Лекція 3. Моделювання виробничої діяльності за допомогою виробничих функцій

Мета лекції: сформулювати у студентів уявлення про сутність та використання виробничих функцій, особливості моделюванні виробничого процесу на основі апарату виробничих функцій

План

1. Основні поняття та допущення при моделюванні виробничої діяльності. Виробнича функція
2. Види виробничих функцій
3. Побудова виробничих функцій

Ключові терміни та поняття: виробнича діяльність, виробнича функція, функція Кобба-Дугласа, рівняння регресії, метод найменших квадратів.

3.1 Основні поняття та допущення при моделюванні виробничої діяльності

Розглянемо основні поняття та допущення, що використовуються при моделюванні *виробничої діяльності*, тобто діяльності з виробництва товарів. У ході операційної діяльності створюють нові товари та послуги, що мають додану вартість та беруть участь у наступних процесах обміну та споживання. Виробництво товарів пов’язане з одночасним споживанням інших товарів – сировини, праці та капіталу. Отже, процес виробництва пов’язаний з процесом споживання, а розвиток виробничих процесів значною мірою визначається поведінкою споживачів.

Розглянемо основні економічні поняття, які будемо використовувати надалі при моделюванні виробничих процесів. *Виробничий процес* – це процес створення доданої вартості шляхом цілеспрямованого перетворення одного набору товару у інші набори товарів. Економічна система, у якій організовано і здійснений виробничий процес, називаємо *виробничою системою* або виробництвом. Розміру виробничих систем можуть зміняться у дуже широких межах – від домашнього господарства до світової економіки, у залежності від масштабів досліджуваних економічних проблем. Будь-яка економічна система є одним цілим і є суб’єктом господарювання.

Всі види економічних продуктів, що є результатами діяльності виробничих економічних систем, узагальнено називають товаром чи продуктом. Всі товари мають властивості корисливості та рідкості, що створюють можливості процесів економічного обміну ними. Тому всі вироблені товари беруть участь у операціях обміну та споживаються іншими виробничими системами або кінцевими споживачами. Будь-яка виробнича система використовує працю людей, у тому числі і для управління цієї системою. Виробнича система одночасно виробляє і споживає різноманітні товари. Тому вона у процесі обміну одночасно виступає у двох протилежних ролях – як покупець сировини, праці та капіталу так і як продавець виробленого продукту (товару). Товари, що споживаються у процесі виробництва, називають факторами виробництва або ресурсами. Дії виробничих систем визначають попит на ринках ресурсів та пропозиції на ринках вироблених ними товарами [2].

Дослідження економічних процесів у сучасному великомасштабному виробництві вимагає отримання великих обсягів статистичної інформації для побудови математичних моделей, що описують взаємозв’язок між витратами та обсягом виробництва – моделями типу «витрати – результати», оскільки такі моделі повинні враховувати внутрішню структуру витрат на підприємстві. Отримання достатньо статистичних даних про всі внутрішні виробничі витрати є достатньо складною задачею. Значно простіше отримати дані про загальні показники, такі як вартість виробленого товару, вартість основних фондів підприємства, кількість виробничого персоналу, фонд оплати праці тощо. Аналізуючи ці показники і розглядаючи підприємство як «чорний ящик», тобто досліджуючи взаємозв’язок між величиною витрачених ресурсів та величину виробленого продукту, можна зробити певних висновків щодо виробничої діяльності цієї системи.

Вперше функціональний взаємозв’язок між обсягом виробництва та величиною витрачених ресурсів був визначений та використаний у 1928 р. у статті американських вчених економіста Поля Дугласа та математика Чарльза Кобба «Теорія виробництва». У цьому дослідженні зроблена спроба визначити вплив величини витраченого капіталу та праці на величину виготовленої продукції у обробній промисловості США. Для цього були використані статистичні дані за 1899-1922 рр. і поставлені наступні завдання [4]:

1) визначити вигляд функції, що найбільше точно відображає кількісні співвідношення між трьома характеристиками виробничого процесу – обсягом виробництва, витратами капіталу та витратами праці;
2) знайти значення коефіцієнтів цієї функції;
3) перевірити достовірність побудови функції, порівнюючи розраховані за нею значення з фактичними даними.

Ч. Коббом [5] запропонована функція виду $Q = AK^{\alpha}L^{\beta}$, де Q – обсяг виробленої продукції, K – величина основного капіталу, L – витрати праці, A, α, β – коефіцієнти, що задовольняють умови А>0, α, β – невід’ємні, причому $\alpha + \beta = 1$. Коефіцієнт A використовують для переводу одиниці виміру праці і капіталу в одиниці виміру виробленої продукції, коефіцієнти α, β відображають внесок праці та капітал у виробництво продукції. Значення цих коефіцієнтів знаходять з використанням методу найменших квадратів (МНК) [3], згідно з яким вони визначаються з умови:

$$\sum_{t=1899}^{1922} (lnQ_t - lnA - \alpha lnK_t - \beta lnL_t)^2.$$

У результаті отримані наступні значення коефіцієнтів $\mathrm{A} = 1{,}01$; $\alpha = 0{,}25$; $\beta = 0{,}75$, тобто отримали виробничу функцію $Q = 1{,}01K^{0{,}25}L^{0{,}75}$.

Виробничою функцією (ВФ) виробничого процесу називають відображення $Q: D \to U$, що моделює виробництво продукцію у цьому процесі [6]. Область визначення D виробничої функції – це множина виробничих ресурсів $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ у вартісному чи у натуральному вигляді. Множина значень U включає множину кількісних оцінок результатів виробництва, наприклад, річний обсяг виробництва за кожною позицією асортименту продукції підприємства або відповідні вартісні показники $Q = (Q_1, Q_2, \dots, Q_m)$.

Найбільшими вивченими виробничими функціями при $m = 1$, тобто у них визначається одна кількісна оцінка результату виробництва, тобто у цьому випадку ВФ-функція – це звичайна функція кількох змінних. Отже, ВФ-функція встановлює залежність між кількостями витрачених виробничих ресурсів $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, та обсягом Q виробленої продукції, тобто вона має вигляд $Q = Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Тут значення обсягу виробленої продукції вважається максимально можливим при даних витратах виробничих ресурсів, тобто витрати ресурсів не для забезпечення виробництва продукції відсутні.

