ВИЗНАЧНИКИ ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ

Квадратній матриці A порядку n можна співставити число $\det A$ (або $|A|$, або Δ), яке називають її **визначником**, у такий спосіб:

$$n=1, \qquad A=(a_1), \qquad \det A = a_1;$$

$$n=2, \qquad A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \qquad \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix};$$

$$n=3, \qquad A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \qquad \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix};$$

$$\ldots$$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Визначник матриці A також називають її **детермінантом**. Правило обчислення детермінанта для матриці порядку n є досить складним для сприйняття й застосування. Однак відомі методи, що дозволяють реалізувати обчислення визначників високих порядків на основі визначників нижчих порядків.

Обчислення визначника 2-го порядку ілюструється схемою:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Приклад.

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 2\cdot 6 - 5\cdot(-3) = 27.$$

При обчисленні визначника 3-го порядку зручно користуватися:

– **правилом трикутників**, яке ілюструється схемою:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

– **правилом прямих**, яке ілюструється схемою:

$$\begin{array}{c} \qquad\quad «+» \qquad\quad «–» \\ \det A = \left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} = \end{array}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Приклад.

$$\begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 6 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 9 \text{ (двома способами).}$$

Властивості визначників

1. Визначник не міняється при транспонуванні, тобто $\det A = \det A^t$.
2. При перестановці двох паралельних рядів визначник змінює знак.
3. Визначник, що має два однакові ряди, дорівнює нулю.
4. При множенні ряду матриці на число її визначник множиться на це число.

5. Якщо елементи деякого ряду пропорційні відповідним елементам паралельного ряду, то такий визначник дорівнює нулю.

6. Якщо елементи якого-небудь ряду визначника являють собою суми двох доданків, то визначник може бути розкладено на суму двох відповідних визначників. Наприклад,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}+b \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}+c \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}+d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b \\ a_{21} & a_{22} & c \\ a_{31} & a_{32} & d \end{vmatrix}.$$

7. Визначник не зміниться, якщо до елементів одного ряду додати відповідні елементи паралельного ряду, помножені на будь-яке число.

Мінором деякого елемента a_{ij} визначника n-го порядку називається визначник $(n-1)$-го порядку, отриманий з вихідного шляхом викреслювання рядка й стовпця, на перетині яких перебуває обраний елемент. Позначення: M_{ij}. Наприклад, для визначника $\begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 6 & 0 & -3 \end{vmatrix}$:

$M_{12} = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} = -9 + 24 = 15$, $M_{31} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = 8 - 1 = 7$.

Алгебраїчним доповненням елемента a_{ij} визначника називається його мінор, узятий зі знаком $(-1)^{i+j}$, тобто $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$. Наприклад, для визначника $\begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 6 & 0 & -3 \end{vmatrix}$: $A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -15$,

$A_{31} = (-1)^{3+1} M_{31} = 7$.

8. (*Розкладання визначника по елементах деякого ряду*). Визначник дорівнює сумі добутків елементів деякого ряду на відповідні їм алгебраїчні доповнення, тобто $\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}$ (по елементах i-й рядка) або $\det A = a_{1k}A_{1k} + a_{2k}A_{2k} + \ldots + a_{nk}A_{nk}$ (по елементах k-го стовпця).

Ця властивість є спосіб обчислення визначників вищих порядків.

Приклад.

$$\to \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (-2 \cdot 1 - 1 \cdot 3) - 2(0 \cdot 1 - 3 \cdot 3) + (0 \cdot 1 + 3 \cdot 2) = 19.$$

9. Сума добутків елементів якого-небудь ряду визначника на алгебраїчні доповнення відповідних елементів паралельного ряду дорівнює нулю, тобто $a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + \ldots + a_{1n}A_{2n} = 0$.

10. Визначник трикутної матриці дорівнює добутку елементів головної діагоналі.

11. Визначник від добутку матриць дорівнює добутку визначників.