ДОБУТКИ ВЕКТОРІВ

Приклад 1 По похилій площині з кутом нахилу α рухається вниз брусок A масою m (рис. 1). Коефіцієнт тертя бруска до площини дорівнює μ. Визначити прискорення $\overline{a}$ бруска.

Розв'язання. На брусок діють три сили: сила тяжіння $\overline{F}_{\text{тяж}} = m\overline{g}$, сила тертя $\overline{F}_{\tau}$ і сила реакції опори $\overline{N}$. Напрямки цих сил показані на рис. 1. Разом ці сили й надають бруску прискорення $\overline{a}$, що напрямлене вздовж площини вниз. Щоб спростити рисунок, усі сили прикладені до центру бруска. Насправді, $\overline{F}_{\tau}$ і $\overline{N}$ прикладені до основи бруска.

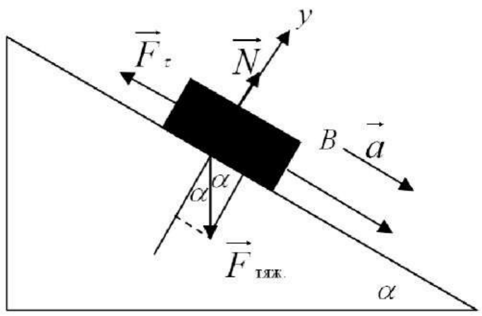

Рисунок 1 – Рисунок до прикладу 1

Спрямуємо осі координат Ox і Oy так, як показано на рис. 1. Другий закон Ньютона запишемо у векторній формі

$$m\overline{a} = m\overline{g} + \overline{N} + \overline{F}_{\tau},$$

а також у скалярній формі для проекції векторів, що входять до нього, на осі Ox і Oy.

Для проекцій на вісь Ox рівняння другого закону Ньютона запишеться так:

$$ma = mg\sin\alpha - F_{\tau}. \qquad (*)$$

Для проекцій на вісь Oy маємо

$$0 = N - mg\cos\alpha \text{ або } N = mg\cos\alpha. \qquad (**)$$

Оскільки сила тертя дорівнює μN, то, враховуючи (**), отримаємо $F_{\tau} = \mu mg\cos\alpha$. Підставляючи F_{τ} в (*), знайдемо:

$$|\overline{a}| = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha).$$

Відповідь. $|\overline{a}| = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$.

Приклад 2 Дві однакові кульки підвішені на нитках завдовжки $l = 2$ м до однієї точки (рис. 2). Коли кулькам надали однакових зарядів по $q = 2\cdot 10^{-8}$ Кл, то вони розійшлися на відстань $r = 16$ см. Визначити натяг кожної нитки.

Розв'язання. На кожну кульку діють три сили: сила тяжіння $m\overline{g}$, сила пружності нитки $\overline{F}_{\text{пр}}$ і кулонівська сила $\overline{F}$.

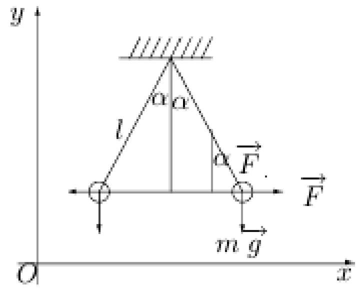

Рисунок 2 – Рисунок до прикладу 2

Кульки нерухомі, отже, сума проекцій відповідних сил на осі Ox і Oy дорівнює нулю. Для суми проекцій сил на вісь Ox ця умова має вигляд

$$A - A_{\text{пр}}\sin\alpha + mg\cos 90^\circ = 0.$$

Оскільки $\sin\alpha = \dfrac{r}{2l}$ і $F = k\dfrac{q^2}{r^2}$, то

$$F_{\text{пр}} = \frac{F}{\sin\alpha} = \frac{F\cdot 2l}{r} = k\frac{q^2\cdot 2l}{r^2} \approx 3{,}5\cdot 10^{-3} \text{ Н}.$$

Відповідь. $F_{\text{пр}} = 3{,}5\cdot 10^{-3}$ Н.

