КВАДРАТИЧНІ ФОРМИ

Приклад 1 Привести до канонічного виду квадратичну форму методом Лагранжа
$$f = 2x_1x_2 - 6x_2x_3 + 2x_1x_3 .$$

Розв'язання. Зробимо заміну змінних $x_1 = y_1 - y_2$, $x_2 = y_1 + y_2$, $x_3 = y_3$. Тоді квадратична форма перетвориться до виду
$$f = 2y_1^2 - 2y_2^2 - 4y_1y_3 - 8y_2y_3 .$$
Зробимо нову заміну змінних
$$z_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3 = 2y_1 - 2y_3 = 2(y_1 - y_3),\ z_2 = y_2,\ z_3 = y_3,$$
одержимо
$$f = \frac{1}{2}z_1^2 - 2z_2^2 - 8z_2z_3 - 2z_3^2 = \frac{1}{2}z_1^2 - 2\left[(z_2 + 2z_3)^2 - 3z_3^2\right].$$
Після заміни змінних $z_1 = t_1$, $z_2 + 2z_3 = t_2$, $z_3 = t_3$ квадратична форма *f* буде приведена до канонічного виду
$$f = \frac{1}{2}t_1^2 - 2t_2^2 + 6t_3^2 .$$

Відповідь. $f = \frac{1}{2}t_1^2 - 2t_2^2 + 6t_3^2$.

Приклад 2 Привести ортогональним перетворенням змінних квадратичну форму $f = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 - 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4$ до канонічного виду.

Розв'язання. Запишемо матрицю заданої квадратичної форми
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
Складемо характеристичне рівняння $|A - \lambda E| = 0$:
$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -\lambda & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^3(\lambda + 3) = 0 .$$
Власними значеннями матриці *A* є числа $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$, $\lambda_4 = -3$.

Відповідь. $f = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - 3y_4^2$.

Завдання для самостійного розв'язання

№ 1 Привести до канонічного виду квадратичну форму методом Лагранжа:

1) $f = x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3$; 2) $f = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 - 6x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$.

№ 2 Привести до канонічного виду квадратичну форму методом власних векторів

1) $f = x_1^2 + 2x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3$; 2) $f = 11x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 + 16x_1x_2 + 4x_1x_3 - 20x_2x_3$;

3) $f = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 - 6x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$.