ПРЯМА У ПРОСТОРІ

Приклад 1 Трикутна піраміда задана вершинами $A_1(-1,0,1)$, $A_2(1,-1,1)$, $A_3(-1,-2,0)$, $A_4(5,2,10)$. Потрібно знайти: 1) рівняння висоти піраміди, яка проходити через вершину A_4; 2) кут між ребром A_1A_4 і гранню $A_1A_2A_3$ в градусах.

Розв'язання.

1) Висота піраміди, яка проходить через вершину A_4, це перпендикуляр до грані $A_1A_2A_3$, тому її напрямний вектор колінеарний до нормального вектора грані $A_1A_2A_3$, тобто $\bar{a}_{A_4D}(1,0,0)$. Складемо рівняння висоти A_4D за точкою та напрямним вектором

$A_4D: \dfrac{x-5}{1}=\dfrac{y-2}{0}=\dfrac{z-10}{0}$ – канонічне рівняння висоти піраміди, яка проходить через вершину A_4.

2) Знайдемо кут між ребром A_1A_4 і гранню $A_1A_2A_3$ за формулою:

$$\sin\left(A_1A_4,\hat{\ } A_1A_2A_3\right)=\sin\left(\bar{a}_{A_1A_4},\hat{\ } \bar{n}_{A_1A_2A_3}\right)=\frac{\left|\bar{a}_{A_1A_4}\cdot\bar{n}_{A_1A_2A_3}\right|}{\left|\bar{a}_{A_1A_4}\right|\cdot\left|\bar{n}_{A_1A_2A_3}\right|}.$$

Для цього спочатку знайдемо координати напрямного вектора ребра A_1A_4: $\bar{a}_{A_1A_4}(6,2,9)$.

Підставимо відповідні значення, отримаємо:

$$\sin\left(A_1A_4,\hat{A}_1A_2A_3\right)=\frac{|6\cdot1+2\cdot0+9\cdot0|}{\sqrt{6^2+2^2+9^2}\cdot\sqrt{1^2+0^2+0^2}}=\frac{6}{\sqrt{121\cdot1}}=\frac{6}{11}\approx0{,}545,$$

$$\angle(A_1A_4,A_1A_2A_3)\approx33^\circ.$$

Приклад 2 Точка $M(x;y;z)$ рухається прямолінійно і рівномірно з початкової точки $M_0(11;-21;20)$ в напрямку вектора $\bar{s}(-1;2;-2)$ зі швидкістю $v=12$. Визначити, за який час вона пройде відрізок своєї траєкторії, який міститься між площинами $2x+3y+5z-41=0$, $2x+3y+5z+31=0$.

Розв'язання. Рівняння траєкторії руху має вигляд

$$\frac{x-11}{-1}=\frac{y+21}{2}=\frac{z-20}{-2} \text{ або } \begin{cases} x=-t+11,\\ y=2t-21,\\ z=-2t+20.\end{cases}$$

Знайдемо координати точок перетину траєкторії з площинами. Для цього розв'яжемо системи:

$$\text{а) }\begin{cases} 2x+3y+5z-41=0,\\ x=-t+11,\\ y=2t-21,\\ z=-2t+20.\end{cases}$$

Підставляючи вирази для x, y, z у перше рівняння, маємо:

$$-2t+22+6t-63-10t+100-41=0 \text{ або } 6t=18,\ t=3.$$

Отже, $x_1=8$, $y_1=-15$, $z_1=14$.

$$\text{б)}\ \begin{cases} 2x + 3y + 5z + 31 = 0, \\ x = -t + 11, \\ y = 2t - 21, \\ z = -2t + 20. \end{cases}$$

Аналогічно знаходимо $t = 15$, $x_2 = 4$, $y_2 = 9$, $z_2 = -10$. Отже, точками перетину паралельних площин траєкторією будуть $A(8; -15; 14)$, $B(-4; 9; -10)$. Довжина відрізка

$$AB = \sqrt{(8+4)^2 + (-15-9)^2 + (14+10)^2} = 36.$$

Оскільки час $t = \dfrac{|AB|}{v}$, то $t = \dfrac{36}{12} = 3$.