Приклад 3 Два однакових точкових заряди розміщені на відстані r один від одного в однорідному середовищі з діелектричною проникністю ε (рис. 3). Знайти напруженість електричного поля в точці, що розміщена на однаковій відстані r як від одного, так і від іншого заряду.

Розв'язання. Згідно з принципом суперпозиції, шукана напруженість $\overline{E}$ дорівнює геометричній напружености полів, створених кожним із зарядів. Модулі напруженостей кожного заряду дорівнюють $E_1 = E_2 = k\dfrac{|q|}{\varepsilon r^2}$.

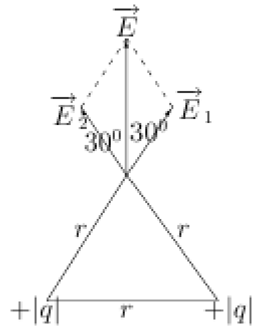

Рисунок 3 – Рисунок до прикладу 3

Діагональ паралелограма, побудованого на векторах $\overline{E}_1$ та $\overline{E}_2$, є напруженістю результуючого поля, модуль якої дорівнює

$$E = eE_l\cos 30^\circ = 2k\frac{|q|}{\varepsilon r^2}\frac{\sqrt{3}}{2} = k\frac{|q|\sqrt{3}}{\varepsilon r^2}.$$

Відповідь. $E = k\dfrac{|q|\sqrt{3}}{\varepsilon r^2}$.

Приклад 4 Задано вектори $\overline{a} = m\overline{i} + 8\overline{j} + 4\overline{k}$ і $\overline{b} = 4\overline{i} + m\overline{j} - 7\overline{k}$. При якому значенні m ці вектори перпендикулярні?

Розв'язання. Скористаємось формулою (4):

$$4m + 8m - 28 = 0,\ m = \frac{7}{3}.$$

Відповідь. $m = \dfrac{7}{3}$.

Приклад 5 Знайти кут між векторами $\overline{a} = \overline{i} + 2\overline{j} + 3\overline{k}$ і $\overline{b} = 6\overline{i} + 4\overline{j} - 2\overline{k}$.

Розв'язання. Скористаємось формулою (5):

$$\cos\varphi = \frac{1\cdot 6 + 2\cdot 4 + 3\cdot(-2)}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2}\cdot\sqrt{6^2 + 4^2 + (-2)^2}} = \frac{8}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{56}} = \frac{2}{7}, \qquad \varphi = \arccos\frac{2}{7}.$$

Відповідь. $\varphi = \arccos\dfrac{2}{7}$.

Приклад 6 Знайти орт вектора $\overline{a} = 2\overline{i} + 4\overline{j} + 4\overline{k}$.

Розв'язання. Знаходимо довжину вектора $\overline{a}$: $|\overline{a}| = \sqrt{2^2 + 4^2 + 4^2} = 6$. Оскільки $\overline{a}_0 = \dfrac{\overline{a}}{|\overline{a}|}$, то $\overline{a}_0 = \dfrac{1}{3}\overline{i} + \dfrac{2}{3}\overline{j} + \dfrac{2}{3}\overline{k}$.

Відповідь. $\overline{a}_0\left(\dfrac{1}{3}; \dfrac{2}{3}; \dfrac{2}{3}\right)$.

Приклад 7 До точки прикладені дві сили $\overline{P}$ і $\overline{Q}$, які діють під кутом 120°, причому $|\overline{P}| = 7$, $|\overline{Q}| = 4$. Знайти величину рівнодійної сили $\overline{R}$.

Розв'язання. Оскільки $\overline{R} = \overline{P} + \overline{Q}$, то

$$|\overline{R}| = \sqrt{\overline{R}^2} = \sqrt{(\overline{P} + \overline{Q})^2} = \sqrt{\overline{P}^2 + 2\overline{P}\overline{Q} + \overline{Q}^2} =$$

$$= \sqrt{|\overline{P}|^2 + 2|\overline{P}|\cdot|\overline{Q}|\cdot\cos 120^\circ + |\overline{Q}|^2} = \sqrt{37}.$$

Відповідь. $|\overline{R}| = \sqrt{37}$.

Приклад 8 Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\overline{a}(1;1;1)$, $\overline{b}(3;2;1)$, якщо координати векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ задані в правому ортонормованому базисі $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$.

