

Лаб.10. Синтез керування системи корабель-автостерно

> restart;

> PP:=(-h*Phi-kk*psi)/J;

$$PP := \frac{-h \Phi - kk \psi}{J}$$

> Psi1:=(-psi+alpha*xi+beta*(phi-xi)/tau)/T;

$$\Psi I := \frac{-\psi + \alpha \xi + \frac{\beta (\phi - \xi)}{\tau}}{T}$$

> Xi:=(phi-xi)/tau;

$$\Xi := \frac{\phi - \xi}{\tau}$$

> with(linalg, jacobian):

(формування матриці системи лінійного наближення)

>

Joo:=subs(jacobian([Phi, PP, Psi1, Xi], [phi, Phi, psi, xi]));

$$J_{oo} := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{h}{J} & -\frac{kk}{J} & 0 \\ \frac{\beta}{\tau T} & 0 & -\frac{1}{T} & \frac{\alpha - \frac{\beta}{\tau}}{T} \\ \frac{1}{\tau} & 0 & 0 & -\frac{1}{\tau} \end{bmatrix}$$

(визначення характеристичного рівняння)

> chp:=linalg[charpoly](Joo, lambda);

$$\begin{aligned} chp := & \frac{1}{\tau T J} (\lambda^4 \tau J T + \lambda^3 J T + \lambda^3 \tau J + \lambda^2 J + \lambda^3 \tau h T + h \lambda^2 T \\ & + \lambda^2 \tau h + h \lambda + \beta kk \lambda + kk \alpha) \end{aligned}$$

> with(linalg):

Warning, the protected names norm and trace have been redefined and unprotected

> N:=4;

N:=4

(коефіцієнти характеристичного рівняння)

```
> for i from 0 to N do AA[N-i]:=coeff(chp,lambda,i)
od;
```

$$AA_4 := \frac{kk \alpha}{\tau T J}$$

$$AA_3 := \frac{h + \beta kk}{\tau T J}$$

$$AA_2 := \frac{J + h T + \tau h}{\tau T J}$$

$$AA_1 := \frac{J T + \tau J + \tau h T}{\tau T J}$$

$$AA_0 := 1$$

```
> #AA:=array(0..N);
```

```
> BK:=array(1..N,1..N);
```

$$BK := \text{array}(1..4, 1..4, [])$$

```
> for k from 1 to N do for j from 1 to N do if 2*k-
j>=0 and 2*k-j<=N then BK[k,j]:=AA[2*k-j] else
BK[k,j]:= 0 fi; od: od;
```

(формування матриці Гурвіца)

```
> eval(BK):
```

(умови стійкості Рауса-Гурвіца : $DG[i]>0$, $i=1,\dots,n$)

```
> for k from 1 to N do M:=
```

```
submatrix(BK,1..k,1..k):DG[k]:=det(M): od;
```

$$M := \left[\frac{J T + \tau J + \tau h T}{\tau T J} \right]$$

$$DG_1 := \frac{J T + \tau J + \tau h T}{\tau T J}$$

$$M := \begin{bmatrix} \frac{J T + \tau J + \tau h T}{\tau T J} & 1 \\ \frac{h + \beta kk}{\tau T J} & \frac{J + h T + \tau h}{\tau T J} \end{bmatrix}$$

$$DG_2 := -\frac{1}{\tau^2 T^2 J^2} \left(-J^2 T - J T^2 h - 2 J T \tau h - \tau J^2 - \tau^2 J h \right. \\ \left. - \tau h^2 T^2 - \tau^2 h^2 T + J T \tau \beta kk \right)$$

