ПОНЯТТЯ ВЕКТОРУ. ЛІНІЙНІ ОПЕРАЦІЇ НАД ВЕКТОРАМИ ТА ЇЇ ВЛАСТИВОСТІ. ЛІНІЙНА ЗАЛЕЖНІСТЬ ВЕКТОРІВ. ЛІНІЙНІ (ВЕКТОРНІ) ПРОСТОРИ. ОРІЄНТОВНІ ТРІЙКИ ВЕКТОРІВ. АФІННА ТА ПРЯМОКУТНА СИСТЕМИ КООРДИНАТ

Приклад 1 У трикутнику ABC пряма AM – бісектриса кута BAC, причому точка M належить стороні BC. Виразити вектор $\overline{AM}$ через $\overline{AB}=\bar{b}$, $\overline{AC}=\bar{c}$.

Розв'язання. $\overline{BC}=\bar{c}-\bar{b}$. За властивістю бісектриси внутрішнього кута трикутника маємо $\left|\overline{BM}\right|:\left|\overline{MC}\right|=\left|\bar{b}\right|:\left|\bar{c}\right|$, $\left|\overline{BM}\right|:\left|\overline{BC}\right|=\left|\bar{b}\right|:\left(\left|\bar{b}\right|+\left|\bar{c}\right|\right)$.

Отже, $\overline{BM}=\dfrac{\left|\bar{b}\right|}{\left|\bar{b}\right|+\left|\bar{c}\right|}\left(\bar{c}-\bar{b}\right)$. Оскільки $\overline{AM}=\overline{BM}+\overline{AB}$, то

$$\overline{AM}=\bar{b}+\frac{\left|\bar{b}\right|}{\left|\bar{b}\right|+\left|\bar{c}\right|}\left(\bar{c}-\bar{b}\right)=\frac{\bar{b}\left|\bar{c}\right|+\bar{c}\left|\bar{b}\right|}{\left|\bar{b}\right|+\left|\bar{c}\right|}.$$

Приклад 2 Радіус-векторами вершин трикутника ABC є $\bar{r}_1$, $\bar{r}_2$, $\bar{r}_3$. Знайти радіус-вектор точки перетину медіан трикутника.

Розв'язання. Оскільки $\overline{BC}=\bar{r}_3-\bar{r}_2$, $\overline{BD}=\dfrac{\bar{r}_3-\bar{r}_2}{2}$ (D – середина BC), $\overline{AB}=\bar{r}_2-\bar{r}_1$, $\overline{AD}=\overline{BD}+\overline{AB}=\dfrac{\bar{r}_3-\bar{r}_2}{2}+\bar{r}_2-\bar{r}_1=\dfrac{\bar{r}_3+\bar{r}_2-2\bar{r}_1}{2}$, $\overline{AM}=\dfrac{2}{3}\overline{AD}$ (M – точка перетину медіан трикутника), тому $\overline{AM}=\dfrac{\bar{r}_3+\bar{r}_2-2\bar{r}_1}{3}$. Отже, $\bar{r}_M=\bar{r}_1+\overline{AM}=\dfrac{\bar{r}_1+\bar{r}_2+\bar{r}_3}{3}$.

Приклад 3 У трикутнику ABC сторона AB точками M і N поділена на три рівні частини: $\left|\overline{AM}\right|=\left|\overline{MN}\right|=\left|\overline{NB}\right|$. Виразити вектор $\overline{CM}$ через $\overline{CA}=\bar{a}$, $\overline{CB}=\bar{b}$.

Розв'язання. Оскільки $\overline{AB}=\bar{b}-\bar{a}$, то $\overline{AM}=\dfrac{\bar{b}-\bar{a}}{3}$. Враховуючи, що $\overline{CM}=\overline{CA}+\overline{AM}$, маємо

$$\overline{CM}=\bar{a}+\frac{\bar{b}-\bar{a}}{3}=\frac{2\bar{a}+\bar{b}}{3}.$$

Приклад 4 Дано радіус-вектори $\bar{r}_A$, $\bar{r}_B$, $\bar{r}_C$ вершин трикутника ABC. Знайти радіус-вектор $\bar{r}$ точки перетину медіан трикутника ABC.

