ЕЛЕМЕНТИ АЛГЕБРИ МНОЖИН

Множина – це сукупність об'єктів, об'єднаних за певною ознакою, причому таких, що для кожного можна встановити, належить цей об'єкт даній множині чи ні.

Як правило, елементи множини позначаються маленькими буквами, а самі множини – великими. Приналежність елемента m множині M позначається так: $m \in M$.

Множини можуть бути скінченими, нескінченними й порожніми. Множина, що містить скінчену кількість елементів, називається **скінченим**. Якщо множина не містить жодного елемента, то вона називається **порожнею** і позначається $\varnothing$.

Приклад: множина студентів 1 курсу фізичного факультету – скінчена множина; множина зірок у Всесвіті – нескінченна множина; множина студентів 1 курсу фізичного факультету, що добре знають три іноземні мови (японську, китайську й французьку) – порожня множина.

Множину A називають **підмножиною** множини B (позначається $A \subseteq B$), якщо всякий елемент множини A є елементом множини B: $A \subseteq B \xleftrightarrow{def} a \in A \Rightarrow a \in B$ (рис. 1.1). При цьому говорять, що B містить A, або B покриває A. Невключення підмножини C в множину B позначається так: $C \not\subset B$.

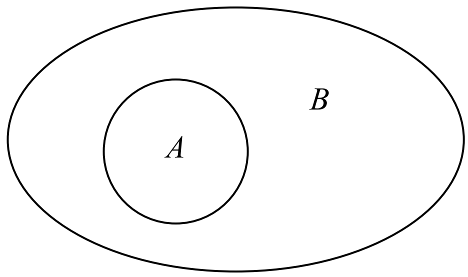

Рисунок 1.1

Множини A й B **рівні** ($A = B$) тоді й тільки тоді, коли $A \subseteq B$, і $B \subseteq A$, тобто елементи множин A і B збігаються.

Множина A називається **власною підмножиною** множини B, якщо $A \subseteq B$, а $B \not\subset A$. Позначається так: $A \subset B$.

Приклад: $B = \{a,b,c,d,e,f\}$, $A = \{a,c,d\}$, $A \subset B$.

Потужністю скінченої множини M називається число його елементів. Позначається $|M|$.

Приклад: $|B| = 6$, $|A| = 3$.

Прийнято вважати, що порожня множина $\varnothing$ є підмножиною будь-якої множини.

Універсальною множиною U називається множина всіх розглянутих у даній задачі елементів.

Способи завдання множин: множини можуть бути задані переліком всіх її елементів; арифметичними операціями; описом властивостей або графічно.

1. Завдання множин **переліком всіх її елементів**. Наприклад, множина A складається з букв a,b,c,d : $A = \{a,b,c,d\}$ або множина N включає цифри 0, 2, 3, 4: $N = \{0,2,3,4\}$.

Приклад: $\{0,2,3,4\} = \{3,4,2,0\} = \{4,0,2,3\} = \dots$.

2. Завдання множин описом характеристичних властивостей елементів за допомогою **арифметичних операцій**.

Приклад: $B = \left\{ b \mid b = \frac{\pi}{2} \pm \pi k, k \in N \right\}$, N – множина всіх натуральних чисел;

$M_2^n = 1,2,4,8,16,\dots$ або $M_2^n = \{m \mid m = 2^n, n \in N\}$; $C = A + B = \{x \mid x = a + b, a \in A, b \in B\}$.

3. Завдання множини **описом властивостей** елементів.

Приклад, M – це множина чисел, що є степенями двійки.

До опису властивостей природно висунути вимоги точності й недвозначності. Так, «множина всіх гарних пісень 2003 року» кожний складе по-різному. Надійним способом однозначного завдання множини є використання розв'язної процедури, яка для будь-якого об'єкта встановлює, чи володіє він даною властивістю й відповідно чи є елементом розглянутого множини.

Приклад, S – множина встигаючих студентів. Розв'язною процедурою включення в множину S є відсутність незадовільних оцінок в останній сесії.

4. Графічне завдання множин відбувається за допомогою діаграм Ейлера-Венна. Замкнена лінія-коло Ейлера – обмежує множину, а рамка – універсальну множину U (рис. 1.2). Задано дві множини: $A = \{a,b,c\}$ і

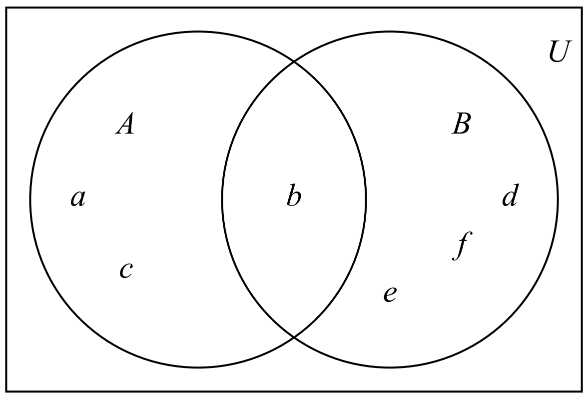

Рисунок 1.2

$B = \{b, d, e, f\}$. Якщо елементів множин небагато, то вони можуть на діаграмі вказуватися явно.

