac{1}{r} \left\{ r \frac{d^4 \omega}{dr^4} + \frac{d^3 \omega}{dr^3} + \frac{d^3 \omega}{dr^3} - \frac{1}{r} \frac{d^2 \omega}{dr^2} + \frac{1}{r^2} \frac{d\omega}{dr} \right\} = \frac{q(r)}{D},$$

Або

$$\frac{d^4 \omega}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 \omega}{dr^3} - \frac{1}{r} \frac{d^2 \omega}{dr^2} + \frac{1}{r^2} \frac{d\omega}{dr} = \frac{q(r)}{D},$$

що співпадає з рівнянням (27).

Інтегруючи це рівняння послідовно чотири рази, знайдемо загальний вид приватного рішення:

$$\bar{\omega} = \frac{1}{D} \int_0^1 \frac{1}{r} \left\{ \int_0^r r \left[\int_0^r \frac{1}{r} \left(\int_0^r q(r) r dr \right) dr \right] dr \right\} dr \quad (6)$$

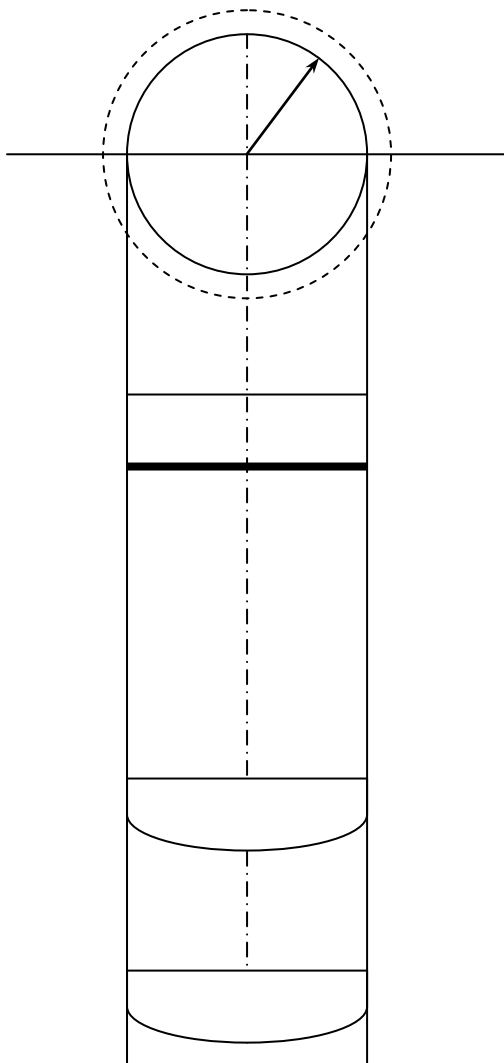
Хай навантаження рівномірно розподілене по всій поверхні пластинки, тобто $q(r) = q = const$. В цьому випадку вираз (6) легко інтегрується і приводить до наступного результату:

$$\bar{\omega} = \frac{qr^4}{64D}$$

Отже, загальне вирішення неоднорідного диференціального рівняння (27) при рівномірно розподіленому навантаженні таке:

$$\omega = C_1 + C_2 \ln r + C_3 r^2 + C_4 r^2 \ln r + \frac{qr^4}{64D} \quad (30)$$

Розглянемо деякі приклади розрахунку пластинок, що знаходяться під дією рівномірно розподіленого навантаження.



Мал. 13

1. суцільна шарнірно опертая по контуру пластинка (рис.13). Для визначення постійних інтеграції маємо наступні граничні умови. В центрі пластинки (при $r=0$) прогин повинен мати кінцеве значення. Оскільки $\ln 0 = -\infty$, то в рішенні (30) слід відкинути члени, що містять множники $\ln r$, тобто прийняти

$$C_2 = C_4 = 0$$

Тоді

$$\omega = C_1 + C_3 + C_3 r^2 + qr^4 / (64D) \quad (\text{в})$$

Дві умови маємо на контурі пластинки, де повинні звертатися в нуль прогин ω і радіальний момент, що вигинає M_r . Таким чином, при $r = a$

$$\omega = 0 \text{ і } \frac{d^2\omega}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{d\omega}{dr} = 0 \quad (\text{г})$$

Підставляючи в умови (г) функцію прогинів (в), отримуємо:

$$C_1 + C_3 a^2 + \frac{qa^4}{64D} = 0;$$

$$2C_3 + \frac{3qa^2}{16D} + \frac{\nu}{a} \left(2C_3 a + \frac{qa^3}{16D} \right) = 0.$$

