ПОНЯТТЯ ВЕКТОРУ. ЛІНІЙНІ ОПЕРАЦІЇ НАД ВЕКТОРАМИ ТА ЇЇ ВЛАСТИВОСТІ. ЛІНІЙНА ЗАЛЕЖНІСТЬ ВЕКТОРІВ. ЛІНІЙНІ (ВЕКТОРНІ) ПРОСТОРИ. ОРІЄНТОВНІ ТРІЙКИ ВЕКТОРІВ. АФІННА ТА ПРЯМОКУТНА СИСТЕМИ КООРДИНАТ.

Означення вектора. Лінійні операції над векторами. Ділення відрізка в даному відношенні

Вектор – напрямлений відрізок прямої. Позначення: $\overline{a}$ або $\vec{a}$. Якщо A – початок вектора, а B – кінець, то тоді вектор можна позначити так: $\overline{AB}$ або $\overrightarrow{AB}$.

Відстань між кінцем і початком вектора $\overline{a}$ будемо називати *довжиною* або *модулем вектора* й позначати одним із символів: $\left|\overline{a}\right|$ або a.

Два або більше векторів називають *колінеарними*, якщо вони лежать на одній прямій або на паралельних прямих. Три або більше векторів називають *компланарними*, якщо всі вони паралельні деякій площині або лежать в одній площині.

Якщо довжина вектора $\overline{a}$ дорівнює нулю, то вектор $\overline{a}$ називають *нульовим* і пишуть $\overline{a} = \overline{0}$.

Якщо положення початкової точки вектора в просторі значення не має, такі вектори називають *вільними*. Два вільні вектори мають *однаковий напрямок* ($\overline{a} \uparrow\uparrow \overline{b}$), якщо вони колінеарні та їх кінці лежать по одну сторону від прямої, що проходить через їх початки. У супротивному випадку вектори називають *протилежно спрямованими* ($\overline{a} \uparrow\downarrow \overline{b}$). Два вільних вектори вважаються *рівними*, якщо вони мають однакові довжини й однакові напрямки.

Невільні вектори поділяють на *ковзні* й *зв'язані*.

Надалі будемо розглядати тільки вільні вектори.

Під *лінійними операціями* над векторами розуміють операції додавання векторів і множення вектора на число. *Сумою* векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ називають вектор $\overline{c}$, який можна отримати в результаті таких дій: з довільної точки A простору відкладаємо вектор $\overline{a}$, а з кінця B цього вектора відкладаємо вектор $\overline{b}$, будемо вважати при цьому, що кінець вектора $\overline{b}$ розташовано в точці C, тоді вектор $\overline{AC}$ і є сума векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ (рис 1.1а). У деяких випадках зручніше користуватися правилом паралелограма (рис. 1.1б): якщо вектори відкласти від однієї точки, то вектор суми – та діагональ паралелограма, початок якої знаходиться в тій самій точці, що і початки векторів-доданків.

а) правило трикутника *б) правило паралелограма*

Рисунок 1 – Правила суми двох векторів

За правилом трикутника поняття суми легко узагальнюється на випадок будь-якого скінченого числа векторів.

Вектор $\overline{b}$ будемо називати *протилежним* вектору $\overline{a}$, якщо $\overline{a} = -\overline{b}$. Вектор, протилежний вектору $\overline{a}$, позначають так: $-\overline{a}$. Напрямки $\overline{a}$ й $-\overline{a}$ протилежні, а модулі однакові.

Під *різницею* векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ розуміють вектор $\overline{a} + \left(-\overline{b}\right)$. Різницю векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$

будемо позначати так: $\overline{a}-\overline{b}$.

Добутком вектора $\overline{a}$ на число α називають вектор, який має довжину $|\alpha|\cdot|\overline{a}|$. Напрямок вектора $\alpha\overline{a}$ збігається з напрямком вектора $\overline{a}$, якщо $\alpha>0$, і протилежний йому, якщо $\alpha<0$. Якщо $\alpha=0$, то $0\cdot\overline{a}=\overline{0}$.