$$M := \begin{bmatrix} \frac{JT + \tau J + \tau h T}{\tau T J} & 1 & 0 \\ \frac{h + \beta kk}{\tau T J} & \frac{J + h T + \tau h}{\tau T J} & \frac{JT + \tau J + \tau h T}{\tau T J} \\ 0 & \frac{kk \alpha}{\tau T J} & \frac{h + \beta kk}{\tau T J} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} DG_3 := & -\frac{1}{\tau^3 T^3 J^3} \left(-\tau J^2 h - J T^2 h \beta kk - J T \tau h \beta kk \right. \\ & + 2 J^2 T kk \alpha \tau + 2 J T^2 kk \alpha \tau h - \tau^2 J h \beta kk - J^2 T \beta kk \\ & - 2 J T \tau h^2 + J^2 T^2 kk \alpha - \tau J^2 \beta kk + \tau^2 J^2 kk \alpha \\ & + 2 \tau^2 J kk \alpha h T - \tau h^2 T^2 \beta kk - \tau^2 h^2 T \beta kk \\ & + \tau^2 h^2 T^2 kk \alpha - \tau^2 J h^2 - \tau^2 h^3 T - J T^2 h^2 - J^2 T h \\ & \left. - \tau h^3 T^2 + J T \tau \beta^2 kk^2 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M := & \left[\left[\frac{JT + \tau J + \tau h T}{\tau T J}, 1, 0, 0 \right], \right. \\ & \left[\frac{h + \beta kk}{\tau T J}, \frac{J + h T + \tau h}{\tau T J}, \frac{JT + \tau J + \tau h T}{\tau T J}, 1 \right], \\ & \left[0, \frac{kk \alpha}{\tau T J}, \frac{h + \beta kk}{\tau T J}, \frac{J + h T + \tau h}{\tau T J} \right], \\ & \left. \left[0, 0, 0, \frac{kk \alpha}{\tau T J} \right] \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} DG_4 := & -\frac{1}{\tau^4 T^4 J^4} \left(kk \alpha \left(-\tau J^2 h - J T^2 h \beta kk - J T \tau h \beta kk \right. \right. \\ & + 2 J^2 T kk \alpha \tau + 2 J T^2 kk \alpha \tau h - \tau^2 J h \beta kk - J^2 T \beta kk \\ & - 2 J T \tau h^2 + J^2 T^2 kk \alpha - \tau J^2 \beta kk + \tau^2 J^2 kk \alpha \\ & + 2 \tau^2 J kk \alpha h T - \tau h^2 T^2 \beta kk - \tau^2 h^2 T \beta kk \\ & + \tau^2 h^2 T^2 kk \alpha - \tau^2 J h^2 - \tau^2 h^3 T - J T^2 h^2 - J^2 T h \\ & \left. \left. - \tau h^3 T^2 + J T \tau \beta^2 kk^2 \right) \right) \end{aligned}$$