Розв'язання. Нехай M – точка перетину медіан трикутника ABC. Відомо, що медіани трикутника перетинаються в одній точці і нею діляться у відношенні 2:1, рахуючись від вершини. Тоді

$$\bar{r}_M=\frac{\bar{r}_A+2\bar{r}_{A_1}}{3},$$

де A_1 – середина сторони BC, тому $\bar{r}_{A_1}=\dfrac{1}{2}\left(\bar{r}_B+\bar{r}_C\right)$. Врешті решт, будемо мати:

$$\bar{r}_M=\frac{1}{3}\left(\bar{r}_A+\bar{r}_B+\bar{r}_C\right).$$

Приклад 5 Система векторів $\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_n$ містить нульовий вектор. З'ясувати, чи є вектори лінійно залежними або лінійно незалежними?

Розв'язання. Припустимо, що $\overline{a}_1 = \overline{0}$, тоді, $1 \cdot \overline{a}_1 + 0 \cdot \overline{a}_2 + ... + 0 \cdot \overline{a}_n = \overline{0}$. У цій лінійній комбінації векторів $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$ коефіцієнт при першому векторі відмінний від нуля. Отже, розглянуті вектори лінійно залежні. Таким чином, система лінійно незалежних векторів не може містити нульовий вектор.

Приклад 6 В паралелограмі $ABCD$ точка M – середина DC, N – середина BC. Знайти лінійну залежність векторів $\overline{AM}$, $\overline{AN}$, $\overline{CB}$.

Розв'язання. Виходячи з геометричного змісту лінійної залежності трьох векторів, одразу маємо, що вектори $\overline{AM}$, $\overline{AN}$, $\overline{CB}$ лінійно залежні. Знайдемо яку-небудь нульову, але нетривіальну лінійну комбінацію цих векторів.

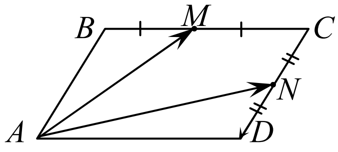

Рисунок 1 – Рисунок до прикладу 6

Виберемо базис $\left\{\overline{AB}, \overline{AD}\right\}$. Розкладемо вектори $\overline{AM}$, $\overline{AN}$, $\overline{CB}$ за базисом, отримаємо

$$\overline{AM} = \frac{1}{2}\overline{AB} + \overline{AD},\ \overline{AN} = \frac{1}{2}\overline{AD} + \overline{AB},\ \overline{CB} = -\overline{AD}.$$

Складемо нульову лінійну комбінацію векторів $\overline{AM}$, $\overline{AN}$, $\overline{CB}$ з коефіцієнтами α, β, γ

$$\alpha\overline{AM} + \beta\overline{AN} + \gamma\overline{CB} = \overline{0}.$$

Підставимо в цю комбінацію знайдені розклади й зберемо коефіцієнти при базисних векторах, отримаємо

$$\left(\frac{1}{2}\alpha + \beta\right)\overline{AB} + \left(\alpha + \frac{1}{2}\beta - \gamma\right)\overline{AD} = \overline{0}.$$

Так як вектори $\overline{AB}$ і $\overline{AD}$ лінійно незалежні, то будь-яка їх нульова лінійна комбінація повинна бути тривіальною. Тому маємо

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\alpha + \beta = 0, \\ \alpha + \frac{1}{2}\beta - \gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -2\beta, \\ \alpha = \gamma - \frac{1}{2}\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -2\beta, \\ \gamma = -\frac{3}{2}\beta. \end{cases}$$

Нас цікавить який-небудь ненульовий набір чисел α, β, γ, тому покладемо $\beta = -2$. Тоді $\alpha = 4$, $\gamma = 3$. Таким чином, знайдена лінійна залежність векторів $\overline{AM}$, $\overline{AN}$, $\overline{CB}$ у вигляді

$$4\overline{AM} - 2\overline{AN} + 3\overline{CB} = \overline{0}.$$

Приклад 7 Вектори $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ некомпланарні. Чи будуть компланарними вектори $\overline{l}, \overline{m}, \overline{n}$: $\overline{l} = \overline{a} + \overline{b} + \overline{c}$, $\overline{m} = \overline{a} - \overline{b}$, $\overline{n} = 3\overline{a} - \overline{b} + \overline{c}$. Якщо так, то знайти їх лінійну залежність.

