ВЛАСНІ ЗНАЧЕННЯ Й ВЛАСНІ ВЕКТОРИ МАТРИЦІ

Приклад. Знайти власні значення й відповідні їм власні вектори матриці

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язок. Складемо характеристичне рівняння й знайдемо його корені, тобто власні значення даної матриці:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 \\ 5 & -3-\lambda & 3 \\ -1 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$\left(4-\lambda^2\right)(\lambda+3)+3-2(\lambda+3)-5(\lambda+2)=0,$$

$$4\lambda-3\lambda^2-\lambda^3+12+3-2\lambda-6-5\lambda-10=0,$$

$$\lambda^3+3\lambda^2+3\lambda+1=0,$$

$$(\lambda+1)^3=0,$$

$$\lambda_{1,2,3}=-1.$$

Знайдемо власний вектор, що відповідає знайденому власному значенню $\lambda=-1$. Для цього розв'яжемо однорідну СЛАР, записану в матричній формі:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Приведемо матрицю системи до ступінчастого виду:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot 3 - \mathrm{I}\cdot 5 \\ \cdot 3 + \mathrm{I} \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} -\mathrm{II} \\ \\ \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Запишемо систему, відповідну до отриманої матриці й знайдемо її розв'язок:

$$\begin{cases} x_1 + \quad x_3 = 0, \\ \quad x_2 + x_3 = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_3, \\ x_2 = -x_3. \end{cases}$$

Таким чином, власний вектор, відповідний до власного значення $\lambda=-1$, буде мати вигляд $\bar{x}=(-c;-c;c)$, де $c = const \neq 0$.

Відповідь: для $\lambda=-1$ $X=(-c;-c;c)$, $c = const \neq 0$.

Задачі для самостійного розв'язання

№ 1 Знайти власні значення й власні вектори наступних матриць:

1) $A=\begin{pmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$; 2) $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \\ -5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$; 3) $C=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; 4) $D=\begin{pmatrix} 11 & 8 & 0 \\ 8 & 5 & -10 \\ 0 & -10 & 2 \end{pmatrix}$.