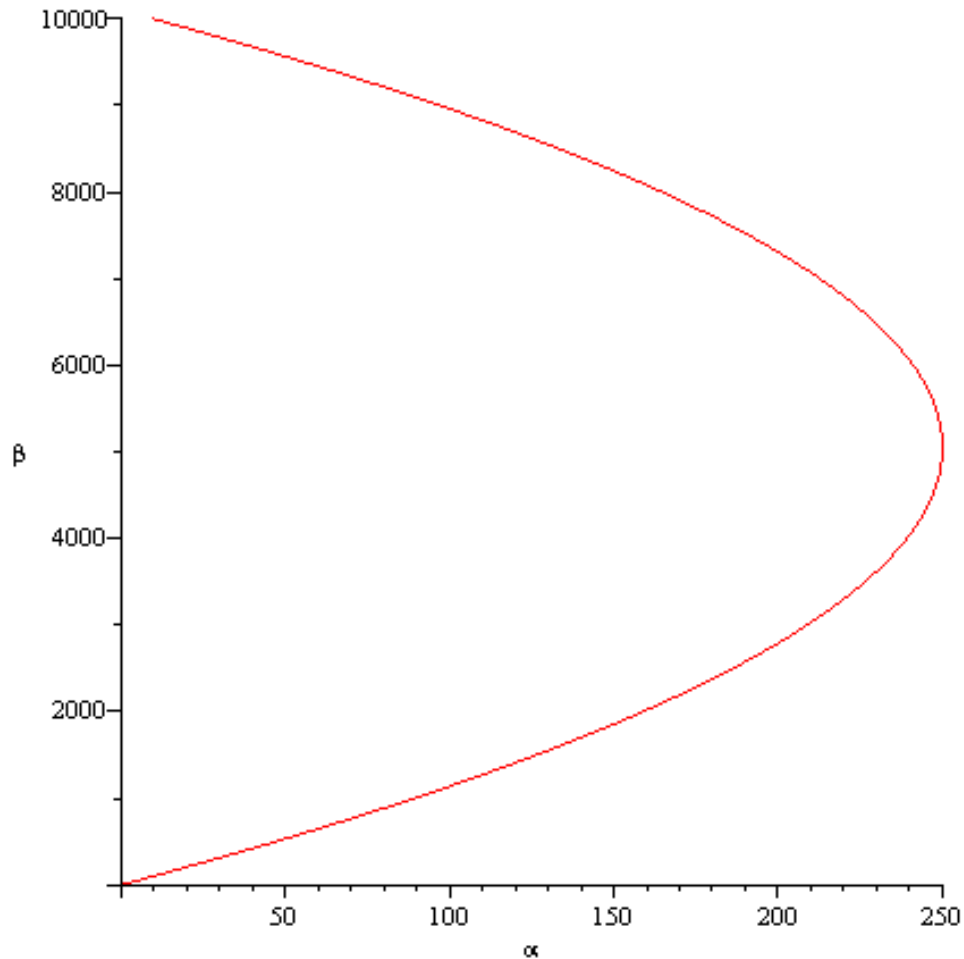
>

> **with (plots) :**

Warning, the name changecoords has been redefined

Чисельна побудова області стійкості в площині параметрів (alpha, beta):

```
> implicitplot(subs({J=1000,h=10E-5,kk=1,T=10,tau=0.1},{DG[2]>0,DG[3]>0}),alpha=0..250,beta=0..10000,grid=[200,200]);
```



```
> subs({J=1000,h=10E-5,kk=1,T=10,tau=0.1,alpha=0.1,beta=1.5},{DG[2],DG[3]});  
{10.098510200.004947774949}
```

результат останньої підстановки вказує, що область стійкості в просторі параметрів (alpha, beta) охоплюється параболою.

>

Аналіз умов стійкості системи корабель-автостерно ($DG[2]>0$, $DG[3]>0$) в аналітичному вигляді:

```
> collect( numer (DG[3]), {alpha,beta} );
```

$$\begin{aligned}
& (-\tau^2 J^2 kk - J^2 T^2 kk - 2 J T^2 kk \tau h - \tau^2 h^2 T^2 kk \\
& - 2 \tau^2 J kk h T - 2 J^2 T kk \tau) \alpha - J T \tau \beta^2 kk^2 + (\tau^2 J h kk \\
& + J T \tau h kk + \tau h^2 T^2 kk + \tau J^2 kk + J^2 T kk + \tau^2 h^2 T kk \\
& + J T^2 h kk) \beta + \tau J^2 h + \tau h^3 T^2 + J^2 T h + \tau^2 h^3 T \\
& + J T^2 h^2 + 2 J T \tau h^2 + \tau^2 J h^2
\end{aligned}$$

Визначник Гурвіца $DG[3]$ є квадратичною функцією параметра $beta$; $DG[3]>0$ при $beta1 < beta < beta2$, де $beta1$ дійсні корені рівняння $DG[3]=0$ (маємо від'ємний коефіцієнт при старшому члені).