Приклад 3 З початку координат опустити перпендикуляр на пряму

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-3}{1}.$$

Розв'язання. Оскільки напрямний вектор прямої $\bar{a}(2; 3; 1)$ буде нормальним до площини, що проходить через початок координат, то рівняння такої площини має вигляд

$$2x + 3y + z = 0.$$

Розв'язавши систему

$$\begin{cases} \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z-3}{1}, \\ 2x + 3y + z = 0 \end{cases} \text{або} \begin{cases} x - 2 = 2t, \\ y - 1 = 3t \\ z - 3 = t, \\ 2x + 3y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = -\dfrac{5}{7}, \\ x = \dfrac{4}{7}, \\ y = \dfrac{6}{7}, \\ z = \dfrac{16}{7}. \end{cases}$$

Складемо рівняння прямої, що проходить через точки $O(0, 0, 0)$ і $M\left(\dfrac{4}{7}; \dfrac{6}{7}; \dfrac{16}{7}\right)$:

$$\frac{x}{4/7} = \frac{y}{6/7} = \frac{z}{16/7} \ \text{або}\ \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{8}.$$

Задачі для самостійного розв'язування

№ 1 Знайти проекцію точки $P(2; -1; 3)$ на пряму $\begin{cases} x = 3t, \\ y = 5t - 7, \\ z = 2t. \end{cases}$

№ 2 Знайти точку Q, симетричну точці $P(4; 1; 6)$ відносно прямої $\begin{cases} x - y - 4z + 12 = 0, \\ 2x + y - 2z + 3 = 0. \end{cases}$

№ 3 Знайти точку S, симетричну точці $P(1; -2; -6)$ відносно прямої $\begin{cases} x - y + 2z - 1 = 0, \\ x - z + 2 = 0. \end{cases}$

№ 4 Дано рівняння руху точки $M(x; y; z)$

$$\begin{cases} x = 3 - 4t, \\ y = 5 + 3t, \\ z = -2 + 12t. \end{cases}$$

Визначити її швидкість v.

№ 5 Дано рівняння руху точки $M(x;\, y;\, z)$

$$\begin{cases} x = 5 - 2t, \\ y = -3 + 2t, \\ z = 5 - t. \end{cases}$$

Визначити відстань d, яку пройде ця точка за проміжок часу від $t_1 = 0$ до $t_2 = 7$.

№ 6 Скласти рівняння руху точки $M(x;\, y;\, z)$, яка, маючи початкове положення $M_0(3;\, -1;\, -5)$, рухається прямолінійно й рівномірно в напрямку вектора $\bar{s}(-2;\, 6;\, 3)$ зі швидкістю $v = 21$.

№ 7 Скласти рівняння руху точки $M(x;\, y;\, z)$, яка, рухаючись прямолінійно пройшла відстань від точки $M_1(-7;\, 12;\, 5)$ до точки $M_2(9;\, -4;\, -3)$ за проміжок часу від $t_1 = 0$ до $t_2 = 4$.

№ 8 Точка $M(x;\, y;\, z)$ рухається прямолінійно й рівномірно з початкового положення $M_0(20;\, -18;\, -32)$ в напрямку, протилежному вектору $\bar{s}(-2;\, 6;\, 3)$, зі швидкістю $v = 26$. Скласти рівняння руху точки M і визначити точку, з якою вона збігається в момент часу $t = 3$.

№ 9 Точки $M(x;\, y;\, z)$ й $N(x;\, y;\, z)$ рухаються прямолінійно й рівномірно: перша з початкового положення $M_0(-5;\, 4;\, -5)$ зі швидкістю $v_M = 14$ в напрямку вектора $\bar{s}(3;\, -6;\, 2)$, друга з початкового положення $N_0(-5;\, 16;\, -6)$ зі швидкістю $v_N = 13$ в напрямку, протилежному вектору $\bar{r}(-4;\, 12;\, -3)$. Скласти рівняння руху кожної з точок і, переконавшись, що їхні траєкторії перетинаються, знайти:

1) точку P перетину їх траєкторій;
2) час, витрачений на рух точки M від M_0 до P;
3) час, витрачений на рух точки N від N_0 до P;
4) довжини відрізків M_0P і N_0P.

