

ОДНОРІДНІ СЛАР, ФУНДАМЕНТАЛЬНА СИСТЕМА РОЗВ'ЯЗКІВ

Пример. Найти фундаментальную систему решений однородной СЛАУ

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 - 5x_5 = 0, \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$$

Решение. Ранг матрицы системы равен двум, число неизвестных равно пяти, поэтому всякая фундаментальная система решений этой системы уравнений состоит из трех решений. Решим систему, ограничиваясь первыми двумя линейно независимыми уравнениями и считая x_3, x_4, x_5 свободными неизвестными. Мы получим общее решение в виде

$$\begin{cases} x_1 = \frac{19}{8}x_3 + \frac{3}{8}x_4 - \frac{1}{2}x_5, \\ x_2 = \frac{7}{8}x_3 - \frac{25}{8}x_4 + \frac{1}{2}x_5. \end{cases}$$

Берем, далее, следующие три линейно независимых трехмерных вектора $(8, 0, 0)$, $(0, 8, 0)$, $(0, 0, 2)$. Подставляя компоненты каждого из них в общее решение в качестве значений для свободных неизвестных и вычисляя значения для x_1, x_2 , мы получим фундаментальную систему решений заданной системы уравнений:

$$\alpha_1 = (19, 7, 8, 0, 0), \quad \alpha_2 = (3, -25, 0, 8, 0), \quad \alpha_3 = (-1, 1, 0, 0, 2).$$

Завдання для самостійного розв'язання

Знайти загальний розв'язок і ФСР однорідної СЛАР:

$$1) \begin{cases} 2x + 4y + 6z + t = 0, \\ x + 2y + 3z + t = 0, \\ 3x + 6y + 9z - t = 0, \\ x + 2y + 3z + 5t = 0. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = 0, \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 0, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 0. \end{cases} \quad 3) \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 7x_4 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0, \\ 4x_1 + 11x_2 - 13x_3 + 16x_4 = 0, \\ 7x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 - 5x_5 = 0, \\ 6x_1 + 2x_2 - 2x_4 - 6x_5 = 0. \end{cases} \quad 5) \begin{cases} 5x_1 + 4x_2 + 6x_3 - x_4 + 7x_5 = 0, \\ 8x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_2 + 5x_3 + 3x_4 - x_5 = 0, \\ 7x_1 - 6x_2 + 5x_3 - 4x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases} \quad 6) \begin{cases} 7x_1 - x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 0, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 + 6x_4 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$