Розв'язання. У випадку правого ортонормованого базису $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ має місце формула (7), згідно з якою:

$$\left[\overline{a}, \overline{b}\right] = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -\overline{i} + 2\overline{j} - \overline{k}.$$

Таким чином, $\left[\overline{a}, \overline{b}\right] = (-1; 2; -1)$. Визначимо модуль вектора $\left[\overline{a}, \overline{b}\right]$ або, що теж саме, шукану площу паралелограма

$$S = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{6} \text{ (кв. од).}$$

Відповідь. $S = \sqrt{6}$ (кв. од).

Приклад 9 В ортонормованому базисі $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ задані вектори $\overline{a}(1;2;3)$, $\overline{b}(3;2;1)$, $\overline{c}(3;2;1)$. З'ясувати, чи є трійка векторів $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ правою. Знайти об'єм паралелепіпеда, побудованого на цих векторах.

Розв'язання. Обчислимо мішаний добуток векторів $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ за формулою (8):

$$\left(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}\right) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 12.$$

Оскільки $\left(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}\right) > 0$, то за властивістю 1 мішаного добутку векторів, трійка векторів $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ – права й об'єм паралелепіпеда, побудованого на цих векторах, дорівнює $V = 12$ (куб. од.).

Відповідь. Трійка векторів $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ – права і $V = 12$ (куб. од.).

Приклад 10 Обчислити роботу, що виконується силою $\overline{F} = (3; -5; 2)$, коли точка прикладання переміщується із початку в кінець вектора $\overline{S}(2, -5, 7)$.

Розв'язування. Якщо вектор зображає силу $\overline{F}$, точка прикладання якої переміщується із початку в кінець вектора $\overline{S}$, то робота A цієї сили визначається рівністю

$$A = \left(\overline{F}, \overline{S}\right) = 3 \cdot 2 + (-5) \cdot (-5) + 2 \cdot 7 = 45.$$

Відповідь. $A = 45$.

Приклад 11 Сила $\overline{P} = (2; -4; 5)$ прикладена до точки $A(2; -1; 1)$. Визначити момент цієї сили відносно початку координат.

Розв'язування. Якщо вектор $\overline{f}$ зображає силу, що прикладена в деякій точці *M*, а вектор $\overline{S}$ виходить з деякої точки *B* в точку *M*, то вектор $\left[\overline{S}, \overline{f}\right] = \overline{M}_f$ є моментом сили $\overline{f}$ відносно точки *B*, $\left[\overline{S}, \overline{f}\right]$ – векторний добуток векторів $\overline{S}$ і $\overline{f}$.

Оскільки вектор $\overline{OA}(2; -1; 2)$, тоді момент сили $\overline{P}$ відносно початку координат буде:

$$\overline{M}_P = \left[\overline{OA},\ \overline{P}\right] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -4 & 5 \end{vmatrix} = 3\bar{i} - 6\bar{j} - 6\bar{k}\ .$$

Відповідь. $\overline{M}(3, -6, -6)$.

Приклад 12 Знайти об'єм трикутної піраміди з вершинами $A(2; 2; 2)$, $B(4;3; 3)$, $C(4; 5; 4)$ і $D(5; 5; 6)$.

Розв'язання. Знаходимо координати векторів $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ і $\overline{AD}$, які збігаються з ребрами піраміди, що виходять із вершини A: $\overline{AB}(2; 1; 1)$, $\overline{AC}(2; 3; 2)$, $\overline{AD}(3; 3; 4)$. Знайдемо мішаний добуток цих векторів за формулою (8):

$$\left(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}\right) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 24 + 6 + 6 - 9 - 12 - 8 = 7\ .$$

Оскільки об'єм піраміди дорівнює $\dfrac{1}{6}$ частині об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ і $\overline{AD}$, то $V = \dfrac{7}{6}$ (куб. од.).

Відповідь. $V = \dfrac{7}{6}$ (куб. од.).

Приклад 13 Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\bar{a} + 3\bar{b}$ і $3\bar{a} + \bar{b}$, якщо $|\bar{a}| = |\bar{b}| = 1$, $\angle(\bar{a}, \bar{b}) = 30^\circ$.

