Розділ 1. Предмет та сутність математичної економіки

Лекція 1. Предмет, задачі та генезис математичної економіки

Мета лекції: визначити предмет та задачі математичної економіки, надати характеристику її становлення як науки.

План

1. Предмет та задачі математичної економіки.
2. Сутність та призначення економіко-математичного моделювання.
3. Розвиток математичної економіки як науки.

Ключові терміни та поняття: математична економіка, модель, економіко-математична модель, детермінована модель, стохастична модель, оптимізаційна модель, адекватність моделі.

1.1 Предмет та задачі математичної економіки

У економіці діють стійкі кількісні закономірності, тому є можливим їх строге математичне описання. *Об'єктом дослідження* математичної економіки є різноманітні економічні системи. *Предмет* математичної економіки – математичні моделі реальних економічних об'єктів. Об'єкт дослідження та предмет математичної економіки визначають *методи наукового дослідження* математичної економіки. Основні її методи – це економіко-математичне моделювання та системний аналіз економіки як складної динамічної системи. Моделювання – це універсальний спосіб вивчення процесів та явищ реального світу. Особливе значення моделювання має при вивченні об'єктів, що повністю чи частково недоступних для прямого спостереження та дослідження. До таких об'єктів відносяться і соціально-економічні явища та процеси. До задач управління економічними системами, в яких ефективно застосовують математичні методи та моделі, відносять задачі аналізу результатів господарської діяльності, прогнозування, планування, проектування виробництва та підготовки управлінських рішень [1].

Модель – це об'єкт, який у дослідженні заміняє оригінал, відтворює найбільш важливі для даного дослідження риси та властивості оригіналу. Математична модель є сукупністю математичних співвідношень, здебільшого рівнянь та нерівностей.

Сучасна економічна теорія на мікро-та на макрорівні включає як природний необхідний елемент математичні моделі економічних процесів та систем. Використання математики у економіці дозволяє виділити та описати найважливіші зв'язки між економічними змінними та об'єктами. Вивчення такого складного об'єкта як економічної системи передбачає високий рівень узагальнення, що досягається шляхом використання математичного апарату. Застосування математичного апарату передбачає чітко сформульовані вихідні дані та співвідношення, з яких можна отримати висновки, адекватні об'єкту дослідження. Використання математичних та статистичних методів дозволяє індуктивним методом отримувати нові знання про об'єкт дослідження, оцінувати форму та параметри залежностей його змінних, що відповідають наявним спостереженням. Використання мови математики дозволяє точно та компактно викладати положення економічної теорії, формулювати її поняття та висновки [2].

Будь-яке економічне дослідження завжди передбачає об'єднання економічної теорії (наявних економічних моделей) та практики (статистичних даних). Дослідники використовують теоретичні економічні моделі для описання та пояснення процесів, що спостерігаються, а також збирають статистичні дані. На їх основі здійснюють емпіричну побудову математичних моделей, що кількісно відображають сутність економічних моделей (гіпотез) та їх обґрунтовують. Для вивчення різних економічних явищ фахівці з економіки використовують їх спрощені формальні описання, тобто економічні моделі. Прикладами економічних моделей є моделі споживчого вибору, моделі фірми, моделі економічного зростання, моделі рівноваги для товарних та фінансових ринків та інші концептуальні моделі економічних процесів, що є основою для побудови їх математичних моделей. У процесі побудови економічної моделі визначають суттєві фактори, що визначають поведінку об'єкта дослідження та відкидають несуттєві елементи для розв'язання поставлених проблем. Формалізація основних особливостей функціонування економічних об'єктів дозволяє оцінити можливі наслідки певного впливу на них та використати ці оцінки в керуванні цими об'єктами.

Математичну економіку можна визначити як розділ економічної науки, що займається аналізом властивостей та розв'язків математичних моделей економічних процесів [2]. У деяких випадках ці моделі розглядаються як частина математичної теорії на стику з економічною наукою. Основу для побудови математичних моделей, які вивчає математична економіка, створює економетрика, що займається статистичною оцінкою та аналізом залежностей між економічними величинами на основі вивчення емпіричних даних. Економетрика досліджує кількісні закономірності та взаємозв'язки у економіці за допомогою методів математичної статистики, зокрема, кореляційно-регресійного аналізу.

У математичній економіці досліджуються теоретичні моделі, що ґрунтуються на певних формальних передумовах (лінійність, опуклість, монотонність, конкретні форми взаємозв'язку тощо). Математична економіка не займається вивченням рівня обґрунтованості вигляду певної залежності, це завдання економетрики [1]. Задачею математичної економіки є вивчення питання про існування розв'язку математичної моделі, умови його невід'ємності, стаціонарності, наявності інших властивостей. Це, звичайно, здійснюється, як і у математиці, шляхом дедуктивного отримання наслідків у вигляді теорем з апріорно зроблених передумов (аксіом).

Методологія та апарат сучасної економічної науки не вичерпуються підходами математичної економіки та економетрики, звичайно в економічних дослідженнях використовуються також методи якісного аналізу, індуктивні евристичні підходи, що поєднуються з методами математичної економіки та економетрики. Таким чином, математична економіка є одночасно і самостійним розділом економічної науки, і її інструментом. При цьому розділи математичної економіки, все в більшою мірою становляться теоретичною основою для прикладних досліджень.

1.2 Сутність та призначення економіко-математичного моделювання

Економіко-математична модель – це математичний опис економічного об'єкту чи процесу з метою дослідження та керування [2]. У співвідношеннях, що утворюють математичну модель, зокрема економіко-математичну модель, розрізняють два типи змінних: екзогенні та ендогенні. *Екзогенні змінні* визначаються поза моделлю, а *ендогенні змінні* визначають у ході розрахунків за моделлю [1]. Математичні моделі різних об'єктів можуть мати однакову математичну структуру, але різні змістовні інтерпретації, тобто одну й ту ж математичну модель можна використати для дослідження різних об'єктів.

Поряд з експериментом, математичне моделювання є основним способом дослідження. Активне застосування математичного моделювання у математичній економіці обумовлене наступними причинами [2]:

- неможливість здійснення експериментів у більшості випадках;
- значні витрати на проведення експериментів;
- ускладнення типів задач, що розв'язуються у ході досліджень;
- скорочення термінів дослідження та отримання результатів;
- можливість багаторазового повторення дослідження на математичній моделі.

З точки зору зміни стану системи у часі розрізняють динамічні та статичні моделі. У *статичних моделях* розглядають стан системи у конкретний момент часу і змінні характеристики моделі не залежать від часу. В *динамічних моделях* вони є функціями часу.