ВФ-функція, що моделює реальний виробничий процес, має наступні властивості:

1. При збільшення обсягів витрат одного з ресурсів та сталому обсягу витрат інших ресурсів обсяг виробництва продукції зростає, тобто виконується нерівність $\frac{\partial Q}{\partial x_i} > 0, i = 1,2, \dots, n$.

Ця властивість випливає з гіпотези про раціональний вибір ресурсу виробництва – ресурси, що не збільшують обсяги виробництва, не застосовують у виробничому процесі.

2. При сталих обсягах витрат всіх ресурсів, крім одного виду, послідовне збільшення цього ресурсу забезпечує постійне зменшення приросту виробленої продукції, тобто
$$\frac{\partial^2 Q}{\partial {x_i}^2} < 0, i = 1,2, \dots, n.$$

Ця властивість обумовлена необхідністю збалансованості витрат у конкретному технологічному процесу: збільшення витрат одного виду ресурсів без відповідного збільшення витрат інших ресурсів не забезпечує застосовану виробничу технологію повноцінним потоком ресурсів, тобто додатковий ефект від збільшення витрат ресурсів зменшується [7].

Залежність величини обсягу виробництва від величини витрат одного ресурсу при фіксованих витратах інших ресурсів, називають *кривою випуску*. Перша умова означає, що дотична до кривої випуску при всіх можливих значень витрат ресурсу має додатний нахил:
$$\frac{\partial Q}{\partial x_i} = tg\alpha > 0.$$

Друга умова, яку можна записати у вигляді $\frac{\partial^2 Q}{\partial x_i^2} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial Q}{\partial x_i}\right) < 0$. Це свідчить, що приріст продукції у розрахунку на додаткові витрати одиниці ресурсу зменшується при зростанні витрат цього ресурсу [7].

3.2 Види виробничих функцій

Розглянемо основні типи ВФ, що застосовуються у практиці економічного аналізу виробничого процесу, на прикладі функцій двох ресурсів , які допускають наочну геометричну інтерпретацію [4].

Лінійна ВФ має вигляд: $Q = a_1x_1 + a_1x_1$. Її коефіцієнти дорівнює значенням граничних приростів виробництва продукції, оскільки $MQ_i == \frac{\partial Q_i}{\partial x_i}, i = 1,2$.

Це означає, що приріст обсягу виробництва внаслідок одиничного збільшення обсягу витраченого ресурсу є сталим і не залежить від вихідних величин витрат факторів. Гранична норма заміни виробничих факторів для лінійної ВФ є сталою та дорівнює $S_{x_1x_2} = \frac{a_1}{a_2}$. Еластичність заміщення факторів є нескінченною.

Лінійні виробничі функції звичайно застосовуються при моделюванні великих систем (велика галузь, економіка країни в цілому), у яких виробництво продукції є результатом одночасного використання багатьох різноманітних технологій. При цьому повинно виконуватися допущення про сталості граничної продуктивності ресурсів та можливого їх необмеженого заміщення.

ВФ Кобба-Дугласа має вигляд [1]:

$$Q = Ax_1^{\alpha} \cdot x_2^{\beta}, \alpha + \beta = 1, \alpha > 0, \beta > 0.$$

Коефіцієнт A використовуються для переводу одиниць виміру у правій частині до одиниць виміру обсягу виробництва продукції у лівій частині, α, β – коефіцієнти еластичності виробництва за ресурсами. Гранична продукція факторів пропорційна їх середній продукції:

$$MQ_{x_1} = \alpha \frac{Q}{x_1}, MQ_{x_2} = \beta \frac{Q}{x_2}.$$

Гранична норма зміни дорівнює

$$S_{x_1x_2} = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{x_2}{x_1} = \frac{1-\alpha}{\alpha} \cdot \frac{x_2}{x_1}$$

З цього випливає, що еластичність заміни складає

$$\sigma_{x_1x_2} = \frac{\partial\left(x_2 / x_1 \right)}{\partial S_{x_1x_2}} \cdot \frac{S_{x_1x_2}}{x_2 / x_1} = \frac{\alpha}{1-\alpha} \cdot \frac{\frac{1-\alpha}{\alpha} \cdot \frac{x_2}{x_1}}{x_2 / x_1} = 1.$$

Це свідчить, що заміщення одного фактору виробництва іншим завжди відбувається у пропорції 1:1. У цьому полягає важливий недолік ВФ Кобба-Дугласа, оскільки вона не завжди вірно відображає реальні економічні процеси, оскільки не завжди один фактор виробництва можна замінити еквівалентною кількістю іншого фактору [1].

Функцію Кобба-Дугласа найчастіше використовують для описання виробничої діяльності середніх за масштабом виробничої діяльності суб’єктів господарства (корпорація, невелика галузь), які характеризуються стійким стабільним функціонуванням, коли залучення додаткової одиниці ресурсу дає ефект, пропорційний середній продуктивності наявного ресурсу.

Розглянемо *ВФ з фіксованими пропорціями (функція Леонтьєва):*

$$Q = \min\left\{\frac{x_1}{c_1}, \frac{x_2}{c_2}\right\}$$

Коефіцієнти C_i виражають кількість i-го ресурсу, необхідного для виробництва одиниці продукції. Функція відображає розв'язок задачі лінійного програмування, що виникає у моделі «витрати–випуск»: $c_i Q \le x_i, Q \to \max$, оскільки фактор, що обмежує обсяг виробництва, визначається умовою мінімальності. Еластичність заміни факторів по довільному ресурсу $\sigma = 0$ для цієї ВФ [2] . Для неї гранична продукція є кусково-сталою дворівневою функцією відношення $\frac{x_1}{x_2}$ (фондоозброєння):

$$\frac{\partial Q}{\partial x_1} = \frac{\partial \min\left\{\frac{x_1}{c_1}, \frac{x_2}{c_2}\right\}}{\partial\left(\frac{x_1}{c_1}\right)} \cdot \frac{1}{c_1} = \frac{1}{c_1} \cdot \begin{cases} 1, \frac{x_1}{x_2} < \frac{c_1}{c_2}; \\ 0, \frac{x_1}{x_2} \ge \frac{c_1}{c_2}. \end{cases}$$

Функція Леонтьєва використається для моделювання виробничого процесу з строго детерміновими технологіями, що не допускають відхилення від технологічних норм використання ресурсів на виготовлення одиниці продукції, звичайно для описання незначного за масштабом виробництва або повністю автоматизованого виробництва.

