ДОБУТКИ ВЕКТОРІВ

Скалярний добуток двох векторів

Пряма l із заданим на ній напрямком, прийнятим за додатний, називається *віссю*.

Проекцією вектора $\overline{a}$ *на вісь* l називається число, яке позначається $\text{пр}_l\overline{a}$ і дорівнює $\left|\overline{a}\right|\cos\varphi$, де φ $\left(0\le\varphi\le\pi\right)$ – кут між додатним напрямком осі l й напрямком вектора $\overline{a}$, тобто за означенням $\text{пр}_l\overline{a}=\left|\overline{a}\right|\cos\varphi$.

При використанні векторів у фізиці складові вектора на осях координат називають *векторними проекціями на осі координат.* Координати складових на осях, тобто координати вектора, називають *скалярними проекціями,* або, коротко, *проекціями вектора на осі координат,* і позначають $\text{пр}_x\overline{a}$, $\text{пр}_y\overline{a}$, $\text{пр}_z\overline{a}$.

У прикладних питаннях вектор нерідко задають модулем і кутами, які вектор утворює з осями координат (точніше з ортами на цих осях). У цьому випадку координати (проекції) вектора $\overline{a}$ на площині обчислюються за формулами:

$$x=\text{пр}_x\overline{a}=\left|\overline{a}\right|\cos\alpha;\ y=\text{пр}_y\overline{a}=\left|\overline{a}\right|\sin\alpha,$$

де α – кут між вектором $\overline{a}$ і віссю *Ox.* У просторі мають місце аналогічні формули:

$$x=\text{пр}_x\overline{a}=\left|\overline{a}\right|\cos\alpha;\ y=\text{пр}_y\overline{a}=\left|\overline{a}\right|\cos\beta;\ z=\text{пр}_z\overline{a}=\left|\overline{a}\right|\cos\gamma,$$

де α,β,γ – кути між вектором $\overline{a}$ і відповідними осями координат; *x*, *y*, z – координати вектора $\overline{a}$. Величини $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ називають *напрямними косинусами* векторів, для яких має місце співвідношення: $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

Скалярним добутком $\left(\overline{a},\overline{b}\right)$ двох ненульових векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ називається число, яке дорівнює добутку довжин цих векторів на косинус кута φ між ними: $\left(\overline{a},\overline{b}\right)=\left|\overline{a}\right|\cdot\left|\overline{b}\right|\cos\varphi$. Якщо хоча б один з векторів $\overline{a}$ або $\overline{b}$ є нульовим, тоді вважають $\left(\overline{a},\overline{b}\right)=0$. Іноді для скалярного добутку $\left(\overline{a},\overline{b}\right)$ користуються іншим позначенням: $\overline{a}\cdot\overline{b}$.

Властивості скалярного добутку:

Властивість 1 Для будь-яких векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ скалярний добуток $\left(\overline{a},\overline{b}\right)$ комутативний: $\left(\overline{a},\overline{b}\right)=\left(\overline{b},\overline{a}\right)$.

Властивість 2 Для будь-якого вектора $\overline{a}$ скалярний добуток вектора $\overline{a}$ на себе дорівнює квадрату довжини цього вектора: $\left(\overline{a},\overline{a}\right)=\left|\overline{a}\right|^2$.

Помітимо, що скалярний добуток $\left(\overline{a},\overline{a}\right)$ прийнято називати *скалярним квадратом* вектора $\overline{a}$ й позначати так: $\overline{a}^2$. Згідно з властивістю 2 довжина вектора $\overline{a}$ буде: $\left|\overline{a}\right|=\sqrt{\overline{a}^2}$.

Властивість 3 Для будь-яких векторів $\overline{a}$ та $\overline{b}$ і будь-якого дійсного числа α вірні рівності: $\left(\alpha\overline{a},\overline{b}\right)=\left(\overline{a},\alpha\overline{b}\right)=\alpha\left(\overline{a},\overline{b}\right)$.

Властивість 4 Якщо $\overline{a}\ne\overline{0}$ і $\overline{b}\ne\overline{0}$, а $\left(\overline{a},\overline{b}\right)=0$, то $\overline{a}$ і $\overline{b}$ ортогональні.

