

ЕЛЕМЕНТИ АЛГЕБРИ МНОЖИН

Приклад 1 Задати різними способами множину A всіх парних чисел 2, 4, 6, ..., що не перевищують 1000.

Розв'язання.

1. Переліком: $A = \{2, 4, 6, 8, 10, \dots, 998, 1000\}$;
2. Описом: $A = \left\{x \mid x \in N \text{ и } \frac{x}{2} \in N, N \leq 1000\right\}$, де N – множина натуральних чисел.
3. Арифметичними операціями: а) $2 \in A$; б) якщо $x \in A$, то $(x+2) \in A$; в) $x \leq 1000$.

Приклад 2 Опитування 100 студентів, що вивчають іноземні мови, показав: англійську мову вивчають 29 студентів, німецьку – 30, французьку – 9, тільки французьку – 1, англійську і німецьку – 10, німецьку і французьку – 4, усі три мови – 3 студента. Скільки студентів не вивчають жодної мови? Скільки студентів вивчають тільки німецьку мову? При розв'язанні використовувати діаграми Венна.

Розв'язання. Уведемо позначення: I – множину всіх опитаних студентів; A – множина студентів, що вивчають англійську мову; H – множина студентів, що вивчають німецьку мову; Φ – множина студентів, що вивчають французьку мову (рис. 1.7)

За умовою задачі очевидно, що $A \cap \Phi \cap H = 3$, тоді

$$(A \cap H) \setminus (A \cap \Phi \cap H) = 4 - 3 = 1;$$

$$(A \cap H) = (A \cap \Phi \cap H) + 1 = 10 - 3 = 7.$$

У такому випадку тільки німецьку мову вивчають $30 - 7 - 3 = 19$ студентів.

З умови задачі також випливає, що $(A \cap \Phi) \setminus (A \cap \Phi \cap H) = 9 - 1 - 1 - 3 = 4$, а тому тільки англійську мову вивчають $29 - 4 - 3 - 7 = 15$ студентів. Тоді число студентів, що не вивчають жодної мови, буде

$$C \setminus (A \cup \Phi \cup H) = 100 - (1 + 1 + 3 + 4 + 7 + 15 + 19) = 50 \text{ студентів.}$$

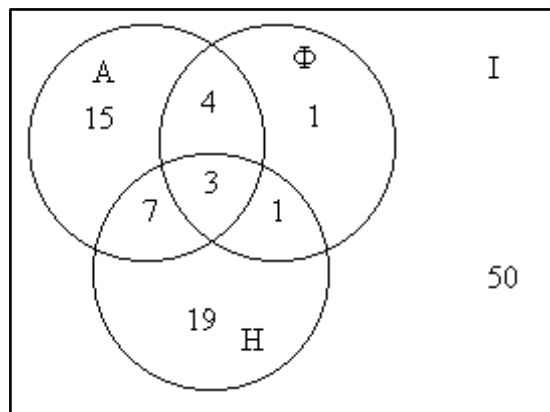


Рисунок 1.7

Задачі для самостійного розв'язування

№ 1.1. Записати множини, перелічивши всі її елементи:

$$A = \{x \mid x \in N \text{ и } x^2 - 4x + 3 = 0\};$$

$$B = \{x \mid x \in R \text{ и } x^2 - 2x + 2 = 0\}.$$

№ 1.2. Знайти об'єднання, переріз та різницю множин:

а) $A = \{x \mid 0 < x < 2\}$, $B = \{x \mid 1 \leq x \leq 3\}$;

б) $A = \{x \mid x^2 - 2x > 0\}$, $B = \{x \mid x^2 - 4x + 3 > 0\}$.

№ 1.3. Множина A складається з натуральних чисел, що діляться на 4, множина B – з натуральних чисел, що діляться на 10, множина C – з натуральних чисел, що діляться на 75. З яких чисел складається множина $A \cap B \cap C$?

№ 1.4. Нехай $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $X = \{1, 5\}$, $Y = \{1, 2, 4\}$, $Z = \{2, 5\}$.

Знайти множини:

а) $X \cap \bar{Y}$;

б) $(X \cap Z) \cap \bar{Y}$;

в) $X \cup (Y \cap Z)$;

г) $(X \cup Y) \cap (X \cup Z)$;

д) $\overline{X \cup Y}$;

е) $\bar{X} \cap \bar{Y}$;

ж) $\overline{X \cap Y}$;

з) $(X \cup Y) \cup Z$;

и) $X \cup (Y \cup Z)$;

к) $X \setminus Z$;

л) $(X \setminus Z) \cup (Y \setminus Z)$.

№ 1.5. Нехай $U = \{a, b, c, d, e, f\}$, $A = \{a, b, c\}$, $B = \{f, e, c, a\}$, $C = \{d, e, f\}$.

Знайти множини:

а) $A \setminus C$;

б) $B \setminus C$;

в) $C \setminus B$;

г) $A \setminus B$;

д) $\bar{A} \cup B$;

е) $B \cap \bar{A}$;

ж) $A \cap C$;

з) $C \cap A$.