Знайдемо корені рівняння $DG[3]=0$

> **BET3:=solve(%=0,beta) :**

> **BET3[1] ;**

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2 J T \tau k k} \left(\tau J^2 + J T^2 h + J T \tau h + \tau h^2 T^2 + \tau^2 h^2 T + \tau^2 J h \right. \\
& + J^2 T \\
& + (J^4 T^2 + \tau^2 J^4 - 8 J^2 T^3 \tau^2 k k \alpha h - 4 J^3 T^3 \tau k k \alpha \\
& - 4 J^3 T \tau^3 k k \alpha - 8 J^2 T^2 \tau^3 k k \alpha h + 8 \tau J^3 T^2 h \\
& - 4 J T^3 \tau^3 h^2 k k \alpha - 8 J^3 T^2 \tau^2 k k \alpha + \tau^4 h^4 T^2 + 2 \tau^3 h^4 T^3 \\
& + \tau^2 h^4 T^4 + 2 J^3 T^3 h + J^2 T^4 h^2 + 2 \tau J^4 T + 2 \tau^3 J^3 h \\
& + \tau^4 J^2 h^2 + 8 J T^3 h^3 \tau^2 + 2 J T^4 h^3 \tau + 8 J^2 T^3 h^2 \tau \\
& + 8 \tau^3 J^2 h^2 T + 15 \tau^2 J^2 h^2 T^2 + 8 \tau^2 J^3 T h + 2 \tau^4 h^3 T J \\
& \left. + 8 J T^2 \tau^3 h^3 \right)^{1/2}
\end{aligned}$$

> **POL:=DG[3] ;**

$$\begin{aligned}
POL := & -\frac{1}{\tau^3 T^3 J^3} \left(-\tau J^2 h - J T^2 h \beta k k - J T \tau h \beta k k \right. \\
& + 2 J^2 T k k \alpha \tau + 2 J T^2 k k \alpha \tau h - \tau^2 J h \beta k k - J^2 T \beta k k \\
& - 2 J T \tau h^2 + J^2 T^2 k k \alpha - \tau J^2 \beta k k + \tau^2 J^2 k k \alpha \\
& + 2 \tau^2 J k k \alpha h T - \tau h^2 T^2 \beta k k - \tau^2 h^2 T \beta k k \\
& + \tau^2 h^2 T^2 k k \alpha - \tau^2 J h^2 - \tau^2 h^3 T - J T^2 h^2 - J^2 T h \\
& \left. - \tau h^3 T^2 + J T \tau \beta^2 k k^2 \right)
\end{aligned}$$

> DISQ[al]:=discrim(POL,beta);

$$DISQ_{al} := -\frac{1}{J^6 T^6 \tau^6} (kk^2 (-J^4 T^2 - \tau^2 J^4 + 8 J^2 T^3 \tau^2 kk \alpha h + 4 J^3 T^3 \tau kk \alpha + 4 J^3 T \tau^3 kk \alpha + 8 J^2 T^2 \tau^3 kk \alpha h - 8 \tau J^3 T^2 h + 4 J T^3 \tau^3 h^2 kk \alpha + 8 J^3 T^2 \tau^2 kk \alpha - \tau^4 h^4 T^2 - 2 \tau^3 h^4 T^3 - \tau^2 h^4 T^4 - 2 J^3 T^3 h - J^2 T^4 h^2 - 2 \tau J^4 T - 2 \tau^3 J^3 h - \tau^4 J^2 h^2 - 8 J T^3 h^3 \tau^2 - 2 J T^4 h^3 \tau - 8 J^2 T^3 h^2 \tau - 8 \tau^3 J^2 h^2 T - 15 \tau^2 J^2 h^2 T^2 - 8 \tau^2 J^3 T h - 2 \tau^4 h^3 T J - 8 J T^2 \tau^3 h^3))$$

дискримінант є лінійною функцією параметра *alpha*:

>

Необхідною умовою $DG[3]>0$ є додатність дискримінанта $DISQ[al]$

> A1:=solve(DISQ[al]=0,alpha);

$$A1 := \frac{J^2 + 2 J h T + 2 J \tau h + T^2 h^2 + 2 T \tau h^2 + \tau^2 h^2}{4 J T \tau kk}$$

а необхідна умова стійкості системи корабель - автостерно ($DG[3]>0$) має вигляд $0 < alpha < A1$.

