

ПОВЕРХНІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ, ЇХ КАНОНІЧНІ РІВНЯННЯ ТА ЗОБРАЖЕННЯ

Канонічні рівняння поверхонь другого порядку

Еліпсоїд: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

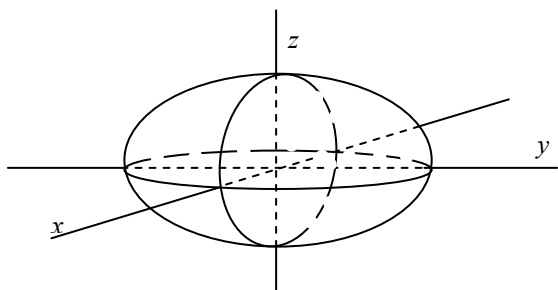


Рисунок 1 – Еліпсоїд

Еліптичний параболоїд: $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$

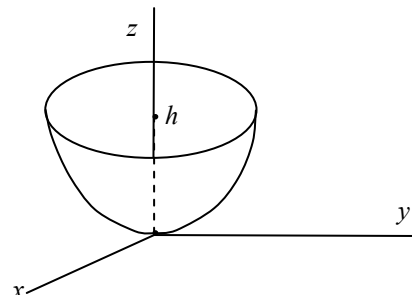


Рисунок 2 – Еліптичний параболоїд

Однопорожнинний гіперболоїд:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

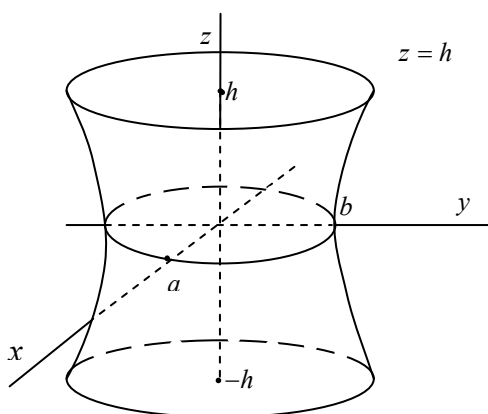


Рисунок 3 – Однопорожнинний гіперболоїд

Двопорожнинний гіперболоїд:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

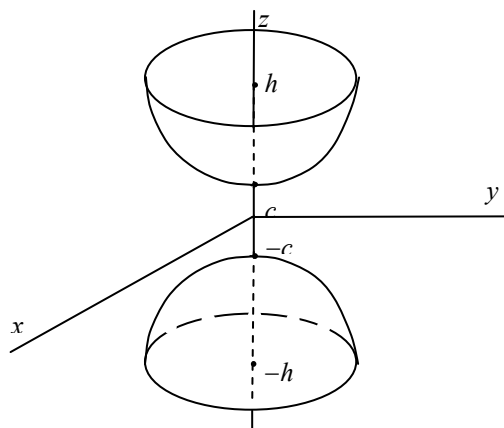


Рисунок 4 – Двопорожнинний гіперболоїд

Гіперболічний параболоїд: $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$

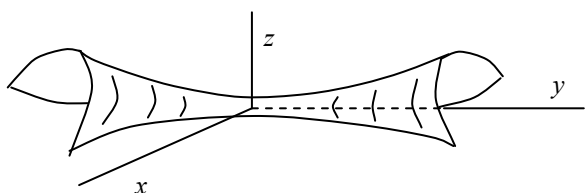


Рисунок 5 – Гіперболічний параболоїд

Конус: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$

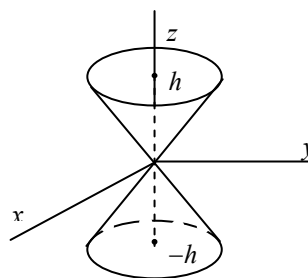
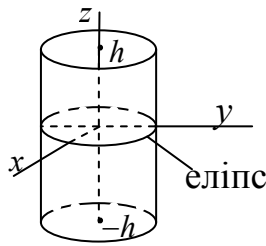


Рисунок 6 – Конус

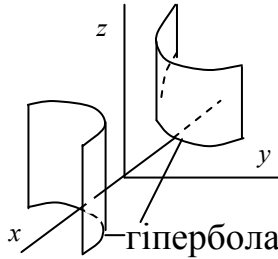
Еліптичний циліндр:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



Гіперболічний циліндр:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



Параболічний циліндр:

$$y^2 = 2px$$

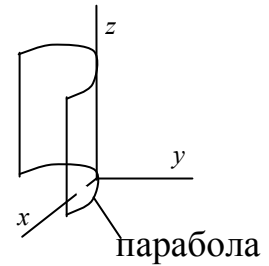


Рисунок 7 – Приклади циліндрів

Методи приведення загальних рівнянь поверхонь другого порядку до канонічного виду

Загальне рівняння поверхні другого порядку має вигляд:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0. \quad (1)$$

Методи зведення рівнянь поверхонь другого порядку до канонічного вигляду:

1. За допомогою перетворень координат:

а) паралельне перенесення:
$$\begin{cases} x = \bar{x} + a, \\ y = \bar{y} + b, \\ z = \bar{z} + c, \end{cases} \text{ де } \vec{a}(a; b; c) - \text{вектор паралельного}$$

переносу, $\bar{x}$, $\bar{y}$ і $\bar{z}$ – нові координати. За відсутності добуток xy , xz і yz це перетворення рівносильне виділенню повних квадратів відносно невідомих x , y і z .

б) перетворення повороту на кут φ у додатному напрямку в одній з координатних площин. Наявність повороту вказують добутки xy , xz або yz . Нові координати $\bar{x}$, $\bar{y}$ і $\bar{z}$ пов'язані з координатами x , y і z рівностями при повороті на кут φ у додатному напрямку в одній з координатних площин, наприклад xOy :

$$\begin{cases} x = \bar{x} \cos \varphi - \bar{y} \sin \varphi, \\ y = \bar{x} \sin \varphi + \bar{y} \cos \varphi. \end{cases}$$

Далі діємо аналогічно кривим другого порядку. Такі перетворення потрібно зробити у всіх координатних площинах, для яких у записі загального рівняння є добутки xy , xz або yz .

в) комбінування двох вищевказаних перетворень.

2. За допомогою теорії квадратичних форм.

Групу старших членів рівняння (1) представимо як квадратичну форму трьох змінних. Цю квадратичну форму зводимо до канонічного вигляду будь-яким відомим методом. У результаті такого перетворення зникають доданки з добутком координат. Далі здійснюємо паралельне перенесення нових осей координат і отримаємо канонічний вигляд вихідної поверхні:

$$\lambda_1 \bar{x}^2 + \lambda_2 \bar{y}^2 + \lambda_3 \bar{z}^2 = C,$$

де $C > 0$ і $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – власні значення матриці старших членів.