ОЗНАЧЕННЯ СЛАР, КЛАСИФІКАЦІЯ. МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ТА ДОСЛІДЖЕННЯ СЛАР

№ 1 Обчислити ранг матриці.

$$1)\ A=\begin{pmatrix}1&0&0&0&5\\0&0&0&0&0\\2&0&0&0&11\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&0&5\\2&0&0&0&11\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&0&5\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow rangA=2$$

$$\text{або}\ \begin{vmatrix}1&5\\2&11\end{vmatrix}=11-10=1\neq 0\Rightarrow rangA=2\,.$$

$$2)\ \begin{pmatrix}3&5&7\\1&2&3\\1&3&5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}4&8&12\\1&2&3\\1&3&5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\\1&3&5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\end{pmatrix}\Rightarrow rangA=2\,.$$

$$3)\ \begin{pmatrix}1&2&1&3&4\\3&4&2&6&8\\1&2&1&3&4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&1&3&4\\3&4&2&6&8\end{pmatrix},\ \begin{vmatrix}1&2\\3&4\end{vmatrix}=4-6=-2\neq 0\Rightarrow rangA=2\,.$$

№ 2 Знайти ранг матриць:

$$1)\ A=\begin{pmatrix}0&3&2\\2&4&6\\1&7&4\end{pmatrix}.\ (\det A=14\ )$$

Розв'язання.

$$A=\begin{pmatrix}0&3&2\\2&4&6\\1&7&4\end{pmatrix}\xrightarrow{\mathrm{I}\leftrightarrow\mathrm{II}}\begin{pmatrix}2&4&6\\0&3&2\\1&7&4\end{pmatrix}\xleftrightarrow{\mathrm{III}\cdot 2-\mathrm{I}}$$

$$\leftrightarrow\begin{pmatrix}2&4&6\\0&3&2\\0&10&2\end{pmatrix}\xleftrightarrow{\mathrm{III}\cdot 3-\mathrm{II}\cdot 10}\begin{pmatrix}2&4&6\\0&3&2\\0&0&-14\end{pmatrix}\Rightarrow rangA=3\,.$$

$$2)\ A=\begin{pmatrix}3&5&4\\2&3&2\\4&6&4\end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

$$A=\begin{pmatrix}3&5&4\\2&3&2\\4&6&4\end{pmatrix}\xleftrightarrow{\mathrm{III}\cdot\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}3&5&4\\2&3&2\\2&3&2\end{pmatrix}\xleftrightarrow{\mathrm{III}-\mathrm{II}}\begin{pmatrix}3&5&4\\2&3&2\\0&0&0\end{pmatrix}\xleftrightarrow{\mathrm{II}\cdot 3-\mathrm{I}\cdot 2}\begin{pmatrix}3&5&4\\0&-1&-2\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow rangA=2\cdot$$

$$3)\ A=\begin{pmatrix}2&4&6&1\\0&0&0&0\\1&5&3&2\end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

$$A=\begin{pmatrix}2&4&6&1\\0&0&0&0\\1&5&3&2\end{pmatrix}\xleftrightarrow{\mathrm{III}\leftrightarrow\mathrm{II}}\begin{pmatrix}2&4&6&1\\1&5&3&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xleftrightarrow{\mathrm{II}\cdot 2-\mathrm{I}}\begin{pmatrix}2&4&6&1\\0&6&0&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow rangA=2\,.$$

№ 3 Розв'язати методом Гаусса системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$1)\ \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10, \\ x_2 - x_4 = -2, \\ x_1 + x_4 = 5, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 13. \end{cases}$$

Розв'язання. Розширена матриця $\widetilde{A}$ системи рівнянь має вигляд:

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 13 \end{pmatrix}.$$

Виконавши елементарні перетворення рядків, приведемо матрицю A до східчастого виду

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 13 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ -\mathrm{I} \\ \mathrm{IV}-2\cdot\mathrm{I} \end{array} \leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -7 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ +\mathrm{II} \\ \\ \end{array} \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -7 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ \\ -\mathrm{III} \end{array} \leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = \widetilde{B}.$$

З виду матриці $\widetilde{B}$ випливає, що вихідна система рівнянь сумісна й що головними невідомими є x_1, x_2, x_3, а вільною невідомою – x_4. Виразимо головні невідомі x_1, x_2, x_3, через вільну невідому x_4, розв'язуючи систему рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 10 - x_4, \\ x_2 = -2 + x_4, \\ -x_3 = -7 + x_4. \end{cases}$$

Рухаючись від останнього рівняння до першого, будемо мати

$$\begin{cases} x_1 = 5 - x_4, \\ x_2 = -2 + x_4, \\ x_3 = 7 - x_4. \end{cases}$$

Поклавши $x_4 = c$, де c – довільне число, одержимо загальний розв'язок вихідної системи рівнянь

$$\begin{cases} x_1 = 5 - c, \\ x_2 = -2 + c, \\ x_3 = 7 - c, \\ x_4 = c. \end{cases}$$

При будь-якому дійсному c $x_1, x_2, x_3,$ задовольняють усім рівнянням вихідної системи.

$$2)\ \begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2, \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5, \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3. \end{cases}$$

Розв'язання.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -5 & 2 & 4 & 2 \\ 7 & -4 & 1 & 3 & 5 \\ 5 & 7 & -4 & -6 & 3 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \cdot 3-\mathrm{I}\cdot 7 \\ \cdot 3-\mathrm{I}\cdot 5 \end{array} \leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -5 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 23 & -11 & -19 & 1 \\ 5 & 46 & -22 & -38 & -1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ -\mathrm{II}\cdot 2 \end{array} \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 6 & -3 & -5 & 1 \\ 0 & 23 & -11 & -19 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right).$$