> A1:=subs({J=1000,h=10E-5,kk=1,T=10,tau=0.1},A1);

$$A1 := 250.0005050$$

Визначник Гурвіца $DG[2]$ є лінійною функцією параметра *beta*; $DG[2]>0$ при $0 < beta < BET2$, де $BET2$ розв'язок рівняння $DG[2]=0$.

> BET2:=solve(DG[2]=0,beta);

$$BET2 :=$$

$$\frac{J^2 T + \tau h^2 T^2 + 2 J T \tau h + \tau^2 h^2 T + J T^2 h + \tau^2 J h + \tau J^2}{\tau T J kk}$$

>

> BET2:=subs({J=1000,h=10E-5,kk=1,T=10,tau=0.1},BET2);

$$BET2 := 10100.01020$$

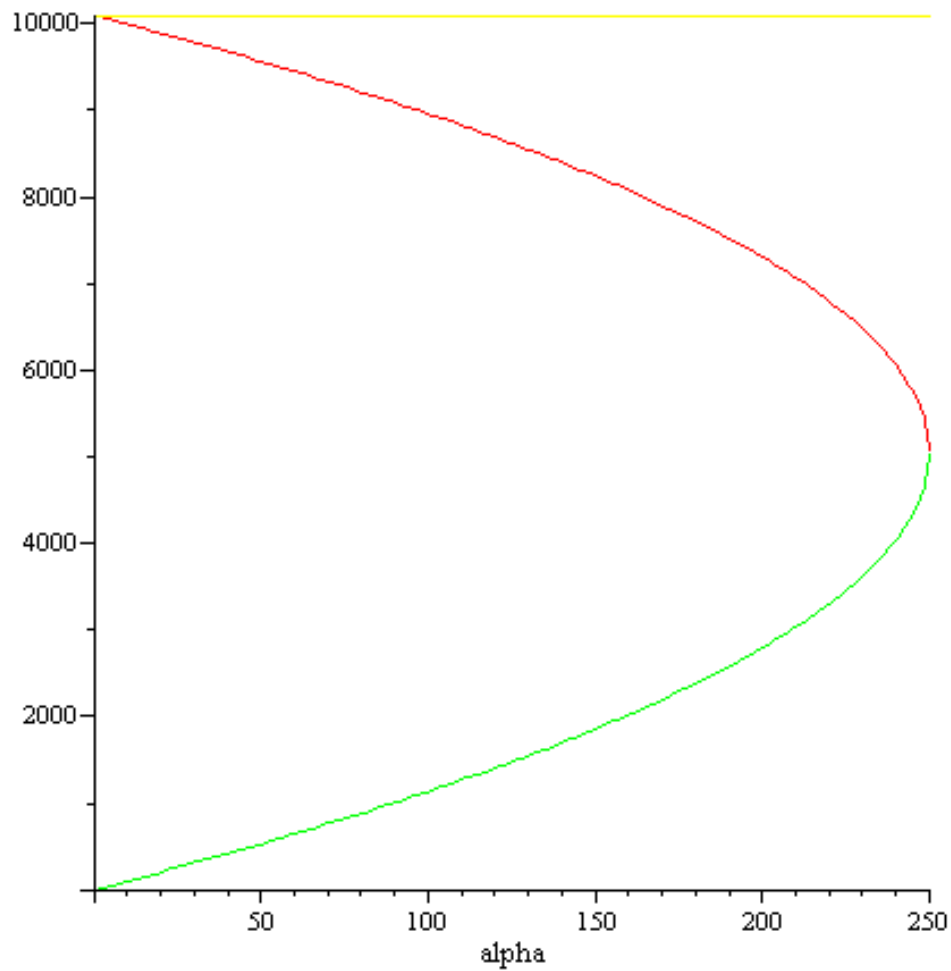
> bet1[alpha]:=subs({J=1000,h=10E-5,kk=1,T=10,tau=0.1,alpha=250},BET3[1]);

$$bet1_{\alpha} := 5057.182450$$

> bet2[alpha]:=subs({J=1000,h=10E-5,kk=1,T=10,tau=0.1,alpha=250},BET3[2]);