Операції додавання векторів і множення їх на числа мають наступні **властивості**. Для будь-яких векторів $\overline{a}$, $\overline{b}$ і $\overline{c}$ та будь-яких дійсних чисел α і β:

1. Додавання векторів *комутативне*: $\overline{a}+\overline{b}=\overline{b}+\overline{a}$.
2. Додавання векторів *асоціативне*: $\left(\overline{a}+\overline{b}\right)+\overline{c}=\overline{a}+\left(\overline{b}+\overline{c}\right)$.
3. Додавання нульового вектора до будь-якого вектора $\overline{a}$ не змінює останнього: $\overline{a}+\overline{0}=\overline{a}$.
4. $(-1)\cdot\overline{a}=-\overline{a}$, $-1\in R$.
5. Множення вектора на число *асоціативне*: $(\alpha\beta)\overline{a}=\alpha(\beta\overline{a})$.
6. Множення вектора на число *дистрибутивне стосовно додавання чисел*: $(\alpha+\beta)\overline{a}=\alpha\overline{a}+\beta\overline{a}$.
7. Множення вектора на число *дистрибутивне стосовно додавання векторів*: $\alpha\left(\overline{a}+\overline{b}\right)=\alpha\overline{a}+\alpha\overline{b}$.
8. Множення вектора на одиницю не змінює останнього $1\cdot\overline{a}=\overline{a}$, $1\in R$.

Використовуючи лінійні операції над векторами, можна формувати суми такого виду $\alpha_1\overline{a}_1+\alpha_2\overline{a}_2+...+\alpha_n\overline{a}_n$, які називаються *лінійними комбінаціями векторів* $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$.

Нехай на площині або в просторі зафіксована точка *O* (*полюс*). Вектор $\overline{OM}$ з початком у точці *O* та кінцем у деякій точці *M* площини або простору називається *радіус-вектором* точки *M*: $\overline{r}_M$.

Нехай дано три точки *A*, *B*, *C*, що лежать на одній прямій. Говорять, що точка *C* ділить напрямлений відрізок *AB* у відношенні λ, якщо $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{CB}}=\lambda$ (або $\overline{AC}=\lambda\overline{CB}$).

Теорема 1 Якщо точка *C* ділить відрізок *AB* у відношенні $\lambda\neq-1$, то радіус вектор $\overline{r}_C$ точки *C* виражається через радіус-вектори $\overline{r}_A$ і $\overline{r}_B$ точок *A* й *B* наступним чином:

$$\overline{r}_C=\frac{\overline{r}_A+\lambda\overline{r}_B}{1+\lambda},\ \lambda\neq-1$$

– формула ділення відрізка в даному відношенні.

Лінійна залежність векторів. Поняття векторного простору, базису й координат вектора

Вектори $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$ називаються *лінійно залежними*, якщо існують дійсні числа $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, серед яких хоча б одне відмінне від нуля, такі, що $\alpha_1\overline{a}_1+\alpha_2\overline{a}_2+...+\alpha_n\overline{a}_n=\overline{0}$. Якщо остання рівність можлива тільки при $\alpha_1=\alpha_2=...=\alpha_n=0$, то вектори $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$ називаються *лінійно незалежними*.

Умовимося вектор $\overline{b}=\alpha_1\overline{a}_1+\alpha_2\overline{a}_2+...+\alpha_n\overline{a}_n$ називати лінійною комбінацією векторів $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$. У цій рівності $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ – дійсні числа.

Теорема 2 Для того, щоб система векторів була лінійно залежною, необхідно й достатньо, щоб один з векторів був лінійною комбінацією інших.

Теорема 3 Два вектори лінійно залежні тоді й тільки тоді, коли вони колінеарні.

Наслідок. Два неколінеарних вектори лінійно незалежні.

Теорема 4 Три вектори лінійно залежні тоді й тільки тоді, коли вони компланарні.

Наслідок. Три некомпланарних вектори лінійно незалежні.

Теорема 5 Будь-які чотири вектори у просторі геометричних векторів лінійно залежні.

Множину векторів будемо називати *векторним простором*, якщо лінійні операції над будь-якими векторами цієї множини, тобто додавання двох векторів і множення вектора на число, дають вектори тієї ж множини (властивості див. вище).