Відповідь: система несумісна.

$$3)\ \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2, \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 3, \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_3 + 13x_5 = 9, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 1. \end{cases}$$

Розв'язання.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 6 & -3 & 2 & 4 & 5 & 3 \\ 6 & -3 & 4 & 8 & 13 & 9 \\ 4 & -2 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ -3\cdot\mathrm{I} \\ -3\cdot\mathrm{I} \\ -2\cdot\mathrm{I} \end{array} \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -4 & -3 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ +\mathrm{II} \\ +\mathrm{III} \end{array} \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ \\ \cdot(-1) \end{array} \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Матриця ступінчаста, система сумісна, невизначена. x_3, x_4, x_5 – головні невідомі, x_1, x_2 – вільні невідомі.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2, \\ \qquad\qquad x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 3, \\ \qquad\qquad\qquad x_4 \qquad\quad = 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = x_1, \\ x_2 = x_2, \\ x_3 = -1 - 8x_1 + 4x_2, \\ x_4 = 0, \\ x_5 = 1 + 2x_1 - x_2. \end{cases}$$

№ 4 Розв'язати систему рівнянь методом Крамера:

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 5, \\ x + y - z = -2, \\ 4x - y + 5z = 3. \end{cases}$$

Розв'язання. Обчислимо визначник системи Δ й визначники Δ_x, Δ_y, Δ_z:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 5 \end{vmatrix} = -11 \neq 0,\ \Delta_x = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 33,\ \Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 4 & 3 & 5 \end{vmatrix} = -55,\ \Delta_z = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ 4 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -44.$$

За формулами Крамера одержуємо єдиний розв'язок системи:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{33}{-11} = -3,\ y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-55}{-11} = 5,\ z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{-44}{-11} = 4.$$

Відповідь: $(-3;\ 5;\ 4)$.

№ 5 Розв'язати систему рівнянь матричним методом:

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 5, \\ x + y - z = -2, \\ 4x - y + 5z = 3. \end{cases}$$

Розв'язання. Перепишемо вихідну систему у вигляді

$$A \cdot X = B,$$

де $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Обчислимо визначник матриці системи:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 5 \end{vmatrix} = -11 \neq 0.$$

Обчислимо алгебраїчні доповнення до всіх елементів матриці системи й потім складемо обернену матрицю:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 4, \quad A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -9, \quad A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -5,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -11, \quad A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 11, \quad A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 11,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3, \quad A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 4, \quad A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{11}\begin{pmatrix} 4 & -11 & -3 \\ -9 & 11 & 4 \\ -5 & 11 & 1 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо розв'язок:

$$X = A^{-1} \cdot B = -\frac{1}{11}\begin{pmatrix} 4 & -11 & -3 \\ -9 & 11 & 4 \\ -5 & 11 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{11}\begin{pmatrix} 33 \\ -55 \\ -44 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $(-3;\ 5;\ 4)$.

Задачі для самостійного розв'язання

№ 1 Дослідити на сумісність і знайти розв'язок СЛАУ у випадку сумісності:

1) $\begin{cases} 2x + y - z = 0, \\ x + 2y + z = 0, \\ 2x - y + 3z = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + 2y - 4z - 1 = 0, \\ 2x + y - 5z + 1 = 0, \\ x - y - z + 2 = 0; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 3x - y + 2z = 5, \\ 2x - y - z = 2, \\ 4x - 2y - 2z = -3. \end{cases}$

№ 2 Знайти розв'язок СЛАР трьома способами, якщо це можливо:

1) $\begin{cases} 2x + y - z = 0, \\ x - y - 3z = 13, \\ 3x - 2y + 4z = -15; \end{cases}$ $\Delta = -34$, $\Delta_1 = 34$, $\Delta_2 = 68$, $\Delta_3 = 136$ 2) $\begin{cases} x + y - 2z = 4, \\ 2x - 3y + z = 3, \\ 3x - 2y + 6z = 0; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x + 2y + z = 1, \\ 3x + y + 2z = -2, \\ 4x - y - z = 7; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 5x - 3y + 6z = 6, \\ 2x - y - 3z = 8, \\ x + 4y - 2z = 9; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x - y + z = 3, \\ 2x + y + z = 11, \\ x + y + 2z = 8; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 3x - y - 4z = -2, \\ 6x + 2y + z = 9, \\ 2x + 4y - 3z = 3; \end{cases}$

7) $\begin{cases} 5x + y + z = 3, \\ 2x - 6y - z = 8, \\ x + y + z = 1; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} 2x + 4y + z = 4, \\ 3x + 6y + 2z = 4, \\ 4x - y - 3z = 1; \end{cases}$ 9) $\begin{cases} x - 3y + z = -2, \\ 4x + y - z = 3, \\ 5x + 2y - 3z = 0; \end{cases}$

10) $\begin{cases} 3x + y - 2z = 1, \\ x - 2y + 3z = 5, \\ 2x + 3y - z = -4; \end{cases}$ 11) $\begin{cases} x + 2y - z = 2, \\ -3x + y + z = 9, \\ 2x - 3y + 2z = 9; \end{cases}$ 12) $\begin{cases} 2x + y + z = -7, \\ 2x - y - 3z = 5, \\ x - 3y - z = 1. \end{cases}$