Лаб.1. Матричне рівняння Ляпунова; додатно визначена КФЛ

Понятие положительно определенной функции.

Функция V(x1,...,xn) > 0 при $x \neq 0$ и V(0)=0 называется положительно определенной. В начале координат V(x) имеет глобальный минимум.

Если разложение некоторой функции Z(x): Z(0)=0 в ряд Тейлора в окрестности нуля (x=0) начинается с квадратичных членов, то условия положительной определенности (локального минимума в нуле) определяются из критерия Сильвестра (наличие линейных членов гарантировало бы знакопеременность функции).

Так, например, фукция от двух переменных в малой окрестности нуля представляется квадратичной формой

$$Z(x_1,x_2) \approx \frac{\partial^2 Z}{\partial x_1^2}\Big|_{(0,0)} x_1^2 + 2\frac{\partial^2 Z}{\partial x_1 \partial x_2}\Big|_{(0,0)} x_1 x_2 + \frac{\partial^2 Z}{\partial x_2^2}\Big|_{(0,0)} x_2^2 =$$

$$= q_{11}x_1^2 + 2q_{12}x_1x_2 + q_{22}x_2^2 = (x_1\ x_2)\begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (x)^T Q(x).$$

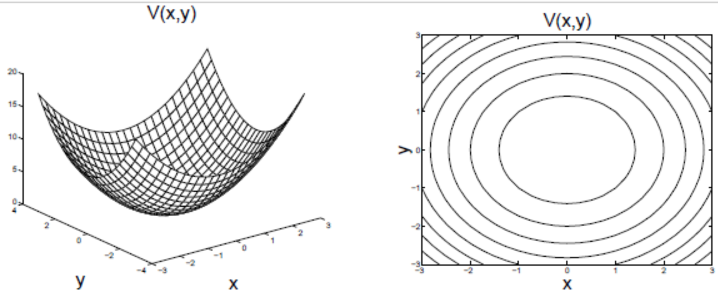
Положительность всех главных диагональных миноров матрицы квадратичной формы Q (критерий Сильвестра) гарантирует положительную определенность функции Z(x) в достаточно малой окрестности нуля

$$|q_{11}| > 0; \begin{vmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{vmatrix} > 0;$$

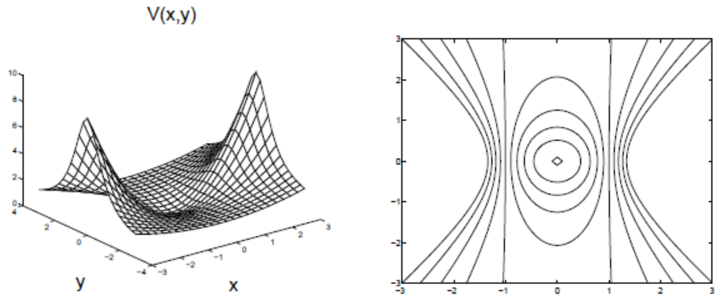
$$\begin{cases} q_{11} > 0; \\ q_{11}q_{22} - q_{12}^2 > 0. \end{cases}$$

Перевірте додатню визначеність функцій:

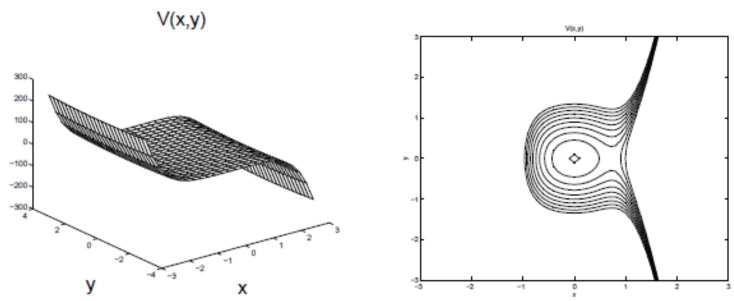
1) $V(x,y) = x^2 + y^2$



2) $V(x,y) = \dfrac{x^2 + y^2}{(1 + y^2)}$



3) $V(x,y) = x^2 + y^2 - x^5$



4) $V(x,y) = \sin(x) \cdot x + \sin(y) \cdot y$

5) $V(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + x \cdot y + x \cdot z + y \cdot z$