З точки зору врахування випадкових факторів розрізняють детерміновані та стохастичні моделі. *Детерміновані моделі* передбачають наявність жорстких функціональних зв'язків між змінними моделі. *Стохастичні моделі* допускають наявність дії випадкових факторів на систему – об'єкт дослідження. Вони використовують для моделювання системи апарат теорії ймовірностей, математичної статистики, теорії випадкових процесів. За виглядом співвідношень між змінними розрізняють *лінійні* та *нелінійні* моделі.

Оптимізаційні моделі передбачають побудову цільової функції, що відображає результати функціонування системи та подальше дослідження її на екстремум з врахуванням обмежень на систему.

За методами аналізу моделі розрізняють моделі, що досліджуються аналітично та чисельно. Результатом аналітичного дослідження є отримання формул, що задають шукані величини у явному вигляді, тут можуть бути також отримані висновки про стійкість розв'язку, наявність у нього особливих точок, його асимптотику тощо. У більшості реальних випадків математичну модель неможливо звести до вигляду, для якого можливо отримати аналітичний розв'язок за умови збереження адекватності моделі. Тому для дослідження моделі використовують чисельні методи. Проблемами при використанні чисельного аналізу можуть бути некоректність або нестійкість побудованої математичної моделі. У некоректно поставленої задачі відсутній єдиний розв'язок (його немає або розв'язків декілька). Нестійкість моделі означає, що малі похибки у визначенні її вихідних даних спричиняють великі відхилення у отриманих результатах. У таких випадках застосування чисельних методів здебільшого не має сенсу.

До основних властивостей математичних моделей відносять їх скінченність, спрощеність, наближеність, повноту, адекватність та істинність [3].

Скінченність моделі означає, що вона відображає лише деякі з характеристик, притаманних оригіналу. Вона обумовлена обмеженістю часу, потрібного для розробки та аналізу моделі.

Спрощеність моделі означає, що при її побудові були відкинуті характеристики оригіналу, несуттєві для дослідника.

Наближеність означає, що модель лише наближено відображає характеристики системи та співвідношення у ній. Типовими прикладами наближень, що використовуються при математичному моделюванні, є заміна дискретних систем неперервними та навпаки, заміна нелінійних залежностей лінійними, установлення обмежень на точність обчислення результатів тощо. З скінченності та наближеності моделі випливає, що вона відображає оригінал неповно. Ступінь *повноти моделі* залежить від мети та задач моделювання.

Адекватність моделі характеризує можливість реалізації мети моделювання, а її і*стинність* відображає відповідність моделі існуючим знанням про об'єкт моделювання. Критеріями адекватності є відображення всіх суттєвих властивостей об'єкта дослідження, вірне відображення існуючих взаємозв'язків між окремими елементами складної системи. При кількісному дослідженні показником адекватності моделі є величина відхилення результатів моделювання від існуючих емпіричних даних. Істинність моделі не є гарантією її адекватності. Це може бути обумовлено накопиченням обчислювальних похибок при розрахунках по моделі. З іншого боку, адекватними можуть бути моделі, що не є істинними. Прикладом є регресійні моделі для прогнозування поведінки системи, що досліджується, у деякому діапазоні зміни вхідних параметрів, не відображаючи при цьому відомі дані щодо структури системи та взаємозв'язків між її елементами.

1.3 Розвиток математичної економіки як науки

Математичне моделювання як кількісний метод дослідження економіки має давню історію. Становлення та розвиток математики та економіки як наук на протязі багатьох століть відбувалось за власними законами, але одночасно дотикались між собою. Вже у часи античності з розвитком товарно-грошових відносин з'являються кількісні величини як міри якості. Застосування арифметики у вирішенні питань товарно-грошових відносин розглядались у трактатах Арістотеля, Ксенофонта та інших давньогрецьких вчених. Систематизація та обробка кількісних результатів господарських досліджень привела до створення статистики та статистичних методів обробки кількісної інформації, що й зараз відіграє важливу роль у математичній економіці. Практично до 18-го століття основою математичного апарату в економічних дослідженнях були арифметика та статистика [1]. На цьому етапі розвитку математичної економіки варто виділити дослідження відомого англійського економіста У. Петті. Він обґрунтував застосування основні принципи статистики в економічних дослідженнях. Історично першою математичною моделлю національної економіки створена у 18-му столітті французьким економістом Ф. Кене, яка отримала назву «Економічна таблиця Кене», у якій містились початкові ідеї економічної динаміки. Крім того, праці Ф. Кене містили початки сучасної теорії ринку, модель мультиплікатора тощо. Він спробував виявив тенденції у розвитку економіки Франції.

Подальші успіхи застосування математичних методів у економіці пов'язані зі створенням та розвитку математичного аналізу, зокрема, диференціального числення. Математизація економіки була закономірним та природним процесом, оскільки у науках, де сформувалися стабільні поняття, актуальне завдання є установлення зв'язку між ними. У економіці це можливе за допомогою вивчення кількісного виразу такого зв'язку, у зв'язку з цим виникає необхідність застосування математичного апарату. Математичне моделювання – це дійовий інструмент, що дозволяє не лише пояснювати, а й прогнозувати поведінку об'єкту дослідження.

На ранньому етапі розвитку математичної економіки у 18-19 століттях основним математичним апаратом було диференціальне та інтегральне числення [4]. Використання похідної дозволило ввести в економічні дослідження поняття еластичності. У сфері математичної економіки тут відзначити роботи Бернуллі, Лапласа, Курно, Паскаля, Вальраса. Швейцарський економіст Л. Вальрас побудував узагальнену тематичну модель економіки країни. Граничні економічні теорії – граничної корисності, граничної дохідності, граничної продуктивної праці запропонували У. С. Джевонс, К. Д. Бейтс. Видатний економіст Д. М. Кейнс створив модель загальної економічної рівноваги, модель грошового обігу, модель інфляції [4].

У 20-му столітті для розв'язання економічних задач математичними методами, зокрема, задач оптимізації, створена математична дисципліна – дослідження операцій та теорія ігор. Тут слід відзначити праці Д. Данціга, Л. Канторовича, В. Леонтьєва, В. Парето, А. Вальда та інших дослідників. У роботах фахівців зі статистики Р. Фішера та Р. Фріша створено фундамент важливого засобу моделювання причинно-наслідкових зв'язків у економіці – економетрики [2]. Економетрика дозволяє встановити зв'язки у кількісній формі між економічними явищами, окремими елементами економічних систем. Подальший розвиток економетрики як методу пізнання у економічних дослідженнях ґрунтується на сучасних методах теорії ймовірностей та математичної статистики, зокрема, кластерному аналізу, стохастичних диференціальних рівнянь.