3.3 Побудова виробничих функцій

Для побудови виробничих функцій використовують статистичні дані про обсяги та фактори виробництва. Розглянемо найпростіший випадок, коли виробнича функція визначає залежність обсягу виробництва y лише від одного фактору виробництва x, тобто вона має вигляд $y = y(x)$. Допустимо, що між змінними y та x існує зв'язок, на який накладається дія випадкових факторів, тобто між цим змінними існує статистичний зв'язок. Наявність такого зв'язку проявляється у тому, що зміна значень однієї змінної приводить до зміни математичного сподівання іншої змінної. Формулу $\tilde{y} = \tilde{y}(x)$, що встановлює статистичний зв'язок між змінними y та x, називають *рівнянням регресії*. Найбільш простою є лінійна регресія, що описується рівнянням $\tilde{y} = a_0 + a_1 x$.

Основним методом побудови рівнянь регресії є *метод найменших квадратів* (МНК) [2]. Спочатку встановлюється критерій близькості між точками (x_i, y_i), встановленими у результаті спостереження, та точками $(x_i, a_0 + a_1 x_i)$, ординати яких обчислюються за рівнянням лінійної регресії $\tilde{y} = a_0 + a_1 x$:

$$Q = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - a_0 - a_1 x_i\right)^2 \to \min. \quad (3.1)$$

У (3.1) a_0 та a_1 – невідомі параметри рівняння лінійної регресії, тобто досліджуємо на мінімум функцію (3.1) двох змінних a_0 та a_1. Застосування необхідної умови екстремуму цієї функції – рівності нулю її частинних похідних – дозволяє отримати систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих параметрів регресії a_0 та a_1:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} y_i - na_0 - a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i = 0, \\ \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i - a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0. \end{cases} \tag{3.2}$$

Введемо позначення: $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$, $\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$. Розв’язавши систему (3.2), отримаємо значення параметрів регресії:

$$a_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{x}\cdot\bar{y}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\left(\bar{x}\right)^2}, \; a_0 = \bar{y} - a_1\bar{x}. \tag{3.3}$$

Для моделювання зв’язку між змінними x та y можна використовувати нелінійні залежності, наприклад, параболу другого порядку $\tilde{y} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, *гіперболу* $\tilde{y} = a_0 + \frac{a_1}{x}$, показникову функцію $\tilde{y} = a_0 \cdot a_1^x$, логарифмічну функцію $\tilde{y} = a_0 + a_1 \ln x$, логістичну криву $\tilde{y} = \frac{b}{1 + e^{a_0 + a_1 x}}$ тощо. Всі наведені тут залежності є лінійними за своїми параметрами або такими, що зводяться до лінійних. Для залежностей, що є лінійними за своїми параметрами, можна безпосередньо застосувати МНК та мінімізувати суму квадратів відхилень:

$$Q = \sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \tilde{y}\left(x_i, a_0, a_1, ..., a_k\right)\right)^2 \to \min. \tag{3.4}$$

Параметри регресії a_0, a_1, …, a_k знаходимо з необхідної умови екстремуму функції $Q\left(a_0, a_1, ..., a_k\right)$:

$$\frac{\partial Q}{\partial a_i} = 0, i = 1, 2, ..., k. \tag{3.5}$$

Для визначення коефіцієнтів a_0, a_1, a_2 параболи $\tilde{y} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ з (3.6) отримуємо систему лінійних рівнянь МНК [7]:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} y_i - na_0 - a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i - a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0, \\ \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i - a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^3 = 0, \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i - a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^3 - a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^4 = 0. \end{cases} \tag{3.7}$$

Рівняння МНК для отримання коефіцієнтів a_0, a_1 гіперболічної регресійної залежності $\tilde{y} = a_0 + \frac{a_1}{x}$ знайдемо, замінивши у системі рівнянь (3.8) для коефіцієнтів лінійної регресії x на $\frac{1}{x}$:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} y_i - na_0 - a_1 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} = 0, \\ \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{x_i} - a_0 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} - a_1 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i^2} = 0. \end{cases} \tag{3.9}$$

Для визначення параметрів a_0, a_1 показникової залежності $\tilde{y} = a_0 \cdot a_1^x$ її попередньо логарифмують: $\ln \tilde{y} = \ln a_0 + x \cdot \ln a_1$. Ввівши позначення $\alpha_0 = \ln a_0$, $\alpha_1 = \ln a_1$, $z = \ln \tilde{y}$, отримаємо систему рівнянь для визначення невідомих параметрів α_0 та α_1:

$$\begin{cases} n\alpha_0 + \alpha_1 \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} z_i, \\ \alpha_0 \sum_{i=1}^{n} x_i + \alpha_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i z_i. \end{cases} \tag{3.10}$$

Тут $z_i = \ln y_i$. З (1.10) знаходимо α_0 та α_1, далі $a_0 = e^{\alpha_0}$, $a_1 = e^{\alpha_1}$.

Зв'язок між змінними x та y вимірюється через їх кореляцію. Виміряти кореляцію між змінними x та y означає визначити, наскільки зміна y залежить від зміни x. Для кількісної оцінки кореляції між показниками x та y використовують <u>*лінійний коефіцієнт кореляції*</u>:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2}} = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{\sqrt{\left(n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2\right)\left(n\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2\right)}}.$$

Лінійний коефіцієнт кореляції $r \in [-1;1]$. При $r = 0$ лінійна залежність між змінними x та y відсутня. При наближенні $|r|$ до 1 залежність $y(x)$ стає близькою до лінійної. При $r > 0$ збільшення значень x супроводжується збільшенням y, при $r < 0$ характер залежності є протилежним: зростання x

супроводжується спаданням y.

Значення економічних величин здебільшого визначаються впливом не одного, а кількох факторів, тобто розглядається модель деякої економічної величини y у вигляді функції m незалежних змінних $x_1, x_2, ..., x_m$: $\tilde{y} = f\left(x_1, x_2, ..., x_m\right)$.

