Лаб.3. Аналіз впливу структури сил на стійкість механічних систем.

Рассмотрим пример, иллюстрирующий влияние неконсервативных позиционных сил на устойчивость равновесия. При отклонении от положения равновесия со стороны упругого стержня на материальную точку массы m действуют две силы: $F_r = c_{11} r,$ направленная по радиусу-вектору и $F_\varphi = c_{12} r$ – перпендикулярно радиусу вектору («следящая» сила).

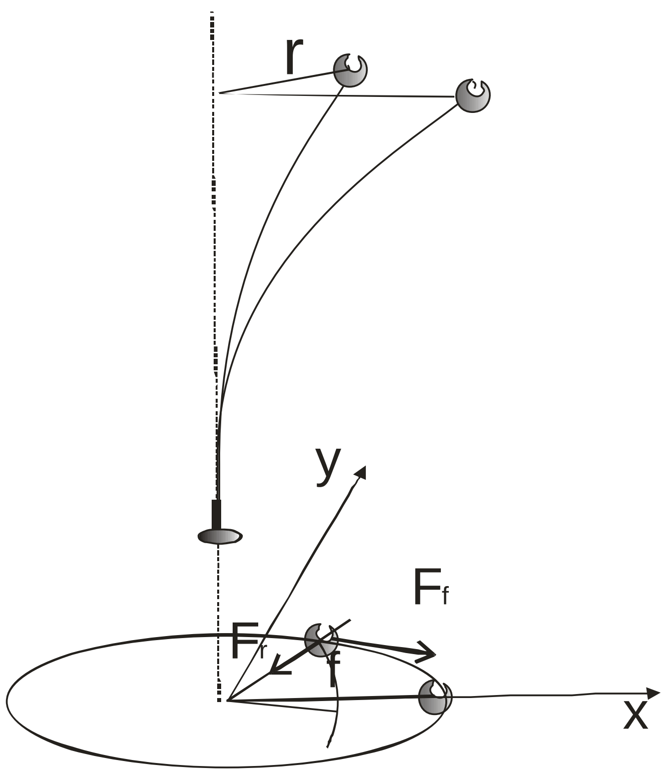

Рис. 3.1 Силы, действующие на упругий стержень при его отклонении от положения равновесия.

Уравнения возмущенного движения имеют вид

$$m\ddot{x} = -c_{11} r\cos\theta + c_{12} r\sin\theta = -c_{11} x + c_{12} y;$$
$$m\ddot{y} = -c_{11} r\sin\theta - c_{12} r\cos\theta = -c_{12} x - c_{11} y.$$

Следящая сила $F_\varphi = c_{12} r$ представлена кососимметричной матрицей, т.е. является неконсервативной позиционной силой, а сила $F_r = c_{11} r$ - потенциальной. Домножая первое уравнение на y, а второе на x и, вычитая из второго первое, получим следующее дифференциальное следствие

$$m(\ddot{y}x - \ddot{x}y) = -c_{12}(x^2 + y^2); \Rightarrow m(\dot{y}x - \dot{x}y)' = -c_{12}(x^2 + y^2).$$

Последнее соотношение представляет закон об изменении момента количества движения в проекции на ось Oz и указывает на то, что секторная скорость точки монотонно растет, т.е. имеет место неустойчивость положения равновесия. При отсутствии позиционных сил (c12=0) положение равновесия системы является устойчивым.

Следующий пример иллюстрирует стабилизирующий эффект гироскопических сил. Уравнения возмущенного движения описывают динамику гибкого вала

$$\ddot{Y} - 2\omega\dot{Z} + (k^2 - \omega^2)Y = 0;$$
$$\ddot{Z} + 2\omega\dot{Y} + (k^2 - \omega^2)Z = 0.$$

где ω - угловая скорость вала; k - собственная частота гибкого вала; гироскопические члены связаны с ускорением Кориолиса центра масс вала.

Если ω<k, то положение относительного равновесия устойчиво по теореме Томсона-Тэта (добавление гироскопических сил не может разрушить устойчивость потенциальной системы). Этот результат можно проверить, используя дифференциальные следствия уравнений возмущенного движения

$$\ddot{Y} - 2\omega\dot{Z} + (k^2 - \omega^2)Y = 0 \times \dot{Y};$$
$$\ddot{Z} + 2\omega\dot{Y} + (k^2 - \omega^2)Z = 0 \times \dot{Z}.$$

Сумма первого и второго уравнений задает интеграл энергии системы (выражение в квадратных скобках определяет полную механическую энергию системы в относительном движении)

$$V_1' = [\dot{Y}^2 + \dot{Z}^2 + (k^2 - \omega^2)Y^2 + (k^2 - \omega^2)Z^2]' = 0.$$

Производная положительно определенной функции в силу уравнений возмущенного движения равна нулю, что и доказывает устойчивость положения относительного равновесия.

Если же ω>k, то отдельно взятая потенциальная система может быть стабилизирована гироскопическими силами.

Рассмотрим еще одно дифференциальное следствие уравнений возмущенного движения

$$\ddot{Y} - 2\omega\dot{Z} + (k^2 - \omega^2)Y = 0 \times Z;$$
$$\ddot{Z} + 2\omega\dot{Y} + (k^2 - \omega^2)Z = 0 \times Y.$$

Разность второго и первого уравнений дадут

$$V_2' = \left[\dot{Z}Y - \dot{Y}Z + \omega(Z^2 + Y^2)\right]' = 0,$$

что указывает на связь между секторной скоростью центра масс при движении относительно положения равновесия и соответствующей переносной скоростью.

Линейная комбинация двух интегралов системы V1 +2ωV2 может служить в качестве функции Ляпунова в этом случае (ω>k)

$$\left[\dot{Y}^2 + \dot{Z}^2 + 2\omega(\dot{Z}Y - \dot{Y}Z) + (k^2 + \omega^2)(Z^2 + Y^2)\right]' = 0.$$

Завдання для самостійного виконання

Дослідити стійкість нульового розв’язка на основі методу диференційних наслідків при різних значеннях параметрів ε, α (результат пояснити на основі аналізу структури сил)

1. $$\begin{cases} x'' = -2 \cdot x + \varepsilon \cdot y; \\ y'' = -\varepsilon \cdot x - 2 \cdot y. \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} x'' = -\alpha \cdot y' + x; \\ y'' = \alpha \cdot x' + y. \end{cases}$$