Розв'язання. Маємо

$$\left(\bar{a} + 3\bar{b}\right)\times\left(3\bar{a} + \bar{b}\right) = \bar{a}\times\left(3\bar{a}\right) + \left(3\bar{b}\right)\times\left(3\bar{a}\right) + \bar{a}\times\bar{b} + \left(3\bar{b}\right)\times\bar{b} =$$
$$= 3\cdot\bar{0} - 9\bar{a}\times\bar{b} + \bar{a}\times\bar{b} + 3\cdot\bar{0} = -8\bar{a}\times\bar{b}\ .$$

Отже,

$$S = \left|-8\bar{a}\times\bar{b}\right| = 8\left|\bar{a}\times\bar{b}\right| = 8\cdot 1\cdot 1\cdot\sin 30^\circ = 4 \text{ (кв. од.).}$$

Відповідь. $S = 4$ (кв. од.).

Задачі для самостійного розв'язування

№ 1 Спростіть вираз:

1) $\left(2\bar{i} + 3\bar{j} - \bar{k}\right)\left(\bar{i} - \bar{j} + 4\bar{k}\right)$; 2) $\left(\bar{a} + \bar{b}\right)\left(\bar{a} - \bar{b}\right)$; 3) $\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)^2 + \left(\bar{a}\cdot\bar{b}\right)^2$;

4) $\bar{i}\times\bar{j} + \bar{i}\times\bar{k} - \bar{j}\times\bar{k}$; 5) $\bar{i}\times\bar{j}\times\bar{k}$; 6) $\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\left(\bar{c} + \lambda\bar{a} + \mu\bar{b}\right)$;

7) $\left(\bar{a} + \bar{b}\right)\cdot\left(\bar{b} + \bar{c}\right)\cdot\left(\bar{c} + \bar{a}\right)$; 8) $\bar{a}\times\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)$, якщо $\bar{a}\perp\bar{c}$ і $\bar{a}\perp\bar{b}$;

9) $\left(\bar{i} - 3\bar{j} + \bar{k}\right)\cdot\left(2\bar{i} + \bar{j} - 3\bar{k}\right)\cdot\left(\bar{i} + 2\bar{j} + \bar{k}\right)$; 10) $\left(\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}\right)\cdot\left(\bar{a} + \bar{b} - \bar{c}\right)\cdot\left(\bar{a} - \bar{b} + \bar{c}\right)$;

11) $\left(\bar{a} - 2\bar{b} + \bar{c}\right)\cdot\left(3\bar{a} + \bar{b} - 2\bar{c}\right)\cdot\left(7\bar{a} + 14\bar{b} - 13\bar{c}\right)$, якщо $\bar{a}^2 = \bar{b}^2 = \bar{c}^2 = 1$, $\bar{a}\times\bar{b} = \bar{b}\times\bar{c} = \bar{a}\times\bar{c} = \bar{0}$.

№ 2 Дано вектори $\bar{a}(2; 3; 0)$, $\bar{b}(-1; 2; 2)$, $\bar{c}(3; 1; 0)$. Знайдіть:

1) $\left(3\bar{a} - 4\bar{b}\right) + \left(\bar{b} - 3\bar{c}\right) + \left(2\bar{c} - \bar{a}\right)$; 2) $\left(\bar{a} + \bar{b} - \bar{c}\right)\left(-2\bar{a} - 3\bar{b}\right)$; 3) $\left|\bar{a} + \bar{b} - \bar{c}\right|$;

4) $\angle\left(\bar{a}, \bar{i}\right)$; 5) $\angle\left(\bar{a} + \bar{b} - \bar{c},\ -2\bar{a} - 3\bar{b}\right)$; 6) $\bar{a}\times\bar{b}$;

7) $\bar{a}\times\left(17\bar{a} + 3\bar{b}\right)$; 8) $\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}$; 9) $\bar{a}\times\left(\bar{b}\times\bar{c}\right) - \left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\times\bar{c}$;

10) одиничні вектори, які колінеарні вектору $\bar{b} + \bar{c}$;

11) одиничні вектори, які перпендикулярні векторам $\bar{b}$ і $\bar{c}$;

12) $\bar{x}$, якщо $\bar{a}=\bar{c}\times\bar{x}$; 13) $\bar{d}$, якщо $\bar{d}\perp(\bar{a}+\bar{b}-\bar{c}), \bar{d}\perp(-2\bar{a}-3\bar{b}), |\bar{d}|=1$.

