ПРЯМА НА ПЛОЩИНІ

Приклад 1 На площині заданий ΔABC з вершинами $A(-1,0)$, $B(1,-4)$, $C(-8,-2)$. Потрібно знайти: 1) довжину сторони *BC*; 2) скласти загальне рівняння медіани, висоти та бісектриси кута *A*; 3) знайти відстань вершини *B* від медіани; 4) знайти кут між медіаною і висотою (у градусах).

Розв'язання.

1) Знайдемо координати вектора $\overline{BC}(-9,2)$ та його довжину: $BC=\sqrt{(-9)^2+2^2}=\sqrt{81+4}=\sqrt{85}$.

2) Медіана кута *A* ділить сторону *BC* навпіл, тому координати Точки *M* – середини *BC* будуть: $M\left(\frac{-1-8}{2},\frac{-4-2}{2}\right)$, $M\left(-\frac{9}{2},-3\right)$. Тепер складемо рівняння медіани як рівняння прямої за двома точками:

$$AM\text{:}\ \frac{x+1}{-\frac{9}{2}+1}=\frac{y-0}{-3-0},$$

$$\frac{x+1}{-\frac{7}{2}}=\frac{y}{-3},$$

$$-3(x+1)=-\frac{7}{2}y,$$

$$-3x-3+\frac{7}{2}y=0,$$

$6x-7y+6=0$ – загальне рівняння медіани кута *A*.

Висота кута *A* – це перпендикуляр до сторони *BC*, тому її нормальний вектор колінеарний до напрямного вектора прямої *BC*, тобто $\overline{n}_h(-9,2)$. Складемо рівняння висоти кута *A* за точкою та нормальним вектором:

$$-9(x+1)+2(y-0)=0,$$

$$-9x-9+2y=0,$$

$9x-2y+9=0$ – загальне рівняння висоти кута *A*.

Бісектриса кута *A* ділить сторону *BC* у відношенні, пропорційному відношенню прилеглих сторін, тобто $\frac{BN}{NC}=\frac{AB}{AC}$, N – основа бісектриси. Будемо мати: $\frac{BN}{NC}=\frac{\sqrt{2^2+(-4)^2}}{\sqrt{(-7)^2+(-2)^2}}$, $\frac{BN}{NC}=\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{53}}$. Тепер знайдемо координати Точки N, використовуючи формули ділення відрізка в даному відношенні:

$$x_N=\frac{-1+\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{53}}\cdot(-10)}{1+\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{53}}}=\frac{-\sqrt{53}-20\sqrt{5}}{\sqrt{53}+2\sqrt{5}},$$

$$y_N=\frac{-6+\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{53}}\cdot(-4)}{1+\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{53}}}=\frac{-6\sqrt{53}-8\sqrt{5}}{\sqrt{53}+2\sqrt{5}}.$$

Тепер складемо рівняння бісектриси кута A за двома точками $A(-1,0)$ та $N\left(\frac{-\sqrt{53}-20\sqrt{5}}{\sqrt{53}+2\sqrt{5}},\frac{-6\sqrt{53}-8\sqrt{5}}{\sqrt{53}+2\sqrt{5}}\right)$:

$$AN:\ \frac{x+1}{\frac{-\sqrt{53}-20\sqrt{5}}{\sqrt{53}+2\sqrt{5}}+1}=\frac{y-0}{\frac{-6\sqrt{53}-8\sqrt{5}}{\sqrt{53}+2\sqrt{5}}-0},$$

$$\frac{x+1}{\frac{-18\sqrt{5}}{\sqrt{53}+2\sqrt{5}}}=\frac{y}{\frac{-6\sqrt{53}-8\sqrt{5}}{\sqrt{53}+2\sqrt{5}}},$$

$$\left(-6\sqrt{53}-8\sqrt{5}\right)(x+1)=\left(-18\sqrt{5}\right)y,$$

$$\left(-6\sqrt{53}-8\sqrt{5}\right)x+18\sqrt{5}y-6\sqrt{53}-8\sqrt{5}=0$$

– загальне рівняння бісектриси кута A.

3) Відстань вершини B від медіани знайдемо за формулою відстані від точки до прямої. Будемо мати:

$$d=\frac{|6\cdot 1-7\cdot(-4)+6|}{\sqrt{6^2+(-7)^2}}=\frac{40}{\sqrt{36+49}}=\frac{40}{\sqrt{85}}=\frac{8\sqrt{85}}{17}.$$

4) Знайдемо кут між медіаною й висотою за формулою:

$$\cos\left(\widehat{AM,h}\right)=\cos\left(\widehat{\bar{n}_{AM},\bar{n}_h}\right)=\frac{\bar{n}_{AM}\cdot\bar{n}_h}{|\bar{n}_{AM}|\cdot|\bar{n}_h|}.$$

Підставимо відповідні значення, отримаємо:

$$\cos\left(\widehat{AM,h}\right)=\frac{6\cdot 9+(-7)\cdot(-2)}{\sqrt{6^2+(-7)^2}\cdot\sqrt{9^2+(-2)^2}}=\frac{68}{\sqrt{85}\cdot\sqrt{85}}=\frac{68}{85}\approx 0{,}8,\quad \angle(AM,h)\approx 37^\circ.$$

Задачі для самостійного розв'язування

№ 1 Визначити, які з точок $A_1(1;-2)$, $A_2(1;1)$ та $A_3(3;-4)$ лежать на прямій $x+2y-3=0$.

№ 2 Знайти відрізки, що відтинає пряма $x-3y+6=0$ на осях координат.

№ 3 Сторони AB, BC і AC трикутника ABC задані відповідно рівняннями $2x-3y-1=0$, $3x-4y-1=0$ та $x-y-1=0$. Визначити координати його вершин.

№ 4 Сила, прикладена в початку координат. Складові її на координатних осях відповідно дорівнюють 5 і –2. Знайти рівняння прямої, вздовж якої напрямлена сила.

№ 5 Через точку $P(-1;\ 3)$ провести пряму, перпендикулярну до прямої $4x-2y+3=0$.

№ 6 Через точку $P(1;\ 2)$ провести пряму, перпендикулярну до прямої $5x+2y-11=0$.

№ 7 Знайти проекцію точки $P(1;\ -2)$ на пряму $3x-y-9=0$.

№ 8 Знайти точку, симетричну точці $P(8;\ -9)$ відносно прямої, що проходить через точки $A(3;\ -4)$ і $B(-1;\ -2)$.

№ 9 Промінь світла, що має напрямок прямої $x+5y=0$, падає на дзеркало, що визначається рівнянням $2x - y + 5 = 0$. Написати рівняння відбитого променя.

№ 10 Через точку перетину прямих $x + 2y - 1 = 0$ і $2x + y - 4 = 0$ провести пряму, яка:

1) проходить через точку $M(-1; 3)$;
2) паралельна осі Oy;
3) перпендикулярна до прямої $x - 2y + 11 = 0$.

№ 11 Обчислити відстань від точки P до прямої:

1) $P(-2; 1)$, $4x - 3y - 2 = 0$;
2) $P(3; -2)$, $12x + 5y - 3 = 0$;
3) $P(0; 1)$, $x - 2y + 1 = 0$.

№ 12 Знайти точку Q, симетричну точці $P(-5; 13)$ відносно прямої $2x - 3y - 3 = 0$.