ОЗНАЧЕННЯ СЛАР, КЛАСИФІКАЦІЯ. МЕТОДИ РОЗВ’ЯЗАННЯ ТА ДОСЛІДЖЕННЯ СЛАР

Ранг матриці

Нехай дана матриця розміру $m \times n$. Викреслимо із цієї матриці деякі рядки й стовпці так, щоб число рядків і стовпців, що залишилися, стало однаково, наприклад k. Із цих рядків і стовпців складемо визначник. Він називається **мінором** k-го порядку. Кількість мінорів визначається числами m і n, а найвищий порядок рівний $\min\{m,n\}$. Найменший порядок цих визначників рівний 1, причому ці визначники – елементи матриці.

Припустимо, що всі визначники деякого порядку k, що входять у матрицю, рівні 0, тоді всі визначники $(k+1)$-го порядку також рівні 0, тому що будь-який визначник порядку $(k+1)$ можна представити у вигляді суми добутків елементів його деякого рядка (стовпця) на алгебраїчні доповнення (а це визначники k-го порядку) цих елементів. Якщо всі визначники $(k+1)$-го порядку дорівнюють нулю, то й усі визначники $(k+2)$-го порядку також рівні 0 і т.д.

Отже, якщо всі визначники деякого певного порядку, що входять у дану матрицю, рівні 0, то і всі визначники більш високого порядку цієї матриці рівні 0.

Рангом матриці називається найвищий порядок, відмінних від нуля мінорів цієї матриці й позначається $rangA$.

Якщо ранг матриці рівний k, то серед визначників порядку k, що входять у цю матрицю, є принаймні один, відмінний від 0, але всі визначники порядку $(k+1)$ рівні 0.

Ранг нульової матриці рівний 0.

Властивості рангу матриці:

1. При транспонуванні матриці її ранг не міняється.
2. Якщо викреслити з матриці нульовий ряд, то ранг матриці не зміниться.
3. Ранг матриці не змінюється при елементарних перетвореннях матриці.

Способи обчислення рангу матриці

1. Метод мінорів: пошук базисного мінору.
2. Метод елементарних перетворень матриці: ранг матриці дорівнює кількості ненульових рядків (або стовпців) у ступінчастій матриці.

Якщо за допомогою елементарних перетворень не вдається знайти матрицю, еквівалентну вихідній, але меншого розміру, то знаходження рангу матриці слід починати з обчислення мінорів найвищого можливого порядку.

Системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Розглянемо систему m рівнянь із n невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{1}$$

Ця система рівнянь характеризується матрицею

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right),$$

яка називається **розширеною матрицею системи**. Її розмір – $m \times (n+1)$. Матриця, що стоїть ліворуч вертикальної риси, називається **матрицею системи**. **Елементами матриці системи** (1) є коефіцієнти при невідомих. Матриця, що стоїть праворуч від вертикальної риси, називається **стовпцем вільних членів**.

Розв’язком системи рівнянь (1) називають будь-яку впорядковану сукупність дійсних чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, яка має таку властивість: кожне рівняння системи перетворюється в тотожність, якщо покласти в ньому $x_1 = \alpha_1,\, x_2 = \alpha_2,\, \ldots,\, x_n = \alpha_n$.

Система (1) називається **сумісною**, якщо вона має хоча б один розв'язок. Якщо система не має розв'язків, вона називається **несумісною**.

Якщо система (1) має більше одного розв'язку, вона називається **невизначеною**, а якщо має єдине, то називається **визначеною**.

Дві системи лінійних алгебраїчних рівнянь називаються **еквівалентними** (**рівносильними**), якщо кожний розв'язок першої системи є розв'язком другої й навпаки.

Теорема 1 Якщо від матриці $\widetilde{A}$ до матриці $\widetilde{B}$ можна перейти скінченим числом елементарних перетворень рядків, то всякий розв'язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь, відповідний матриці $\widetilde{A}$, служить розв'язком системи з матрицею $\widetilde{B}$ й навпаки, тобто розглянуті системи рівнянь еквівалентні.

Теорема 2 (теорема Кронекера-Капеллі) Система лінійних алгебраїчних рівнянь (1) сумісна тоді й тільки тоді, коли ранг матриці системи дорівнює рангу розширеної матриці цієї системи, тобто $rang\,\widetilde{A} = rang\,A$.