На нинішньому етапі розвитку математичну економіку розглядають як математичну теорію економіки. Аксіоми – з економіки, решта – математика. Математичне моделювання економіки – це створення математичних моделей економічних систем та їх аналіз. Прикладами сучасних математичних моделей економіки є моделі виробничих процесів, моделі співробітництва та конкуренції, моделі ринку, глобальні моделі міжгалузевих балансів, моделі Солоу, Неймана та багато інших математичних моделей, отриманих з використанні сучасних математичних підходів: теорему про нерухому точку, багатозначні відображення, теорію графів, фрактальні структури тощо [4].

Незважаючи на великий часовий період розвитку математичної економіки проблема побудови економіко-математичних моделей складних економічних систем є далекою від остаточного вирішеного, існують різні моделі одного й того ж економічного об'єкту, використання яких приводить до отримання суперечливих результатів. Математична модель економічного об'єкту є ефективною для застосування на практиці, якщо вона спирається на адекватну реальності змістову модель чи концепцію. У сучасній економічній науці існує багато різних напрямків, всі вони в певній мірі використовують кількісні співвідношення між досліджуваними величинами, тому всі вони використовують математичне моделювання. Математик, що займається моделюванням економічних об'єктів чи процесів, повинен мати чітку уяву про предмет моделювання та орієнтуватися у різноманітних сучасних наукових підходах та концепціях у економіці. У цьому він зможе побудувати модель, що є змістовною та актуальною з точки зору практики економічної діяльності.

Розділ 2. Системний підхід у математичній економіці

Лекція 2. Системний підхід до моделювання економічних об'єктів та процесів

Мета лекції: надати студентам знання про сутність системного підходу у економіко-математичному моделюванні.

План

1. Системний підхід при моделюванні економічних об’єктів.
2. Сутність математичного моделювання економічних систем.
3. Поняття динамічної економічної системи.

Ключові терміни та поняття: системний підхід, принципи системного підходу, підсистема, емереджентність, синергія, соціально-економічна система.

2.1 Системний підхід при моделюванні економічних об’єктів

Системний підхід – це методологія дослідження об’єкта та побудови його математичної моделі, коли об’єкт розглядається як цілісний комплекс взаємопов’язаних компонентів, що має єдність з зовнішнім середовищем, що є підсистемою вищого порядку по відношенню до об’єкту моделювання [5]. Єдність економічної системи з її зовнішнім середовищем визначається дією об’єктивних економічних законів.

При моделюванні об’єктів та подання їх у вигляді системи необхідно враховувати наступні властивостей систем:

1) цілісність – стійкі відношення між елементами системи, коли стан любого її елементу залежить від стану систему і навпаки;

2) подільність – систему як цілісний об’єкт можна зобразити поділеним на окремі елементи;

3) ізольованість – комплекс об’єктів, що утворюють систему та зв’язки між ними можна виділити з їх оточення і розглядати ізольовано (ізольованість системи є відносною, оскільки відкрита система пов’язана з середовищем через деякі елементи, що є входами та виходами);

4) стійкість – система повинна нормально функціонувати за наявності зовнішніх впливів;

5) різноманіття – кожний елемент системи має власну поведінку та стан, відмінний від поведінки та стану інших елементів та системи як цілісності;

6) ідентифікованість – кожен елемент системи можна відрізнити від інших її складових;

7) стабілізація – система може здійснювати відновлення своїх елементів;

8) спостережність – всі входи та виходи можна спостерігати дослідниками;

9) адаптивність – система зберігає стан рухомої рівноваги зі своїм зовнішнім середовищем та стійкість до зовнішніх збурень.

Системний підхід до моделювання економічних об’єктів ґрунтується на принципах інтегратизму, невизначеності, інваріантності та принцип головних видів діяльності. Принцип інтегратизму полягає в тому, що взаємовідносини частини та цілого характеризуються трьома елементами: 1) виникнення взаємодії та зв’язків між елементами системи як частинами цілого; 2) втратою деяких властивостей частини при входження до складу цілого; 3) появі нових властивостей у цілого, обумовлених властивостей окремих складових частин. При цьому обов’язковою є впорядкованість частин системи, детермінованість їх просторових та функціональних взаємовідношень, коли частина становиться компонентом інтегрального цілого [4].

Принцип невизначеності полягає, що на початку та в кінці економічні процеси є значною мірю невизначеними. У часі вони постійно змінюються, тому, якщо вдалось з’ясувати деяку властивість процесу, то вона є істинною лише у цей момент часу і у даній ситуації. Економічні процеси потрібно розглядати з врахуванні дії випадкових факторів. Принцип невизначеності стверджує, що існує рівень факторів, коли їх малі відхилення ведуть до зміни стану системи. Чим складніша модель системи, тим більш невизначеними є результати, отримані внаслідок її дослідження.

Принцип інваріантності полягає у тому, що модель системи повинна бути інваріантною для любих організаційних форм її діяльності і їх зміна не повинна змінити сутність моделі. Принцип головних видів діяльності полягає, що у різних систем існують стандартні однотипні види діяльності.

При побудові економіко-математичної моделі потрібно враховувати такі особливості моделювання економічних систем: зростання кількості міждисциплінарних проблем, комплексність проблем та необхідність їх вирішення з врахуванням єдності економічних, соціальних, психологічних та технічних аспектів, ускладнення економічних об’єктів, зростанням кількості зв’язків між елементами у системі, динамічність економічних процесів, можливості застосування сучасних інформаційних технологій.

2.2 Сутність математичного моделювання економічних систем

Система – це сукупність взаємопов’язаних елементів, що спільно діє для досягнення певних цілей. Підсистемою називають підмножину елементів системи, що діють для досягнення певних цілей, узгоджених з цілями системи. Надсистема – це зовнішнє середовище, у якому функціонує система. Основною метою економіки є забезпечення суспільства предметами споживання, у тому числі й ті, що створюють умови для безпеки суспільства. Економіка складається з елементів – одиниць господарювання (підприємств, домашніх господарств). Надсистемою національної економіки є природа, світова економіка та суспільство, її основні підсистеми – виробнича, фінансово-кредитна та сфера обміну [3].

Економіка як об’єкт моделювання має наступні дві основні особливості. По-перше, при моделювання економіки неможливо використовувати моделі подібності, тобто побудувати її зменшені копії і над ними проводити дослідження. По-друге, у економіці значною мірою обмежені можливості локальних економічних експериментів, оскільки всі її частини взаємопов’язані, тому експеримент над однією у «чистому» вигляді неможливий. Прямі експерименти з економікою мають як позитивний, так і негативний аспект. Позитивний аспект полягає в тому, тут зразу помітні короткотермінові результати економічної політики, що здійснюється. Негативна сторона експериментів над економікою полягає у тому, що неможливо передбачити середньо-та довготермінові наслідки рішень, що прийняті у порядку експерименту.