Розв'яжіть задачі № 1.6 – 1.14 з використанням діаграм Ейлера-Венна.

№ 1.6. У студентському потоці 37 людей добре знають математику, а 25 людей – електроніку, і 19 людей добре знають і математику й електроніку. Якщо в потоці кожний зі студентів знає хоча б один із цих предметів, то скільки студентів у потоці?

№ 1.7. З 250 студентів 151 вивчають німецьку мову, 136 – французьку мову, 27 – італійську, 63 – французьку й німецьку, 7 – італійську й французьку, 11 – німецьку й італійську, 4 – усі три мови.

а) Скільки студентів вивчають тільки німецьку або тільки французьку мови?

б) Скільки студентів вивчають тільки італійську мову?

в) Скільки студентів вивчають німецьку й французьку мову, але не італійську?

г) Скільки студентів не вивчають жодної мови?

д) Скільки студентів вивчають хоча б дві іноземні мови?

№ 1.8. Кожний з 500 студентів зобов'язано відвідувати хоча б один із трьох спецкурсів: з математики, фізики, астрономії. Три спецкурси відвідують 10 студентів, з математики й астрономії – 25 студентів, спецкурс тільки з фізики – 80 студентів. Відомо також, що спецкурс з математики відвідують 345 студентів, з фізики – 145, з астрономії – 100 студентів. Скільки студентів відвідують спецкурс тільки з астрономії? Скільки студентів відвідують два спецкурси?

№ 1.9. Екзамен з математики містив три задачі: по алгебрі, геометрії й тригонометрії. З 800 абітурієнтів задачу по алгебрі розв'язали 250 людей; по алгебрі або геометрії – 660 людей; по дві задачі розв'язали 400 людей, з них дві задачі по алгебрі і й геометрії розв'язали 150 людей, по алгебрі й тригонометрії – 50 людей; жоден абітурієнт не розв'язав усі задачі; 20 абітурієнтів не розв'язали ні однієї задачі; тільки по тригонометрії задачі розв'язали 120 людей. Скільки абітурієнтів розв'язали тільки одну задачу? Скільки абітурієнтів розв'язали задачі по тригонометрії?

№ 1.10. На курсах іноземних мов вчиться 600 людей. З них французьку вивчають 220 людей, англійську – 270 людей. Слухачі, що вивчають англійську мову, не вивчають німецьку мову; одну французьку мову вивчають 100 людей, одну німецьку мову вивчають 180 людей. Скільки людей вивчають по дві іноземні мови? Скільки людей вивчають одну іноземну мову?

№ 1.11. На кафедрі іноземних мов працюють 18 викладачів. З них 12 викладають англійську мову, 11 – німецьку мову, 9 – французьку мову. 5 викладачів викладають англійську й німецьку мови, 4 – англійську й французьку, 3 – німецьку й французьку. Скільки викладачів викладають усі три мови? Скільки викладачів викладають тільки дві мови?

№ 1.12. Група студентів з 25 людей здала екзаменаційну сесію з наступними результатами: 2 людини одержали тільки «відмінно»; 3 людини одержали відмінні, добрі й задовільні оцінки; 4 людини тільки «добре»; 3 людини тільки добрі й задовільні оцінки. Число студентів, що здали сесію тільки на «задовільно», дорівнює числу студентів, що здали сесію тільки на «добре» і «відмінно». Студентів, що одержали тільки відмінні й задовільні оцінки – немає. Задовільні або добрі оцінки одержали тільки 22 студенти. Скільки студентів здали сесію тільки на «задовільно»?

№ 1.13. Викладачі кафедри прикладної математики викладають на трьох факультетах: механічному, технологічному, економічному. На технологічному факультеті працює 22 викладачі, на механічному – 23 викладачі, на механічному й економічному – 36 викладачів. Тільки на технологічному факультеті працюють 10 викладачів. 2 – на трьох факультетах. 5 викладачів працюють тільки на механічному й економічному факультетах. Число викладачів, що працюють тільки на механічному й технологічному факультетах, дорівнює числу викладачів, що працюють на економічному й технологічному факультетах. Скільки викладачів працює на кафедрі? Скільки викладачів працює тільки на одному факультеті?

№ 1.14. Екзамен з математики містив три задачі: по алгебрі, геометрії й тригонометрії. З 750 абітурієнтів задачу по алгебрі розв'язали 400 абітурієнтів, по геометрії – 480, по тригонометрії – 420. Задачі по алгебрі або геометрії розв'язали 630 абітурієнтів; по геометрії або тригонометрії – 600 абітурієнтів; по алгебрі або тригонометрії – 620 абітурієнтів. 100 абітурієнтів не розв'язали ні однієї задачі. Скільки абітурієнтів розв'язали всі задачі? Скільки абітурієнтів розв'язали тільки одну задачу?