№ 3 Визначити внутрішні кути трикутника з вершинами $A(0;\,0;\,5)$, $B(1;\,1;\,1)$ і $C(-1;\,2;\,3)$.

№ 4 Одиничні вектори $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ утворюють трикутник. Обчислити $(\bar{a}, \bar{b})+(\bar{b}, \bar{c})+(\bar{a}, \bar{c})$.

№ 5 Знайти вектор $\bar{x}$, колінеарний до вектора $\bar{a}(1,\,-1,\,2)$, знаючи, що $|\bar{x}|=3\sqrt{6}$ і він утворює з віссю Ox тупий кут.

№ 6 Знайти вектор $\bar{x}$, перпендикулярний до осі Oy та до вектора $\bar{a}(1,\,2,\,-3)$ з модулем $3\sqrt{10}$.

№ 7 Знайти вектор $\bar{x}$, перпендикулярний до векторів $\bar{a}(1,\,1,\,2)$ і $\bar{b}(3,\,1,\,2)$ та задовольняє умову $(\bar{x},\,3\bar{i}+2\bar{j}+\bar{k})=-6$.

№ 8 Обчислити проекцію вектора $\bar{a}=5\bar{i}+2\bar{j}+5\bar{k}$ на вісь, що визначається вектором $\bar{b}=2\bar{i}-\bar{j}+2\bar{k}$.

№ 9 Дано три вектори $\bar{a}(7,\,-6,\,1)$, $\bar{b}(2,\,-3,\,-6)$ і $\bar{c}(3,\,-4,\,12)$. Обчислити $\text{пр}_{\bar{b}}(\bar{a}+\bar{c})$.

№ 10 Задано вектори, що збігаються зі сторонами трикутника *ABC*, $\overline{AB}=5\bar{i}+2\bar{j}$ і $\overline{BC}=-2\bar{i}+4\bar{j}$. Знайти довжину висоти цього трикутника, опущеної з точки *A*.

№ 11 Обчислити роботу, що її виконує сила $\bar{f}(4;\,5;\,2)$, коли точка, до якої вона прикладена, рухаючись прямолінійно, перемістилася із положення $A(3;\,-7;\,1)$ у положення $B(6;\,-1;\,-2)$.

№ 12 Дано три сили: $\bar{f}_1(3;\,-4;\,2)$, $\bar{f}_2(2;\,3;\,-5)$, $\bar{f}_3(-3;\,-2;\,4)$, прикладені до однієї точки. Обчислити роботу, яку виконує рівнодійна цих сил, коли точка, до якої вона прикладена, рухаючись прямолінійно, перемістилася з точки $A(5;\,3;\,-7)$ у точку $B(4;\,-1;\,-4)$.

№ 13 Маса *m*, зосереджена в точці $A(x;\,y;\,z)$, притягується, згідно з законом Ньютона, до маси *M*, що зосереджена в початку координат. Знайти силу тяжіння.

№ 14 У початку координат розміщений заряд *q*. Визначити в довільній точці $M(x;\,y;\,z)$ простору напругу *E* електростатичного поля, утвореного цим зарядом.

№ 15 До однієї і тієї ж точки прикладені дві сили $\bar{f}_1$ та $\bar{f}_2$, кут між якими *α*. Знайти величину рівнодійної.

№ 16 Дано точки *A*(3,1, 2), *B*(4, 0,1) і *C*(5,4, 7). Обчислити площу трикутника *ABC*.

№ 17 Знайти орт вектора, перпендикулярного до векторів $\bar{a}=2\bar{i}+2\bar{j}+\bar{k}$ та $\bar{b}=4\bar{i}+5\bar{j}+3\bar{k}$.

№ 18 Довести, що вектор $\bar{p}=\bar{b}(\bar{a},\bar{c})-\bar{c}(\bar{a},\bar{b})$ перпендикулярний до вектора $\bar{a}$.