Реальні економічні об'єкти є досить складними, тому для їх вивчення створюють їх моделі. Моделі повинні бути доступними для вивчення, тому вони не повинні дуже складними, тобто вони спрощують реальний об'єкт. При цьому вони повинні відображати найважливіші для дослідження риси реального об'єкта.

Прогнозувати результати можливо з використанні моделі. Спочатку будується концептуальна модель розвитку економічної системи чи її підсистеми, що ґрунтується на аналізі минулого досвіду. У свою чергу, концептуальні економічні моделі складають фундамент для побудови математичних моделей. Розробка математичних моделей, що адекватно відображають реальність, є досить складним завданням. Проте використання математичних моделей надає можливості прийняття обґрунтованих рішень відносно об'єкта моделювання і досить точно прогнозувати їх наслідки.

Розглянемо структуру економіки як об'єкта математичного моделювання. При виконанні своєї основної функції економічна система виконує наступні дії: розміщує ресурси, виробляє продукцію та надає послуги, розподіляє предмети споживання та здійснює накопичення. Вона використовує трудові та природні ресурси, у ній здійснюється виробництво товарів та надання послуг, які у сукупності утворюють валовий внутрішній продукт, потім здійснюється його розподіл та споживання.

Економічна система, в свою чергу, є підсистемою людського суспільства. Вона є складною системою, що складається з виробничих та невиробничих одиниць, що знаходяться між собою у виробничо-технологічних та організаційно-господарських зв'язках. По відношенню до економічної системи кожний член суспільства виступає у двох ролях: з одного боку, він є працівник, з іншого, – споживач.

У виробничому процесі, крім природних та трудових ресурсів, задіяні засоби виробництва [5]. Засоби виробництва поділяють на засоби праці та предмети праці. Засоби праці беруть участь у кількох виробничих циклах до їх заміни внаслідок їхнього фізичного чи морального зносу. Предмети праці (сировина, матеріали) беруть участь у одному виробничому циклі. Накопичені засоби виробництва складають виробничі фонди. Вони складаються з основних виробничих фондів (накоплених засобів виробництва) та основних оборотних фондів (накоплених предметів праці).

Основні виробничі фонди на протязі довгого періоду часу обслуговують виробничий процес, зберігаючи при цьому свою натуральну форму і частково в процесі зносу приймають участь у створенні вартості виробленого продукту. Відновлення основних виробничих фондів здійснюється за рахунок амортизаційних відрахувань, збільшення основних виробничих фондів – за рахунок капітальних вкладень у вигляді інвестицій. Оборотні фонди складаються з предметів праці, що знаходяться у виробництві. Сюди відносяться предмети праці, що входять у незавершену продукцію та виробничі запаси.

Внаслідок діяльності національної економіки за рік всі галузі матеріального виробництва створюють валовий внутрішній продукт (ВВП). У натурально-речовій формі ВВП розпадається на засоби праці та предмети споживання, у вартісній формі – на амортизаційний фонд (фонд заміщення вибуття основних фондів) та нову створену вартість (національний доход) [4].

У процесі створення ВВП виробнича підсистема економіки виробляє та знову споживає проміжний продукт, тобто предмети праці, використання для поточного виробничого споживання, їх вартість повністю переходить у вартість предметів праці чи предметів споживання, що входять у ВВП. У якості розрахункового допоміжного показника часто застосують валове виробництво, що є сумарною вартістю ВВП та проміжного продукту [5].

Задачею виробничої підсистеми національної економіки є перетворення предметів праці у товари. Основна функція фінансово-кредитної підсистеми є регулювання фінансових потоків, щоб забезпечити стабільний та справедливий обмін товарів та послугами між елементами економічної системи.

Основою економічної системи є виробничі господарські одиниці (виробничі підприємства), що мають господарську самостійність. Кожна така виробнича одиниця має засоби праці, які дозволяють здійснювати один чи кілька виробничих процесів. У курсі математичної економіки об’єктом моделювання є як економіка в цілому, так і її окремі господарські одиниці.

2.3 Поняття динамічної економічної системи

Під *системою* розуміють сукупність взаємопов’язаних елементів. Соціально-економічні системи спрямовані на досягнення певної мети. Підсистема – це частина системи, що реалізує певну мету, узгоджену з метою системи. Надсистема – це зовнішнє середовище, у якому функціонує система. Будь-яка система має властивості *емереджентності*, тобто наявні системні властивості, що не притаманні їх складовим елементам [4]. *Економічна система* – це сукупність господарських одиниць (галузей, підприємств чи підрозділів підприємства), що знаходяться у виробничо-технологічних та організаційно-господарських зв’язках. Будь-яка система, що спрямована на досягнення певної мети, складається з органу керування та об’єкту керування [6].

У своїй діяльності системи та їх елементи перетворюють входи на виходи. Для економічними системами входи є ресурси, а виходи – результати їх діяльність, наприклад, товар чи послуги. Елементи, з яких складаються системи, можуть бути статичними чи динамічними. Відповідно розрізняють статичні та динамічні моделі економічних систем та їх елементів. Статична модель система передбачає миттєве перетворення входу x у вихід $F(x)$.

Статична модель систему розглядає як «чорну скриню», внутрішня структура якої у дослідженні не враховується, а предметом дослідження є перетворення входів у виходи. Для такої моделі час t однаковий для входу та виходу. Розглянуті у розділі 1 макроекономічні виробничі функції є прикладами статичних моделей виробничих систем. Динамічна модель системи чи її елемента характеризується тим, що вихід системи у момент часу t залежить не лише від значень входів у нинішній момент часу t, але й від значень входів та виходів у попередні моменти часу. У динамічній системі та відповідній моделі причина переходить у наслідок не миттєво, а з деяким запізненням. Модель є динамічною, якщо у її складі є змінні, що залежать від часу, тобто змінюються з часом.

Розрізняють динамічні економічні моделі з дискретним та неперервним часом [4]. У багатьох секторах економіки господарський цикл триває рік, тому підсумки господарської діяльності підбивають за рік, тобто змінна часу розглядається як дискретна величина, що змінюється з кроком у рік. Крок зміни часу може бути і іншим проміжком часу (місяць, квартал, тощо). Динамічні моделі з дискретним часом подають звичайно у вигляді скінченно-різницевих рівнянь, наприклад, $Y_{t+1} = Y_{t-1} + 2Y_t$, де Y_t – значення економічного показника Y в момент часу t [2]. При дослідженнях багатьох економічних процесів, наприклад, короткотермінових перехідних процесів доцільно розглядати економічні показники як функції неперервного аргументу часу. Для побудови та дослідження динамічних моделей з неперервним часом використовують апарат диференціальних рівнянь.