$bet2_{\alpha} := 5042.827651$

```
> plot(subs({J=1000,h=10E-5,kk=1,T=10,tau=0.1},{BET2,BET3}),alpha=0..250);
```



$BET2=BET3[1](\alpha=0)$, тому необхідною і достатньою умовою стійкості системи є $\{0 < \alpha < A1, \beta_1 < \beta < \beta_2\}$ - область обмежена параболою і віссю ординат.

>

Чисельне інтегрування системи диф. рівнянь руху корабля з автостерном

```
> restart:
```

```
> with(plots):
```

```
> with(plottools):
```

Warning, the name changecoords has been redefined

Warning, the name arrow has been redefined

```
> J:=1000;h:=10E-5;k:=1;T:=10;tau:=0.1;alpha:=0;beta:=20;
```

```
J:=1000
```

```
h:=0.00010
```

```
k:=1
```

```
T:=10
```

```
tau:=0.1
```

```
alpha:=0
```

```
beta:=20
```

```
> F:=dsolve({diff(phi(t),t)=(Phi)(t),diff(Phi(t),t)=(-h*Phi(t)-k*psi(t))/J,diff(psi(t),t)=(-psi(t)+alpha*xi(t)+beta*(phi(t)-xi(t))/tau)/T,diff(xi(t),t)=(phi(t)-xi(t))/tau,phi(0)=0.5,Phi(0)=0.,psi(0)=0.0,xi(0)=0.},{phi(t),Phi(t),psi(t),xi(t)},numeric,abserr=0.1e-8,output=listprocedure);
```

```
F:=[t=proc(t) ... end proc,phi(t)=proc(t) ... end proc,Phi(t)=
```

