

ВИЗНАЧНИКИ ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ

Приклад 1 Для заданих матриць

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -5 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

обчислити $\det(AB)$.

Розв'язання. Знайдемо добуток заданих матриць:

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ -18 & 15 \end{pmatrix}.$$

Тоді визначник отриманої матриці буде:

$$\det(AB) = \begin{vmatrix} 10 & 0 \\ -18 & 15 \end{vmatrix} = 150.$$

Приклад 2 Обчислити визначники:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix}; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}; \quad \text{в) } \begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 8 \\ -1 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання.

$$\text{а) } \begin{vmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix} = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1;$$

$$\text{б) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 + 0 + 18 - (-6 + 3 + 0) = 19;$$

↓

$$\text{в) } \begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 8 \\ -1 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} -\text{III} \\ \\ +\text{II} \end{matrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 6 \\ -1 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ 0 & 6 & 7 & 5 \end{vmatrix} \begin{matrix} +\text{II} \cdot 3 \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 0 & 21 & 4 & 9 \\ -1 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ 0 & 6 & 7 & 5 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 21 & 4 & 9 \\ 5 & 3 & 2 \\ 6 & 7 & 5 \end{vmatrix} = 122.$$

Завдання для самостійного розв'язування

№ 1 Обчислити визначники:

$$1) \begin{vmatrix} 10 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix};$$

$$2) \begin{vmatrix} a & a-b \\ a+b & a-1 \end{vmatrix};$$

$$3) \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \cos \alpha \\ \cos \alpha & 1 \end{vmatrix};$$

$$4) \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix};$$

$$5) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & -3 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix};$$

$$6) \begin{vmatrix} 5 & 1 & 10 \\ 2 & -1 & 6 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix};$$

$$7) \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix};$$

$$8) \begin{vmatrix} 8 & 7 & 2 & 0 \\ 8 & 7 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & -3 & 2 \end{vmatrix};$$

$$9) \begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{vmatrix};$$

$$10) \begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 & 7 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix};$$

$$\begin{array}{ll}
11) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 7 & 5 \end{vmatrix} & 12) \begin{vmatrix} 0 & 5 & 2 & 0 \\ 8 & 3 & 5 & 4 \\ 7 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\
13) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} & 14) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}; \\
15) \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}; & 16) \begin{vmatrix} -3 & 9 & 3 & 6 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ 4 & -5 & -3 & -2 \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix}; \\
17) \begin{vmatrix} 3 & -3 & -5 & 8 \\ -3 & 2 & 4 & -6 \\ 2 & -5 & -7 & 5 \\ -4 & 3 & 5 & -6 \end{vmatrix}; \\
18) \begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 & 3 \\ 3 & -4 & 7 & 5 \\ 4 & -9 & 8 & 5 \\ -3 & 2 & -5 & 3 \end{vmatrix}; & 19) \begin{vmatrix} 3 & -3 & -2 & -5 \\ 2 & 5 & 4 & 6 \\ 5 & 5 & 8 & 7 \\ 4 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}; \\
20) \begin{vmatrix} 3 & -5 & -2 & 2 \\ -4 & 7 & 4 & 4 \\ 4 & -9 & -3 & 7 \\ 2 & -6 & -3 & 2 \end{vmatrix}; \\
21) \begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & -4 \\ -3 & 4 & -5 & 3 \\ -5 & 7 & -7 & 5 \\ 8 & -8 & 5 & -6 \end{vmatrix}; & 22) \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 9 & -8 & 5 & 10 \\ 5 & -8 & 5 & 8 \\ 6 & -5 & 4 & 7 \end{vmatrix}; \\
23) \begin{vmatrix} 7 & 6 & 3 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 5 \\ 5 & 6 & 5 & 4 \end{vmatrix}; & 24) \begin{vmatrix} 6 & -5 & 8 & 4 \\ 9 & 7 & 5 & 2 \\ 7 & 5 & 3 & 7 \\ -4 & 8 & -8 & -3 \end{vmatrix}.
\end{array}$$

№ 2 Розв'язати рівняння:

$$\begin{array}{lll}
1) \begin{vmatrix} 3x & -1 \\ x & 2x-3 \end{vmatrix} = 0; & 2) \begin{vmatrix} \sin 2x & \cos 3x \\ -\cos 2x & \sin 3x \end{vmatrix} = 0; & 3) \begin{vmatrix} 1 & 3 & x \\ 4 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 0.
\end{array}$$

№ 3 Обчислити визначник матриці, яка є добутком двох заданих матриць:

$$\begin{array}{lll}
1) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ i } \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}; & 2) \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} \text{ i } \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}; & 3) (1 \ 2 \ 3 \ 4) \text{ i } \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \\
4) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & -5 & 4 \end{pmatrix} \text{ i } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}; & 5) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ i } \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix}.
\end{array}$$