Розглянемо модель лінійної залежності $\tilde{y} = a_0 + a_1 x_1 + ... + a_m x_m$, тобто *лінійну множинну регресію*. Відхилення значення y_i залежної змінної у i-му спостереженні, $i = 1, 2, ..., n$. від значення $\tilde{y}_i$, знайденого при значеннях x_{i1}, x_{i2} ,…, x_{im}, позначимо ε_i:

$$\varepsilon_i = y_i - a_0 - a_1 x_{i1} - a_2 x_{i2} - ... - a_m x_{im} = y_i - a_0 - \sum_{j=1}^{n} a_j x_{ij} .$$

У відповідності з МНК параметри a_0, a_1,…, a_m лінійної моделі знаходять так, щоб сума $\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = Q \to \min$, тобто:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(y_i - a_0 - \sum_{j=1}^{n} a_j x_{ij} \right)^2 \to \min . \qquad (3.11)$$

Функція Q, що мінімізується, є квадратичною відносно величин a_j, $j = 0, 1, 2, ..., n$. Необхідною умовою її мінімуму є рівність нулю всіх її частинних похідних за a_j. Частинні похідні квадратичної функції є лінійними функціями, тому, прирівнюючи їх до нуля, отримуємо систему $m+1$ лінійних алгебраїчних рівнянь з $m+1$ невідомими a_0, a_1,…, a_m. Розглянемо задачу визначення цих коефіцієнтів у матричній формі [6].

Суму квадратів відхилень ε_i можна записати у вигляді добутку вектора-рядка $\varepsilon^T = \left(\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n\right)$ на вектор-стовпчик ε. Цей вектор-стовпчик можна записати у вигляді: $\varepsilon = y - X \cdot a$, де y – вектор-стовпчик значень y, $y^T = \left(y_1, y_2, ..., y_n\right)$, a – вектор-стовпчик коефіцієнтів моделі, $a^T = \left(a_0, a_1, .., a_m\right)$, X – матриця розмірності $n \times \left(m+1\right)$, у якій кожен з n рядків – це значення спостереження вектора значень незалежної змінної:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & ... & x_{1m} \\ 1 & x_{21} & ... & x_{2m} \\ . & . & . & . \\ 1 & x_{n1} & ... & x_{nm} \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$Q = \varepsilon^T \cdot \varepsilon = \left(y - Xa\right)^T \left(y - Xa\right) = \left(y^T - a^T X^T\right)\left(y - Xa\right) = y^T y -$$
$$- a^T X^T y - y^T X a + a^T X^T X a = y^T y - 2a^T X^T y + a^T X^T X a.$$

Тут при перетвореннях було використано рівність $a^T X^T y = y^T X a$.

Тоді з рівності

$$\frac{\partial Q}{\partial a} = -2X^T y + 2\left(X^T X\right)a = 0$$

знаходимо невідомий вектор коефіцієнтів множинної лінійної регресії у вигляді [8]:

$$a = \left(X^T X\right)^{-1} X^T y. \tag{3.12}$$

Формулу (3.12) використовують для розрахунку коефіцієнтів лінійної множинної регресії.

Питання та завдання для самоконтроля до розділу 3

1. Поясніть призначення виробничої функції.
2. Вкажіть, що є аргументами виробничої функції.
3. Назвіть види виробничих функцій.
4. Вкажіть основні допущення, що використовуються при побудові виробничої функції.
5. Поясніть зміст коефіцієнтів виробничої функції Кобба-Дугласа.
6. Поясніть, що є об'єктом моделювання для виробничої функції Кобба-Дугласа.
7. Розкрийте математичну сутність методу найменших квадратів.

Розв'яжіть наведені нижче завдання.

1. На фабриці, що виготовляє взуття, 5 працівників працюють на 5 верстатів та виготовляє 1000 пар взуття за тиждень. Були найняті ще 5 працівників, внаслідок чого обсяг виробництва взуття збільшиться до 1500 пар взуття на тиждень. Знайти, як зміниться продуктивність праці робітників та величина виробничих фондів підприємства.

2. Для фабрики з попередньої задачі обсяг виробництва виробничою функцією Кобба-Дугласа з коефіцієнтом β=0,75. Як збільшиться обсяг виробленої продукції (гранична продуктивність праці), якщо підприємство найме додаткового працівника при наявності 5 працівників. Як зміниться ця величина, якщо найме 1 працівника при наявній численності виробничого персоналу 10 працівників?

3. Фабрика з попередніх прикладів з еластичністю продукції по праці β=0,75, планує збільшити персонал на 10%. На скільки процентів зросте обсяг виробленої продукції? На скільки процентів потрібно збільшити персонал, якщо потрібно збільшити обсяг виробництва на 15%?

4. На целюлозо-паперовому комбінаті обсяг виробництва залежить від витрат використаної целюлози (x_1) та кількості верстатів (x_2) при виробничій функції $Q = x_1^{\alpha} \cdot x_2^{\beta}$, α=0,5; β=0,1. При плановому завантаженні у місяць потреба в ресурсах складає 20т целюлози та 10 верстатів. Знайти, чому дорівнює плановий обсяг виробництва продукції та граничну продукцію для другого

ресурсу x_2. Якщо комбінат придбає додатково 100 верстатів, не забезпечивши при цьому збільшення поставок целюлози, то чому дорівнює ефект від останнього придбаного верстата? Знайти, на скільки збільшиться обсяг виробленої продукції при збільшенні обсягів використання обох ресурсів на 1%?

Розділ 4. Характеристики виробничих функцій

Лекція 4. Основні характеристики виробничих функцій та їх економічний зміст

Мета лекції: висвітлити основні характеристики виробничі функції

План

1. Поняття еластичності.
2. Економіко-математичні параметри виробничої функції.
3. Ефекти розширення масштабу виробництва та заміщення ресурсів.
4. Ізокванти виробничої функції.

Ключові терміни та поняття: еластичність, середня продуктивність праці, середня фондовіддача, гранична продуктивність праці, гранична фондовіддача, гранична норма заміщення, ефект масштабу, ізокванти.

4.1 Поняття еластичності

Еластичність характеризує відносну зміну економічного показника під дією одиничної відносної зміни фактору, від якого він залежить, за умови незмінності решти факторів, що впливають на досліджуваний показник. Іншими словами, еластичність показує, на скільки процентів зміниться досліджуваний показник, якщо фактор, від якого він залежить, збільшиться на 1% [2].