Для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами $\dot{x} = Ax$ функцию Ляпунова следует искать в виде квадратичной формы $V(x) = x^T Bx$, где матрица B является искомой. Производная V(x) в силу системы $\dot{x} = Ax$ также представляется в виде квадратичной формы

$$\dot{V} = \dot{x}^T Bx + x^T B\dot{x} = \dot{x}^T (A^T B + BA)x.$$

Потребуем, чтобы квадратичная форма V(x) удовлетворяла уравнению $\dot{V} = W$, где $W(x) = -x^T Cx$ –определенно-отрицательная квадратичная форма

(C - положительно определенная матрица). Тогда матрица B определяется из матричного уравнения Ляпунова

$$A^T B + BA = -C.$$

Разрешимость матричного уравнения следует из следующей теоремы Ляпунова.

Если корни характеристического уравнения системы $\dot{x} = Ax$ таковы, что λj+λk≠0 ни при каких j, k=1,…, n, то, какова бы ни была наперед заданная квадратичная форма $W(x) = -x^T C x$, существует единственная квадратичная форма $V(x) = x^T B x$, удовлетворяющая уравнению $\dot{V} = W$.

Замечание. Если все Reλj<0, j=1,…n, то условие λj+λk≠0 будет заведомо выполнено.

Пример решения матричного уравнения Ляпунова. Для линейной системы второго порядка $\dot{x} = Ax$ ищется квадратичная функция Ляпунова $V = x^T \begin{pmatrix} v_{1,1} & v_{1,2} \\ v_{2,1} & v_{2,2} \end{pmatrix} x$, удовлетворяющая матричному уравнению

$$A^T (v_{i,j}) + (v_{i,j}) A = -E.$$

Для элементов симметричной матрицы $(v_{i,j})$ получим систему трех уравнений, коэффициенты которой определяются через элементы матрицы

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ d & c \end{bmatrix};$$

$$2\, v_{1,1}\, a + 2\, v_{1,2}\, d = -1;$$

$$v_{1,1}\, b + v_{1,2}\, c + v_{1,2}\, a + v_{2,2}\, d = 0;$$

$$2\, v_{1,2}\, b + 2\, v_{2,2}\, c = -1.$$

Решение системы имеет вид

$$v_{1,1} = -\frac{-b\,d + c^2 + a\,c + d^2}{2\,(-a\,b\,d + a\,c^2 + a^2\,c - b\,d\,c)};$$

$$v_{1,2} = \frac{b\,c + a\,d}{2\,(-a\,b\,d + a\,c^2 + a^2\,c - b\,d\,c)};$$

$$v_{2,\,2} = -\frac{a^2 + b^2 + a\,c - b\,d}{2\,(-a\,b\,d + a\,c^2 + a^2\,c - b\,d\,c)};$$

$$v_{2,\,1} = \frac{b\,c + a\,d}{2\,(-a\,b\,d + a\,c^2 + a^2\,c - b\,d\,c)}.$$

Условия положительной определенности квадратичной формы V выполнены, если матрица A имеет отрицательный след и положительный определитель, т.е. является гурвицевой

$$-\frac{-b\,d + c^2 + a\,c + d^2}{2\,(c + a)\,(a\,c - b\,d)};$$

$$\frac{a^2 + 2\,a\,c + c^2 + b^2 + d^2 - 2\,b\,d}{4\,(c + a)^2\,(a\,c - b\,d)}.$$

1) $A = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -8 & -12 \end{bmatrix};$ $\qquad V(x) = x^T P x$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}$$

where, due to the symmetry of $\mathbf{P}$, $p_{21} = p_{12}$. Then the Lyapunov equation is

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -8 & -12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -8 \\ 4 & -12 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$p_{i,j}$ -?

Example: $\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\mathbf{x}$

- Let $\mathbf{Q} = \mathbf{I}$ and $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} = \mathbf{P}^T$

MATLAB solution:
`P = lyap(A, Q)`

2) - Lyapunov equation: $\mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{PA} = -\mathbf{Q}$

Завдання для самостійного виконання

1.Визначити достатні умови стійкості та нестійкості нульового розв'язка системи $x' = A \cdot x$, на основі КФЛ $V(x_1, x_2) = 1/2(x_1^2 + x_2^2)$.

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ d & c \end{bmatrix};$$

2. Доведіть справедливість відповідних тверджень на основі критерію Рауса – Гурвіца.