Зауваження. 1) Якщо ранг матриці сумісної СЛАР дорівнює числу невідомих, то система має єдиний розв'язок, тобто є визначеною. 2) Якщо ранг матриці сумісної СЛАР менше числа невідомих, то система має нескінченну множину розв'язків, тобто є невизначеною.

Методи розв'язку СЛАР

Алгоритм розв'язку системи рівнянь (1) ***методом Гаусса***:

1. Записати розширену матрицю $\widetilde{A}$ вихідної системи рівнянь.
2. Привести матрицю $\widetilde{A}$ до ступінчастого виду за допомогою елементарних перетворень рядків. Якщо в отриманій ступінчастій матриці $\widetilde{B}$ є рядок, у якому перший ненульовий елемент перебуває на останньому місці, то вихідна система розв'язків не має (несумісна).
3. Якщо система рівнянь сумісна, то в системі рівнянь із матрицею $\widetilde{B}$ необхідно відкинути рівняння, які відповідають нульовим рядкам матриці $\widetilde{B}$. У рівняннях, що залишилися, виділяємо головні невідомі (визначник, складений з коефіцієнтів при них, не дорівнює еулю), а члени з вільними невідомими переносимо в праві частини.
4. Послідовно виражаємо головні невідомі через вільні, рухаючись від останнього рівняння до першого, отримаємо загальний розв'язок системи.
5. Надаючи вільним невідомим різні числові значення й обчислюючи відповідні значення головних невідомих будемо одержувати різні розв'язки вихідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь, отримаємо частинні розв'язки системи.

Приклад. Розв'язати методом Гаусса системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

1) $\begin{cases} 2x+3y=12, \\ 4x-5y=2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x+5y=3, \\ 4x+10y=6; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 5x+3y=7, \\ 10x+6y=2. \end{cases}$

Відповідь: 1) $x=3$, $y=2$; 2) $x=1{,}5-2{,}5y$; 3) $\varnothing$.

Метод Крамера

Розглянемо тепер систему *n* лінійних алгебраїчних рівнянь із *n* невідомими ($n \geq 2$)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{2}$$

Одержимо явні вирази для розв'язку системи (2) через коефіцієнти a_{ij} цієї системи й вільні члени b_i в припущенні, що визначник системи, тобто визначник її матриці, не дорівнює нулю.

Теорема 3 (Теорема Крамера) Якщо визначник матриці системи лінійних алгебраїчних рівнянь (2)

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

відмінний від нуля, то система має єдиний розв'язок, тобто є сумісною й визначеною. Цей розв'язок визначається за правилом Крамера

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \ldots, x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta},$$

де Δ_i – визначник, який отримано з визначника Δ заміною *i*-го стовпця стовпцем вільних членів.

Наслідок. Якщо система n однорідних лінійних рівнянь із n невідомими має хоча б один нетривіальний розв'язок, то її визначник дорівнює нулю.

Зауваження. Система (2) може:

1) мати єдиний розв'язок, коли $\Delta \neq 0$;
2) мати нескінченну множину розв'язків, коли $\Delta = \Delta_i = 0$, $i = \overline{1, n}$;
3) не мати жодного розв'язку, коли $\Delta = 0$ й хоча б один з визначників Δ_i, $i = \overline{1, n}$, відмінний від нуля.

Приклад. Розв'язати методом Крамера системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

1) $\begin{cases} 2x + 3y = 12, \\ 4x - 5y = 2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x + 5y = 3, \\ 4x + 10y = 6; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 5x + 3y = 7, \\ 10x + 6y = 2. \end{cases}$

Відповідь: 1) $x = 3$, $y = 2$; 2) R, тому що $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0$; 3) $\varnothing$, тому що $\Delta = 0$, $\Delta_x = 36$, $\Delta_y = -60$.

Матричний спосіб

Систему n лінійних алгебраїчних рівнянь із n невідомими (2) можна записати в матричному виді: $A \cdot X = B$, де A – матриця системи, X – матриця-стовпець невідомих $x_1, x_2, \ldots, x_n$, а B – матриця-стовпець вільних членів. Якщо A – невироджена матриця, то після множення ліворуч на A^{-1} обидві частини матричного рівняння $A \cdot X = B$, одержимо $A \cdot \left(A^{-1} \cdot X\right) = A^{-1} \cdot B$. Так як $A \cdot \left(A^{-1} \cdot X\right) = \left(A \cdot A^{-1}\right) \cdot X = EX = X$, то очевидно

$$X = A^{-1} \cdot B.$$