Нехай досліджується залежність економічного показника y від зміни фактору x, значення якого впливають на значення y. Розглянемо випадок, коли спостерігається функціональна залежність $y = y(x)$. Швидкість зміни величини y відносно зміни величини x визначається похідною $\dfrac{dy}{dx} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, проте її застосування у економічних дослідженнях здебільшого є незручним, оскільки величина похідної залежить від обраних одиниць виміру x та y. Тому для вивчення впливу зміни величини x на величину y у економіці застосовують не абсолютні, а відносні (процентні) зміни величин, що досліджуються. Зв'язок між змінами відносних величин оцінюють за допомогою еластичності.

Еластичністю функції $y = y(x)$ відносно змінної x називають границю відношення відносних змін величин y та x:

$$E_x(y)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y/y}{\Delta x/x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\frac{x}{y}\right) \qquad (4.1)$$

Формулу (4.1) можна записати у вигляді:

$$E_x(y)=\frac{d(\ln y)}{d(\ln x)}. \qquad (4.2)$$

Якщо еластичність визначають наближено за дискретним набором даних, наприклад, заданих у вигляді таблиці, то замість (4.1) та (4.2) для обчислення еластичності у точці (x_1, y_1) використовують формулу:

$$E_x(y)=\frac{y_2-y_1}{y_1}:\frac{x_2-x_1}{x_1}=\frac{\Delta y_1}{y_1}:\frac{\Delta x_1}{x_1}. \qquad (4.3)$$

Еластичність, обчислену за формулою (4.3), називають *кінцевою еластичністю*.

У економічних дослідженнях використовують також середню (дугову) еластичність:

$$E_x(y)=\frac{y_2-y_1}{(y_1+y_2)/2}:\frac{x_2-x_1}{(x_1+x_2)/2}, \qquad (4.4)$$

а також логарифмічну еластичність

$$E_x(y)=\frac{\Delta(\ln y)}{\Delta(\ln x)}=\frac{\ln y_2-\ln y_1}{\ln x_2-\ln x_1}=\ln\left(\frac{y_2}{y_1}\right):\ln\left(\frac{x_2}{x_1}\right). \qquad (4.5)$$

З означення еластичності (4.1) випливають основні властивості цього показника [5]:

1) $E_{ax}(by)=E_x(y)$, тобто еластичність не залежить від одиниць виміру показників x та y;

2) еластичності взаємно обернених функцій є взаємно оберненими величинами: $E_x(y)=\dfrac{1}{E_y(x)}$;

3) еластичність добутку двох функцій дорівнює сумі їх еластичностей: $E_x(u\cdot v)=E_x u+E_x v$;

4) еластичність частки функцій дорівнює різниці їх еластичностей: $E_x\left(\dfrac{u}{v}\right)=E_x u-E_x v$;

5) Еластичність суми двох функцій знаходять за формулою:

$$E_x(u+v)=\frac{d(u+v)}{dx}\cdot\frac{x}{u+v}=\left(\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}\right)\cdot\frac{x}{u+v}=\frac{u\cdot E_x u+v\cdot E_x v}{u+v}.$$

Розглянемо основні показники еластичності, що використовуються у математичній економіці.

1. *Еластичність попиту за ціною* (*пряма еластичність*) визначається за формулою

$$E_p(q)=\frac{dq/q}{dp/p}=\frac{dq}{dp}\cdot\frac{p}{q},$$

де p – ціна одиниці товару, q – величина попиту на нього. Вона показує відносну зміну у відсотках величини попиту на товар при зміні ціни цього товару на 1% та характеризує реакцію споживачів на зміну ціни товару.

2. *Перехресну еластичність попиту за ціною* знаходять за формулою

$$E_{p_j}(q_i)=\frac{dq_i/q_i}{dp_j/p_j}=\frac{dq_i}{dp_j}\cdot\frac{p_j}{q_i}.$$

Вона показує відносну процентну зміну величини q_i попиту на i-й товар при зміні ціни p_j на j-й товар, що заміщує чи доповнює i-й товар у споживанні, на 1%.

3. *Еластичність попиту за доходом* обчислюють за формулою:

$$E_l(q)=\frac{dq/q}{dl/l}=\frac{dq}{dl}\cdot\frac{l}{q},$$

де l – середня величина доходу споживачів. Вона характеризує відносну процентну зміну величини попиту на товар при збільшенні доходу споживачів на 1%. Додатна еластичність попиту за доходом спостерігається для нормальних (якісних) товарів, від'ємна – для малоцінних (низькоякісних).

4. *Цінова еластичність ресурсів*

$$E_p(R)=\frac{dR/R}{dp/p}=\frac{dR}{dp}\cdot\frac{p}{R}$$

характеризує відносну зміну у відсотках величини R попиту на певний ресурс при зміні ціни цього ресурсу на 1%.

5. *Еластичність заміщення при виробництві одного ресурсу іншим*

$$E_{R_j}(R_i)=\frac{dR_i}{dR_j}\cdot\frac{R_j}{R_i}$$

показує, на скільки процентів зміниться кількість R_i i-го ресурсу при збільшенні кількості R_j j-го ресурсу на 1% так, що при цьому загальний обсяг виробництва не змінюється.

4.2 Економіко-математичні параметри виробничої функції

Основні характеристики ВФ-функції розглянемо для функції виду $Q = Q(K,L)$. Розглянемо середні величини, пов'язані з ВФ. Вони значною мірою характеризують ефективність використання у виробничому процесі підприємства. *Середня продуктивність праці* – це відношення обсягу виробленої продукції за певний проміжок часу до кількості витраченої праці:

$$AQ_L = \frac{Q}{L}.$$

Середня фондовіддача – це відношення обсягу виробленої продукції до вартості основних виробничих фондів:

$$AQ_K = \frac{Q}{K}$$

Для ВФ Кобба-Дугласа середня продуктивність праці

$$AQ_L = \frac{Q}{L} = \frac{AK^{\alpha}L^{\beta}}{L} = AK^{\alpha}L^{\beta-1},$$

середня фондовіддача

$$AQ_K = \frac{Q}{K} = \frac{AK^{\alpha}L^{\beta}}{K} = AK^{\alpha-1}L^{\beta}.$$

Оскільки $\beta < 1$, то середня продуктивність праці є спадною функцією аргументу L, тобто зі збільшенням витрати праці середня продуктивність праці зменшується. Оскільки при цьому величина другого ресурсу K залишається незмінною, то залучена додаткова робоча сила не забезпечується додатковими засобами виробництва. Фондоозброєність $\frac{K}{L}$ при цьому зменшується . Аналогічно середня фондовіддача є спадна функція аргументу K, оскільки зі зростанням цього аргументу, тобто зі збільшенням вартості основних фондів, тобто при залученням додатковим виробничих фондів, не підкріпленням збільшенням відповідної кількості працюючих, або збільшенням виплат на оплати праці.