Властивість 5 Для будь-яких векторів $\overline{a}$, $\overline{b}$ і $\overline{c}$

$$\left(\overline{a}+\overline{b},\overline{c}\right)=\left(\overline{a},\overline{c}\right)+\left(\overline{b},\overline{c}\right).$$

Наслідок Для будь-яких векторів $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ і $\overline{d}$

$$\left(\overline{a}+\overline{b},\overline{c}+\overline{d}\right)=\left(\overline{a},\overline{c}\right)+\left(\overline{a},\overline{d}\right)+\left(\overline{b},\overline{c}\right)+\left(\overline{b},\overline{d}\right).$$

Легко переконатися в тому, що базис $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ є ортонормованим тоді й тільки тоді, коли мають місце рівності:

$$\left(\bar{i}, \bar{i}\right)=1,\ \left(\bar{j}, \bar{j}\right)=1,\ \left(\bar{k}, \bar{k}\right)=1,\ \left(\bar{i}, \bar{j}\right)=0,\ \left(\bar{i}, \bar{k}\right)=0,\ \left(\bar{j}, \bar{k}\right)=0. \qquad (1)$$

Ортом ненульового вектора $\bar{a}$ називають вектор $\bar{a}_0$, який має одиничну довжину, а його напрямок збігається з напрямком вектора $\bar{a}$, тобто $\bar{a}_0 = \dfrac{\bar{a}}{|\bar{a}|}$.

Теорема 1 Скалярний добуток двох векторів, заданих в ортонормованому базисі своїми координатами, дорівнює сумі добутків відповідних координат співмножників, тобто для $\bar{a}(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ і $\bar{b}(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$

$$\left(\bar{a}, \bar{b}\right)=\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2+\gamma_1\gamma_2. \qquad (2)$$

Наслідок 1 Довжина вектора $\bar{a}(\alpha, \beta, \gamma)$ в ортонормованому базисі обчислюється за формулою

$$|\bar{a}|=\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}. \qquad (3)$$

Наслідок 2 Необхідною й достатньою умовою ортогональності ненульових векторів $\bar{a}(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ і $\bar{b}(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$, заданих в ортонормованому базисі своїми координатами є рівність

$$\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2+\gamma_1\gamma_2=0. \qquad (4)$$

Наслідок 3 В ортонормованому базисі кут між двома векторами $\bar{a}(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ і $\bar{b}(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ визначається за формулою:

$$\cos\varphi=\frac{\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2+\gamma_1\gamma_2}{\sqrt{\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2}\cdot\sqrt{\alpha_2^2+\beta_2^2+\gamma_2^2}},\ \bar{a}\neq\bar{0},\ \bar{b}\neq\bar{0}. \qquad (5)$$

Наслідок 4 Декартові координати вектора $\bar{a}(\alpha, \beta, \gamma)$ дорівнюють проекціям цього вектора на осі декартової системи координат:

$$\alpha=\text{пр}_{\bar{i}}\,\bar{a},\ \beta=\text{пр}_{\bar{j}}\,\bar{a},\ \gamma=\text{пр}_{\bar{k}}\,\bar{a}.$$

Наслідок 5 Напрямні косинуси вектора $\bar{a}(\alpha, \beta, \gamma)$ в ортонормованому базисі визначаються формулами:

$$\cos\left(\bar{a},\wedge\ \bar{i}\right)=\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}, \qquad \cos\left(\bar{a},\wedge\ \bar{j}\right)=\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}},$$

$$\cos\left(\bar{a},\wedge\ \bar{k}\right)=\frac{\gamma}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}.$$

Теорема 2 $\left(\bar{a}, \bar{b}\right)=|\bar{a}|\cdot\text{пр}_{\bar{a}}\bar{b}=|\bar{b}|\cdot\text{пр}_{\bar{b}}\bar{a}$.

Теорема 3 Якщо вектор зображує силу, прикладену до якої-небудь точки *M*, а вектор $\bar{a}$ йде з деякої точки *O* в точку *M*, то робота цієї сили визначається формулою $A=\bar{F}\cdot\overline{MO}$.

Векторний добуток векторів

Векторним *добутком* двох ненульових векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ називається вектор $\bar{c}$, довжина якого $|\bar{c}|=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\sin\varphi$, де φ – кут між векторами $\bar{a}$ і $\bar{b}$. Якщо $|\bar{c}|\neq 0$, то вектор $\bar{c}$ є перпендикулярним до векторів $\bar{a}$ та $\bar{b}$ і спрямований так, щоб трійка векторів

$\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ виявилася правою. Векторний добуток векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ позначають так: $[\overline{a}, \overline{b}]$ або $\overline{a} \times \overline{b}$. Якщо $\overline{a} = \overline{0}$ або $\overline{b} = \overline{0}$, то вважають $[\overline{a}, \overline{b}] = \overline{0}$.

Нехай $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ – ортонормований базис. Визначимо векторні добутки цих векторів:

$$[\overline{i}, \overline{i}] = \overline{0},\ [\overline{i}, \overline{j}] = \overline{k},\ [\overline{i}, \overline{k}] = -\overline{j},\ [\overline{j}, \overline{i}] = -\overline{k},\ [\overline{j}, \overline{j}] = \overline{0},\ [\overline{j}, \overline{k}] = \overline{i},$$
$$[\overline{k}, \overline{i}] = \overline{j},\ [\overline{k}, \overline{j}] = -\overline{i},\ [\overline{k}, \overline{k}] = \overline{0}. \tag{6}$$

Перейдемо до опису властивостей векторного добутку.