Розв'язання. Виходячи з геометричного змісту лінійної залежності трьох векторів, одразу маємо, що вектори $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ лінійно незалежні. Складемо нульову лінійну комбінацію векторів $\overline{l}, \overline{m}, \overline{n}$ з коефіцієнтами α, β, γ

$$\alpha\overline{l} + \beta\overline{m} + \gamma\overline{n} = \overline{0}.$$

Підставимо в цю комбінацію їх розклади і зберемо коефіцієнти при векторах $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$, отримаємо

$$(\alpha + \beta + 3\gamma)\overline{a} + (\alpha - \beta - \gamma)\overline{b} + (\alpha + \gamma)\overline{c} = \overline{0}.$$

Так як вектори $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ лінійно незалежні, то будь-яка їх нульова лінійна комбінація повинна бути тривіальною. Тому маємо

$$\begin{cases}\alpha+\beta+3\gamma=0,\\ \alpha-\beta-\gamma=0,\\ \alpha+\gamma=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\beta=2\alpha,\\ \gamma=-\alpha.\end{cases}$$

Нас цікавить який-небудь ненульовий набір чисел α, β, γ, тому покладемо $\alpha = 1$. Тоді $\beta = 2$, $\gamma = -1$. Таким чином, вектори $\bar{l}, \bar{m}, \bar{n}$ компланарні та їх лінійну залежність можна записати у вигляді

$$\bar{l} + 2\bar{m} - \bar{n} = \bar{0}.$$

Приклад 8 Знайти вектор $\bar{a} = \overline{AB}$, якщо $A(1; 3; 2)$ і $B(5; 8; -1)$.

Розв'язання. Координати точки співпадають з координатами її радіус-вектора, тому можемо записати: $\bar{r}_A(1; 3; 2)$, $\bar{r}_B(5; 8; -1)$. Знайдемо координати шуканого вектора:

$$\bar{a} = \overline{AB} = \bar{r}_B - \bar{r}_A = (4; 5; -3).$$

Приклад 9 Знайти координати центру ваги трикутника *ABC*, якщо відомі координати його вершин: $A(-4; 2)$, $B(2; 0)$, $C(1; 3)$.

Розв'язання. Центр ваги трикутника – це точка перетину його медіан. Тому спочатку знайдемо координати другого кінця однієї з медіан, наприклад *CD*:

$$x_D = \frac{x_A + x_B}{2} = -1,\ y_D = \frac{y_A + y_B}{2} = -1,\ D(-1; -1).$$

Центр ділить кожну медіану у відношенні 2:1, рахуючи від вершини трикутника, тобто

$$x_P = \frac{x_C + \frac{1}{2}x_D}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2x_C + x_D}{3} = \frac{1}{3},\ y_P = \frac{y_C + \frac{1}{2}y_D}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2y_C + y_D}{3} = \frac{5}{3}.$$

Отже, $P\left(\frac{1}{3}; \frac{5}{3}\right)$.

Приклад 10 Побудувати точки, полярні координати яких мають наступні значення: $A\left(3; \frac{\pi}{6}\right)$; $B\left(2; \frac{\pi}{4}\right)$. Визначити декартові координати цих точок.

Розв'язання.

Для визначення декартових координат цих точок скористаємося формулами (2):

$$A:\begin{cases}x = 3\cos\frac{\pi}{6},\\ y = 3\sin\frac{\pi}{6}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x = \frac{3\sqrt{3}}{2},\\ y = \frac{3}{2};\end{cases}$$

$$B:\begin{cases}x = 2\cos\frac{\pi}{4},\\ y = 2\sin\frac{\pi}{4}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x = \sqrt{2},\\ y = \sqrt{2}.\end{cases}$$

Відповідь. $A\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}; \frac{3}{2}\right)$, $B\left(\sqrt{2}; \sqrt{2}\right)$.