Граничні величини продукції, тобто *граничні продукти* характеризують ефект у вигляді обсягу продукції, якого отримують зі збільшенням витрат ресурсів. *Гранична продуктивність праці* характеризує величину додаткового ефекту від кожної додатково витраченої праці при даної комбінації ресурсів (R,L):

$$MQ_L = \frac{\partial Q}{\partial L}.$$

Виходячи з означення ВФ при збільшенні витрат праці, гранична продуктивність праці зменшується. Для ВФ Кобба-Дугласа гранична продуктивність праці дорівнює

$$MQ_L = \beta AK^{\alpha}L^{\beta-1} = \beta \frac{Q}{L},$$

тобто гранична продуктивність пропорційна середній продуктивність і завжди менша за неї, оскільки $\beta < 1$.

Гранична фондовіддача визначається аналогічно:

$$MQ_K = \frac{\partial Q}{\partial K}.$$

Розглянемо коефіцієнти еластичності, що використовують для аналізу ВФ. Це безрозмірні коефіцієнти, що характеризують процент приросту обсягу продукції, що виробляється, при збільшення витрат ресурсу на 1%. *Коефіцієнт еластичності продукції за фондами* визначається за формулою

$$E_K = \frac{\partial Q}{\partial K} \cdot \frac{K}{Q}.$$

Оскільки при незмінному обсязі витрат праці відносному збільшенню обсязі основних фондів на $\frac{\Delta K}{K}$ відповідає відносне збільшення виробництва продукції на $\frac{\Delta Q}{Q}$, то відносний приріст випуску продукції складе $\frac{\partial Q / Q}{\partial L / L}$, перейшовши тут до границі при $\Delta K \to 0$, отримаємо вираз для еластичності продукції по фондам.

Еластичність продукції за працею визначається за формулою:

$$E_L = \frac{\partial Q}{\partial L} \cdot \frac{L}{Q}.$$

Для ВФ Кобба-Дугласа її параметри α, β є коефіцієнтами еластичності і не залежать від величини факторів K, L, а саме $E_K = \alpha, E_L = \beta$. Тому для цієї ВФ коефіцієнти α, β є сталими і не залежать від K,L.

Крім умов, включених у означення виробничих функцій, на ВФ залежно від її виду накладають додаткові обмеження.

Властивість однорідності полягає у тому, що при збільшенні витрат всіх ресурсів в однакову кількість разів *w* обсяг виробленої продукції зростає у кратну *w* кількість разів:

$$Q(wK, wL) = w^r Q(K, L)$$

для довільного *w*>1. Показник степеню r називають *степенем однорідності функції* Q, він характеризує ефект розширення масштабу виробництва: якщо виконується умова $r > 1$, то збільшення всіх ресурсів у *w* разів приводить до зростання обсягу виробництва більше, ніж у *w* разів, тобто ефект масштабу є позитивним. Якщо $r < 1$, то приріст факторів у *w* разів забезпечує менше ніж *w*-кратне зростання обсягу виробництва, тобто ефект масштабу є негативним.

Часто на практиці спостерігаються лінійно-однорідні виробничі функції. для яких $r = 1$, тобто $Q(wK, wL) = wQ(K, L)$. У цьому випадку ефекту збільшення масштабу виробництва не спостерігається.

Властивість необхідності всіх ресурсів полягає у тому, що при відсутності хоча б одного ресурсу виробництва продукції відсутнє, тобто

$Q(0, L) = Q(K, 0) = 0.$

Властивість обмеженого зростання означає полягає у тому, що при зростання величини ресурсу від 0 до деякого скінченного значення відбувається стрімке зростання обсягу виробництва, який з подальшим зростанням ресурсу поступово зменшується до нуля, тобто можна записати наступні умови: $\lim\limits_{x\to\infty} Q(x) = 0,\ \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\partial Q}{\partial x} = 0,\ \ \lim\limits_{x\to 0} \frac{\partial Q}{\partial x} = \infty.$ Ця умова виражає неефективність резервування ресурсів.

Розглянемо властивість еластичності ресурсів. Лінійно-однорідні ВФ можна подати у вигляді:

$$Q = \frac{\partial Q}{\partial K} \cdot K + \frac{\partial Q}{\partial L} L. \quad (4.6)$$

Економічно цю рівність можна пояснити наступним чином. Нехай власник підприємства інвестує капітал у виробництво до тих пір, доти додатковий дохід

$\frac{\partial Q}{\partial K}$ не досягне прийнятої у даній економічній системи норми прибутку, а величина добутку норми прибутку $\frac{\partial Q}{\partial K}$ на вкладений капітал K – це дохід власника підприємства. Аналогічно, наймаючи робітників, він збільшує їх чисельність доти, дока додатковий дохід $\frac{\partial Q}{\partial L}$, що приносить новий робітник, не досягне величини його заробітної плати, тобто величина $\frac{\partial Q}{\partial L}L$ – це дохід працівників, загальна чисельність яких дорівнює L.

Для теорії виробництва рівняння (4.1) означає, що обсяг виробленої продукції складається з частин, вироблених за рахунок використання кожного ресурсу окремо. Поділивши обидві частини рівності (4.6) на Q, отримаємо:

$$1 = \frac{\partial Q}{\partial K} \cdot \frac{K}{Q} + \frac{\partial Q}{\partial L} \cdot \frac{L}{Q} = E_K + E_L,$$

тобто для лінійно однорідної функції коефіцієнти еластичності лежать у межах від 0 до 1, якщо хоча б один з них більший нуля. Для однорідної функції $E_K + {}$ $+E_L = r$, тобто сума коефіцієнтів еластичності дорівнює степені однорідності функції. Отже, отримана важлива властивість ВФ Кобба-Дугласа [6]: сума її коефіцієнтів еластичності дорівнює показнику ефекту розширення масштабу: $E_K + E_L$=*r*.

