ЗАГАЛЬНЕ РІВНЯННЯ КРИВОЇ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Загальне рівняння кривої другого порядку має вигляд:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0. \qquad (1)$$

$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ – *дискримінант старших членів* кривої,

$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ – *дискримінант кривої.*

Тут $a_{12} = a_{21}$, $a_{23} = a_{32}$, $a_{13} = a_{31}$.

Таблиця 1 – Вид кривої другого порядку в залежності від значення дискримінантів старших членів та кривої

	$\Delta = 0$	$\Delta \neq 0$
$\delta > 0$	уявні прямі, що перетинаються в дійсній точці	еліпс (дійсний або уявний)
$\delta = 0$	паралельні прямі (дійсні, уявні, співпадаючі)	парабола
$\delta < 0$	дійсні прямі, що перетинаються	гіпербола

Методи зведення рівнянь кривих другого порядку до канонічного вигляду:

1. За допомогою перетворень координат:

а) *паралельне перенесення*: $\begin{cases} x = \bar{x} + a, \\ y = \bar{y} + b, \end{cases}$ де $\bar{a}(a; b)$ – вектор паралельного переносу, $\bar{x}$ і $\bar{y}$ – нові координати. За відсутності добутку xy це перетворення рівносильне виділенню повних квадратів відносно невідомих x і y.

б) *перетворення повороту* на кут φ у додатному напрямку. Наявність повороту вказує добуток xy. Нові координати $\bar{x}$ і $\bar{y}$ пов’язані з координатами x і y рівностями:

$$\begin{cases} x = \bar{x}\cos\varphi - \bar{y}\sin\varphi, \\ y = \bar{x}\sin\varphi + \bar{y}\cos\varphi. \end{cases}$$

Кут повороту φ завжди можна вибрати таким чином: у випадку, коли $a_{22} \neq a_{11}$, то $\mathrm{tg}2\varphi = \dfrac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}}$, а коли $a_{22} = a_{11}$ і $a_{12} \neq 0$, то $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$.

в) комбінування двох вищевказаних перетворень.

2. За допомогою теорії квадратичних форм:

Групу старших членів рівняння (1) представимо як квадратичну форму двох змінних. Цю квадратичну форму зводимо до канонічного вигляду будь-яким відомим методом. У результаті такого перетворення зникають доданки з добутком координат. Далі здійснюємо паралельне перенесення нових осей координат і отримаємо канонічний вигляд вихідної кривої:

$$\lambda_1\bar{x}^2 + \lambda_2\bar{y}^2 = C,$$

де $C > 0$ і λ_1, λ_2 – власні значення матриці старших членів.