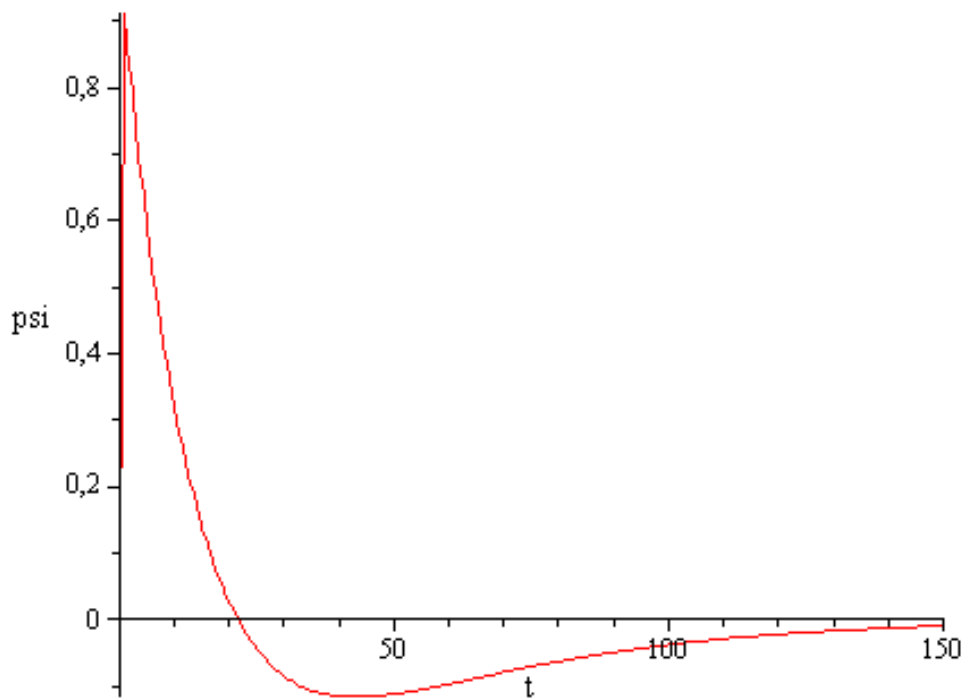
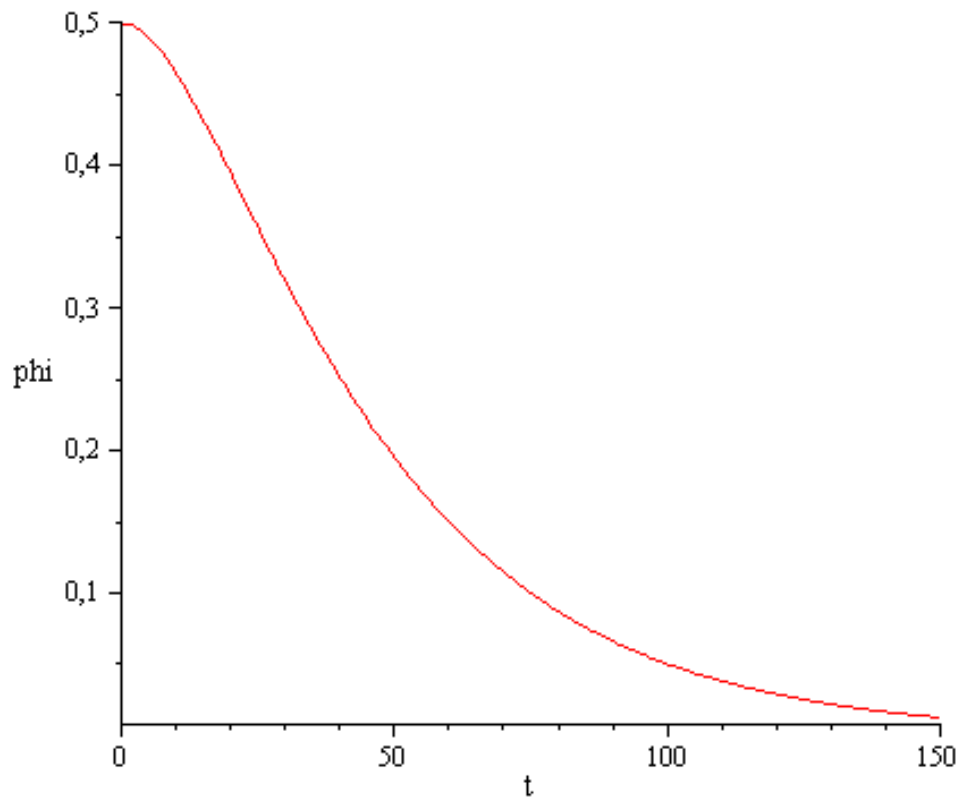
```
proc(t)
```

```
...
```

```
end proc,psi(t)=proc(t) ... end proc,xi(t)=proc(t) ... end proc]
```

```
>
```

```
odeplot(F,[t,phi(t)],0..150,numpoints=150);odeplot(F,[t,psi(t)],0..150,numpoints=150);
```

Курсовий кут та кут стерна як функції часу на основі чисельного інтегрування

>

Анімація коливань корабля

```
> N:=500;
```

```
N:=500
```

```
> line1:=proc(x,z,x1,z1) curve([[x,z],  
[x1,z1]],color=gray,thickness=5)end proc:  
> for i from 1 to N do  
q||i:=display(line1(0,0,10,10*rhs(F[2](1*i)))):end do:  
>  
display([seq(q||i,i=1..N)],insequence=true,scaling=cons  
trained);
```