4.3 Ефекти розширення масштабу виробництва та заміщення ресурсів

Вище було показано, що ефект розширення масштабу виробництва визначається множником w^r, для однорідної функції при $r > 1$ ефект масштабу позитивний, при $r < 1$ він є негативним.

Середню числову характеристику ефекту масштабу можна визначити аналогічно коефіцієнтам еластичності обсягу виробництва за виробничими факторами [8]:

$$\frac{\partial Q(wx)}{\partial w} \cdot \frac{w}{Q(wx)},$$

а, перейшовши до границь, отримаємо вираз для коефіцієнта еластичності виробництва:

$$E_w = \lim_{w \to 1} \frac{\partial Q(wx)}{\partial w} \cdot \frac{w}{Q(wx)}. \tag{4.7}$$

Еластичність виробництва характеризує приріст продукції при деяких значеннях витрат ресурсів (локальний ефект масштабу), оскільки зміни структури ресурсів вважаються нескінченно малими ($w \to 1$) [2]. Диференціюючи вираз $Q(wx) = Q\left(wx_{1,} wx_2, \dots, wx_n\right)$, як складену функцію змінної *w*, отримаємо:

$$\frac{\partial Q(wx)}{\partial w} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial Q(wx)}{\partial (wx_i)} x_i. \tag{4.8}$$

Підставивши (4.4) у (4.3), отримуємо:

$$E_w = \lim_{w \to 1} \left[\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial Q(wx)}{\partial (wx_i)} \right) x_i \right] \frac{w}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial Q}{\partial x_i} \cdot \frac{x_i}{Q} = \sum_{i=1}^{n} E_{x_i}.$$

Таким чином, коефіцієнт еластичності виробництва дорівнює сумі коефіцієнтів еластичності обсягу виробництва за ресурсами виробництва. З врахуванням рівності (4.8) приходимо до наступного висновку: коефіцієнт еластичності виробництва дорівнює показнику ефекту розширення масштабу виробництва [7] .

Розглянемо ефект заміни ресурсів. Особливість реальних виробничих процесів полягає у теоретичній можливості заміщення одним фактором іншим. Наприклад, існує абстрактна можливість замінити одиницю виробничого обладнання еквівалентним за величиною фондовіддачі кількістю одиниць праці. Проте дуже часто на практиці це неможливе. Для випадку двофакторної ВФ числова характеристика ефекту заміни показує, на яку величину dx_2 зменшиться витрата другого ресурсу, якщо збільшити обсягів витрат першого ресурсу на dx_1, щоб при цьому об'єм виробництва Q залишився незмінним.

Граничною нормою заміщення $S_{x_1x_2}$ одного ресурсу іншим називають величину [8]

$$S_{x_1x_2=-\frac{dx_2}{dx_1}},$$

яка показує, який обсяг ресурсу звільнюється при збільшенні ресурсу-замінника на одиницю. З умови незмінності обсягу виробництва продукції при заміщенні факторів випливає:

$$dQ = \frac{\partial Q}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial Q}{\partial x_2}dx_2 = 0.$$

Отже, гранична норма дорівнює відношенню граничних продуктів факторів, тобто

$$S_{x_1x_2,} == \frac{\partial Q/_{\partial x_1}}{\partial Q/_{\partial x_2}} = \frac{MQ_1}{MQ_2}. \qquad (4.9)$$

У цьому випадку x_2 – це фактор, що заміщують, x_1 – фактор, який заміщує. З рівності (4.9) випливають, що обсяг x_2 ресурсу, що вивільняється, у розрахунку на одиницю ресурсу x_1 є тим більше, чим більша гранична продукція фактору що заміщує, у порівнянні з граничною продукцією фактору, якого заміщують. У протилежній ситуації норма заміщення визначається аналогічно, з врахуванням співвідношення:

$$S_{x_1x_2} \cdot S_{x_2x_1} = 1.$$

Для ВФ Кобба-Дугласа отримуємо граничну норму заміщення за формулою (4.9). Маємо:

$$\text{К}\frac{\partial Q}{\partial L} = \beta\,\frac{Q}{L}; \frac{\partial Q}{\partial K} = \alpha\,\frac{Q}{K}, S_{Lk} = \frac{\partial Q/_{\partial L}}{\partial Q/_{\partial K}} = \frac{\beta}{\alpha\cdot}\frac{K}{L}.$$

Можливість заміщення ресурсів один одного характеризує ВФ з точки зору різних комбінацій витрат ресурсів, що забезпечує рівні обсяги виробництва продукції. Кількісною характеристикою темпу зміни граничної норми заміщення у просторі ресурсів є *еластичність заміни ресурсів* [6]:

$$\sigma_{x_1x_2} = \frac{\partial\left(^{x_1}/_{x_2}\right)}{\partial S_{x_1x_2}} \cdot \frac{S_{x_1x_2}}{^{x_2}/_{x_1}}. \qquad (4.10)$$

Еластичність заміни показує, на скільки процентів повинне змінитися співвідношення ресурсів при сталому обсязі виробництва при зміні граничної норми заміни на 1%. Відповідно до характеру зміни коефіцієнту еластичності заміни розрізняють два класи виробничої функції:

1) ВФ зі змінною еластичністю заміни;
2) ВФ зі сталою еластичністю заміни.

Найбільшою практичною значимістю має ВФ зі сталою еластичністю заміни [6]. Для неї можливі два характерні випадки: $\sigma_{x_1x_2}$=∞, тобто границі взаємозаміни ресурсів відсутні, $\sigma_{x_1x_2}$=0, тобто ресурси взаємно доповняють один одного та використовуються у строго визначеному співвідношенні.

4.4 Ізокванти виробничої функції

Ізолінії виробничої функції – це криві, у всіх точках якої функція має стале значення , тобто це лінії рівня функції [7]. Розглянемо координатну площину KOL, положення точки *(K,L)* відповідає певному рівню забезпечення виробництва ресурсами: капіталом K та працею L.