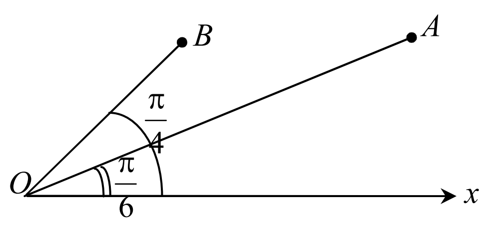

Рисунок 2 – Рисунок до прикладу 10

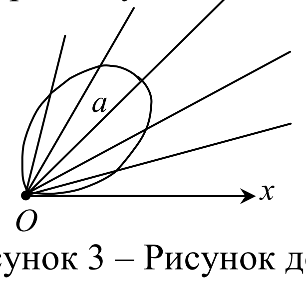

Рисунок 3 – Рисунок до прикладу 11

Приклад 11 Побудувати точки, полярні кути яких дорівнюють 0°, 15°, 30°, 45°, 60°, 75°, 90°, а відповідні радіус-вектори обчислюються з рівняння $\rho = a\sin 2\varphi$. Отримані точки з'єднати плавною кривою.

Розв'язання. Для побудови складемо таблицю

Таблиця 1 – Таблиця до прикладу 2

φ	$0°$	$15°$	$30°$	$45°$	$60°$	$75°$	$90°$
2φ	$0°$	$30°$	$60°$	$90°$	$120°$	$150°$	$180°$
$\rho = a\sin 2\varphi$	0	$\frac{a}{2}$	$\frac{a\sqrt{3}}{2}$	a	$\frac{a\sqrt{3}}{2}$	$\frac{a}{2}$	0

Приклад 12 Вершина O тетраедра $OABC$ прийнята за початок координат, вектори $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ – за базис. Знайти в цій системі координат координати точок L, M, N – середин ребер AC, AB, BC відповідно.

Розв'язання. Координати точок L, M, N співпадають з координатами їх радіус-векторів, тобто з координатами векторів $\overline{OL}$, $\overline{OM}$, $\overline{ON}$. Використовуючи формули ділення відрізка в даному відношенні $\lambda = 1$ (точки є серединами відрізків), будемо мати

$$\overline{OL} = \frac{1}{2}\left(\overline{OA} + \overline{OC}\right), \qquad L\left(\frac{1}{2};\ 0;\ \frac{1}{2}\right);$$

$$\overline{OM} = \frac{1}{2}\left(\overline{OA} + \overline{OB}\right), \qquad M\left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{2};\ 0\right);$$

$$\overline{ON} = \frac{1}{2}\left(\overline{OB} + \overline{OC}\right), \qquad N\left(0;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right).$$

Відповідь. $L\left(\frac{1}{2};\ 0;\ \frac{1}{2}\right)$, $M\left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{2};\ 0\right)$, $N\left(0;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right)$.

Задачі для самостійного розв'язування

№ 1 Спростити вирази:

1) $\overline{AB} - \overline{CB} - \overline{DC} - \overline{AK} - \overline{KC} - \overline{CD}$; 2) $\overline{AB} + \overline{MN} + \overline{BC} + \overline{CA} + \overline{PQ} + \overline{NM}$;

3) $\overline{AD} + \overline{MP} + \overline{EK} - \overline{EP} - \overline{MD}$; 4) $2\overline{x} - \overline{a} + 3\overline{b} - \overline{x} + 3\overline{a} - \overline{b}$.

№ 2 Для довільних векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ побудувати: 1) $2\overline{a} - \frac{1}{3}\overline{b}$, $\frac{1}{2}\overline{a} + 3\overline{b}$, $-2\overline{a} - 3\overline{b}$, $-3\overline{a} + 2\overline{b}$; 2) $4\overline{a} - \frac{1}{2}\overline{b}$, $\frac{1}{4}\overline{a} + \frac{1}{3}\overline{b}$, $-3\overline{a} - 4\overline{b}$, $-\frac{2}{3}\overline{a} + \frac{3}{4}\overline{b}$.

№ 3 Побудувати суму та різницю векторів $\overline{AB}$ і $\overline{CD}$, $\overline{AB}$ і $\overline{DC}$ трапеції $ABCD$, що є її основами .

