ОБЕРНЕНА МАТРИЦЯ ТА МЕТОДИ ЇЇ ОБЧИСЛЕННЯ

Нехай A – квадратна матриця n-го порядку.

Квадратна матриця називається **невиродженою**, якщо її визначник відмінний від нуля. А якщо ні, то матриця називається **виродженою**.

Матриця A^{-1} називається **оберненою** матриці A, якщо виконується умова $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$, де E – одинична матриця того ж порядку, що й матриця A. Матриця A^{-1} має той же порядок, що й матриця A.

Приклад. Визначити, при яких значеннях λ не існує матриця, обернена даній $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ \lambda & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$?

Розв’язання. Оберненої матриці не існує, якщо вихідна матриця вироджена, тобто її визначник буде дорівнювати нулю. Будемо мати:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ \lambda & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 2\lambda - 12 + 2\lambda = 4\lambda - 9,$$

$$|A| = 0 \Rightarrow 4\lambda - 9 = 0,\ \lambda = \frac{9}{4}.$$

Відповідь: $\lambda = \dfrac{9}{4}$.

Властивості оберненої матриці:

1. $\det\left(A^{-1}\right) = \dfrac{1}{\det A}$;
2. $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$;
3. $\left(A^{-1}\right)^t = \left(A^t\right)^{-1}$.

Усяка невироджена матриця має обернену, яку можна обчислити двома методами:

1. *Метод алгебраїчних доповнень*:
   - обчислити визначник даної матриці: $\det A$;
   - обчислити алгебраїчні доповнення всіх елементів даної матриці: A_{ij};
   - записати обернену матрицю у вигляді: $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$.

2. *Метод приєднання одиничної матриці*:
   - приєднати до даної матриці одиничну того ж порядку, тобто записати матрицю виду: $(A \mid E)$;
   - привести записану матрицю до виду $\left(E \mid A^{-1}\right)$ за допомогою елементарних перетворень матриць.