Базисом векторного простору називається така впорядкована сукупність векторів цього простору, яка є лінійно незалежною і максимальною (додавання до цієї системи хоча б одного вектора робить її лінійно залежною). З максимальності системи базисних векторів безпосередньо виходить, що будь-який вектор $\overline{d}$ простору є лінійною комбінацією базисних векторів: $\overline{d} = \alpha\overline{a} + \beta\overline{b} + \gamma\overline{c}$, де $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ – вектори базису. Числа α, β, γ називаються *координатами вектора* $\overline{d}$ в базисі $\{\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}\}$. Позначення: $\overline{d}(\alpha, \beta, \gamma)$.

Теорема 6 Будь-які два базиси одного векторного простору мають однакову кількість векторів.

Теорема 7 Координати вектора у заданому базисі єдині.

Число векторів базису називається *розмірністю* даного векторного простору. Позначення: $\dim V$.

Теорема 8 Будь-яка координата суми скінченого числа векторів дорівнює сумі відповідних координат доданків:

$$\overline{d}_1 + \overline{d}_2 + ... + \overline{d}_n = (\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n, \beta_1 + \beta_2 + ... + \beta_n, \gamma_1 + \gamma_2 + ... + \gamma_n).$$

При множенні вектора на число, його координати множаться на це число, тобто

$$\lambda\overline{d}_1 = (\lambda\alpha_1, \lambda\beta_1, \lambda\gamma_1),\ \lambda \in R .$$

Теорема 9 Якщо точка *C* ділить відрізок *AB* у відношенні $\lambda \neq -1$ і $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$, то координати точки *C* можна знайти за формулами:

$$x_C = \frac{x_A + \lambda x_B}{1+\lambda},\ y_C = \frac{y_A + \lambda y_B}{1+\lambda},\ z_C = \frac{z_A + \lambda z_B}{1+\lambda}.$$

Загальна декартова й полярна системи координат

Нехай $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$ – трійка некомпланарних векторів у просторі. Виберемо в просторі яку-небудь точку *O* і проведемо через неї три осі Ox, Oy, Oz, які зіставимо з векторами $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$. Побудована конструкція з точки й трьох осей з напрямними векторами $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$ називається *загальною декартовою* (або *афінною*) системою координат.

Якщо базис $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$ є ортонормованим (вектори базису одиничні та попарно ортогональні), то загальна декартова система координат називається *прямокутною* декартовою системою координат або просто *декартовою системою координат*.

Базис у тривимірному векторному просторі може бути правим або лівим. Відкладемо вектори $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$ базису з однієї точки *O* простору. Будемо прагнути, повертаючи вектор $\overline{e}_1$ навколо точки *O* в площини векторів $\overline{e}_1$ і $\overline{e}_2$, сполучити його з вектором $\overline{e}_2$. Із двох напрямків обертання слід брати той, якому відповідає найменший кут повороту. Якщо для спостерігача, який дивиться з кінця вектора $\overline{e}_3$ на площину векторів $\overline{e}_1$ і $\overline{e}_2$, зазначений поворот вектора $\overline{e}_1$ відбувається проти ходу годинникової стрілки, то базис $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$, $\overline{e}_3$ вважається *правим*. А якщо ні, то базис $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$, $\overline{e}_3$ – *лівий*.

Надалі, говорячи про ортонормований базис тривимірного векторного простору, будемо завжди вважати, що базис є правим.

Полярна система координат на площині визначається точкою O – полюсом, променем Ox – полярною віссю та одиничним відрізком.

Положення довільної точки M площини в полярній системі координат визначається відстанню $\rho = OM$ і кутом φ, відлічуваним від полярної осі до променя OM в заданому напрямку. Числа ρ і φ називаються *полярними координатами* точки M (ρ – полярний радіус, φ – полярний кут, $0 \le \varphi < 2\pi$). Позначення: $M(\rho; \varphi)$.

Зв'язок між декартовими та полярними координатами однієї й тієї ж точки (початок декартової системи координат збігається з полюсом полярної системи координат, такі системи координат називаються *узгодженими*) визначаються формулами:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}\,,\ \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},\ \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,,\ 0 \le \varphi < 2\pi,\ \rho \ge 0; \qquad (1)$$

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi. \end{cases} \qquad (2)$$