Розділ 3. Статистична модель міжгалузевого балансу

Лекція 10. Статична модель Леонтьєва та її побудова

Мета лекції: з’ясувати сутність, призначення та метод побудови статичної міжгалузевої моделі балансу.

План

1. Сутність та призначення міжгалузевих моделей.
2. Побудова статичної моделі міжгалузевого балансу.
3. Статична модель галузевого балансу у натуральному виразі.
4. Існування мультиплікатора Леонтьєва. Продуктивні матриці.
5. Тотожність міжгалузевого балансу

Ключові терміни та поняття: модель Леонтьєва, балансові моделі, технологічна матриця, мультиплікатор Леонтьєва, продуктивність матриці.

10.1. Сутність та призначення міжгалузевих моделей

Економіко-математичні моделі призначаються для отримання якісної та кількісної інформації про об’єкти дослідження з метою раціонального керування цими економічними об’єктами. Одним з найбільш важливих таких об’єктів є виробничий сектор економіки країни, що діє у складній системі міжгалузевих взаємозв’язків [2].

Міжгалузеві моделі характеризують взаємозв'язки між галузями економіки. Міжгалузеві моделі, вперше розроблені видатним американським економістом лауреатом Нобелевської премії В.В. Леонтьєвим, призначені для отримання інформації та аналізу діяльності виробничого сектору економіки країни з метою забезпечення обґрунтованого планування міжгалузевих постачань продукції згідно з плановими чи прогнозованими обсягами кінцевого попиту на продукцію. Міжгалузеві моделі можуть бути застосовані не лише до економіки країни, але й на рівні світової чи регіональної економіки, або навіть на рівні окремої компанії.

У економічній практиці міжгалузеві моделі використовують у економічній практиці більше 80 країн світу [5]. Їх застосування дозволяє раціонально керувати виробничими секторами національних економік. За типами використаного математичного апарату міжгалузеві моделі є лінійними детерміновими моделями.

У міжгалузевих моделях вважається, що виробничий сектор економіки поділений на деяку кількість n галузей. У одну галузь при цьому об'єднуються всі виробничі процеси одного продукту, так, що кожна галузь виробляє один продукт. Зі зростанням кількості галузей, на які поділений виробничий сектор національної економіки, тим більше адекватно міжгалузева модель відображає весь виробничий сектор. Найчастіше на практиці використовують міжгалузеві моделі, де виділені від 500 до 600 галузей, у Японії – 2000 галузей у міжгалузевій моделі.

10.2 Побудова статичної моделі міжгалузевого балансу

Нехай виробничий сектор поділений на n галузей. Перенумеруємо ці галузі. Виробничий сектор працює для задоволення потреб населення у товарах та послугах. Нехай на протязі планового періоду у економіці, за винятком її виробничого сектору, потрібно y_1 продукції 1-ої галузі,…, y_n – n-ої галузі. Потреби у продукції галузей економіки подано у вигляді вектору $\bar{y} = = (y_1,\ y_2, \dots, y_n)^T$. Цей називають вектором кінцевого попиту. Кінцевий попит спрямований на невиробниче споживання та інвестиції. Нехай кінцевий попит відомий. При планування виробничої діяльності виникають два завдання. Перше з них – це визначення обсягів валового виробництва продукції галузей за плановий період, які представимо у вигляді вектору $\bar{x}$=$(x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, де x_i – валовий обсяг виробництва у i-ій галузі, щоб забезпечити кінцевий попит та функціонування самого виробничого сектору. Друге завдання – це визначення розподілу по галузям виробничого сектору валового обсягу виробництва продукції, щоб забезпечити діяльність виробничого сектору. Цей розподіл представимо у вигляді вектору $\bar{x}^p = \left(x_1^p, x_2^p, \dots, x_n^p\right)^T$. Тут x_i^p – величина валового виробництва продукції i-ої галузі, що повинно спрямувати на забезпечення виробництва всього виробничого сектору економіки. Вектор $\bar{x}^p$ називають вектором проміжного попиту (вектором проміжної продукції). Вирішити ці завдання дозволяє статична модель міжгалузевого балансу (СММБ).

Нехай x_i – валове виробництво продукції у i-й галузі у вартісному виразі, x_i^p – проміжна продукція i-ї галузі у вартісному виразі, що використовується всіма галузям у виробничому процесі. Розв'язати перше завдання – це значить отримати співвідношення, з допомогою якого для відомого кінцевого попиту можна визначити необхідні значення обсяги валового виробництва у кожній галузі [2]:

$$
\begin{aligned}
&x_1 = f_1(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&x_i = f_i(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&x_n = f_n(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)
\end{aligned} \tag{10.1}
$$

Розв'язати друге завдання полягає у отриманні формул, що дозволяють валовий обсяг виробництва розподілити за галузями виробництва (тут вважається, що величини x_i, вичислені за формулами (10.1).

Розглянемо валове виробництво x_i у i-й галузі. Тоді проміжна продукції цієї галузі x_i^p визначається рівностями

$$x_i^p = x_i - y_{i,}\ i = 1,2,..,n. \tag{10.2}$$

Нехай x_{ij} – частина величини x_i^p, необхідна для забезпечення виробництва x_j продукції j-ії галузі, $j = 1,2,\ldots.,n$. При цьому виконуються рівності:

$$x_i^p = \sum_{j=0}^{n} x_{ij}, i = 1,2,\ldots,n. \tag{10.3}$$

Величина x_{ij} залежить від величини x_j, зі зростанням x_j зростає і величина x_{ij}. Тобто має місце залежність $x_{ij} = \varphi_i(x_j)$. Зі спостережень отримали, що тут має місце лінійна залежність:

$$x_{ij} = a_{ij}x_j + b_{ij}. \tag{10.4}$$

Визначимо коефіцієнти цієї лінійної залежності. Оскільки при $x_j = 0$, маємо, що значення $x_{ij} = 0$, то коефіцієнт $b_{ij} = 0$. Отже, вираз (5.4) набуває вигляду:

$$x_{ij} = \varphi_{ij}(x_{ij}) = a_{ij}x_j, i = 1,2,\ldots,n; j = 1,2,\ldots,n. \tag{10.5}$$

Коефіцієнти a_{ij} у рівностях (10.5) називають *технологічними коефіцієнтами* або *коефіцієнтами прямих матеріальних витрат*. Величина a_{ij} дорівнює кількості продукції у вартісному виразі продукції i-ії галузі, необхідної для виробництва продукції вартістю 1 г.о. j-ї галузі у технологічному циклі j-ої галузі. Квадратну матрицю $A(n \times n)$, складену з технологічних коефіцієнтів a_{ij}, називають *технологічною матрицею*. Значення цих коефіцієнтів визначаються технологією виробництва, що використовуються.

