# КВАДРАТИЧНІ ФОРМИ

**Квадратичною формою** називається однорідний многочлен другого степеня від змінних $x_1, x_2, ..., x_n$ виду

$$f = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + ... + a_{1n}x_1x_n + a_{21}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + ... + a_{2n}x_2x_n + ... + +a_{n1}x_1x_n + a_{n2}x_2x_n + ... + a_{nn}x_n^2 =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j \ ,$$

де коефіцієнти $a_{ij}$, $(i, j = 1,...,n\ )$ – дійсні числа. Вважають $a_{ik} = a_{ki}$.

Із квадратичною формою можна зв'язати квадратну симетричну матрицю

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

складену з коефіцієнтів квадратичної форми. Ранг $r$ матриці називається **рангом квадратичної форми**. Якщо $r = n$, то квадратична форма $n$ змінних називається **невиродженою**. Якщо ця матриця діагональна, то говорять квадратична форма має **канонічний** (діагональний) вид:

$$f = b_1y_1^2 + b_2y_2^2 + \cdots + b_ny_n^2.$$

Квадратичну форму можна записати в матричному виді:

$$f = x_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n) + \cdots + x_n(a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n) =$$

$$= (x_1, x_2, x_n) \cdot \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{pmatrix} = (x_1, x_2, x_n) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Таким чином,

$$f = X^t \cdot A \cdot X \ ,$$

де $A$ – матриця квадратичної форми, а $X$ – матриця-стовпець $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

*Основна задача теорії квадратичних форм* – за допомогою різних замін змінних (лінійних перетворень) привести квадратичну форму до канонічного виду

Нехай задане лінійне перетворення $X = BX'$, що виражає змінні $x_1, x_2, ..., x_n$ через нові змінні $x_1', x_2', ..., x_n'$. Якщо $\Delta(B) \neq 0$, то перетворення називається **невиродженим**. У цьому випадку $X' = B^{-1}X$, що виражає нові змінні через старі. Якщо у квадратичній формі з матрицею $A$ зроблене лінійне перетворення змінних з матрицею $B$, то отримана квадратична форма буде мати матрицю $B^tAB$.

Приведення квадратичних форм до діагонального виду **невиродженим** лінійним перетворенням змінних може бути здійснене нескінченним числом способів. При цьому коефіцієнти при квадратах змінних у діагональній формі можуть не збігатися, але кількість додатних, від'ємних і нульових коефіцієнтів повинне збігатися.

Стовпець $X$ називається **нормованим**, якщо сума квадратів його елементів дорівнює одиниці, тобто

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1 \text{ або } X^tX = 1.$$

Два стовпці $X$ й $Y$, що мають однакове число елементів, називаються **ортогональними**, якщо сума добутків їх відповідних елементів дорівнює нулю, тобто

$$x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n = 0 \text{ або } X^tY = Y^tX = 0.$$

Квадратна матриця називається **ортогональною**, якщо всі її стовпці нормовані й попарно ортогональні. Щоб квадратна матриця $A$ була ортогональною, необхідно й достатньо, щоб $A^t A = E$. Лінійне перетворення змінних називається **ортогональним**, якщо його матриця ортогональна.

Властивості ортогональних матриць:

1. Визначник ортогональної матриці рівний $\pm 1$.
2. Добуток ортогональних матриць є ортогональна матриця.
3. Одинична матриця ортогональна.
4. Для ортогональної матриці $A$ обернена матриця існує й рівна транспонованій $A^{-1} = A^t$, причому обернена матриця ортогональна.

Квадратична форма називається **додатно визначеною**, якщо при будь-яких значеннях аргументів $f \geq 0$, причому $f = 0$ тоді й тільки тоді, коли $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$.

Щоб квадратична форма була додатно визначеною необхідно й достатньо, щоб при приведенні її до діагонального виду **невиродженим** лінійним перетворенням змінних усі коефіцієнти при квадратах нових змінних були додатні.

Квадратична форма $f$ називається **від'ємно визначеною**, якщо форма $-f$ – додатно визначена.

Квадратична форма називається **невизначеною**, якщо вона не є визначеною ні додатно, ні від'ємно.

Якщо квадратичну форму можна представити у вигляді

$$f = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2, \text{ де } \lambda = 0, \pm 1,$$

те говорять, що квадратична форма має **нормальний вид**.

***Методи приведення квадратичної форми до канонічного виду***

*Метод Лагранжа.* Виділення повних квадратів відносно змінних.

*Метод власних векторів.*

Алгоритм:

1) Записати матрицю $A$ розглянутої квадратичної форми.

2) Визначити з рівняння $|A - \lambda E| = 0$ власні значення цієї матриці.

3) Для кожного власного значення $\lambda_k$ визначити відповідні йому власні вектори ($n$ мірні матриці-стовпці).

4) Після того, як будуть знайдені всі $n$ власних векторів матриці $A$, потрібно координати цих векторів помістити у відповідні стовпці шуканої матриці $B$.

5) Написати канонічний вид квадратичної форми

$$f = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2,$$

де $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ власні значення матриці $A$.

6) Записати вид лінійного перетворення змінних $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, яке приводить задану квадратичну форму $f = X^t \cdot A \cdot X$ до канонічного виду.