№ 10 Дано точки $A(-3;\, 6)$, $B(4;\, -1)$, $C(-3;\, -5)$, $D(-1;\, 2)$. Складіть рівняння:

1) прямої, що проходить через точки B і C;
2) прямої, що проходить через точку A й утворює кут 135° з віссю x;
3) прямої, що проходить через точку D перпендикулярно до прямої BC;
4) прямої, що проходить через точку A паралельно прямій BC;
5) прямої, яка симетрична прямій BC відносно початку координат;
6) прямої, яка симетрична прямій BC відносно осі x;
7) прямої, яка проходить через точку B і точку, що поділяє відрізок AD у відношенні 1:3, рухаючись від точки A;
8) прямої, яка складається з точок, рівновіддалених від точок A й D;
9) прямої, відрізок якої, що міститься між осями координат, ділиться точкою D навпіл;
10) прямої, яка проходить через точку D і відтинає на осі ординат відрізок довжиною 3.

№ 11 Дано прямі $l_1:\ 2x - 3y + 1 = 0$, $l_2:\ 3x - y - 4 = 0$ і $l_3:\ x + y + 1 = 0$. Знайдіть:

1) відстань від точки $A(2;\, -1)$ до прямої l_1;
2) кут між прямими l_1 і l_2;
3) значення параметра m, при яких пряма $2x + my + 4 = 0$ перпендикулярна до

прямої l_2;

4) значення параметра p, при яких пряма $px - y - p = 0$ збігається з прямою l_2;

5) знайдіть точку, симетричну точці $A(2; -1)$ відносно прямої l_1.

№ 12 Дано точки $A(1; -1; 1)$, $B(1; 3; 1)$, $C(4; 3; 1)$, $D(4; -1; 1)$, $F(2; 0; 1)$. Складіть рівняння:

1) площини, що проходить через точки A, B, C;
2) прямої, яка проходить через точку A й паралельна прямій BC;
3) площини, яка проходить через точку A й перпендикулярна до прямої DF;
4) прямої, яка проходить через точки C і D;
5) площини, яка проходить через точку A паралельно прямим BC і DF;
6) прямої, яка проходить через точку D перпендикулярно до площини (ABC);
7) прямої, яка проходить через точку A й паралельна площинам $2x - y + z - 1 = 0$ і $x + y + 2z + 1 = 0$;
8) площини, яка проходить через точки B і C паралельно прямій DF;
9) прямої, яка симетрична прямій CD відносно точки A.

№ 13 Дано площини $\alpha: 2x - y + z + 3 = 0$, $\beta: 3x - 2y - z - 1 = 0$, $\gamma: -4x + 2y - 2z + 1 = 0$ і прямі $l_1: \frac{x-1}{4} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{-1}$, $l_2: \frac{x+1}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{-1}$.

1) Знайдіть відстань від точки $A(2; -1; 1)$ до площини α;
2) встановіть взаємне розташування площин α і β, β і γ, α і γ, прямої l_1 і площини β, прямих l_1 і l_2;
3) знайдіть відстань між площинами α і γ;
4) при яких значеннях параметра m площина α паралельна площині $2x - my + z = 0$;
5) знайдіть кути між площинами α і β, прямими l_1 і l_2;
6) при яких значеннях параметра p площини γ і $px - 2y + pz - 1 = 0$ перпендикулярні.
7) при яких значеннях параметра q пряма $\frac{x-q}{2} = \frac{y+1}{q} = \frac{z-1}{2}$ належить площині β;
8) при яких значеннях параметра k прямі l_1 і $\frac{x-k}{2} = \frac{y-2}{k} = \frac{z-1}{2}$ є мимобіжними?
9) знайдіть відстань між прямими l_1 і l_2.
10) знайдіть точку, симетричну точці $(1; -1; 0)$ відносно площини α.