Підставивши (10.5) у (10.3) отримаємо:

$$x_i^p = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j,\ i = 1,2,\ldots,n. \tag{10.6}$$

З врахуванням (5.6) з (5.2) отримаємо:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + y_i = x_i, i = 1,2,\ldots,n. \tag{10.7}$$

Рівність (10.7) є математичною формою записи СММБ або моделі «витрати-випуск», розробленої В.В. Леонтьєвим [2]. Вона є системою лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомих $x_i, i = 1,2, \dots, n$. Цю модель можна записати у векторній формі з використанням технологічної матриці A:

$$A \cdot \bar{x} + \bar{y} = \bar{x}. \tag{10.8}$$

Рівність (10.8) називають *структурною формою* запису СММБ [2]. Можна отримати іншу форму СММБ – *приведену форму*. Рівність (10.8) можна записати у вигляді:

$$\bar{y}=(E - A) \cdot \bar{x}. \tag{10.9}$$

У (10.9) E – одинична матриця розміром $n \times n$. Помножимо обидві частини цього рівняння на матрицю, обернену до $(E - A)$. Отримаємо:

$$\bar{x} = (E - A)^{-1} \cdot \bar{y}. \tag{10.10}$$

Позначимо $(E - A)^{-1} = B$. Тоді отримаємо $\bar{x} = B\bar{y}$ – *приведену форму* СММБ. У скалярній формі ця рівність має вигляд:

$$x_i = f_i(y_1, y_2, \dots, y_n) = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} y_j \,, i = 1,2, \dots, n. \tag{10.11}$$

Приведена форма СММБ дозволяє за екзогенними змінними (заданими поза моделі) $\bar{y}$ визначити ендогенні змінні (такі, що обчислюються у моделі) змінні $\bar{x}$. Отже, формули (10.10) та (10.11) надають розв'язання задачі про необхідні обсяги валового виробництва кожної галузі. Знаючи величини $x_i, i = 1,2, \dots, n$, за формулами (10.5), можна розв'язувати друге поставлене завдання, тобто розрахувати величини міжгалузевих постачань проміжної продукції – тобто $x_{ij}, i = 1,2, \dots, n; j = 1,2, \dots, n$. Ці величини утворюють матриці X з компонентами x_{ij}. Її називають *матрицею міжгалузевих постачань.*

Для розрахунку вектору $\bar{x}$ та матриці X потрібно знати компоненти технологічної матриці a_{ij} (технологічні коефіцієнти). За означенням, ці коефіцієнти є невід'ємними. Оскільки використання власної продукції на виробничі потреби цієї ж галузі не перевищують валовий випуск продукції у галузі, тому виконується нерівність $x_{ii} < a_{ii} x_i < x_i$, тому $a_{ii} < 1$.

Має місце глобальна властивість, що відноситься до всіх технологічних коефіцієнтів: $\alpha_j = \max\limits_{1 \le i \le n} a_{ij} > 0, j = 1,2, \dots, n$. Вона означає, що не існує галузь, яка при виробництві своєї продукції нічого не споживає, тобто у технологічній матриці немає нульових стовпчиків. Коефіцієнти технологічної матриці є безрозмірними величинами.

Коефіцієнти b_{ij} матриці B називають *коефіцієнтами повних матеріальних витрат.* Розглянемо економічний зміст цих коефіцієнтів. Для фіксованого номеру j візьмемо наступні значення кінцевого попиту: $y_i = 0, i \neq j;\ y_j = 1$. Тоді з (10.11) отримуємо, що $x_i = b_{ij}$. З цього випливає, що коефіцієнт b_{ij} – це кількість валової продукції (у вартісному виразі) галузі i, необхідної для виробництва кінцевої продукції у вартісному виразі галузі j. Дійсно, оскільки кінцевий попит $y_j = 1$ на одиницю продукції галузі j при нульовому кінцевому попиту на продукцію інших галузей забезпечується галузевими виробництвами $x_1 = b_{1j}, \dots, x_n = b_{nj}$ всіх галузей виробничого сектора. Матрицю B називають матрицею коефіцієнтів повних матеріальних витрат або *мультиплікатором*

Леонтьєва. Коефіцієнти b_{jj} не менші за 1, оскільки $x_j = b_{jj} = x_j^p + 1$, а значення проміжної продукції x_j^p є невід'ємними.

10.3 Статична модель галузевого балансу у натуральному виразі

Розглянемо структурну форму СММБ (10.8). Тут вектори $\bar{y}$ та $\bar{x}$ мають вартісний вираз. Тому цю модель називають СММБ у вартісному виразу. Від неї можна перейти до моделі у натуральному виразі, де вектори кінцевого попиту та валового виробництва задані у натуральних показниках [1]. Такий перехід здійснюється, залучивши до моделі ціни. Нехай x_i^* та y_i^* – це відповідно значення валової та кінцевої продукції i-ої галузі у натуральному виразі. Далі індекс * означає, що відповідна величина задана у натуральному виразі. Зв'язок між величинами x_i, y_i та x_i^*, y_i^* виражається рівностями:

$$x_i = p_i \cdot x_i^*, y_i = p_i \cdot y_i^*. \quad (10.12)$$

У (10.12) p_i – ціна одиниці продукції i-ої галузі. З цін p_i сформуємо діагональну матрицю P, де на головній діагоналі значення цін $p_{ii} = p_{i,}\ i = 1, \dots, n$. Тоді вектори валового виробництва та кінцевого попиту можна подати у вигляді:

$$\bar{x} = P \cdot \bar{x}^*, \bar{y} = P \cdot \bar{y}^*. \quad (10.13)$$

Підставивши ці вирази у рівність (10.8), отримаємо:

$$A \cdot \bar{x} + \bar{y} = \bar{x} \rightarrow A \cdot P \cdot \bar{x}^* + P \cdot \bar{y}^* = P \cdot \bar{x}^* . \quad (10.14)$$