№ 4 У правильному п'ятикутнику $ABCD$ задані вектори, що збігаються з його сторонами: $\overline{AB} = \overline{m}$, $\overline{BC} = \overline{n}$, $\overline{CD} = \overline{p}$, $\overline{DE} = \overline{q}$, $\overline{EA} = \overline{r}$. Побудувати вектори: $\overline{m} - \overline{n} + \overline{p} - \overline{q} + 2\overline{r}$, $\overline{m} + 2\overline{p} + \frac{1}{2}\overline{r}$, $2\overline{m} + \frac{1}{2}\overline{n} - 3\overline{p} - \overline{q} + 2\overline{r}$.

№ 5 У трикутнику ABC вектор $\overline{AB} = \overline{a}$, $\overline{BC} = \overline{b}$. Знайти вектори, що збігаються з медіанами цього трикутника.

№ 6 Нехай $\overline{r}_1$, $\overline{r}_2$, $\overline{r}_3$ – радіус-вектори трьох послідовних вершин паралелограма $ABCD$. Знайти радіус-вектор вершини D.

№ 7 Дано правильний шестикутник $ABCDEF$, точка O – його центр. Виразити вектори $\overline{OC}$, $\overline{OD}$, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{DA}$, $\overline{CA}$ через вектори $\overline{OA} = \overline{a}$, $\overline{OB} = \overline{b}$.

№ 8 Точка *O* – центр ваги трикутника *ABC*. Виразити вектори $\overline{AC}$, $\overline{CB}$, $-\frac{1}{2}\overline{AB}$, $\overline{AO}$ через вектори $\overline{AB}=\overline{a}$, $\overline{BC}=\overline{b}$.

№ 9 У тетраедрі $ABCD$ точки *M* і *N* є серединами ребер DA і BC відповідно. Виразити вектор $\overline{MN}$ через вектори $\overline{DA}$, $\overline{DB}$, $\overline{DC}$.

№ 10 У паралелепіпеді $ABCDA_1B_1C_1D_1$ задані вектори, що збігаються з його ребрами: $\overline{AB}=\overline{m}$, $\overline{AD}=\overline{n}$, $\overline{AA_1}=\overline{p}$. Побудувати вектори: $\overline{m}+\overline{n}+\overline{p}$, $\overline{m}+\overline{n}+\frac{1}{2}\overline{p}$, $\frac{1}{2}\overline{m}+\frac{1}{2}\overline{n}+\overline{p}$, $\overline{m}+\overline{n}-\overline{p}$, $-\overline{m}-\overline{n}+\frac{1}{2}\overline{p}$.

№ 11 Точка *O* – центр ваги трикутника *ABC*. Довести, що $\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}=\overline{0}$.

№ 12 Дано паралелограм $ABCD$. Точка K – середина сторони BC, точка L – середина сторони DC. Виразити вектори $\overline{AB}$ і $\overline{AD}$ через вектори $\overline{AK}$ і $\overline{AL}$.

№ 13 Точка M_1 – середина відрізка A_1B_1, точка M_2 – середина відрізка A_2B_2. Довести векторну рівність $\overline{M_1M_2}=\frac{1}{2}\left(\overline{A_1A_2}+\overline{B_1B_2}\right)$.

№ 14 Побудувати точку *M*, що ділить відрізок *AB* у відношенні: 1) ± 2, $\pm\frac{1}{2}$; 2) $\pm\frac{3}{4}$, $\pm\frac{4}{3}$; 3) 3, –4, $-\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$.

№ 15 В ΔABC: $AB=3$, $AC=5$. Виразити радіус-вектор $\overline{r}_D$ точки перетину бісектрис трикутника зі стороною *BC* через радіус-вектори точок *B* і *C*. Взяти точку *A* за полюс.

№ 16 В ΔABC бісектриса AD ділить BC у відношенні $\lambda=\frac{1}{2}$. В якому відношенні медіана *CE* ділить цю бісектрису.

№ 17 Точка *M* ділить відрізок *AB* у відношенні $\lambda=-\frac{2}{3}$. Виразити радіус-вектор точки *B* через радіус вектори точок *A* і *M*.

№ 18 Дано трикутник ABC. Точка B_1 – середина сторони *AC*, точки A_1, A_2 ділять сторону *CB* на три рівні частини, точки C_1, C_2, C_3 ділять сторону *AB* на чотири рівні частини. Знайти лінійну залежність векторів $\overline{C_1A_2}$, $\overline{A_1B_1}$, $\overline{C_2C}$.

