

МАТРИЦІ ТА ДІЇ НАД НИМИ

Матрицею розміру $m \times n$, де m – число рядків, n – число стовпців, називається прямокутна таблиця чисел, розташованих у певному порядку. Ці числа називаються **елементами матриці**. Місце кожного елемента однозначно визначається номером рядка й стовпця, на перетині яких він знаходиться. Елементи матриці позначаються a_{ij} , де i – номер рядка, а j – номер стовпця. Позначення:

$$A_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ або } A_{m \times n} = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}.$$

Матриця, у якій число рядків дорівнює числу стовпців, називається **квадратною** (квадратну матрицю розміру $n \times n$ називають матрицею n -го порядку).

Елементи, у яких номер рядка й стовпця, на перетині яких він знаходиться, співпадає, утворюють **головну діагональ**.

Квадратна матриця, у якій всі елементи, окрім головної діагоналі, дорівнюють нулю, називається **діагональною**.

Діагональна матриця, у якій всі елементи головної діагоналі рівні 1, називається **одиничною**. Позначення:

$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Квадратна матриця називається **трикутною**, якщо всі елементи, розташовані по одну сторону від головної діагоналі, рівні 0.

Матриця, усі елементи якої рівні 0, називається **нульовою**. Позначення:

$$\theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Матриці називаються **рівними**, якщо вони мають однаковий розмір і рівні відповідні елементи, тобто

$$A = B, \text{ якщо } a_{ij} = b_{ij}, \text{ де } i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}.$$

Якщо $a_{mn} = a_{nm}$, то матриця називається **симетричною**. Наприклад:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 6 \\ 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Матриця, що містить один рядок або один стовпець, називається **вектором** (або матрицею-рядком або матрицею-стовпцем відповідно). Їх вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} - \text{матриця-стовпець}, \quad B = (b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_n) - \text{матриця-рядок}.$$

Матриця розміру 1×1 , що складається з одного числа, отожднюється із цим числом, тобто $(5)_{1 \times 1} \in 5$.

Транспонування

Матриця, отримана з даною заміною кожного її рядка стовпцем з тим же номером, називається матрицею, **транспонованою** до даної. Позначення: A^T або A^t .

Приклад.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix};$$
$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A^t = (1 \ 0).$$

Транспонована матриця має властивість: $(A^t)^t = A$.

Додавання матриць

Сумою двох матриць однакового розміру називається матриця того ж розміру, кожний елемент якої є сумою відповідних елементів матриць-доданків, тобто

якщо $A_{m \times n} = (a_{ij})$ й $B_{m \times n} = (b_{ij})$, то $C_{m \times n} = A_{m \times n} + B_{m \times n} = (a_{ij} + b_{ij})$, де $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$.

Приклад.

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -2 & -5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

Аналогічно визначається **різниця матриць**.

Множення матриці на число

Добутком матриці $A_{m \times n} = (a_{ij})$ на число $k \in R$ називається матриця $B_{m \times n} = (b_{ij})$, кожний елемент якої отриманий множенням відповідного елемента матриці A на число k , тобто $b_{ij} = k \cdot a_{ij}$, де $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$.

Приклад.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad k = 2, \quad A \cdot k = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 6 & 8 & 10 \end{pmatrix}.$$

Матриця $-A = (-1) \cdot A$ називається **протилежною** матриці A .

Різниця матриць $A - B$ можна визначити так: $A - B = A + (-B)$.

Властивості операцій додавання матриць і множення матриці на число

$(A, B, C - \text{матриці, } \alpha, \beta \in R)$:

- | | |
|----------------------------------|--|
| 1. $A + B = B + A$; | 5. $1 \cdot A = A$; |
| 2. $A + (B + C) = (A + B) + C$; | 6. $\alpha \cdot (A + B) = \alpha A + \alpha B$; |
| 3. $A + \theta = A$; | 7. $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha A + \beta A$; |
| 4. $A + (-A) = \theta$; | 8. $\alpha \cdot (\beta A) = (\alpha \beta) \cdot A$. |

Добуток матриць

Добутком матриці $A_{m \times n} = (a_{ij})$ на матрицю $B_{n \times p} = (b_{jk})$ називається така матриця $C_{m \times p} = (c_{ik})$, елемент i -й рядка й k -го стовпця якої дорівнює сумі добутків елементів i -й рядка матриці A й відповідних елементів k -го стовпця матриці B , тобто

$$c_{ik} = a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} \cdot b_{2k} + \dots + a_{in} \cdot b_{nk}, \text{ де } i = \overline{1, m}, \quad k = \overline{1, p}.$$

Зауваження 1. Добуток матриць можливий у випадку, коли кількість стовпців першої матриці дорівнює кількості рядків другої.

Зауваження 2. Якщо матриці A й B квадратні одного розміру, то добутки AB й BA завжди існують.

Приклад. Знайти добуток матриць $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ і $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Розв'язання.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 & 1 \cdot 4 & 1 \cdot 1 \\ 4 \cdot 2 & 4 \cdot 4 & 4 \cdot 1 \\ 3 \cdot 2 & 3 \cdot 4 & 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 8 & 16 & 4 \\ 6 & 12 & 3 \end{pmatrix};$$

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = (2 \cdot 1 + 4 \cdot 4 + 1 \cdot 3) = (21) = 21.$$

Матриці A й B називаються **переставними**, якщо $AB = BA$.

Властивості операцій транспонування, множення, додавання матриць і множення матриці на число (A, B, C – матриці, $\alpha, \beta \in R$), якщо записані операції мають сенс:

- | | |
|--|--|
| 1. $A \cdot B \neq B \cdot A$; | 5. $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$; |
| 2. $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$; | 6. $\alpha \cdot (A \cdot B) = (\alpha A) B$; |
| 3. $A \cdot E = E \cdot A = A$; | 7. $(A + B)^t = A^t + B^t$; |
| 4. $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$; | 8. $(AB)^t = B^t A^t$. |

Елементарні перетворення матриць

Елементарними перетвореннями матриць є:

- перестановка місцями двох паралельних рядів матриці;
- множення всіх елементів ряду матриці на число, відмінне від нуля;
- додаток до всіх елементів ряду матриці відповідних елементів паралельного ряду матриці, помножених на одне й теж число.

Дві матриці A й B називаються **еквівалентними**, якщо одну з них можна отримати з іншої за допомогою елементарних перетворень. Позначення: $A \sim B$.

За допомогою елементарних перетворень будь-яку матрицю можна привести до матриці, у якій:

- після нульового ряду йде тільки нульовий ряд;
- якщо перші ненульові елементи двох будь-які сусідніх рядів мають номери k й m , то $k < m$.

Таку матрицю називають **ступінчастою**. Наприклад,

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Приклад. Привести до ступінчастого виду матрицю

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Виконуючи елементарні перетворення, одержимо:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2 \cdot I} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -6 & 3 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{+3 \cdot II} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$