Помноживши обидві частини отриманої рівності на обернену матрицю P, отримаємо СММБ у натуральному виразі:

$$A^* \bar{x}^* + \bar{y}^* = \bar{x}^*. \quad (10.15)$$

У (10.15) матриця $A^* = P^{-1}AP = \left(a_{ij}^*\right)$ – матриця технологічних коефіцієнтів у натуральному виразі. Елементи a_{ij}^* цієї матриці пов'язані з елементом a_{ij} наступною рівністю:

$$a_{ij}^* = \frac{p_j \cdot a_{ij}}{p_i}, i - 1, \dots, n; j = 1, \dots, n. \quad (10.16)$$

За своїм змістом та властивостями модель (10.16) не відрізняється від моделі (10.8). Наприклад, можна отримати приведену СММБ у натуральному виразі:

$$\bar{x}^* = B^* \cdot \bar{y}^*, B^* = (E - A^*)^{-1}. \quad (10.17)$$

Матриця B^* – матриця коефіцієнтів повних матеріальних витрат у натуральному виразі. Зв'язок між матрицями B^* та B задається рівністю:

$$B^* = P^{-1} \cdot B \cdot P. \quad (10.18)$$

Перехід від моделі у натуральному виразі до моделі у вартісному виразі здійснюються за формулами:

$$\bar{x}^* = P^{-1}\bar{x}, \bar{y}^* = P^{-1}\bar{y}, A = P \cdot A^* \cdot P^{-1}, B = P \cdot B^* \cdot P^{-1}. \quad (10.19)$$

Звичайно, у плануванні використовують моделі і у натуральному, і у вартісному виразі.

10.4. Існування мультиплікатора Леонтьєва. Продуктивні матриці

Розглянемо математичне обґрунтування існування мультиплікатора Леонтьєва [1], тобто матриці $B = (E - A)^{-1}$. Навіть існування цієї матриці ще не гарантує того, що її коефіцієнти задовольняють умовам

$$b_{ij} \geq 0, b_{jj} \geq 1, i = 1, \dots, n; j = 1,2, \dots, n, \qquad (10.20)$$

що отримані з економічних міркувань.

Метою математичного дослідження СММБ є визначення математичної ознаки, з допомогою, знаючи технологічну матрицю A, можна гарантувати коректність СММБ, тобто можливість переходу від її структурної (10.8) до приведеної форми (10.10), за наявності властивості (10.20) коефіцієнтів матриці B матриці повних матеріальних витрат. Коректність статичної моделі міжгалузевого балансу повністю визначається властивостями технологічної матриці A.

Означення. Всяку квадратну матрицю A з невід'ємними коефіцієнтами називають *продуктивною*, якщо існує матриця $B = (E - A)^{-1}$ і її коефіцієнти задовольняють умови (10.20).

Приклад 12.1. Нехай складено дві моделі СММБ, у кожної якої $n = 2$. При цьому отримані наступні технологічні матриці:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,6 & 0,5 \end{pmatrix}.$$

Перевірити, чи є вони продуктивними.

Розв'язання. Для кожної з цих матриць $0 \leq a_{ij} \leq 1$. При цьому матриця $B_1 = (E - \mathrm{A}_1)^{-1}$ не існує, а матриця $B_2 = (E - \mathrm{A}_2)^{-1}$ існує, проте для її коефіцієнтів не виконуються (5.20).

$$(E - A_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 & -0,5 \\ -0,5 & 0,5 \end{pmatrix}, \det(E - A_1) = 0.$$

Отже, обернена матриця для B_1 не існує. Знайдемо визначник матриці B_2.

$$(E - A_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,6 & 0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 & -0,5 \\ -0,6 & 0,5 \end{pmatrix}, \det(E - A_2) = -0,05.$$

Оскільки $\det(E - A_2) \neq 0$, то обернена матриця існує. Отримуємо:

$$B_2 = (E - A_2)^{-1} = -\frac{1}{0,05} \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,6 & 0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & -10 \\ -12 & -10 \end{pmatrix}.$$

Умови (5.20) не виконуються, зокрема, всі елементи матриці B_2 від'ємні, тому матриця A_2 не є продуктивною.

Дослідження структурної форми СММБ $A \cdot \bar{x} + \bar{y} = \bar{x}$ почнемо зі з'ясування властивості технологічних коефіцієнтів:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} < 1, j = 1, \dots, . n. \qquad (10.21)$$

Ця властивість має просте економічне обґрунтування. Розглянемо матрицю міжгалузевих постачань:

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} \cdots & x_{1j} \cdots & x_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1} \cdots & x_{nj} \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}.$$

Її j-й стовпчик містить витрати галузей виробничого сектору на валове виробництво x_j у j-у галузь. Очевидно, що величина x_j завжди більша суми цих витрат, тобто виконується нерівність:

$$z_j = x_j - \sum_{i=1}^{n} x_{ij} > 0, j = 1, \dots, n. \qquad (10.22)$$

Величину z_j, що визначається у лівій частині (10.22), називають *доданою вартістю, створеною у j-ій галузі*. Вона включає в себе оплату праці в галузі, амортизаційні відрахування та прибуток підприємств галузі. Величину z_j називають також *чистою продукцією j-ої галузі*. Обидві частини нерівності (10.22) поділимо на величину $x_{\mathrm{i}} > 0$ з врахуванням, що $x_{ij} = a_{ij}x_j$, отримаємо нерівність (10.21). З цієї нерівності випливає, що виконується нерівність:

$$\max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} < 1 \qquad (10.23)$$

Наведемо основні норми матриці *A* (з врахування, що для технологічної матриці *A* коефіцієнти невід'ємні) [1].

$$\|A\|_1 = \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{n} a_{ij}, \|A\|_2 = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}, \|A\|_3 = \mathrm{n} \cdot \max_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le n}} a_{ij},$$

$$\|A\|_4 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2}, \|A\|_5 = \max_{1\le j\le n} \left|\lambda_j(A)\right|.$$

У $\|A\|_5$ $\lambda_j(A)$, $j = 1, \dots, n$, – власні значення матриці *A*, тобто корені її характеристичного рівняння $\det(A - \lambda E) = 0$.

Сформулюємо достатню умову продуктивності технологічної матриці: якщо $\|A\| < 1$, де $\|A\| = \min_{1\le k\le 5} \|A\|_k$, то технологічна матриця *A* є продуктивна.

З нерівності $\|A\| < 1$ випливає, що для продуктивності матриці *A* з невід'ємними коефіцієнтами достатньо, що хоча б одна з її норм була менше 1. Нерівність $\|A\| < 1$ є не лише є достатньою, а й необхідною умовою продуктивності матриці *A*.

Зауважимо, що з продуктивності матриці *A* випливає також продуктивність матриці A^* у натуральному виразі і навпаки.

10.5 Тотожність міжгалузевого балансу

Призначення СММБ полягає у визначення за заданому векторі $\bar{y}$ кінцевого попиту відповідно вектор $\bar{x}$ валового виробництва продукції та матриці *X* міжгалузевих постачань.