№ 19 Дано паралелограм $ABCD$. Точка B_1 – середина *AB*, A_1 – середина AD, точки C_1, C_2 ділять DC на три рівні частини. Знайти лінійну залежність векторів $\overline{A_1B_1}$, $\overline{DA_1}$, $\overline{BC_1}$.

№ 20 Дана трапеція $ABCD$ ($AB \parallel CD$), у якої $DC=\frac{1}{3}AB$. Точки M і N – середини бічних сторін, точка P – середина основи *AB*. Знайти лінійну залежність векторів $\overline{MN}$, $\overline{PC}$, $\overline{DA}$.

№ 21 У трикутнику ABC точка D – середина сторони *AC*, Точки E і F – ділять BC на три рівні частини. Знайти лінійну залежність векторів $\overline{DF}$, $\overline{EA}$, $\overline{FE}$.

№ 22 Знайти, якщо вона існує, лінійну залежність векторів $\overline{l}=2\overline{a}-\overline{b}-\overline{c}$, $\overline{m}=2\overline{b}-\overline{a}-\overline{c}$, $\overline{n}=2\overline{c}-\overline{b}-\overline{a}$, де вектори $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ некомпланарні.

№ 23 Дано вектори $\overline{a}(-1;3;2)$, $\overline{b}(0;1;4)$. Обчислити координати векторів $\overline{a}+\overline{b}$, $\overline{a}-\overline{b}$,

$\dfrac{\overline{a}+2\overline{b}}{3}$, $\dfrac{\overline{a}-2\overline{b}}{2}$, $2\overline{a}+3\overline{b}$.

№ 24 На матеріальну точку діють дві сили $\overline{F_1}=2\overline{a}$ і $\overline{F_2}=3\overline{b}$, де $\overline{a}(5;-2;3)$, $\overline{b}(1;0;-4)$. Знайти їх рівнодійну.

№ 25 Знайти лінійну залежність векторів $\overline{a}(1;3;5)$, $\overline{b}(0;4;5)$, $\overline{c}(7;-8;4)$, $\overline{d}(2;-1;3)$.

№ 26 Чи будуть вектори $\overline{l}=2\overline{a}-\overline{b}+\overline{c}$, $\overline{m}=\overline{a}+\overline{b}-2\overline{c}$, $\overline{n}=\overline{a}-2\overline{b}+3\overline{c}$ лінійно залежні, якщо вектори $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ лінійно незалежні?

№ 27 На прямій, визначеній точками $A(1;0;4)$ і $B(3;-1;2)$, знайти точку C таку, щоб точка A лежала між точками C і B й $AC=3AB$.

№ 28 На прямій, визначеній точками $A(1;0;4)$ й $B(3;-1;2)$, знайти точку C таку, що точка B лежала між точками A і C й $AC=3AB$.

№ 29 Чи колінеарні точки $A(4;-1)$, $B(6;-7)$, $C(3;2)$?

№ 30 Довести, що вектори $\overline{a}(1;-1;2)$, $\overline{b}(2;2;-1)$, $\overline{c}(3;7;-7)$ утворюють базис. Знайти координати вектора $\overline{d}(2;1;0)$ в цьому базисі.

№ 31 Дано три вектори $\overline{a}(3;-1)$, $\overline{b}(1;-2)$, $\overline{c}(-1;7)$. Знайти розклад вектора $\overline{p}=\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}$ по базису $\{\overline{a},\overline{b}\}$.

№ 32 Знайти розклад вектора $\overline{c}(11;6;-5)$ по базису $\overline{p}(3;-2;1)$, $\overline{q}(-1;1;-2)$, $\overline{r}(2;1;-3)$.

№ 33 Дано трикутник ABC. Довжини сторін AB і AC рівні відповідно 3 і 5. Відомі також координати вершин B и C: $B(2;2;1)$, $C(3;4;0)$. Знайти координати точки D перетину бісектриси трикутника зі стороною BC.

№ 34 Дано вектори $\overline{a}(2;3)$, $\overline{b}(1;-3)$, $\overline{c}(-1;3)$. При якому значенні α вектори $\overline{p}=\overline{a}+\alpha\overline{b}$ і $\overline{q}=\overline{a}+2\overline{c}$ колінеарні?