Звідки

$$C_3 = -\frac{3+\nu}{1+\nu} \frac{qa^2}{32D};$$

$$C_1 = \frac{3+\nu}{1+\nu} \frac{qa^4}{32D} - \frac{qa^4}{64D}$$

Підставляючи знайдені постійні в рішення (в), отримуємо функцію прогинів для даної пластинки:

$$\omega = \frac{q(a^2 - r^2)}{64D} \left(\frac{5+\nu}{1+\nu} a^2 - r^2 \right) \quad (31)$$

Максимальний прогин виникає в центрі пластинки (при $r = 0$):

$$\max \omega = \frac{5 + \nu}{1 + \nu} \frac{qa^4}{64D} \quad (\text{Д})$$

Підставляючи функцію прогинів (31) у формули (28), знаходимо моменти, що вигинають, в пластинці:

$$\left. \begin{aligned} M_r &= q(3 + \nu)(a^2 + r^2)/16; \\ M_\theta &= q[(3 + \nu)a^2 - (1 + 3\nu)r^2]/16 \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Максимальні моменти, що вигинають, також виникають в центрі пластинки:

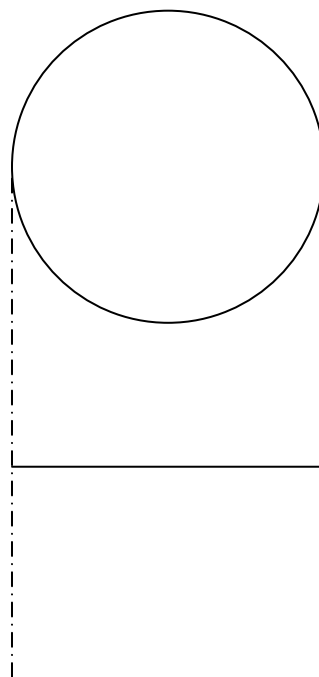
$$\max M_r = \max M_\theta = qa^2(3 + \nu)/16.$$

Моменти, що вигинають, в точках контура (при $r = a$):

$$\begin{aligned} M_r &= 0; \\ M_\theta &= qa^2(1 - \nu)/8. \end{aligned}$$

Епюри моментів, що вигинають, для пластинки, виготовленої з матеріалу з коефіцієнтом Пуассона $\nu = 0,3$, показаний на мал. 13.

2. Суцільна затиснена по контуру пластинка (мал. 14). Для визначення постійних C_1 і C_2 маємо наступні граничні умови:





Мал.14

на зовнішньому контурі повинні бути відсутніми прогини і повороти перетинів, тобто

при $r = a \quad \omega = \frac{d\omega}{dr} = 0.$

Підставляючи в ці умови функцію прогинів (в), отримуємо:

$$\begin{aligned} C_1 + C_3 a^2 + qa^4 / (64D) &= 0; \\ 2C_3 a + qa^3 / (16D) &= 0, \end{aligned}$$

Звідки

$$\begin{aligned} C_3 &= -qa^2 / (32D), \\ C_1 &= qa^4 / (64D), \end{aligned}$$

і рівняння серединної поверхні (в) приймає вигляд

$$\omega = [q/(64D)](a^2 - r^2)^2 \quad (33)$$

Максимальний прогин в центрі пластинки (при $r = 0$) $r = 0$

$$\max \omega = qa^4 / (64D).$$

З порівняння цього результату з формулою (д) витікає, що максимальний прогин затисненої по контуру пластинки в чотири рази менше максимального прогину шарнірно опертої пластинки.

Підставляючи функцію прогинів (33) у формули (28), знаходимо моменти, що вигинають:

$$\left. \begin{aligned} M_r &= q[(1+\nu)a^2 - (3+\nu)r^2]/16; \\ M_\theta &= q[(1+\nu)a^2 - (1+3\nu)r^2]/16. \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

Моменти, що вигинають, в центрі пластинки:

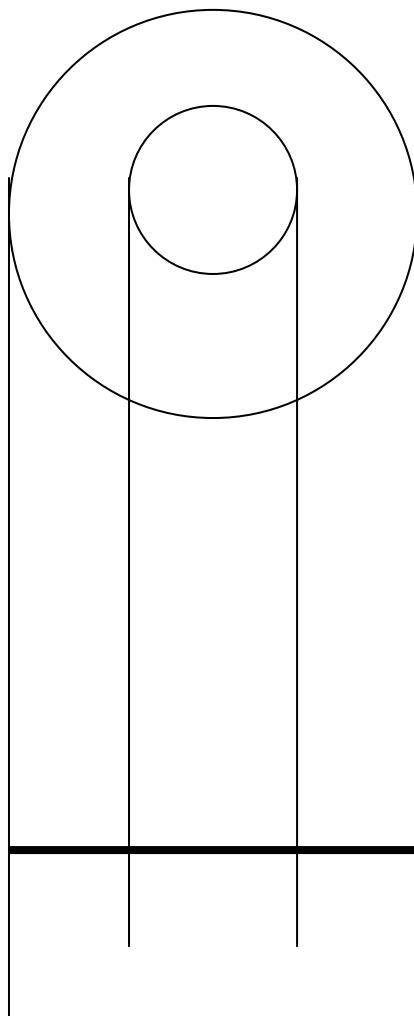
$$M_r = M_\theta = qa^2(1+\nu)/16;$$

на контурі:

$$\begin{aligned} M_r &= -qa^2/8; \\ M_\theta &= -\nu qa^2/8. \end{aligned}$$

Епюри моментів, що вигинають, для пластинки, виготовленої з матеріалу з коефіцієнтом Пуассона $\nu = 0,3$, показані на мал. 14 максимальний по абсолютному значенню момент, що вигинає, виникає в точках контура на майданчиках, перпендикулярних радіусу. Він на 40% менше максимального моменту, що вигинає, в шарнірно опертої пластинці.

3. Кільцева пластинка із затисненим зовнішнім краєм (мал. 15).



Мал. 15

Для визначення постійних інтеграції, що входять в рішення (30), маємо наступні граничні умови: на зовнішньому, затисненому краю (при $r = 0$) $r = 0$

$$\omega = \frac{d\omega}{dr} = 0;$$

на внутрішньому, вільному краю (при $r = b$) $r = b$

$$M_r = -D \left(\frac{d^2 \omega}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{d\omega}{dr} \right) = 0$$

$$\text{і } Q_r^{\text{внут}} = Q_r = -D \frac{d}{dr} \left(\frac{d^2 \omega}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\omega}{dr} \right) = 0.$$

Підставляючи в ці умови функцію прогинів (30), отримуємо систему рівнянь:

$$\left. \begin{aligned} C_1 + C_2 \ln a + C_3 a^2 + C_4 a^2 \ln a + qa^4 / (64D) &= 0; \\ C_2 / a + 2C_3 a + 2C_4 a \ln a + C_4 a + qa^3 / (16D) &= 0; \\ -C_2 / b^2 + 2C_3 + 2C_4 \ln b + 3C_4 + 3qb^2 / (16D) + \\ + v [C_2 / b^2 + 2C_3 + 2C_4 \ln b + C_4 + qb^2 / (16D)] &= 0; \\ 4C_4 / b + qb / (2D) &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Вирішуючи цю систему, знаходимо:

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= [qa^2 / (64Da)] \{ (1-v)a^4 - [(5-3v) - 4(1+v)\ln a]a^2b^2 - \\ &- 2[2(1+v) + (1-2\ln a)((1-v) + 4(1+v)\ln(b/a))]b^4 \}; \\ C_2 &= -[qa^2b^2 / (16Da)] \{ (1-v)a^2 + [(1-v) + 4(1+v)\ln(b/a)]b^2 \}; \\ C_3 &= [q / (32Da)] \{ -(1-v)a^4 + 2(1-v)(1+2\ln a)a^2b^2 + \\ &+ [(3+v) + 4(1+v)\ln b]b^4 \}; \\ C_4 &= -qb^2 / (8D), \end{aligned} \right\}$$

де

$$\alpha = (1-v)a^2 + (1+v)b^2.$$

Якщо ввести позначення

$$\begin{aligned} p &= r/a, \beta = b/a, \\ k &= \frac{(1-v)\beta^2 + (1+v)(1+4\beta^2 \ln \beta)}{(1-v) + (1+v)\beta^2}, \end{aligned}$$

то рівняння серединної поверхні пластинки (30) після підстановки в нього постійних (е) prime наступний вигляд:

$$\omega = [qa^4 / (64D)] [-1 + 2(1-k-2\beta^2)(1-p^2) + p^4 - 4k \ln p - 8\beta^2 p^2 \ln p] \quad (35)$$

Подальший хід розрахунку, тобто визначення зусиль і напруги, не представляє затруднень і проводиться аналогічно попереднім прикладам.

Список використаної літератури:

1. В. Г. Рекач Керівництво до рішення завдань прикладної теорії пружності. - Москва «Вища школа» -1973 – 383 с.
2. П. М. Ошбалов, М. А. Колтунов Оболонки і пластинки. - Москва: МГУ, - 1969 – 695 с.
- 3 С. П. Тимошенко Пластинки і оболонки. - Москва: ГИФМЛ, - 1966 – 635 с.
- 4 П. М. Ошбалов Стійкість і коливання пластинок. - Москва: МГУ - 1958