Нехай за приведеною моделлю СММБ знайдено вектор $\bar{x}$, далі матрицю *X* міжгалузевих постачань, визначені додані вартості z_j.

Всю цю інформацію, а також заданий вектор $\bar{y}$ наводиться у таблиці міжгалузевого балансу [2]. Таблична форма подання інформації про об'єкт моделювання – виробничий сектор економіки країни є досить корисною, оскільки наочно подає якісну та кількісну структуру міжгалузевих взаємозв'язків. Наприклад, i-й рядок, що відповідає і-ій галузі-виробника показує розподіл валового виробництва продукції цієї галузі, причому виконуються рівності:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + y_i, i = 1,2, \dots, n. \qquad (10.24)$$

Далі, j-й стовбець, що відповідає j-й галузі-споживачу, показує виробничі витрати цієї галузі на виробництво x_j валової продукції цієї галузі. З (10.22) випливає, що виконуються рівності:

$$x_j = \sum_{i=1}^{n} x_{ij} + z_j; j = 1,2,\dots,n. \qquad (10.25)$$

Рівності (10.24) називають *балансом виробництва*, а рівності (10.25) – *балансом витрат*, тому СММБ називають також *моделлю «виробництво-витрат»*.

З співвідношень (10.24) та (10.25) випливають два типи тотожностей. Перший тип випливає з (10.24) та (10.25) при $i = j$:

$$\sum_{k=1}^{n} x_{ik} + y_i = \sum_{k=1}^{n} x_{ki} + z_i, i = 1,2,\dots,n. \qquad (10.26)$$

Тотожності (10.26) означають, що виробничі витрати i-ої галузі, збільшені на додану вартість її продукції, дорівнюють вартості валового виробництва у цій галузі [2].

Склавши всі рівності (10.25) та врахувавши тотожність $\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} x_{ik} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} x_{ki}$, отримаємо другий тип тотожностей:

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = \sum_{i=1}^{n} z_i. \qquad (10.27)$$

Рівність (5.27) означає, що загальна сума кінцевих попитів дорівнює загальній сумі доданих вартостей. Рівності (10.26) та (10.27) називають *тотожностями міжгалузевого балансу*.

Розглянемо приклад розробки статичної моделі міжгалузевого балансу у найпростішому випадку для економічної системи з 2 галузей.

Приклад 10.2 У таблиці 5.2 наведені дані щодо міжгалузевого балансу економічної системи, що складається з двох галузей, за останній рік у грошових одиницях. Визначити необхідний обсяг валового виробництва у кожній галузі, якщо планове споживання на наступний період часу повинне змінитися. Кінцеве споживання продукції галузі A_1 повинно збільшитися удвічі, а галузі A_2 – залишитися на попередньому рівні. Знайти додану вартість у цих галузях.

Розв'язання. Знайдемо елементи технологічної матриці A – технологічні коефіцієнти $a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}$.

Таблиця 10.1. Міжгалузевий баланс виробничого сектору з 2 галузей (г.о.)

Галузі-виробники	Галузі-споживачі		Кінцевий продукт	Валове виробництво
	A_1	A_2		
A_1	7	21	72	100
A_2	12	15	123	150

Отримаємо:

$$a_{11} = \frac{x_{11}}{x_1} = \frac{7}{100} = 0,07; \; a_{12} = \frac{x_{12}}{x_2} = \frac{21}{150} = 0,14;$$

$$a_{21} = \frac{x_{21}}{x_1} = \frac{12}{100} = 0,12; \; a_{22} = \frac{x_{22}}{x_2} = \frac{15}{150} = 0,10.$$

Технологічна матриця A має вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} 0,07 & 0,14 \\ 0,12 & 0,10 \end{pmatrix}.$$

Перевіримо її на продуктивність. Для чого використаємо норму

$$\|A\|_1 = \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{n} a_{ij}:$$

$$a_{11} + a_{21} = 0,07 + 0,12;$$

$$a_{12} + a_{22} = 0,14 + 0,10 = 0,24.$$

Отже, для отриманої технологічної матриці A норма $\|A\|_1 = 0,24 < 1$, тому ця матриця є продуктивною та для довільного вектора $\bar{y}$ кінцевого попиту можна знайти вектор валового виробництва $\bar{x}$, що забезпечує цей вектор. Знайдемо $\bar{x}$ за формулою (10.10):

$$\bar{x} = (E - A)^{-1} \cdot \bar{y}.$$

Запланований новий вектор $\bar{y}$ кінцевого споживання має вигляд

$$\bar{y} = \begin{pmatrix} 72 \cdot 2 = 144 \\ 123 \end{pmatrix}.$$

Тоді матриця повних витрат має вигляд $B = (E - A)^{-1}$:

$$(E - A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,07 & 0,14 \\ 0,12 & 0,10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,93 & -0,14 \\ -0,12 & 0,9 \end{pmatrix}.$$

$$\det(E - A) = 0,93 \cdot 0,9 - (-0,14) \cdot (-0,12) = 0,8202.$$

$$B = \frac{1}{0,8202} \begin{pmatrix} 0,9 & 0,14 \\ 0,12 & 0,93 \end{pmatrix}.$$

Вектор $\bar{x}$ валового виробництва:

$$\bar{x} = BY = \begin{pmatrix} 179,0 \\ 160,5 \end{pmatrix}.$$

Щоб знайти умовно чисту продукцію галузей при знайдених обсягах валового виробництва, знайдемо нові значення виробничого споживання $x_{ij} = a_{ij} \cdot x_j$, $i = 1,2;\ j = 1,2$:

$$x_{11} = a_{11} \cdot x_1 = 0,07 \cdot 179 = 12,53;$$

$$x_{12} = a_{12} \cdot x_2 = 0,14 \cdot 160,5 = 22,47;$$

$$x_{21} = a_{21} \cdot x_1 = 0,12 \cdot 179 = 21,48;$$

$$x_{22} = a_{22} \cdot x_2 = 0,1 \cdot 160,5 = 16,05.$$

Додану вартість у галузях визначаємо за формулою $z_j = x_j - x_{1j} - x_{2j}$. Тут $j = 1,2$. Маємо:

$$z_1 = 179 - 12,53 - 21,48 = 144,99,\ z_2 = 160,5 - 22,47 - 16,05 = 121,98.$$

Розглянуту тут модель міжгалузевого балансу застосовують не лише для управління виробничого сектору національної економіки чи планування діяльності диверсифікованої компанії, але її можна модифікувати для планування витрат праці та основного капіталу з метою забезпечення виробничого процесу.