№ 19 Довести, що вектор $\bar{p}=\bar{b}-\dfrac{\bar{a}(\bar{a},\bar{b})}{\bar{a}^2}$ перпендикулярний до вектора $\bar{a}$.

№ 20 Дано, що $|\bar{a}|=3$, $|\bar{b}|=5$. Визначити, при якому значенні *α* вектори $\bar{a}+\alpha\bar{b}$ і $\bar{a}-\alpha\bar{b}$ будуть взаємно перпендикулярні.

№ 21 Якій умові повинні задовольняти вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$, щоб вектор $\bar{a}+\bar{b}$ був перпендикулярний до вектора $\bar{a}-\bar{b}$.

№ 22 Вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ утворюють кут $\varphi=\dfrac{2\pi}{3}$. Знаючи, що $|\bar{a}|=3$, $|\bar{b}|=4$, обчислити: 1) $\bar{a}\cdot\bar{b}$; 2) $\bar{a}^2$; 3) $\bar{b}^2$; 4) $(\bar{a}+\bar{b})^2$; 5) $(3\bar{a}-2\bar{b})\cdot(\bar{a}+2\bar{b})$; 6) $(\bar{a}-\bar{b})^2$; 7) $(3\bar{a}+2\bar{b})^2$.

№ 23 Вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ взаємно перпендикулярні, вектор $\overline{c}$ утворює з ними кути, рівні $\frac{\pi}{3}$. Знаючи, що $|\overline{a}|=3$, $|\overline{b}|=5$, $|\overline{c}|=8$, обчислити: 1) $(3\overline{a}-2\overline{b})\cdot(\overline{b}+3\overline{c})$; 2) $(\overline{a}+\overline{b}+\overline{c})^2$; 3) $(\overline{a}+2\overline{b}-3\overline{c})^2$.

№ 24 Вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ утворюють кут $\varphi=\frac{\pi}{6}$. Знаючи, що $|\overline{a}|=\sqrt{3}$, $|\overline{b}|=1$, обчислити кут між векторами $\overline{p}=\overline{a}+\overline{b}$ и $\overline{q}=\overline{a}-\overline{b}$.

№ 25 Дано вектори $\overline{a}(4;-2;-4)$, $\overline{b}(6;-3;2)$. Обчислити: 1) $\overline{a}\cdot\overline{b}$; 2) $\sqrt{\overline{a}^2}$; 3) $\sqrt{\overline{b}^2}$; 4) $(2\overline{a}-3\overline{b})(\overline{a}+2\overline{b})$; 5) $(\overline{a}+\overline{b})^2$; 6) $(\overline{a}-\overline{b})^2$.

№ 26 Дано точки $A(-1;3;-7)$, $B(2\ -1;5)$ і $C(0;1;-5)$. Обчислити: 1) $(2\overline{AB}-\overline{CB})\cdot(2\overline{BC}+\overline{BA})$; 2) $\sqrt{\overline{AB}^2}$; 3) $\sqrt{\overline{AC}^2}$.

№ 27 Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\overline{a}=\overline{m}+\overline{n}$ і $\overline{b}=3\overline{m}+2\overline{n}$, якщо $|\overline{m}|=|\overline{n}|=1$, $\angle(\overline{m},\overline{n})=\frac{\pi}{6}$.

№ 28 Вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ утворюють кут $\varphi=\frac{2\pi}{3}$. Знаючи, що $|\overline{a}|=1$, $|\overline{b}|=2$, обчислити: 1) $(\overline{a}\times\overline{b})^2$; 2) $((2\overline{a}+\overline{b})\times(\overline{a}+2\overline{b}))^2$; 3) $((\overline{a}+3\overline{b})\times(3\overline{a}-\overline{b}))^2$.

№ 29 Вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ взаємно перпендикулярні. Знаючи, що $|\overline{a}|=3$, $|\overline{b}|=4$, обчислити: 1) $|(\overline{a}+\overline{b})\times(\overline{a}-\overline{b})|$; 2) $|(3\overline{a}-\overline{b})\times(\overline{a}-2\overline{b})|$.