Операції над множинами

Об'єднанням множин A і B ($A \cup B$) називається множина, що складається з усіх тих елементів, які належать хоча б одній із множин A або B. (рис. 1.3):

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ або } x \in B\}.$$

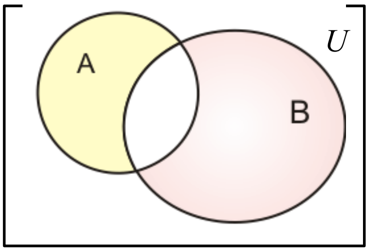

Рисунок 1.3

У загальному випадку операція об'єднання може бути використана для декількох множин: $A \cup B \cup C \cup D$ або $S = \bigcup_{i=1}^{k} A_i$, де k – кількість об'єднаних множин.

Приклад. Дано дві множини: $A = \{1, 2, 4, 6\}$ і $B = \{0, 3, 4, 6\}$. Знайдемо множину $C = A \cup B$: $C = \{0, 1, 2, 3, 4, 6\}$.

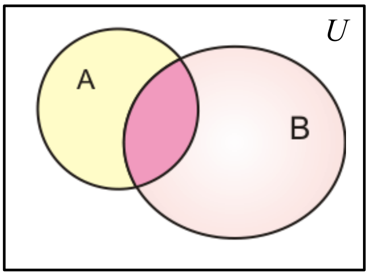

Рисунок 1.4

Перетином множин A і B ($A \cap B$) називається множина, що складається з елементів, що входять як у множину A, так і в множину B (рис. 1.4): $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ і } x \in B\}$.

Операція перетину так само може бути розповсюджена на декілька множин, наприклад, $A \cap B \cap C \cap D$ або $S = \bigcap_{i=1}^{k} A_i$, де k – кількість множин.

Приклад. Дано множини $A = \{1, 2, 4, 6\}$ й $B = \{0, 3, 4, 6\}$. Знайдемо їх перетин: $D = A \cap B = \{4, 6\}$.

Різницею множин A і B ($A \setminus B$) називається множина всіх елементів множини A, які не містяться в B (рис. 1.5, а): $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ і } x \notin B\}$; аналогічно (рис. 1.5, б): $B \setminus A = \{x \mid x \in B \text{ і } x \notin A\}$.

Приклад. Дано дві множини $A = \{1, 2, 4, 6\}$ й $B = \{0, 3, 4, 6\}$. Знайдемо їх різницю: $A \setminus B = \{1, 2\}$; $B \setminus A = \{0, 3\}$.

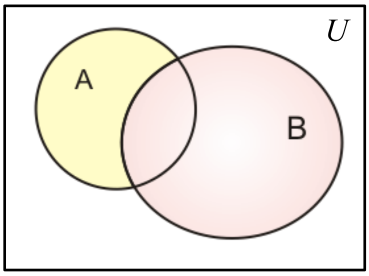

Рисунок 1.5, а

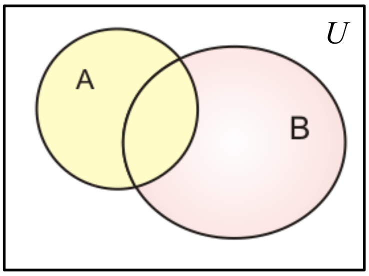

Рисунок 1.5, б

Доповненням (до універсальної множини U) множини A називається множина всіх елементів, що не належать A, але приналежних універсальній множині U (рис. 1.6): $\overline{A} = \{x \mid x \notin A \text{ і } x \in U\}$.

Приклад. Нехай універсальна множина U складається з букв російського алфавіту, A – множина голосних букв, тоді $\overline{A}$ – множина приголосних букв і букв ь и ъ.

Пріоритет виконання операцій: спочатку виконуються операції доповнення, потім перетину й тільки потім об'єднання й різниці. Послідовність виконання операцій може бути змінена дужками.

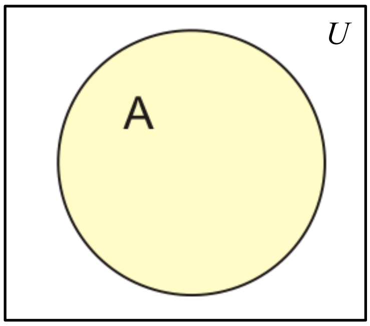

Рисунок 1.6