Ізоквантою називають геометричне місце точок плоскості KOL ресурсів, для якої обсяг виробництва продукції є сталою величиною:

$Q(K,L) = Q_C = const.$

Рівняння ізокванти можна записати і у явному вигляді: $L = f(K, Q_C)$. Наприклад, для ВФ Кобба-Дугласа у явному вигляді: $L = \sqrt[\beta]{\frac{Q_C}{AK^\alpha}} = \sqrt[\beta]{\frac{Q_C}{A}} \cdot \frac{1}{K^{\alpha/\beta}}$. Економічний зміст ізокванти полягає у тому, що крива показує обсяг трудових ресурсів, необхідних для отримання продукції Q_C у залежності від наявного капіталу. Наведемо основні властивості ізокванти.

1. Якщо всі ресурси є необхідними для виробництва, то нема такого значення обсягу виробництва Q_C, для якого ізокванта має спільні точки з осями координат. Ця властивості випливає з умови необхідної всіх ресурсів для виробництва.
2. Більшому значенню обсягу виробництва відповідає більша віддалена від початку координат ізокванта, що випливає з умови однорідності.
3. Ізокванти, що відповідають різним значенням Q_C, не перетинаються.

Ізокліною називають множину точок площини ресурсів, у яких нахил ізоквант при різних значеннях обсягу виробництва продукції залишається сталим, оскільки нахил графіка функції виражає її похідна, то ізокліна – це множина точок, у яких

$$-\frac{dx_2}{dx_1} = S_{x_1x_2} = const = S_C.$$

Тут використали позначення ресурсів x_1, x_2. Отже, звідси випливає, що геометричний зміст норми заміщення полягає в тому, що вона дорівнює тангенсу кута, що утворює дотична до ізокванти з додатним напрямом осі абсцис.

Для ВФ Кобба-Дугласа, як було показано вище, гранична норма заміщення є пропорційною значенню коефіцієнту фондоозброєності K/L:

$$S_{LK} = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{K}{L},$$

тобто чим більшою є величину основного капіталу (фондів) у розрахунку на одного працівника має підприємство, тим більша частина капіталу може бути звільнена та інвестована в інший проєкт при збільшенні персоналу на одного працівника [8].

Отже, рівняння ізокліни ВФ Кобба-Дугласа визначається наступним кутовим коефіцієнтом:

$$S_{LK} = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{K}{L} = S_C.$$

Аналогічним чином можна здійснити аналіз інших типів виробничих функцій.

Питання та завдання для самоконтроля до розділу 4

1. Розкрийте на конкретних прикладах зміст поняття еластичності.
2. Поясніть призначення та роль у економічних дослідженнях показника еластичності.
3. Наведіть формули для обчислення коефіцієнтів еластичності обсягів виробництва за факторами виробництва.
4. Поясніть зміст граничних показників.
5. Поясніть, що така еластичність заміни ресурсів.
6. Назвіть основні середні показники, пов'язані з виробничою функцією та розкрийте їх зміст.
7. Поясніть, у чому полягають ефекти розширення масштабу виробництва та заміщення ресурсів та як можна застосувати на підприємстві ці ефекти.
8. Розкрийте зміст понять ізоклін та ізоквант.

Розв'яжіть наступні завдання.

1. На фабриці, що виробляє взуття, 5 працівників працюють на 5 верстатів і виробляють 1000 пар взуття за місяць. Якщо коефіцієнти еластичності ресурсів дорівнюють α=0,25; β=0,75, знайти норму заміни на цьому підприємстві, тобто скільки можна скоротити працівників при придбанні додатково 1 верстату, щоб обсяг виробництва залишився незмінним.

2. Перевірити, що для виробничої функції $F_1(x_1, x_2) = \dfrac{x_2(2x_1^2 + x_2^2)}{3x_1^2 + x_2^2}$ граничний продукт MP_2 спадає, а середній продукт AP_2 не спадає.

3. На конвейєрі збирають телевізори шляхом з'єднання корпусу та кінескопа, тобто маємо фіксовані пропорції використання ресурсів (c_1=c_2=1). Виробничою функцією підприємства є функція Леонтьєва. Якщо на конвеєр надійшло 200 корпусів та 500 кінескопів у місяць, то буде зібрано 200 телевізорів. Знайдіть у цьому випадку граничну продукцію першого ресурсу (корпуса) та граничну продукцію другого ресурсу (кінескопу). Побудувати криву виробництва (залежності обсягу виробництва) від кількості корпусів, що надійшло, при фіксованій кількості кінескопів (500 штук).

4. Для лінійної виробничої функції $X = a \cdot K + b \cdot L,\ \ a > 0,\ \ b > 0$, побудувати ізокванти та ізокліналі. Знайти норми заміщення праці капіталом та капіталу працею.

5. Визначити граничну фондовіддачу та граничну продуктивність праці у економічній системі, функціонування якої описується виробничою функцією $X = F(K, L) = 1500 \cdot K^{0,3} \cdot L^{0,7}$, якщо вартість основних виробничих фондів $K = 3200$ у.г.о., витрати на оплату праці $L = 1000$ у.г.о.

6. Для виробничої функції $X = 1200 \cdot K^{0,4} \cdot L^{0,6}$ визначити еластичність виробництва за працею та за капіталом.

7. Виробнича функція має вигляд: $X = 0,931 \cdot K^{0,539} \cdot L^{0,594}$. За деякий період часу обсяг виробництва збільшився у 4,08 рази, основні виробничі фонди – у 6,62 рази, кількість працівників – у 1,79 рази. Яка частина зростання обсягу виробництва пояснюється зростанням його масштабу, а яка – зростанням його ефективності?

8. Записати рівняння ізокліналей для виробничої функції з попереднього завдання.

9. Виробнича функція Леонтьєва визначається рівністю $X = \min\left\{\frac{K}{a}, \frac{L}{b}\right\}$, де a та b – відповідна кількість одиниць капіталу та одиниць праці, необхідних для виробництва одиниці продукції. Побудувати ізокванти та ізокліналі виробничої функції Леонтьєва при $a = 5$, $b = 3$.

10. Підприємство за останні 3 роки показало наступні результати, наведені у таблиці.

Рік	Кількість метала, тис. т	Кількість Верстатів, од.	Персонал, тис. людей
1	13	10	0,8
2	30	20	1,8
3	50	30	2,8

Визначити коефіцієнти виробничої функції, якщо відомо, що вона є лінійною. Об’яснити економічний зміст її коефіцієнтів. Спрогнозувати обсяг виробництва металу на 4-й рік, якщо кількість верстатів планується довести до 40 одиниць, а чисельність працівників – до 3,5 тис. людей.