Властивість 1 Векторний добуток $[\overline{a}, \overline{b}] = \overline{0}$ тоді й тільки тоді, коли вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ колінеарні.

Властивість 2 Для будь-яких векторів $\overline{a}$ та $\overline{b}$ векторний добуток $[\overline{a}, \overline{b}]$ антикомутативний, тобто $[\overline{a}, \overline{b}] = -[\overline{b}, \overline{a}]$.

Властивість 3 Для будь-яких векторів $\overline{a}$ та $\overline{b}$ і будь-якого дійсного числа α:

$$\lambda[\overline{a}, \overline{b}] = [\lambda\overline{a}, \overline{b}] = [\overline{a}, \lambda\overline{b}].$$

Властивість 4 Для будь-яких векторів $\overline{a}$, $\overline{b}$ і $\overline{c}$

$$[\overline{a} + \overline{b}, \overline{c}] = [\overline{a}, \overline{c}] + [\overline{b}, \overline{c}]; \qquad [\overline{a}, \overline{b} + \overline{c}] = [\overline{a}, \overline{b}] + [\overline{a}, \overline{c}].$$

Відзначимо, що модуль векторного добутку $[\overline{a}, \overline{b}]$ має простий *геометричний зміст*: він дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах $\overline{a}$ і $\overline{b}$ як на сторонах.

Нехай $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ – правий ортонормований базис і нехай в цьому базисі відомі координати двох векторів $\overline{a}(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ і $\overline{b}(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$. Тоді координати вектора $[\overline{a}, \overline{b}]$ можна обчислити за формулою:

$$[\overline{a}, \overline{b}] = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}. \tag{7}$$

Теорема 4 Якщо вектор зображує силу, прикладену до якої-небудь точки *M*, а вектор $\overline{a}$ йде з деякої точки *O* в точку *M*, то вектор $\overline{M_O} = \overline{a} \times \overline{F}$ являє собою момент сили *F* відносно точки *O*.

Мішаний добуток векторів

Мішаним добутком векторів $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ називають число $(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = (\overline{a}, [\overline{b}, \overline{c}])$.

Теорема 5 Мішаний добуток дорівнює нулю тоді й тільки тоді, коли один з векторів є нульовим або всі три вектори паралельні одній площині, тобто компланарні.

З означення мішаного добутку $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ випливають наступні його властивості.

Властивість 1 Мішаний добуток відмінних від нуля трьох некомпланарних векторів $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ за абсолютним значенням дорівнює об'єму *V* паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$. При цьому, якщо трійка векторів $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ права, то $(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = V$, якщо ж ліва, то $(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = -V$. Вірне й обернене твердження.

Властивість 2 При циклічній перестановці некомпланарних векторів $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ у мішаному добутку $(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c})$ останнє не змінюється, тобто $(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = (\overline{c}, \overline{a}, \overline{b}) = (\overline{b}, \overline{c}, \overline{a})$. При перестановці будь-яких двох векторів у мішаному добутку $(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c})$ останнє змінює знак, тобто

$$(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = -(\overline{b}, \overline{a}, \overline{c}) = -(\overline{a}, \overline{c}, \overline{b}) = -(\overline{c}, \overline{b}, \overline{a}).$$

Властивість 3 Для будь-яких векторів $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ і $\overline{d}$ та будь-яких дійсних чисел λ і μ

$$\left(\lambda\overline{a}+\mu\overline{b},\overline{c},\overline{d}\right)=\lambda\left(\overline{a},\overline{c},\overline{d}\right)+\mu\left(\overline{b},\overline{c},\overline{d}\right),\ \left(\overline{a},\lambda\overline{b}+\mu\overline{c},\overline{d}\right)=\lambda\left(\overline{a},\overline{b},\overline{d}\right)+\mu\left(\overline{a},\overline{c},\overline{d}\right),$$
$$\left(\overline{a},\overline{b},\lambda\overline{c}+\mu\overline{d}\right)=\lambda\left(\overline{a},\overline{b},\overline{c}\right)+\mu\left(\overline{a},\overline{b},\overline{d}\right).$$

Мішаний добуток векторів $\overline{a}(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)$, $\overline{b}(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2)$, $\overline{c}(\alpha_3,\beta_3,\gamma_3)$, заданих своїми координатами в ортонормованому базисі $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$, можна обчислити за формулою

$$\left(\overline{a},\overline{b},\overline{c}\right)=\begin{vmatrix}\alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1\\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2\\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3\end{vmatrix}. \qquad (8)$$