№ 30 Дано точки $A(2;-1;2)$, $B(1\ 2;-1)$ і $C(3;2;1)$. Знайти координати векторних добутків: 1) $\overline{AB}\times\overline{BC}$; 2) $(\overline{BC}-2\overline{CA})\times\overline{CB}$.

№ 31 З'ясувати, праву чи ліву трійку утворюють вектори?

1) $\overline{a}(2,1,2)$, $\overline{b}(3,-2,1)$ і $\overline{c}(3,-1,-2)$; 2) $\overline{a}(2,-2,-3)$, $\overline{b}(2,0,3)$ і $\overline{c}(1,1,1)$.

№ 32 Знайти об'єм тетраедра за вершинами $A(-5;-4;8)$, $B(2;3;1)$, $C(4;1;-2)$, $D(6;3;7)$.

№ 33 Знайти довжину висоти тетраедра з вершинами $A(1;0;6)$, $B(4;5;-2)$, $C(7;3;4)$, $D(-1;2;1)$, опущеної з вершини D.

№ 34 Об'єм тетраедра $V=5$, три його вершини знаходяться в точках $A(2;1;-1)$, $B(3;0;1)$, $C(2;-1;3)$. Знайти координати четвертої вершини, якщо відомо, що вона лежить на осі Oy.

№ 35 Обчислити $(\overline{a}\times\overline{b})\times\overline{c}$, якщо

1) $\overline{a}(1,2,-1)$, $\overline{b}(2,1,-2)$, $\overline{c}(3,1,-1)$; 2) $\overline{a}(3,2,1)$, $\overline{b}(0,1,-1)$, $\overline{c}(-1,1,1)$.

№ 36 Обчислити $(\overline{a}\times\overline{b})\times\overline{c}-\overline{a}\times(\overline{b}\times\overline{c})$, якщо $\overline{a}(1,-1,3)$, $\overline{b}(-2,2,1)$, $\overline{c}(3,-2,5)$.

№ 37 Сила $\overline{f}(2;-4;3)$ прикладена до точки $A(1;5;-2)$. Знайти момент цієї сили відносно точки $B(5;-3;4)$.

№ 38 Знайти момент сили відносно точки $A(3;-2;1)$, якщо ця сила прикладена до точки $B(2;-1;3)$, причому $|\overline{f}|=5$ і $\overline{f}\parallel\overline{a}$, де $\overline{a}(2,1,-2)$.

№ 39 Сила $\bar{f}(2;\,2;\,9)$ прикладена до точки $A(4;2;-3)$. Визначити величину та напрямні косинуси моменту цієї сили відносно точки $B(2;\,4;\,0)$.

№ 40 По нескінченному прямолінійному провіднику тече струм із силою $\bar{I}$. Знайти в будь-якій точці простору напруженість $\overline{H}$ магнітного поля, утвореного цим струмом, використовуючи при визначенні напрямку вектора напруженості $\overline{H}$ правило свердлика.

Використовуючи розв'язок задачі 40., розв'язати задачі 41, 42, 43:

№ 41 Обчислити в будь-якій точці простору напруженість $\overline{H}$ магнітного поля, утвореного струмом, що тече по прямолінійному провіднику, якщо напрямок провідника збігається з напрямком 1) осі Ox; 2) осі Oy; 3) осі Oz.

№ 42 Обчислити в точці $M(-3;4;\,2)$ напруженість $\overline{H}$ магнітного поля, утвореного струмом з силою $\bar{I}=-3\bar{k}$, який тече по прямолінійному провіднику. Знайти орт вектора $\overline{H}$.

№ 43 Обчислити в точці $M(2;5;\,0)$ напруженість $\overline{H}$ магнітного поля, утвореного струмом з силою $\bar{I}=-2\bar{i}$, який тече по прямолінійному провіднику, та знайти напрямні косинуси вектора $\overline{H}$.

№ 44 Вантаж вагою $\overline{P}$, підвішений на нитці до нерухомої точки, затримується горизонтальною силою $\overline{Q}$ в положенні, при якому нитка утворює з вертикаллю кут 45°. Знайти величину горизонтальної сили $\left|\overline{Q}\right|$ і натягу $\left|\overline{T}\right|$ нитки.