№ 35 Знайти числа α,β,γ, для яких $\alpha\overline{a},\beta\overline{b},\gamma\overline{c},\overline{d}$ утворюють замкнену ламану лінію, де $\overline{a}(3;-2;1)$, $\overline{b}(-1;1;-2)$, $\overline{c}(2;1;-3)$, $\overline{d}(11;6;-5)$.

№ 36 Побудувати точки, полярні координати яких мають наступні значення: $\left(1;\dfrac{5\pi}{3}\right)$, $\left(5;\dfrac{7\pi}{6}\right)$, $\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$, $\left(2{,}5;\dfrac{2\pi}{3}\right)$, $(6;\pi)$, $\left(3;\dfrac{\pi}{3}\right)$, $\left(\sqrt{3};-\dfrac{\pi}{6}\right)$. Визначити декартові координати цих точок.

№ 37 Знайти полярні координати точок, симетричних із точками $\left(1;\dfrac{\pi}{4}\right)$, $\left(3;\dfrac{2\pi}{3}\right)$, $\left(\dfrac{2}{3};-\dfrac{\pi}{6}\right)$: 1) щодо полюса; 2) щодо полярної осі.

№ 38 Побудувати точки, полярні кути яких дорівнюють 0°, 15°, 30°, 45°, 60°, 75°, 90°, а відповідні радіус-вектори обчислюються з рівняння $\rho=a\cos 2\varphi$. Отримані точки з'єднати плавною кривою.

№ 39 Щоб зрівноважити тіло, вага якого рівна P, на похилій площині, що утворює з горизонтальною площиною кут α, потрібно застосувати силу $Q=P\sin\alpha$ (рис. 4). Сила Q одного і того ж самого вантажу P залежить від кута нахилу α. Виразити цю залежність графічно, користуючись полярними координатами.

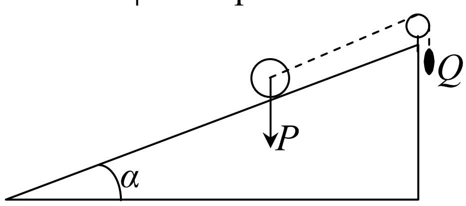

Рисунок 4 – Рисунок до задачі № 39

№ 40 Дано ромб $ABCD$, O – точка перетину його діагоналей. Приймаючи за початок координат точку A, а за базис – вектори $\overline{AO}$ і $\overline{AB}$, знайти в цій системі координат координати всіх вершин ромба.

№ 41 Вершина O тетраедра $OABC$ прийнята за початок координат, вектори $\overline{OM}$, $\overline{ON}$, $\overline{OL}$ – за базис. Знайти в цій системі координат координати всіх вершин тетраедра, де L, M, N – середини ребер AC, AB, BC відповідно.

№ 42 Вершина O тетраедра $OABC$ прийнята за початок координат, вектори $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ – за базис. Знайти в цій системі координат координати центрів ваги всіх граней тетраедра.

№ 43 Вершина A паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ прийнята за початок координат, вектори $\overline{AC}$, $\overline{AB_1}$, $\overline{AD_1}$ – за базис. Знайти в цій системі координат координати всіх вершин паралелепіпеда.

№ 44 По горизонтальній балці, яка лежить на двох опорах A і B, йде людина. Тиск, якому піддається опора B, змінюється в залежності від положення людини на балці. Зобразити графічно залежність між цим тиском і відстанню людини від іншого кінця балки A при наступних чисельних даних: вага балки $P = 120$ кг, довжина її $l = 5$м, вага людини $p = 65$ кг.

№ 45 Найпростіший підіймальний пристрій складається з барабану і колеса, які обертаються на горизонтальній осі. На барабан намотана мотузка, до кінця якої підвішений вантаж Q, а колесо обмотане мотузкою, за яку тягнуть, щоб підняти вантаж. Сила P, яку при цьому треба застосувати, обчислюється за формулою $P = \frac{r}{R} \cdot Q$, де r – радіус барабану, R – радіус колеса. Зобразити графічно залежність між силою P і радіусом колеса R, якщо $r = 19$ см і $Q = 12$ кг (вага відра води).